



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**BİRLEŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN
KATEGORİKSEL ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMED ABDALRAHMAN MOHAMMED

DANIŞMAN

DOÇ DR. TUFAN SAİT KUZPINARI

ORTAK DANIŞMAN: PROF.DR. DURMUŞ BOZKURT

AKSARAY, 2016



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**BİRLEŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN
KATEGORİKSEL ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMED ABDALRAHMAN MOHAMMED

DANIŞMAN

DOÇ DR. TUFAN SAİT KUZPINARI

ORTAK DANIŞMAN: PROF.DR. DURMUŞ BOZKURT

AKSARAY, 2016

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142309807 numaralı Yüksek Lisans, "Ahmed MOHAMMED", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "BİRLEŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN KATEGORİKSEL ÖZELLİKLERİ" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI	
	Aksaray Üniversitesi	
Jüri Üyeleri :	Prof. Dr. Murat ALP	
	Niğde Üniversitesi	
Jüri Üyeleri :	Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN	
	Aksaray Üniversitesi	

Teslim Tarihi: 31 Mayıs 2016

Savunma Tarihi: 22 Haziran 2016

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışımında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

AHMED ABDALRAHMAN MOHAMMED

İmza

ÖNSÖZ

Çaprazlanmış modül konseptinin ilk çıkışı Whitehead'in 1940 ların sonundaki bir çalışmasından gelmektedir. [4]. Buradaki çaprazlanmış modüller gruplar üzerinde çaprazlanmış modülleri olarak, yol bağlantılı CW-uzayların homotopi grubunun boyutu 2 den büyük olanlarının aşikar olduğu cebirsel modellerdi. Daha sonra, bu yapının tanınmasıyla çaprazlanmış modüller homotopi teoride önemli bir rol oynamaya başladı. Bunu göstermek için düşük mertebeden homotopi tipleri ve Van Kampen teoreminin genelleştirilmesinin derivasyonları gibi çeşitli sınıflandırma problemleri ele alınmıştır. [5, 6].

Birleşmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri, grupların çaprazlanmış modülleri gibi başka kategorilerdeki benzerleri olarak bilinmekteydi. Bu konu bir çok yazar tarafından incelenmiştir. Dedecker ve Lue [7,8]'nin çalışmalarında birleşmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri düşük mertebeden abelyan olmayan kohomolojilerin katsayılarının ne olması gerektiği konusunda merkezi bir rol oynamıştır.

Baues ve Minian [9]'da birleşmeli cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin Hochschild kohomolojilerin gösteriminde kullanılabileceğini göstermişlerdir. Yeni yapılan çalışmalardan [10]'da, birleşmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin Hochschild ve (eşüçlü) devirli homolojileri inşa edilmiş ve incelenmiş ve Türkçe bir kaynak olarak hazırlanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bana Türkiye’de eğitim alma fırsatı veren Aksaray Üniversitesi yetkililerine ve eğitim süresince yardımlarını esirgemeyen Fen Bilimleri Enstitüsü idareci ve çalışanlarına en derin şükranlarımı sunarım.

Bu tezin çalışma ve hazırlık aşamalarında sürekli yardım ve desteğini gördüğüm, danışmanım Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI'na ve Prof. Dr. Durmuş BOZKURT’a teşekkürlerimi sunarım.

AHMED ABDALRAHMAN MOHAMMED

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Bazı Temel Tanımlar.....	2
1.2 İzomorfizm Teoremleri	3
1.3 Modül, Cebir, Kategori ve Funktorlar.....	4
2. CEBİRLER	9
2.1 Cebir ve Simplisel Cebirler	9
2.2 Çaprazlanmış Modül ve Ön Çaprazlanmış Modül yapıları.....	11
3. BİRLEŞMELİ CEBİRLER	15
3.1 Birleşmeli Cebirler üzerinde Ön-çaprazlanmış modüller	15
3.2 Birleşmeli Cebirler üzerinde Çaprazlanmış Modüller	17
4. SONUÇ.....	22
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	25

ÖZET
BİRLEŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN
KATEGORİKSEL ÖZELLİKLERİ

Bu tez birleşmeli cebirlerin kategorisel yapısını ve ön çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış modül gibi yüksek mertebeden versiyonlarını inceleyen bir çalışmadır. Birinci bölüm sonraki bölümlere hazırlık olarak organize edilmiştir. Kısaca, çarpım, eşçarpım, geri çekme, ileri itme gibi bazı özel kavramların tanımları verilmektedir. İkinci bölümde özel bir durum olan birleşmeli cebirler ele alınmıştır. Bu kategorisel kavramların birleşmeli cebirler durumu için oluşturulması detaylı olarak incelenmiştir.

Son bölüm birleşmeli cebirler üzerindeki çaprazlanmış modül yapısı incelemeyi içermektedir. Bu kavram ilk olarak Lue [1] tarafından kullanılmış ve [2] Porter tarafından daha geniş bir uygulaması yapılmıştır. Güncel çalışmalarda Birleşmeli cebirler üzerindeki (ön)çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki etkilerin gösterilmesine ulaşılmıştır. Bakınız [3]. Bu bölümde belirli şartlar altında bazı kategorisel kavramları oluşturularak kategori içindeki split genişleme sınıflandırıcılarının elde edilişi anlatılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Birleşmeli cebirler, Çaprazlanmış Modül., Kategori Teori, Modül Teori.

ABSTRACT

CATEGORICAL ASPECTS OF CROSSED MODULES ON ASSOCIATIVE ALGEBRAS

This thesis devoted for detailed survey about categorical structure of associative algebras and their higher dimensional versions such as precrossed modules and crossed modules.

The first chapter organized as preparation for the next chapters. Namely, we give the definitions of special notions products, co-products, pullbacks, pushouts, etc. In the second chapter we consider a particular case; associative algebras. The construction of these categorical notions in the case of associative algebras were examined in details.

The last chapter consist of a survey about the crossed module theory in associative algebras. The notion was first introduced by Lue,[1] 1968 and extensively worked in [2]. In the recent works, the representability of actions in the category of (pre)crossed modules on associative algebras was reached , see[3]. In this chapter we construct the categorical notions in the case of crossed modules under certain conditions and give the construction of split extension classifiers in the category.

Key words: Crossed modules, Associative algebras,Category Theory, Module Theory.

SİMGELER DİZİNİ

$\wedge$	: Ve
$\vee$	: Veya
$\prod$	: Çoklu Kartezyen Çarpımı
ε	: Epsilon
∞	: Sonsuz
$\cap$	: Çoklu Kesişim
$\cup$	: Çoklu Birleşim
$\forall$	: Her
$\in$	: Elemanıdır
$\emptyset$	: Phi
Φ	: Upsilon
α	: Alfa
β	: Beta
Σ	: Toplam
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
σ	: Sigma
ψ	: Psi
$\exists$	: Vardır, en az bir

1. GİRİŞ

1.1 Bazı Temel Tanımlar

Tezde kullanacağımız bazı kavramlara ait tanımlar ve cebirsel yapıların açıklamaları ve teoremler verilecektir. Buradaki tanım ve teoremler ayrıntılı olarak [11-21] de bulunabilir.

Tanım 1.1.1. $(G,*)$ ikilisi “.” ikili işlemi verilen şartlar altında grup adı verilen bir cebirsel yapıdır.

G₁. “.” işlemi birleme özelliğine sahiptir yani $a, b \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$

G₂. G de birim adı verilen bir eleman vardır yani $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in G$ vardır.

G₃. G deki her elemanın tersi vardır.

Tanım 1.1.2. Her eleman için işlemin değişme özelliği var ise G grubuna Abel grup denir.

Örnek 1.1.3. $G = \{-1, 1, -i, i\}$ kümesi verilsin, “.” işlemi karmaşık sayılardaki standart çarpma işlemi olsun. Bu durumda $(G, \cdot)$ bir abelyan gruptur. Herhangi iki elemanın çarpımı yine G nin bir elemanıdır dolayısıyla işlem kapalıdır. Çarpma işlemi birleşmeli ve değişmeli olduğu için karmaşık sayılarda da u özellik sağlanır. Birim elemanı 1 dir ve tüm elemanların tersi mevcuttur. i ve $-i$ birbirinin tersidir.

