

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Birnbaum-Saunders Tipi Yeni Bir Dağılım Ailesi

İsmet BİRBİÇER

İstatistik Anabilim Dalı
Haziran, 2024

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZ ONAYI

Birnbaum-Saunders Tipi Yeni Bir Dağılım Ailesi

İsmet BİRBİÇER

İstatistik Anabilim Dalı

Bu Doktora Tezi 27/06/2024 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Değerlendirilmiş ve Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Jüri	: Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ	(Danışman)	
	: Prof. Dr. Güzin YÜKSEL		
	: Prof. Dr. Gülsen KIRAL		
	: Prof. Dr. Hamza EROL		
	: Prof. Dr. M. Çağatay KORKMAZ		

Bu Tez Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.

Tez No:

Prof. Dr. Sadık DİNÇER
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	II
ABSTRACT.....	III
TEŞEKKÜR	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
1. GİRİŞ	1
2. BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMLARI	5
2.1. Klasik Birnbaum-Saunders Dağılımı	5
2.2. Genelleştirilmiş Birnbaum-Saunders Dağılımı	11
3. YENİ BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIM AİLESİ	17
4. ÜÇGENSEL BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMI	27
4.1. Kantil Fonksiyonu ve Dağılımın Limit Durumları	28
4.2. Şekil İncelemesi	28
4.3. Tehlike Fonksiyonu	31
4.4. Momentleri	34
4.5. Sıra İstatistikleri ve Örneklem Ekstremlerinin Dağılımları	37
4.6. Sonuç Çıkarım	38
4.6.1. Momentler Yöntemi	38
4.6.2. Değiştirilmiş Momentler Yöntemleri	39
4.6.3. Yüzdelik (Percentile) Tahmin Edici	40
4.6.4. En Küçük Kareler Tahmin Edicileri	40
4.6.5. Maksimum Aralıkların Çarpımı Yöntemi	41
4.6.6. En Çok Olabilirlik Yöntemi	41
5. SİMÜLASYON	49
6. VERİ ANALİZİ	53
6.1. Kalça Çevresi Verisi	53
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	57
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ.....	63

Birnbaum-Saunders Tipi Yeni Bir Dağılım Ailesi

İsmet BİRBİÇER

Danışman: Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ

İstatistik Anabilim Dalı

ÖZ

Yaşam dağılımları ilgilenilen bir olay gerçekleşene kadar geçen zamanı tanımlayan istatistiksel modellerdir ve sıklıkla güvenilirlik, sağkalım ve risk analizi alanlarında kullanılmaktadırlar. Bu dağılımlardan biri olan Birnbaum-Saunders dağılımı, sürekli olarak titreşime maruz kalan uçak malzemelerinin ömürlerini modellemek için sunulmuş ve zamanla sahip olduğu pratik özellikler sayesinde uygulama alanı artmış ve popüler yaşam dağılımlarından biri olmuştur. Bu dağılımın uygulama alanlarını daha da genişletmek ve esnekliğini artırmak için genelleştirilmiş Birnbaum-Saunders dağılım ailesi tanımlanmıştır. Bu sayede, Birnbaum-Saunders dağılımının önemli özelliklerine sahip ve asimetrik verilere daha uygun yeni yaşam dağılımları üretilmiştir. Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş Birnbaum-Saunders ailesinin yeni bir alt ailesi tanıtılmıştır. Elde edilen yeni ailenin bazı üyeleri, Cauchy kuvvet ve log-lojistik gibi daha önce çalışılmış dağılımlar olmakla birlikte, birçok yeni dağılım da elde edilmiştir. Çalışmada, ailenin genel özellikleri ve üretilen yeni dağılımlar tanıtıldıktan sonra, üçgensel Birnbaum-Saunders dağılımı olarak adlandırılan yeni bir dağılım detaylı olarak incelenmiştir. Bu kapsamda dağılımın şekil incelemesi, yoğunluk ve tehlike fonksiyonları için yapılmış, momentleri elde edilmiş ve sıra istatistiklerinin dağılımları incelenmiştir. Sonrasında, dağılımın sahip olduğu iki parametreyi tahmin etmek için yedi farklı tahmin edici önerilmiş ve tahmin edicilerin performanslarını incelemek için detaylı bir simülasyon çalışması verilmiştir. Son olarak dağılımın kullanılabilirliğini ve halihazırda literatürde kullanılan diğer dağılımlara karşı avantajlarını göstermek için gerçek veri analizi uygulaması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yaşam dağılımları, Genelleştirilmiş Birnbaum-Saunders dağılım ailesi, Üçgensel Birnbaum-Saunders dağılımı.

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

PHD THESIS

A New Birbaum-Saunders Like Distribution Family

İsmet BİRBİÇER

Supervisor: Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ

Department of Statistics

ABSTRACT

Lifetime distributions are statistical models that describe the time until an event of interest occurs and are frequently used in the applications of reliability, survival and risk analysis. One of these distributions, the Birnbaum-Saunders distribution, was introduced to model the lifetime of aircraft materials that are constantly exposed to vibration, and over time, its application area has increased and become one of the popular life distributions as a results of its properties. To further expand the application areas of this distribution and increase its flexibility, the generalized Birnbaum-Saunders family of distributions has been defined. Thus, new life distributions that have important features of the Birnbaum-Saunders distribution and are more suitable for asymmetric data have been produced. In this thesis, a new subfamily of the generalized Birnbaum-Saunders family is introduced. In this thesis, a new subfamily of the generalized Birnbaum-Saunders family is introduced. In the study, after examining the general characteristics of the family and the new distributions produced, a new distribution called the triangular Birnbaum-Saunders distribution, was examined in detail. So, the shape analysis of the distribution was made for density and hazard functions, their moments were given and order statistics were examined. Afterwards, seven different estimators were proposed to estimate the two parameters of the distribution and a detailed simulation study was given to examine the performances of the estimators. Finally, a real data analysis application were carried out to demonstrate the usefulness of the distribution and its advantages over other distributions currently used in the literature.

Keywords: Lifetime distributions, Generalized Birnbaum-Saunders distribution, Triangular Birnbaum-Saunders distribution

TEŞEKKÜR

Danışmanım Ali İhsan GENÇ'e, yalnızca istatistik teorisindeki uzmanlığı için değil, aynı zamanda düşünce yapısıyla bir akademisyen olarak bana örnek teşkil ettiği için en içten şükranlarımı sunuyorum. Benimle paylaştığı bilgi ve zamanın değeri ölçülemez.

Tez İzleme Komitesi üyeleri Prof.Dr. Güzin YÜKSEL, Prof.Dr. Gülsen KIRAL, Prof.Dr. Hamza EROL ve Prof.Dr. M. Çağatay KORKMAZ'a bu süreçteki tüm destek, eleştiri ve katkıları için içtenlikle teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince önerileri ve destekleri için Doç.Dr. Çağatay ÇETİNKAYA'ya; güncellenen tez formatını L^AT_EX'e aktarıp paylaşan Dr. Ulduz MAMMADOVA ÖZEL'e; ayrıca, bölüm görevlerindeki destek ve yardımları için çalışma arkadaşlarım Arş.Gör. Nuri Berk URAL ve Arş.Gör. Vildan KARA'ya teşekkür ederim.

Eğitimim için yaptıkları fedakarlıklar ve verdikleri destek için aileme yürekten teşekkür ederim. Sevginiz ve desteğiniz en zor günlerde dahi hep yanımda oldu.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Bazı eliptik dağılımlar için normalize sabitleri ve üretici fonksiyonları.	11
Çizelge 3.1. Yeni dağılım üretilirken kullanılabilecek üretici dağılımlar için fonksiyonlar	20
Çizelge 4.1. $\beta = 2$ ve farklı α değerleri için hesaplanan çarpıklık ve basıklık katsayıları.	37
Çizelge 5.1. Parametre değerleri $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1$ olacak şekilde değişen örneklem büyüklükleri ile üretilmiş veriler için farklı tahmin yöntemleri ile elde edilen yanlılık ve hata kareler ortalaması (parantez içinde) değerleri.	51
Çizelge 5.2. Parametre değerleri $\alpha = 1.5$ ve $\beta = 1$ olacak şekilde değişen örneklem büyüklükleri ile üretilmiş veriler için farklı tahmin yöntemleri ile elde edilen yanlılık ve hata kareler ortalaması (parantez içinde) değerleri.	52
Çizelge 6.1. Kalça çevresi verisi için özet istatistikler	53
Çizelge 6.2. Kalça çevresi verisi için en çok olabilirlik tahminleri ve karşılık gelen log-olabilirlik, AIC ve BIC değerleri	54
Çizelge 6.3. Kalça çevresi verisinde <i>TriBS</i> dağılımı parametreleri için elde edilen diğer tahmin değerleri	54