Tanım 1.1.4. G kümesi bir grup yapısı olsun ve G nin bir H altkümesi verilsin. G grubunda verilen operatöre göre H kümesi de bir grup oluyorsa H kümesine G grubunun bir alt grubu denir ve $H < G$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.1.5. $G = \{-1, 1, -i, i\}$ grubu verilsin $H = \{-1, 1\}$ alt kümesi çarpma işlemi ile birlikte G nin bir alt grubudur.

Örnek 1.1.6. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi bilinen toplama işlemi ile birlikte bir gruptur ve $\mathbb{Q}$ nun bir altgrubudur. Benzer şekilde $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$ nin $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ nin altgrubudur.

Tanım 1.1.7. $(G, \cdot)$ ve $(G', *)$ iki grup olsun $\delta: G \rightarrow G'$ dönüşümü her $g_1, g_2 \in G$ için

$$\delta(g_1 \cdot g_2) = \delta(g_1) * \delta(g_2) \quad (1.1)$$

şartını sağlıyorsa δ dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

Tanım 1.1.8. Grup izomorfizmi, G_1 ve G_2 işlemleri farklı iki grup ve $k: G_1 \rightarrow G_2$ dönüşümü verilen şartları sağlayan bir cebirsel yapıdır.

1. k dönüşümü hem 1-1 hem örtendir,
2. $a, b \in G_1$ için $k(a \cdot b) = k(a) * k(b)$.

Böylece G_1 ve G_2 grupları izomorf grup olarak adlandırılır ve $G_1 \cong G_2$ şeklinde gösterilir. Bunun yanı sıra $\theta: G_1 \rightarrow G_2$ fonksiyonu 1 – 1 ise monomorfizm, örten ise epimorfizm olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.9. $H \neq \emptyset$ kümesi ve iki farklı işlem olan bir küme olsun. H grubu değişme özelliğini ve ikinci işlemi birleşme özelliğini sağlıyor ve birinci işlem üzerine sağdan ve soldan distürübitiflik özelliğini de sağlıyorsa

$$r \times (s \oplus t) = (r \times s) \oplus (r \times t) \quad (r \oplus s) \times t = (r \times t) \oplus (s \times t) \quad (1.2)$$

$(H, \oplus, \times)$ yapısı bir halka olarak adlandırılır.

Eğer ikinci işlem işlemi komutatiflik özelliğini sağlıyor ise halkaya değişmelidir denir. Eğer H halkası ikinci işleme göre $e_H \in H$ olacak şekilde özdeş bir elemana sahipse halka birimlidir denir. H halkasının e_H özdeş elemanı varsa, bir $h \in H$ tersiniri olan eleman $hh' = e_H = h'h$ olacak şekilde $h' \in H$ varsa h elemanına tersiner denir.

Tanım 1.1.10. H birim eleman ve değişme özelliklerini sağlayan bir halka ve $1_H \neq 0_H$ iken halkanın sıfırı hariç diğer elemanları ikinci işleme göre tersiner olan halkaya yeni bir cebirsel yapı olan cisim adı verilir.

Tanım 1.1.11. $(H, +, \cdot)$ ve $(H', \oplus, \otimes)$ ve iki halka olsun. $f: H \rightarrow H'$ fonksiyonu halkadaki aşağıda verildiği gibi tanımlanan birinci ve ikinci işlemleri koruyorsa bu fonksiyona bir denk yapı (homomorfizm) denir.

$$f(h + h') = f(h) \oplus f(h') \quad (1.3)$$

$$f(h \cdot h') = f(h) \otimes f(h'). \quad (1.4)$$

Eğer H ve H' özdeş elemana sahip ise ve f üzerine fonksiyon ise $f(1_H) = 1_{H'}$ dir.

Tanım 1.1.12. H bir halka yapısı ve R boş kümeden farklı olan H kümesinin bir altkütmesi ve H deki birinci ve ikinci işlemler R üzerinde de kapalılık özelliğini sağlasın. Eğer R verilen işlemler altında halka özelliklerini sağlıyorsa R ye bir alt halka adı verilir. Diğer bir deyişle R, H nin alt halkası olması için gerek, yeter şart aşağıdaki şartları sağlamasıdır.

i) $R \neq \emptyset$

ii) $x, y \in R$ için $x - y \in R$

iii) $x, y \in R$ için $x \cdot y \in R$

Tanım 1.1.13. H nin bir I alt halkası olsun sırasıyla sol ve sağ ideal olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

$$h \in H \quad \text{ve} \quad x \in I \Rightarrow hx \in I;$$

$$h \in H \quad \text{ve} \quad x \in I \Rightarrow xh \in I;$$

Aynı anda hem sol hem sağ ideal olan cebirsel yapıya ideal denir.

Tanım 1.1.14. $a \neq 0_H$ olacak şekilde H nin bir elemanı olsun $a * b = 0_H$ şartını sağlayan halkanın sıfırından farklı bir $b \in H$ elemanı bulunuyorsa bu elemana sıfır bölen adı verilir.

Tanım 1.1.15. H özdeş eleman içeren ve komutatif bir halka olsun. Eğer bu halka hiçbir sıfır bölen içermiyorsa bu cebirsel yapıya bir tamlık bölgesi adı verilir.

Tanım 1.1.16. H^* halkası ikinci işlem altında bir grup yapısı teşkilediyorsa bu cebirsel yapıya bölüm/çarpım halkası denir. Bu H halkasının özdeş elemanı ve tersininin var olduğu ve hiçbir sıfır bölen elemanı olmadığı anlamına gelir. Eğer sıfır bölen içeriyorsa bu durumda $a, b \in H^*$ için $ab = 0 \notin H^*$ olabilir.

Tanım 1.1.17. Boş kümeden farklı bir küme alt kümesi olduğu kümedeki işlemlere göre bir cisim yapısı oluşturuyorsa bu alt kümeye bir alt cisim adı verilir.

1.2. İzomorfizm Teoremleri

Teorem 1.2.1. A ve B herhangi iki halka ve $\partial: A \rightarrow B$ dönüşümü halka homomorfizmi şartlarını sağlasın. Bu durumda

1. ∂ nin kerneli A halkasının bir idealidir,

2. ∂ görüntü kümesi B halkasının bir althalkasıdır,
3. $\phi: A/\text{çek } \partial \rightarrow \text{gör } \partial \subset B, a + \text{çek } \partial \mapsto \partial(a)$ iyi tanımlı bir eş yapı dönüşümüdür.

Teorem 1.2.2. R bir halkasının bir $S \subset R$ bir althalkası, ve bir I ideali verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $S + I$ şeklinde verilen küme R nin bir althalkasıdır,
2. althalka ve idealin kesişim kümesi S kümesinin bir idealidir, ve
3. $(S + I)/I$ yapısı ile $S/(S \cap I)$ yapısı birbirine eş yapılıdır.