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için BS dağılımı yoğunluk grafikleri.	9
Şekil 2.2. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için BS dağılımının tehlike fonksiyonu grafikleri.	10
Şekil 2.3. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için Cauchy BS dağılımının yoğunluk fonksiyonu grafikleri.	13
Şekil 2.4. (a) α ve β sabit iken değişen ve ν değerleri; (b) β ve ν sabit iken değişen ve α değerleri için t-BS yoğunluk grafikleri.	14
Şekil 2.5. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için Laplace BS dağılımının yoğunluk fonksiyonu grafikleri.	15
Şekil 2.6. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için Lojistik BS dağılımının yoğunluk fonksiyonu grafikleri.	16
Şekil 3.1. $k(x)$, $\xi_{BS}(x)$ ve $\xi_{LN}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.	18
Şekil 3.2. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için log-lojistik dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.	21
Şekil 3.3. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için Cauchy kuvvet dağılımının (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.	22
Şekil 3.4. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için kosinüs çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.	23
Şekil 3.5. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için sinüs çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.	24
Şekil 3.6. Farklı α değerleri, $\beta = 2$ ve $\gamma = 1.5$ için çift yönlü kuvvet çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.	25
Şekil 3.7. Farklı γ değerleri, $\alpha = 2$ ve $\beta = 2$ için çift yönlü kuvvet çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.	25
Şekil 3.8. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için karesel U çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.	26
Şekil 4.1. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için <i>TriBS</i> dağılımının yoğunluk fonksiyonu grafikleri. ...	30
Şekil 4.2. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için tehlike fonksiyonu grafikleri.	35
Şekil 4.3. Tip II sağ sansürlü veriler için örnek diyagram.	46
Şekil 6.1. Kalça çevresi verisi ve tersi için TTT grafiği.	54
Şekil 6.2. Kalça çevresi verisi için uydurulan modeller.	55

1. GİRİŞ

Yaşam değişkeni, bir olay meydana gelene kadar geçen süreyi ifade eden sürekli ve pozitif rastgele değişkenlerin genel adıdır. Bu değişkenlerle ilişkilendirilen olasılık dağılımları, yaşam dağılımı (lifetime distribution) olarak adlandırılır. Yaşam dağılımları, sağkalım analizinde biyolojik varlıkların yaşam sürelerini, güvenilirlik analizinde ise malzemelerin çalışma sürelerini modellemede kullanılır. Bu dağılımlar, bir araştırmacının veya uygulamacının olayların ne kadar süreceğini veya ne kadar hızlı değişebileceğini değerlendirmesine olanak sağlar.

İstatistiğin en sık kullanılan ve popüler modeli olan normal dağılım, negatif değerler de alabildiğinden ve simetrik bir yapıya sahip olduğundan yaşam dağılımı olarak kullanıma uygun değildir. Bu nedenle, yalnızca pozitif değerler alabilen ve sağa çarpık yoğunluk şekline sahip olan üstel, gamma, Weibull ve log-normal gibi dağılımlarının kullanımı daha uygundur. Yaşam dağılımları arasında, basit yapısıyla bilinen ve en eski örneklerden biri olarak üstel dağılım öne çıkmaktadır; ancak, hafızasızlık özelliği bu dağılımın kullanım alanlarını sınırlamaktadır. Gamma dağılımı, üstel değişkenlerin toplamı olarak yorumlanabildiğinden yaygın ve doğal bir yaşam dağılımı olarak kabul edilmekte, fakat içerdiği özel fonksiyonlar dağılımı matematiksel olarak incelemeyi zorlaştırmaktadır. Öte yandan, Weibull dağılımı esnek tehlike fonksiyonu ile farklı uygulama alanlarındaki yaşam verilerini modellemek için kullanılmaktadır. Log-normal dağılım ise, üzerine doğal logaritma uygulanan bir verinin normal dağılım şeklini alması durumunda kullanılabilmektedir; bu durum, normal dağılımın iyi bilinen teknikleriyle kolayca sonuç çıkarım yapılmasını sağlar. Yaşam dağılımları hakkında daha fazla detay ve farklı yaşam dağılımları için Marshall ve Olkin (2007) kaynağı incelenebilir.

Bir diğer yaşam dağılımı, Birnbaum ve Saunders (1969a) çalışmasında, normal rasgele değişken üzerine monoton bir dönüşüm uygulanarak, uçak malzemelerinin sürekli olarak maruz kaldığı titreşimler nedeniyle gerçekleşen yorulma (fatigue) süreci ve bu süreç sonunda gerçekleşen tükenişin (failure) modellenmesi amacıyla tanıtılmıştır. Dağılım ilk olarak yorgunluk tükenişinin modellenmesi için tanıtılmış olsa da zaman içerisinde kullanım alanı, belli bir eşik değere kadar biriken bir faktörün bir olayı meydana getirdiği durumlarda kullanımına genellenmiştir. Leiva (2019) çalışmasında, bu kullanım durumları için aşağıdaki uygulama örnekleri verilmiştir.

1. Isı nedeniyle nano devrelerdeki metalik kusurların taşınması.
2. Hava kirliliği nedeniyle akciğerlerde zararlı maddelerin birikmesi.
3. Endüstriyel atıklardan ortaya çıkan toksik kimyasalların insanlar tarafından sindirilmesi.
4. Çeşitli risk faktörlerinin yol açtığı kümülatif hasar ile kronik kalp hastalıklarının ve farklı kanser

türlerinin ortaya çıkması.

5. Zaman içinde atmosferde kirlletici maddelerin birikmesi nedeniyle hava kalitesindeki bozulma.
6. Deprem ve tsunami gibi doğal afetlerin meydana gelmesi.

Ayrıca, bu dağılım yalnızca yukarıdaki gibi birikimli süreçlerde değil, işletme, kriptografi, iktisat, finans, ziraat ve psikoloji gibi birçok farklı alandaki daha genel problemlerin modellenmesinde de kullanılmaktadır. Başlangıçta yorgunluk-tükeniş dağılımı olarak adlandırılan dağılım, uygulama çeşitliliğindeki artış nedeniyle zamanla Birnbaum-Saunders (BS) dağılımı olarak adlandırılmaya başlanmıştır.

Yaşam analizinin masraflı olması nedeniyle bu çalışmalarda büyük örneklemeler nadiren elde edilmektedir. Bu da verinin ekstrem kısımlarından yeterince gözlem elde edilmemesine sebep olmaktadır. Bu durum ise BS dağılımı gibi yaşam dağılımlarının, verinin merkezi kısımları ile uyumlu iken kuyruk kısımlarında uyumsuz olmasına neden olabilmektedir. Bu nedenle daha esnek yoğunluk fonksiyonuna sahip dağılımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla Díaz-García ve Leiva-Sánchez (2005) çalışmasında, genelleştirilmiş BS (GBS) dağılım ailesi tanımlanmıştır. Bu dağılım ailesi, BS dağılımı elde edilirken normal değişkene uygulanan monoton dönüşüm normal değişken yerine herhangi eliptik rasgele değişkene uygulanarak elde edilmiştir. Bu sayede simetrik dağılım ailesinin üyeleri olan, t , Cauchy, Laplace, lojistik ve Kotz dağılımları gibi modeller için genelleştirilmiş BS dağılımları elde edilmiştir. Elde edilen dağılımlar, daha esnek kuyruğa sahip olabilmekte ve tek modlu ya da çift modlu olabilmektedir. Bu ailenin kullanımı için esneklik argümanına ek olarak, kümülatif hasara maruz kalan materyallerin modellenmesinde de BS dağılımı gibi kullanılabilmektedir (Leiva ve ark., 2008). Ayrıca bu ailenin bir karakterizasyonu Athayde (2017) çalışmasında verilmiştir. Bu karakterizasyona göre uygun olarak ölçeklenmiş bir rasgele değişken çarpıma göre tersi ile aynı dağılımlı ise bu rasgele değişkenin dağılımı GBS ailesinin bir elemanı olmaktadır.

Reel uzayda değer alabilen normal dağılım gibi modellerin alternatifi olarak, daha basit yapıdaki dağılımlar kullanılabilir. Bu dağılımlara örnek olarak $a > 0$ bir sabit olmak üzere $(-a, a)$ gibi kapalı bir aralıkta değer alabilen düzgün, simetrik üçgensel ve kosinüs dağılımları örnek olarak gösterilebilir (Chew, 1968). Bu tez çalışmasında, GBS dağılımlarının yeni bir alt ailesi sınırlı aralıkta değer alabilen dağılımlara, monoton bir dönüşüm uygulanarak elde edilmiştir. Elde edilen ailenin Athayde (2017) çalışmasında verilen karakterizasyonu da sağladığı, dolayısıyla GBS ailesinin bir elemanı olduğu gösterilmiştir. Bu elde edilen yeni ailede log-logistic ya da Cauchy kuvvet (Power Cauchy) dağılımı gibi hali hazırda literatürde bulunan dağılımlar olduğu gibi birçok yeni dağılım da elde edilmiştir.