Teorem 1.2.3. Bir R halkası ve bu halkanın iki ideali $J \subset I$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda I/J cebirsel yapısı, R/J bölüm halkasının bir ideali ve aşağıdaki eşyapı vardır

$$R/J / I/J \cong R/I . \quad (1.5)$$

1.3 Modül, Cebir, Kategori ve Funktorlar

Tanım 1.3.1. R bir özdeş elemanı olan bir halka, $\mathcal{M}$ bir toplamsal özelliğe sahip abelyan grubu ve $f : R \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, f(r, m) = r.m$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olarak verilsin. Eğer f dönüşümü, dört şartı sağlıyor ise, $\mathcal{M}$ cebirsel yapısı bir soldan R -modül veya kısaca bir modül olarak adlandırılır:

- 1) $r.(m + n) = r.m + r.n, \forall r \in R \text{ ve } m, n \in \mathcal{M},$
- 2) $(r + s).m = r.m + s.m, \forall r, s \in R \text{ ve } m \in \mathcal{M},$
- 3) $(rs).m = r.(sm), \forall r, s \in R \text{ ve } m \in \mathcal{M},$
- 4) $1.m = m, \forall m \in \mathcal{M}, 1 \in R$

Benzer şekilde eğer $f(m, r) = m.r$ şeklinde tanımlı $f : \mathcal{M} \times R \rightarrow \mathcal{M}$ fonksiyonu, dört koşulu sağlıyor ise,

- 1) $(m + n)r = mr + nr, \forall m, n \in \mathcal{M} \text{ ve } r \in R,$
- 2) $m(r + s) = mr + ms, \forall m \in \mathcal{M} \text{ ve } r, s \in R,$
- 3) $m(rs) = (mr)s, \forall m \in \mathcal{M} \text{ ve } r, s \in R,$
- 4) $m1 = m, \forall m \in \mathcal{M}, 1 \in R.$

$\mathcal{M}$ cebirsel yapısına sağdan R -modül denir. Bunun yanısıra, tüm $r \in R$, $m \in \mathcal{M}$, $s \in S$ sırasıyla $\mathcal{M}$ hem bir soldan R -modül, hem de sağdan S -modül ve $(rm)s = r(ms)$ ise, $\mathcal{M}$ bir $R - S$ -modül olarak adlandırılır ya da bimodül olarak adlandırılır.

Örnek 1.3.2.

1. $M = \mathbb{Q}$ bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.
2. $M = \mathbb{R}$ bir $\mathbb{Q}$ -modüldür.
3. $M = \mathbb{Z}_n$ bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 1.3.3 Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde nesne dediğimiz elemanların kümesi $Ob(\mathcal{C})$, dönüşüm veya morfizm dediğimiz yapıların kümesi $Mor(\mathcal{C})$, source ve target adı verilen dönüşümler,

$$\alpha, \beta: Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{C}) \quad (1.6)$$

nesne dönüşümü,

$$\varepsilon: Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{C}) \quad (1.7)$$

$$x \rightarrow \varepsilon(x) = I_x \quad (1.8)$$

ve

$$Mor(\mathcal{C})_f \times_g Mor(\mathcal{C}) = \{(a, b) \in Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) : f(b) = g(a)\} \quad (1.9)$$

şeklinde verilen “.” ile gösterilen işleme faktör işlemi denir. Bununla birlikte

$$i) \forall (a, b) \in Mor(K)_f \times_g Mor(K) \text{ için } f(b.a) = f(a) \text{ ve } g(b.a) = g(b) \quad (1.10)$$

$$ii) \forall a, b, c \in Mor(K) \text{ ile } f(c) = g(b) \text{ ve } f(b) = g(a) \text{ için } c.(b.a) = (c.b).a \quad (1.11)$$

$$iii) \forall x \in Ob(K) \text{ için } f(I_x) = x = g(I_x) \quad (1.12)$$

$$iv) \forall a \in Mor(K) \text{ için } a.I_{f(a)} = a \text{ ve } I_{g(a)}.a = a \text{ dır.} \quad (1.13)$$

şartları sağlanır.

Tanım 1.3.4. Objeleri kümeler olan kategoriye küçük kategori, diğer türlü geniş kategori denir.

Örnek 1.3.5. Aşağıda bazı kategori örnekleri verilmiştir.

<u>Gösterim</u>	<u>Obje</u>	<u>Morfizm</u>
Küm	Kümeler	Fonksiyonlar

Rel	Kümeler	Kümeler arasındaki ilişkiler
Mon	Monoidler	Monoid homomorfizmleri
Gr	Gruplar	Grup Homomorfizmleri
Ab	Abelyan Gruplar	Grup Homomorfizmleri
Hlk	Birimli halkalar	Halka Homomorfizmleri
Top	Topolojik uzaylar	Sürekli fonksiyonlar

Tanım 1.3.6. A kümesi halka ve A -modül yapısını sağlayan P, R kümeleri verilsin. $T = P \otimes R$ ifadesi P ve R nin tensörel çarpımı olarak adlandırılır; T cebirsel yapısı A – modül ve $g : P \times R \rightarrow T$ dönüşümü bilineer olduğundan (T, g) cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlar.

- a) Her $f : P \times R \rightarrow N$ bilineer dönüşümü ve N A – modülü için $f = f' \circ g$ olacak şekilde bir tek $f' = T \rightarrow N$ doğrusal morfizmdir.
- b) (T, g) ve (T', g') (a) cebirsel yapıları var ise $h \circ g = g'$ için yalnızca $h : T \rightarrow T'$ 1-1 örten dönüşümü vardır.

Tanım 1.3.7. C cebirsel yapısı soldan R -modül yapısını sağlasın. Bu durumda her $r \in R$ ve $x, y \in C$ için

$$r(c_1 c_2) = (rc_1)c_2 = c_1(rc_2) \quad (1.14)$$

ise C ye R cismi üzerinde bir cebir denir.

Tanım 1.3.8. C bir cebir olsun. Her $c_1, c_2, c_3 \in C$ için

$$c_1(c_2 c_3) = (c_1 c_2)c_3 \quad (1.15)$$

şartı sağlanıyorsa C ye birleşmeli cebir denir.

Tanım 1.3.9. $\mathcal{B}$ kategorisi aşağıdaki özellikleri sağlarsa C kategorisinin alt kategorisidir denir:

- i) $Ob(\mathcal{B}) \subset Ob(C)$
- ii) $Mor(\mathcal{B}) \subset Mor(C)$
- iii) $\mathcal{B}$ kategorisindeki tanım kümesi, görüntü kümesi ve bileşke fonksiyonlar C kategorisindeki aynı işlemlerin kısıtlanmışıdır
- iv) $\mathcal{B}$ nin birimi ile C nin birimi aynıdır.

Tanım 1.3.10. $\mathcal{B}$ kategorisi, $\mathcal{C}$ kategorisinin alt kategorisi olsun. Bütün $A, B \in Ob(\mathcal{B})$

$$hom_{\mathcal{B}}(A, B) = hom_{\mathcal{C}}(A, B) \quad (1.16)$$

ise $\mathcal{B}$ kategorisi $\mathcal{C}$ nin dolu alt kategorisidir.

Örnek 1.3.11. Her kategori kendisinin bir dolu alt kategorisidir.

Tanım 1.3.12. B bir kategori ve $h: C \rightarrow B$ bir morfizm olsun. $g \circ h = 1_C$ olacak şekilde B kategorisinde bir $g: B \rightarrow C$ morfizmi mevcut ise h morfizmine bir kesit (section) adı verilir.

Tanım 1.3.13. B bir kategori ve $h: C \rightarrow B$ bir morfizm olsun. $h \circ g = 1_B$ olacak şekilde B kategorisinde bir $g: B \rightarrow C$ morfizmi mevcut ise h morfizmine bir retraksiyon (retraction) adı verilir.

Tanım 1.3.14. Funktor , kategoriler arasındaki yapıyı koruyan bir dönüşümdür.

Tanım 1.3.15. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere $\mathcal{C}$ nin her bir A nesnesini $\mathcal{D}$ nin bir $F(A)$ nesnesine, $\mathcal{C}$ nin her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmini ise $\mathcal{D}$ deki bir $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye bir *funktor* denir ve $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ biçiminde gösterilir.

i) $\mathcal{C}$ kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olacak şekildeki f ve g morfizmleri için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir. F bileşkeyi koruyor.

ii) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dir F birimi koruyor.

Tanım 1.3.16. Bir funktorun tanım kümesi küçük kategori ise bu funktora küçük funktor denir.

Tanım 1.3.17. $H: A \rightarrow B$ ve $G: B \rightarrow C$ birer funktor ise $G \circ H: A \rightarrow C$ bir funktordur. Bu funktora H ve G funktorlarının bileşkesi denir.

Tanım 1.3.18. $H: A \rightarrow B$ bir funktor olsun. Eğer H funktoru A kategorisinin dualinden B ye bir funktor ise H funktora kontravaryant funktor denir.

Bu durumda $H: A \rightarrow B$ kontravaryant funktor ise

i) $H(g \circ f) = H(f) \circ H(g)$

ii) $H(1_A) = 1_{F(A)}$

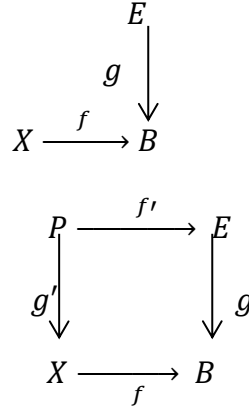
Benzer şekilde $H: A \rightarrow B$ kovaryant funktor ise:

i) $H(g \circ f) = H(g) \circ H(f)$

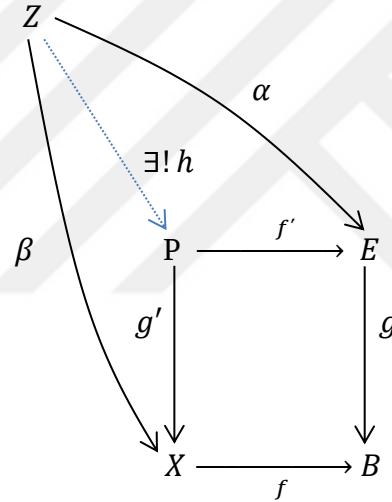
ii) $H(1_A) = 1_{F(A)}$

Tanım 1.3.19. İki kategorinin çarpımı bir fonktorun tanım kümesi ise bifunktor denir.

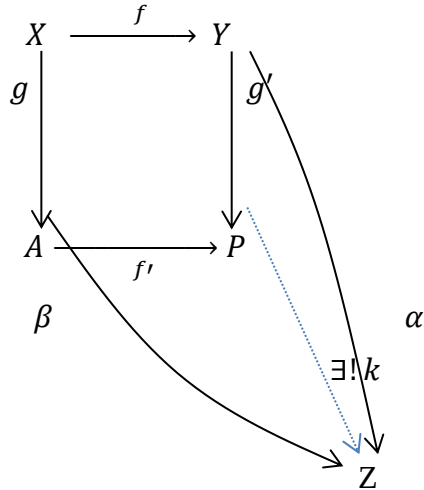
Tanım 1.3.20. C kategorisinde



kare diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tane h dönüşümü $h: Z \rightarrow P$ aşağıdaki şekildeki gibi varsa yukarıda verilen kare şekle geri çekilim (pullback) denir.



Buna dual olarak bir tane k dönüşümü $k: P \rightarrow Z$ şeklinde varsa kare şekle ileri itme (push out) denir ve aşağıdaki diyagramdaki gibi gösterilir.



2. CEBİRLER

Burada son bölümde kullanacağımız tanım ve teoremlerin sadece ifadeleri verilmiştir. İspatları ve ayrıntılı konu anlatımı [7],[9],[12],[13],[25-26] kaynaklarında yer almaktadır.

2.1. Cebir ve Simplisel Cebirler

Tanım 2.1.1. M cebirsel yapısı k -modül şartını sağlasın. Burada tüm $m_1, m_2, m_3 \in M$ için

$$M \times M \rightarrow M$$

$$(m_1, m_2) \rightarrow m_1 m_2$$

k -bilineer dönüşümü

$$i) m_1 m_2 = m_2 m_1$$

$$ii) (m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3)$$

şartları ile birlikte M cebirsel yapısına bir komutatif k -cebiri adı verilir..

Tanım 2.1.2. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi, bir cebir ailesi olarak verilsin.

$$d_i^n : E_n \rightarrow E_{n-1} \quad 0 \leq i \leq n \neq 0,$$

$$s_i^n : E_n \rightarrow E_{n+1} \quad 0 \leq i \leq n,$$

k —cebiri homomorfizmleri için

$$1. \quad d_i^{n-1} d_j^n = d_{i-1}^{n-1} d_i^n \quad 0 \leq i < j \leq n \text{ ise}$$

$$2. \quad d_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n \quad 0 \leq i \leq j \leq n \text{ ise}$$

$$3. \quad d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n \quad 0 \leq i \leq j \leq n \text{ ise}$$

$$4. \quad d_i^{n+1} s_j^n = id \quad i = j \text{ ya da } i = j+1 \text{ ise}$$

$$5. \quad d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n \quad 0 \leq j \leq i-1 \leq n \text{ ise}$$

eşitlikleri ile birlikte $((E_n)_{n \in \mathbb{N}}, d_i, s_i)$ cebirsel yapısı simplisel cebir olarak adlandırılır. d_i, s_i homomorf dönüşümleri face ve dejenere dönüşüm olarak adlandırılır. Yukarıda verilen özdeşlikler basit olarak aşağıdaki gibi kullanılabilir.

1. $d_i d_j = d_j d_{i+1} \quad 0 \leq j < i \leq n \text{ ise}$
2. $s_i s_j = s_j s_{i+1} \quad 0 \leq j \leq i \leq n \text{ ise}$
3. $s_i d_j = d_j s_{i+1} \quad j \leq i \text{ ise}$
4. $s_i d_j = d_{j+1} s_i \quad i > j \text{ ise}$

Yukarıdaki özdeşlikler Ellis, [20] tarafından standart bir şekilde kullanılmıştır.

Tanım 2.1.3. Bütün d_i^n yüzey operatörleri ve bütün s_i^n denejere operatörleri birleşmeli olan yani

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, \quad f_n s_i = s_i f_{n-1} \quad (2.1)$$

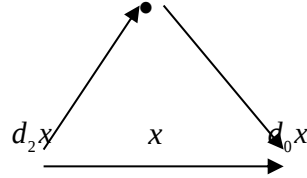
Şartını sağlayan $f_n: E_n \rightarrow F_n$ k-cebir homomorfizmlerinin bir kümesine E ve F simpsisel cebirleri arasında bir homomorfizm denir ve $E \rightarrow F$ şeklinde gösterilir.

Böylece $SimpCbr$ ile göstereceğimiz simplisel cebirlerin kategorisi tanımlanmış olur. Bu tanımın düşük boyutlar için bir geometrik yorumu şu şekilde yapabilir:

$n = 0$ için bir 0 – boyutlu simpleks açık bir $x \in E_0$ noktasıdır. $x \in E_0$ için 1 - boyutlu simpleks

$$d_1 x \bullet \xrightarrow{x} \bullet d_0 x \quad (2.2)$$

$x \in E_2$ için 2 - boyutlu simpleks üçgendir:



$$(2.3)$$

Ve $x \in E_3$ için 3- boyutlu simpleks bir dörtyüzlüdür.

Tanım 2.1.4. Bir simplisel k-modül, $n \geq 0$, Tanım 1.2.2 de verilen denklemleri sağlayan k—modül homomorfizmleri ile k—modüllerin bir E_n ailesidir.

Tanım 2.1.5. E herhangi bir simplisel k—modül olsun ve

$$\partial_n : E_n \rightarrow E_{n-1} \quad (2.4)$$

homomorfizmi

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda k - modüllerinin bir kompleks zinciri vardır. Simplisel cebirlerin tanımında yer alan 1. aksiyom gereği $\partial_{n+1}\partial_n = 0$ dır. Bu böylece E simplisel modülüyle ilişkili bir zincir kompleksi olur. Buradan

n . homoloji modülü $H_n(E)$

$$H_n(E) = \frac{\text{Çek}\partial_n}{\text{Im}\partial_{n+1}} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.6. E bir simplisel k -cebir olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = E$ ve $d_j = s_j = \text{id}$ olmak üzere $((E_n)_{n \in \mathbb{N}}, d_i s_i)$ üçlüsü bir simplisel cebirdir. Bu simplisel cebire sabit simplisel cebir denir ve $K(E, 0)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. Bir E simplisel cebir, $K(E, 0)$ sabit simplisel cebir olsun,

$$E \rightarrow K(E, 0) \quad (2.7)$$

dönüşümüne E simplisel cebirinin artırılmışı denir. Bu artırma

$$fd_0^1 = fd_1^1 : E_1 \rightarrow E \quad (2.8)$$

örten k -cebir homomorfizmi yardımıyla olur. Eğer E artırılmış simplisel cebiri devirli ve $n > 0$ için $H_n(E) \cong 0$, $H_0(E) \cong E$ ise bu simplisel cebire devirli simplisel cebir denir.