Yeni elde edilen ailenin elemanlarından biri olan $(-a, a)$ aralığındaki simetrik üçgensel dağılıma sahip bir rasgele değişkene dönüşüm uygulanarak elde edilen ve Üçgensel BS olarak adlandıracağımız dağılım, çalışmada incelenen temel dağılım olacaktır. BS dağılımı gibi iki parametreye sahip

ve sağ çarpık yapıda olan bu dağılım ğensel dağılımdan üretildiği için fonksiyonları iki parçadan oluşmakta ve sivri noktaya sahip olabilmektedir. Bu zellikler nedeniyle ğensel BS dağılımı aynı zamanda, Zhu ve Balakrishnan (2015) ve Zhu ve ark. (2019) alışmalarında incelenmiş olan Laplace BS dağılımına bir alternatif olmaktadır.

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde BS dağılımı ve GBS dağılım ailesi hakkında bilgi verilmiş ve literatürde yapılmış olan çalışmalar paylaşılmıştır. nc bölümde yeni dağılım ailesi türetilmiş, bu ailenin GBS ailesinin bir elemanı olduğu gösterilmiş, ailenin genel özellikleri incelenmiş ve bazı üretilen dağılımlar tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, yeni tanıtılan ailenin bir elemanı olan ğensel BS dağılımının özellikleri detaylıca incelenmiş ve sahip olduğu iki parametrenin tahmini için yedi farklı yöntem önerilmiştir. beşinci bölümde, önerilen tahmin edicilerin performanslarını incelemek için detaylı bir simülasyon çalışması yapılmış. altıncı bölümde ise dağılımın daha önce literatürde kullanılan dağılımlar kıyaslanması için gerçek veri uygulamaları yapılmıştır. Son olarak, sekizinci bölümde çalışmada elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve konu hakkındaki açık problemler paylaşılmıştır.



2. BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMLARI

2.1. Klasik Birnbaum-Saunders Dağılımı

Malzeme biliminde, yorgunluk, sürekli veya tekrarlayan yüklere maruz kalan malzemelerin zaman içinde yapısal olarak zayıflamasına ve sonunda tükenmesine sebep olan bir durum olarak tanımlanır. Yorgunluğun gerçekleşme biçimini açıklayan Miner kuralları (Miner, 2021) için olasılıksal bir yorum Birnbaum ve Saunders (1968) çalışmasında verilmiş ve sonrasında bu yorum geliştirilerek Birnbaum ve Saunders (1969a) çalışması ile yeni bir dağılım yorgunluk-yaşam (fatigue-life) dağılımı adıyla tanıtılmıştır. Daha sonra, Desmond (1985) çalışmasında bu dağılımın bir biyolojik model ile de elde edilebildiği gösterilmiş ve Birnbaum ve Saunders tarafından kullanılan kısıtlardan biri hafifletilerek dağılımın kullanım argümanı güçlendirilmiştir. Bu dağılım daha önceden farklı parametrik formlar kullanılarak Fletcher (1911) ve Freudenthal ve Shinozuka (1961) çalışmalarında tanımlanmış olsa da ilk olarak Birnbaum ve Saunders çalışmalarından sonra popülerleştirilmiştir. Kullanım alanı zaman içerisinde artan dağılım için sonradan Birnbaum-Saunders (BS) dağılımı olarak isimlendirilmiştir.