2.2. Çaprazlanmış Modül ve Ön Çaprazlanmış Modül yapıları

Tanım 2.2.1. $\partial: H \rightarrow F$ dönüşümü bir grup homomorfizmi olsun ve

$$F \times H \rightarrow H \quad (2.9)$$

$$(f, h) \mapsto f_h \quad (2.10)$$

F grubunun G grubu üzerine işlem etkisi ile verilsin.

Bu durumda $\forall h, h' \in H$ ve $f \in F$ için

$$\text{ÇM1)} \partial(f_h) = f\partial(h)f^{-1} \quad (2.11)$$

şartı sağlanıyorsa (H, F, ∂) yapısına ön-çaprazlanmış modül denir. Buna ek olarak

$$\text{ÇM2)} \partial d_{d'} = d d' d^{-1} \quad (2.12)$$

şartını da sağlayan H cebirsel yapısına çaprazlanmış modül adı verilir ve yapı (H, F, ∂) şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.2. V cebirsel yapısının cisim üzerinde vektör uzayı olması için, V de tanımlı bir B bilineer formu $V \times V \rightarrow F$ dönüşümünün verilen dört şartı sağlaması gerekir.

1. $B(v1 + v2, w) = B(v1, w) + B(v2, w)$
2. $B(fv, w) = fB(v, w)$
3. $B(v, w1 + w2) = B(v, w1) + B(v, w2)$
4. $B(v, fw) = fB(v, w)$.

Tanım 2.2.3. E bir simplisel cebir olsun, E nin Moore kompleksi (NE, ∂)

$$NE_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek} d_i^n, \quad (2.13)$$

bu yapıya bir zincir kompleks denir. Burada $\partial_n: NE_n \rightarrow NE_{n-1}$ mertebesi düşürülmüş bir dönüşümdür. Boyu k olan simplisel cebirlerin NE ile gösterilen Moore kompleksi, $n \geq k + 1$ şartını ve $NE_n = 0$ şartını sağladığında boyu k ile gösterilen Moore kompleks denir.

Tanım 2.2.4. H kümesi halka özelliklerini sağlayan bir cebirsel yapısı verilsin. Bu durumda tüm $\phi, \chi, \psi \in H$ için

$$\phi(\chi\psi) + \chi(\psi\phi) + \psi(\phi\chi) = 0 \quad (2.14)$$

şartını sağlayan H cebirsel yapısı Jacobi özdeşliğini sağlar.

Tanım 2.2.5. K ve L iki m -cebiri olmak üzere

$$P \times K \rightarrow K \quad (2.15)$$

$$(p, k) \mapsto p \cdot k \quad (2.16)$$

morfizmi ve her $d \in \mathbf{m}$, $k, k' \in K$, $l, l' \in L$ için

$$i) \quad m(l \cdot k) = (ml) \cdot k = l \cdot (mk)$$

$$ii) \quad l \cdot (k + k') = l \cdot k + l \cdot k'$$

$$iii) \quad (l + l') \cdot k = l \cdot k + l' \cdot k$$

$$iv) \quad [l, l'] \cdot k = l(l' \cdot k) - l'(l \cdot k)$$

$$v) \quad l \cdot [k, k'] = [l \times k, k'] + [k, l \cdot k']$$

şartlarını sağlayan bu dönüşüme L cebir yapısının K cebiri üzerine etkisi adı verilir.

Tanım 2.2.6. Çaprazlanmış iki modül (M, G, μ) ve (N, G, ϑ) olsunlar ve bir k-lineer dönüşüm $\alpha: M \rightarrow N$ şeklinde verilsin. Burada verilen tüm $m, m' \in M$ için

$$\alpha[m, m'] = \mu(m) \cdot \alpha(m') - \mu(m') \cdot \alpha(m) \quad (2.17)$$

özdeşliğini sağlayan α morfizmine ya M modül yapısından N modülüne bir derivasyon adı verilir.

Tanım 2.2.7. $\mu(g) = \mu_g: G \rightarrow G$ İç derivasyon yapısı verilen tüm $g, g' \in G$ için

$$\mu: G \rightarrow \text{Der}(G) \quad (2.18)$$

$$r \mapsto \mu(r) = \mu_r \quad (2.19)$$

dönüşümü ile birlikte $\mu(g)g' = gg'$ eşitliğini sağlayan dönüşümdür.

Tanım 2.2.8. (D, G, ∂) den (D', G', ∂') tanımlı çaprazlanmış modül dönüşümü bir k-cebir dönüşümleri çiftidir. Bu dönüşümler

$$\mathcal{E}: D \rightarrow D' \quad , \quad \delta: G \rightarrow G' \quad (2.20)$$

şekli tanımlı ve

$$\mathcal{E}(g * d) = \delta(g) * \mathcal{E}(d) \quad (2.21)$$

$$\partial' \mathcal{E}(d) = \delta \partial(d) \quad (2.22)$$

şartlarını sağlar. Bu durumda $\mathcal{E}$ bir çaprazlanmış G-modül dönüşümüdür. Böylece çaprazlanmış modüllerin kategorisi tanımlanmış olur.

Teorem 2.2.9. E bir simplisel cebir ve I bir simplisel ideal olsun. İçine dönüşüm

$$\text{inc}: I \hookrightarrow E \quad (2.23)$$

şeklinde olsun ve indirgenmiş dönüşüm

$$\partial: \pi_0(I) \rightarrow \pi_0(E) \quad (2.24)$$

şeklinde verilsin. E nin I ya etkisi çarpmanın indirgenmesi ile $\pi_0(E)$ nin $\pi_0(I)$ üzerine etkisi ile birlikte $(\pi_0(I), \pi_0(E), \partial)$ yapısı bir çaprazlanmış modüldür.

İspat: Çaprazlanmış modül şartlarını sağladığını gösterelim.

ÇM1)

$$\partial([e] \cdot [i]) = [ei] \quad (2.25)$$

$$= [e][\text{inc.}(i)], \quad (2.26)$$

$$= [e]\partial([i]). \quad (2.27)$$

ÇM2) $\forall i, i' \in I$ için

$$\partial([i]) \cdot [i'] = [\text{inc.}(i) \cdot i'], \quad (2.28)$$

$$= [ii'] \quad (2.29)$$

$$= [i][i']. \quad (2.30)$$

Teorem 2.2.10. (D, G, ∂) bir çaprazlanmış R modül olsun. Bu durumda

- i) Çek ∂ G 'nin bir merkezi idealidir.
- ii) Her iki D/D^2 ve Çek ∂ doğal $G/\partial D$ - modül yapısına sahiptir.

İspat: i) $d \in D, a \in \text{Çek}\partial$ olmak üzere

$$ad = \partial a \cdot d = 0d = 0 = d0 = d \cdot \partial a = da \quad (2.31)$$

şeklindedir.

İspat: ii) ∂d nin Çek ∂ ve D/D^2 üzerine aşıkâr etkisini göstermek yeterlidir.

$a \in \text{Çek}\partial$ ve $\partial d \in \partial D$,

$$\partial d \cdot a = da = d \cdot \partial a = d0 = 0 \quad (2.32)$$

olduğundan ∂D Çek ∂ üzerine aşıkâr etki eder.

$$\partial d \in \partial D, d' + D \in D/D^2 \quad (2.33)$$

için

$$\partial d \cdot (d' + D^2) = \partial d \cdot d' + D^2 \quad (2.34)$$

$$= dd' + D^2 = 0 \quad (2.35)$$

elde ederiz. Böylece $\partial D, D/D^2$ üzerine aşıkâr etki eder.

Buradan net bir şekilde dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlarız.

$$G/\partial D \times \text{Çek}\partial \rightarrow \text{Çek}\partial \quad G/\partial d \times D/D^2 \rightarrow D/D^2 \quad (2.36)$$

$$(g + \partial d, a) \mapsto ga \quad (g + \partial d, d + D^2) \mapsto gd + D^2 \quad (2.37)$$

burada Çek ∂ ve D/D^2 abelyan gruplarının $G/\partial G$ modüllerinin içinde olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Böylece Çek ∂ ve D/D^2 $G/\partial D$ - modül yapısına sahiptir.

3. BİRLEŞMELİ CEBİRLER

Bu bölümdeki kullandığımız tanım ve teoremler [20-26] da ayrıntılı olarak bulunmaktadır.

3.1 Birleşmeli Cebirler üzerinde Ön-çaprazlanmış modüller

Tanım 3.1.1. k_1 cisim olsun. Bir k üzerindeki birleşmeli cebirlerin kategorisi olsun. k bir cebir, Bir k üzerinde birleşmeli cebirlerin kategorisi ve A, B iki birleşmeli cebir olsun. B nin A üzerine etkisi ile birlikte İki k - bilineer dönüşümleri

$$B \times A \rightarrow A \quad (3.1)$$

$$(b, a) \mapsto {}^b a \quad (3.2)$$

$$A \times B \rightarrow A \quad (3.3)$$

$$(a, b) \mapsto a^b \quad (3.4)$$

Her $a, a_1 \in A$, $b, b_1 \in B$ için

$$({}^{b*b_1})a = {}^{b(b_1)}a \quad (3.5)$$

$$a^{(b*b_1)} = (a^b)^{b_1} \quad (3.6)$$

$$({}^b a)^{b_1} = {}^b(a^{b_1}) \quad (3.7)$$

$${}^b(a_1 * a) = ({}^b a_1) * a \quad (3.8)$$

$$(a_1 * a)^b = a_1 * a^b \quad (3.9)$$

$$a * ({}^b a_1) = (a^b) * a_1 \quad (3.10)$$

şartlarını sağlar.

Tanım 3.1.2. Birleşmeli cebirler kategorisinde tanımlı bir ön-çaprazlanmış modül

$$\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0) \quad (3.11)$$

birleşmeli cebir homomorfizmi olan ve sınır dönüşüm olarak adlandırılan

$$d: A_1 \longrightarrow A_0 \quad (3.12)$$

dönüşümü ile ve A_0 ın A_1 üzerine etkiyle birlikte $a_1 \in A_1$ ve $a_0 \in A_0$ için aşağıdaki şartları sağlar;

$$d(a_0 * a_1) = a_0 * d(a_1) \quad (3.13)$$

$$d(a_1 * a_0) = d(a_1) * a_0 \quad (3.14)$$

Buna ek olarak eğer $a_1, a'_1 \in A_1$ için

$$d(a'_1) * a_1 = a'_1 * a_1 \quad (3.15)$$

$$a_1 * d(a'_1) = a_1 * a'_1 \quad (3.16)$$

şartları sağlanırsa $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tanım 3.1.3. $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ve $\mathcal{M}': (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$ ön-çaprazlanmış modül olsun. $\mathcal{M}$ den $\mathcal{M}'$ tanımlı bir homomorfizm $\delta_1: A_1 \rightarrow A'_1$ ve $\delta_0: A_0 \rightarrow A'_0$ şeklinde tanımlı (δ_1, δ_0) birleşmeli cebir homomorfizm çiftidir. Bu homomorfizmler

$$d' \delta_1 = \delta_0 d \quad (3.17)$$

şartını sağlar ve işlem korurlar. Böylece birleşmeli cebirler kategorisindeki ön-çaprazlanmış modül kategorisine karşılık gelen kategori $PXBir$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.4. Eğer A'_1 ve A'_0 sırasıyla A_1 ve A_0 ın alt cebirleri ise $d' = d|_{A_1}$ ve A'_0 nün A'_1 üzerine tanımlı etkisi A_0 ın A_1 üzerine etkisine indirgenmesiyle birlikte $\mathcal{M}': (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$ yapısı $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön-çaprazlanmış modül yapısının bir ön-çaprazlanmış alt modülüdür.

Tanım 3.1.5. Eğer A'_1 ve A'_0 sırasıyla A_1 ve A_0 ın idealleri ise $\mathcal{M}': (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$ çaprazlanmış alt modülü $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön-çaprazlanmış modülünün bir idealidir. Bu durum $\mathcal{M}' \leq \mathcal{M}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.6. $\mathcal{M}': (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$ ön-çaprazlanmış alt modülü $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ön-çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Bu durumda $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$ bölüm ön-çaprazlanmış modülü sınır dönüşümü ve etki ile birlikte $A_1/A'_1 \rightarrow A_0/A'_0$ yapısı bir

ön-çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Burada birleşmeli cebirleri (A, F_0, F_1) ile göstereceğiz ve buna karşılık gelen birleşmeli cebirler kategorisini $\bar{H}$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.7. $P: \bar{H} \rightarrow \text{Ön}XBir$ dönüşümü bir fonktor olsun. $\bar{H}$ deki herhangi (A, F_0, F_1) objesi için $A_1 \xrightarrow{d} A_0$ yapısı ile $P(A, F_0, F_1)$ yapısı bir çaprazlanmış modüldür. Burada $A_1 = \text{çek}F_0$, $A_0 = \text{gör}F_0$ ve etki A 'daki çarpma işlemi şeklinde verilmiştir ve $d = F_1|_{\text{çek}F_0}$ dır.

Şimdi $S: \text{Ön}XBir \rightarrow \bar{H}$ fonktorunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ herhangi bir çaprazlanmış modülü için $S(\mathcal{M}) := (A_1 \rtimes A_0, F_0 F_1)$ olsun. Bu durumda $a_1 \in A_1, a_0 \in A_0$ olmak üzere.

$$F_0(a_1 a_0) = (0, a_0), F_1(a_1 a_0) = (0, d(a_0) + a_0), \quad (3.18)$$

Bu tanımlanan iki fonktor $\text{Ön}XBir \simeq \bar{H}$ kategorileri arasındaki denklığı verir.

3.2 Birleşmeli Cebirler üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde birleşmeli cebirler kategorisinde tanımlı çaprazlanmış modüller ile ilgili tanım ve sonuçları vererek birleşmeli cebirler kategorisinin özelliklerinden bahsedeceğiz.

Tanım 3.2.1. k birimli bir halka ve A ve B iki birleşmeli cebiri olmak üzere B nin A üzerine etkisi bilineer dönüşüm çifti olarak

$$B \times A \rightarrow A, A \times B \rightarrow A \quad (3.19)$$

$$(b, a) \mapsto b * a \text{ ve } (a, b) \mapsto a * b \quad (3.20)$$

şeklinde gösterilsin ve bu dönüşüm her $a, a', a'' \in A$ ve $b, b', b'' \in B$ için

$$\text{i)} \quad (b' * b'') * a = b' * (b'' * a) \quad (3.21)$$

$$\text{ii)} \quad a * (b' * b'') = (a * b') * b'' \quad (3.22)$$

$$\text{iii)} \quad (b' * a) * b'' = b' * (a * b'') \quad (3.23)$$

$$\text{iv)} \quad b(a' * a'') = (b * a') * a'' \quad (3.24)$$

$$\text{v)} \quad (a' * a'') * b = a' * (a'' * b) \quad (3.25)$$

$$\text{vi)} \quad a' * (b * a'') = (a' * b) * a'' \quad (3.26)$$

özelliklerini sağlar.

Burada $Bim(A)$ nın elemanı, $f = (f_l, f_r)$ şeklinde tanımlı A dan A ya bir k -lineer dönüşümdür ve bu dönüşüm $a, a' \in A$ için,

$$f_l(a * a') = f_l(a) * a' \quad (3.27)$$

$$f_r(a * a') = a * f_r(a') \quad (3.28)$$

$$a * f_l(a') = f_r(a) * a' \quad (3.29)$$

şartlarını sağlar. $Bim(A)$ ifadesi birleşmeli cebir yapısına sahip olduğu iyi bilinen bir yapıdır.

Tanım 3.2.2. Birleşmeli cebirler kategorisinde tanımlı bir çaprazlanmış modül

$$\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{a} A_0) \quad (3.30)$$

birleşmeli cebir homomorfizmi olan ve sınır dönüşüm olarak adlandırılan

$$d: A_1 \longrightarrow A_0 \quad (3.31)$$

dönüşümü ile ve A_0 in A_1 üzerine etkisiyle birlikte $a_1, a'_1 \in A_1$ ve $a_0 \in A_0$ için aşağıdaki şartları sağlar;

$$d(a_0 * a_1) = a_0 * d(a_1) \quad (3.32)$$

$$d(a_1 * a_0) = d(a_1) * a_0 \quad (3.33)$$

$$d(a'_1) * a_1 = a'_1 * a_1 \quad (3.34)$$

$$a_1 * d(a'_1) = a_1 * a'_1 \quad (3.35)$$

Böylece $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tanım 3.2.3. $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ ve $\mathcal{M}': (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$ çaprazlanmış modül olsun. $\mathcal{M}$ den $\mathcal{M}'$ tanımlı bir homomorfizm $\delta_1: A_1 \rightarrow A'_1$ ve $\delta_0: A_0 \rightarrow A'_0$ şeklinde tanımlı (δ_1, δ_0) birleşmeli cebir homomorfizm çiftidir. Bu homomorfizmler

$$d' \delta_1 = \delta_0 d \quad (3.36)$$

şartını sağlar ve işlem korurlar. Böylece birleşmeli cebirler kategorisindeki çaprazlanmış modül kategorisine karşılık gelen kategori $\mathbf{XBir}$ ile gösterilecektir.

Örnek 3.2.4. I ideali birleşmeli cebirlerin çift taraflı bir ideali olsun. Bu durumda $inc: I \rightarrow A$ dönüşümü A nın I üzerine konjuge (çarpım) etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modüldür. Sonuç olarak, $inc.: 0 \rightarrow A$ ve A dan A ya birim dönüşüm birer çaprazlanmış modüldür.

Örnek 3.2.5. B, A birleşmeli cebir etkisiyle birlikte bir tekil birleşmeli cebir olsun. Bu durumda $0: B \rightarrow A$ bir çaprazlanmış modüldür. $B = A$ alınırsa bu durumda $0: A \rightarrow A$ ve $0: A \rightarrow 0$ çaprazlanmış modüllerdir. Bunu yanı sıra eğer B tekil değilse bu durumda $0: B \rightarrow A$ genel olarak bir önçaprazlanmış modüldür.

Tanım 3.2.6. $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ birleşmeli cebirler kategorisinde bir çaprazlanmış modül olsun. $\mathcal{M}$ nin biçarpan ikilisi (α, β) , sırasıyla α, A_1 'in β, A_0 'ın biçarpanı olmak üzere $d\alpha_l = \beta_l d$, $d\alpha_r = \beta_r d$ ve $a_1 \in A_1$ ve $a_0 \in A_0$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlar.

$$i) \quad \alpha_l(a_0 * a_1) = \beta_l(a_0) * a_1$$

$$ii) \quad \alpha_l(a_1 * a_0) = \alpha_l(a_1) * a_0$$

- iii) $a_0 * \alpha_l(a_1) = \beta_r(a_0) * a_1$
- iv) $\alpha_r(a_1 * a_0) = a_1 * \beta_r(a_0)$
- v) $\alpha_r(a_0 * a_1) = a_0 * \alpha_r(a_1)$
- vi) $\alpha_r(a_1) * a_0 = a_1 * \beta_l(a_0).$

$\mathcal{M}$ çaprazlanmış modülünün biçarpanları kümesi $Bim(\mathcal{M})$ ile gösterilmiştir. Burada $Bim(\mathcal{M})$ nin aşağıda verilen bilinen çarpma ve toplama işlemlerine göre birleşmeli cebir olduğu kolayca gösterilebilir.

Her $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in Bim(\mathcal{M})$ ve $\alpha * \alpha' = (\alpha_l \alpha'_l, \alpha_r \alpha'_r)$ ve $\beta * \beta' = (\beta_l \beta'_l, \beta_r \beta'_r)$ olmak üzere

$$(\alpha, \beta) * (\alpha', \beta') = (\alpha * \alpha', \beta * \beta') \quad (3.37)$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.7. $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir çaprazlanmış modül ve $\theta_l: A_0 \rightarrow A_1$ ve $\theta_r: A_0 \rightarrow A_1$ k-lineer dönüşümleri her $a_0, a'_0 \in A_0$ için $\theta_r(a_0 * a'_0) = a_0 * \theta_r(a'_0)$, $\theta_l(a_0 * a'_0) = \theta_l(a_0) * a'_0$ ve $a_0 * \theta_l(a'_0) = \theta_r(a_0) * a'_0$ tanımlansın. Bu durumda, $\theta := (\theta_l, \theta_r)$ ikilisi $\mathcal{M}$ 'nin çaprazlanmış biçarpanı olarak adlandırılır.

$\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ çaprazlanmış modülünün tüm çaprazlanmış biçarpanlarının kümesi $B\mathcal{C}(\mathcal{M})$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.2.8. $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $B\mathcal{C}(\mathcal{M})$ boş kümeden farklıdır.

İspat: $a_1 \in A_1$ bir sabit eleman olsun. her $a_0 \in A_0$ için $(\theta_{a_1})_l(a_0) = -a_1 * a_0$, $(\theta_{a_1})_r(a_0) = -a_0 * a_1$ şeklinde tanımlansın. Buradan doğrudan hesaplamayla $\theta_{a_1} := ((\theta_{a_1})_l, (\theta_{a_1})_r)$ bir çaprazlanmış biçarpan olduğu bulunur.

$B\mathcal{C}(\mathcal{M})$ kümesini bilinen yollardan tanımlanan toplama ve çarpma işlemi kullanılarak elde edebiliriz. Çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\theta * \theta' = ((\theta * \theta')_l, (\theta * \theta')_r),$$

burada her $\theta, \theta' \in B\mathcal{C}(\mathcal{M})$ olmak üzere

$$(\theta * \theta')_l = \theta_l d \theta'_l,$$

$$(\theta * \theta')_r = \theta'_r d\theta_r \quad (3.38)$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.9. $B\mathcal{C}(\mathcal{M})$ kümesi yukarıdaki işlemle birlikte bir değişmeli cebirdir.

İspat: İspat için sadece $\theta * \theta'$ çarpımının çaprazlanmış biçarpan olduğunu göstermemiz yeterlidir. Diğer şartların gösterilmesi gayet basittir. $\theta, \theta' \in B\mathcal{C}(\mathcal{M})$ olsun. Bu durumda

$$(\theta * \theta')_l(a_0 * a'_0) = \theta_l d\theta'_l(a_0 * a'_0) \quad (3.39)$$

$$= \theta_l d(\theta'_l(a_0) * a'_0) \quad (3.40)$$

$$= \theta_l(d\theta'_l(a_0) * a'_0) \quad (3.41)$$

$$= \theta_l d\theta'_l(a_0) * a'_0, \quad (3.42)$$

elde ederiz. benzer şekilde $(\theta * \theta')_r(a_0 * a'_0) = a_0 * \theta_r d\theta'_r(a'_0)$, tüm $a_0, a'_0 \in A_0$ için elde edilir. Diğer yandan tüm $a_0, a'_0 \in A_0$ için

$$a_0 * (\theta * \theta')_l(a'_0) = a_0 * \theta_l(d\theta'_l(a'_0)) \quad (3.43)$$

$$= \theta_r(a_0) * d\theta'_l(a'_0) \quad (3.44)$$

$$= \theta_r(a_0) * \theta'_l(a'_0) \quad (3.45)$$

$$= d\theta_r(a_0) * \theta'_l(a'_0) \quad (3.46)$$

$$= \theta'_r d\theta_r(a_0) * a'_0, \quad (3.47)$$

elde ederiz. Böylece işlem iyi tanımlıdır.

Tanım 3.2.10. Eğer A'_1 ve A'_0 sırasıyla A_1 ve A_0 in alt cebirleri ise $d' = d|_{A'_1}$ ve A'_0 nün A'_1 üzerine etkisi A_0 in A_1 üzerine etkisine indirgenmesiyle birlikte $\mathcal{M}': (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$ yapısı $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ çaprazlanmış modül yapısının bir çaprazlanmış alt modülüdür.

Tanım 3.2.11. Eğer A'_1 ve A'_0 sırasıyla A_1 ve A_0 in idealleri ise $\mathcal{M}': (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$ çaprazlanmış alt modülü $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ çaprazlanmış modülünün bir idealidir.

Bu durum $\mathcal{M}' \trianglelefteq \mathcal{M}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.12. $\mathcal{M}': (A'_1 \xrightarrow{d'} A'_0)$ çaprazlanmış alt modülü $\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Bu durumda $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$ bölüm çaprazlanmış

modülü sınır dönüşümü ve etki ile birlikte $A_1/A'_1 \rightarrow A_0/A'_0$ yapısı bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tanım 3.2.13. A bir cat^1 birleşmeli cebir olsun. İki toplamsal birleşmeli işlemle birlikte A bir birleşmeli cebirdir $F_0, F_1: A \rightarrow A$ dönüşümleri

$$F_0 F_1 = F_1, F_1 F_0 = F_0 \text{ ve} \quad (3.48)$$

$$\check{ek}F_0 * \check{ek}F_1 = 0 = \check{ek}F_1 * \check{ek}F_0 \quad (3.49)$$

şartlarını sağlayan birer birleşmeli cebir homomorfizmidir. Daha açıkça iki Cat^1 cebir arasındaki homomorfizm bir birleşmeli cebir homomorfizmidir ve birim işlemlerini korur. Bir Cat^1 cebir yapısını (A, F_0, F_1) ile göstereceğiz ve buna karşılık gelen kategori $Cat^1 - Bir$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.2.14. $P: Cat^1 Bir \rightarrow XBir$ dönüşümü bir fonktor olsun. $Cat^1 Bir$ deki herhangi (A, F_0, F_1) objesi için $A_1 \xrightarrow{d} A_0$ yapısı ile $P(A, F_0, F_1)$ yapısı bir çaprazlanmış modüldür. Burada $A_1 = \check{ek}F_0$, $A_0 = \text{gör}F_0$ ve etki A 'daki çarpma işlemi şeklinde verilmiştir ve $d = F_1|_{\check{ek}F_0}$ dır.

Şimdi $S: XBir \rightarrow Cat^1 - Bir$ fonktorunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$\mathcal{M}: (A_1 \xrightarrow{d} A_0)$ herhangi bir çaprazlanmış modülü için $S(\mathcal{M}) := (A_1 \rtimes A_0, F_0 F_1)$ olsun. Bu durumda $a_1 \in A_1, a_0 \in A_0$ olmak üzere.

$$F_0(a_1 a_0) = (0, a_0), F_1(a_1 a_0) = (0, d(a_0) + a_0), \quad (3.50)$$

Bu tanımlanan iki fonktor $XBir \simeq Cat^1 Bir$ kategorileri arasındaki denkliği verir.

4. SONUÇ

Sonuç olarak, ön çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış modüllerin birleşmeli cebirler üzerindeki özellikleri incelenmiştir. İlk olarak Lavendhomme ve Lucas tarafından [21] de kullanılan ve G. Hochschild [22] ve S. Mac Lane [23] tarafından halkalar için tanımlanan bir A birleşmeli cebirinin $Bim(A)$ ile gösterilen bi-çarpan tanımlamasını kullanarak yapının inşasını inceledik. Daha sonra da çaprazlanmış modül tanımı Dedecker ve Lue [24] tarafından kullanılmış ve Casas, Datuashvili ve Ladra [25] tarafından interest kategorisinde çaprazlanmış modülün tanımında özel bir durum olarak incelenmiştir. Bu konu hakkındaki ileri düzey çalışmalar Porter [26] da bulunabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Lue A.S.T., 1968. Non abelian cohomology of associative algebras, Quart. J. Math., 19, 150-180.
- [2] Porter T., 1987. Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations, Proc. Edinburg Math. Soc.2, 30, 373-381.
- [3] Boyacı Y, Casas J.M. , Dautashvili T. ve Uslu E.O., 2015. Action in modified categories of interest with application to crossed modules, Theory and Appl. of Categories, 30, 25, 882-908.
- [4] Whitehead, J. H., 1949. Combinatorial homotopy II., Bull. Amer. Math.Soc.55, 213-245.
- [5] Brown R., 1999. Groupoids and crossed objects in algebraic topology, Homology Homotopy Appl. 1, 1-78.
- [6] Brown R., Higgins P. J. ve Sivera R., 2011. Nonabelian algebraic topology. Filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids, EMS Tracts in Mathematics 15, European Mathematical Society (EMS), Zurich, İsviçre.
- [7] Dedecker P. ve Lue A.S.T., 1966. A nonabelian two-dimensional cohomology for associative algebras, Bull.Amer. Math. 72, 6, 1044-1050.
- [8] A.S.T. Lue, 1968. Non-abelian cohomology of associative algebras, Quart. J. Math., 19, 159-180.
- [9] Baues H.-J. ve Minian E. G., 2002. Crossed extensions of algebras and Hochschild cohomology, Homology Homotopy Appl., 4, 2, 63-82.
- [10] Donadze G., Inassaridze N., Khmaladze E. ve Ladra M., 2012. Cyclic homologies of crossed modules of algebras, J. Noncommut. Geom., 2, 749-771.
- [11] Ash, R. B., 2013. Basic Abstract Algebra: For Graduate Students and Advanced Undergraduates. Courier Corporation, ABD.
- [12] Mac Lane S. 1996. Extensions ve Obstructions for Rings, Illinois J. Math. 121, 316-345.

- [13] Lavendhomme R., Lucas, T.H., 1958. On modules ve crossed modules, Journal of Algebra, 179, 936-963.
- [14] Hungerford, T. W., 1980. Algebra, volume 73 of Graduate Texts in Mathematics. ABD.
- [15] Sather-Wagstaff, S., 2011. Rings Module ve Linear Algebra.arXiv: 1203.003.
- [16] Baues, H. J., ve Minian, E. G., 2002. Crossed extensions of algebras and Hochschild cohomology. Homology, homotopy and applications, 4, 63-82.
- [17] Baez, J. C., ve Crans, A. S., 2004. Higher-dimensional algebra VI: Lie 2-algebras. Theory Appl., 12, 492-528.
- [18] Aubry M., 1995. Homotopy Theory and Models, DMV Seminar, vol. 24, Birkhauser, Almany.
- [19] Wisbauer, R., 1991. Foundations of module and ring theory (Vol. 3). CRC Press, Almany.
- [20]. Ellis, G. J., 1988. Higher dimensional crossed modules of algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 52,3, 277-282.
- [21] Lavendhomme R. ve Lucas, T.H., 1996. On modules and crossed modules, Journal of Algebra, 179, 936-963.
- [22] Hochschild G., 1947. Cohomolgy and representations of associative algebras, Duke Math. J., 14, 921-948.
- [23] Mac Lane S., 1958. Extensions and Obstructions for Rings, Illinois J. Math., 121, 316-345.
- [24] Dedecker P. ve Lue A.S.T., 1966. A non-abelian two-dimensional cohomology for associative algebras, 72, 1044-1050.
- [25] Casas M., Datuashvili T. ve Ladra M., 2010. Universal strict general actors and actors in categories of interest, Appl. Categ. Structures. 18, 85-114.
- [26] Porter T., 1987. Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations, Proc. Edinburgh Math. Soc., 30, 373-381.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :

Ahmed Muhammed

Birth date & place :

20.08.1988 Erbil / Irak

E-posta adresi :

ahmedsirwany@gmail.com

Eğitim :

Lisans 2005-2009.

Erbil Koya Üniversitesi

Fen ve Sağlık Fakültesi

Matematik Bölümü

Irak.