Malzeme üzerindeki baskın bir çatlağın genişliğinin, her bir döngüde gerçekleşen yüklemeler ile artması ve belli döngü sayısından sonra bir ω kritik değerini aşması ile yorgunluk tükenmesi (fatigue failure) gerçekleşmektedir. Birnbaum ve Saunders (1969a) çalışmasında, baskın çatlakta her bir döngüde gerçekleşen büyümeyi istatistiksel olarak bağımsız, aynı ortalama ve varyansa sahip rasgele değişkenler olarak kabul edilmiştir. Daha sonra, merkezi limit teoreminden faydalananarak, döngü sayısının çok fazla olması durumunda çatlaktaki toplam büyümenin yaklaşık olarak normal dağılımlı olacağı öne sürülmüştür. Bu sayede, çatlağın n -inci döngüdeki toplam büyüklüğünü X rasgele değişkeni ile gösterildiğinde bunun w kritik değerini aşması yani yorgunluk tükenişinin gerçekleşmesi olasılığı,

$$\begin{aligned} P(X > \omega) &= 1 - \Phi\left(\frac{\omega - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\omega}{\sigma_0\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}\mu_0}{\sigma_0}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\mu_0}{\sigma_0} - \frac{\omega}{\sigma_0\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilmiştir. Burada $\Phi(\cdot)$ normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonunu, μ_0 ve σ_0 ise her bir döngüde gerçekleşen çatlaktaki büyümenin ortalama ve standart sapmasını göstermektedir.

Daha sonra,

$$\alpha = \frac{\sigma_0}{\omega\mu_0} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{\omega}{\mu_0}$$

dönüşümleri yapıp, n baskın çatlakın w büyüklüğüne ulaşana kadar maruz kaldığı döngü sayısı, bir başka deyişle materyalin ömrünü gösteren x olarak alındığında, BS dağılımı için kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla

$$F_{BS}(x; \alpha, \beta) = \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right] \right), \quad x > 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2.1)$$

$$f_{BS}(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha\beta} \left[\left(\frac{\beta}{x} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{x} \right)^{3/2} \right] \phi \left(\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right] \right), \quad x > 0 \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2.2)$$

olarak elde edilmiştir. Burada α ve β pozitif parametreleri sırasıyla dağılımın şekil ve ölçek parametrelerini, $\phi(\cdot)$ ise standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. Ayrıca, $F_{BS}(\beta; \alpha, \beta) = 1/2$ olduğundan, β ölçek parametresinin aynı zamanda dağılımının medyanı olduğu da görülmektedir. Bu çalışma boyunca BS dağılımına sahip bir rasgele değişken için kısaca $X \sim BS(\alpha, \beta)$ gösterimi kullanılacaktır.

Dağılımın fiziksel elde edilışinde görüldüğü üzere bir BS rasgele değişkeni standart normal rasgele değişken ile ilişkilidir. Dahası bu ilişki

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{X}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{X}} \right), \quad (2.3)$$

ve

$$X = \beta \left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right)^2 \quad (2.4)$$

stokastik gösterimleri ile de verilebilmektedir. Burada $X \sim BS(\alpha, \beta)$ iken $Z \sim N(0, 1)$ yani standart normal dağılımlı bir rasgele değişkeni göstermektedir. Burada (2.3) gösteriminin doğruluğu (2.1)'den elde edilmekte, (2.4) gösterimi ise önceki dönüşümde X rasgele değişkeninin yalnız bırakılması ile elde edilebilmektedir. Ayrıca bir diğer ilişki, (2.3) özelliğinde her iki tarafın karesi alındığında,

$$Z^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{X}{\beta} + \frac{\beta}{X} - 2 \right) \sim \chi_{(1)}^2 \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Burada, $\chi_{(1)}^2$ bir serbestlik dereceli ki-kare dağılımını göstermektedir. Dahası (2.4) ve (2.5) kullanılarak BS dağılımlı rasgele sayı üretilebilmektedir (Chang ve Tang, 1994a,b). Bu rasgele

sayı üretme yöntemleri, Rieck (2003) çalışmasında ayrıca incelenmiş ve karşılaştırılmıştır.

BS rasgele değişkenin iki önemli özelliği ölçek ve çarpıma göre ters dönüşümlere kapalı olmasıdır. Bu özellikler sırasıyla;

$$(1) cX \sim BS(\alpha, c\beta),$$

$$(2) X^{-1} \sim BS(\alpha, \beta^{-1}),$$

olarak verilebilir. Bu özellikler birlikte ele alındığında,

$$X/\beta \stackrel{d}{=} \beta/X \sim BS(\alpha, 1) \quad (2.6)$$

sağlandığı ve bu sayede BS dağılımının Seshadri (1965) ve Saunders (1974) çalışmalarında incelenen dağılım ailesinin bir elemanı olduğu görülmektedir. Daha sonra, bu özelliğin tüm BS ailelerinin karakteristik bir özelliği olduğu Athayde (2017) çalışmasında gösterilmiştir.

BS dağılımın momentleri literatürde çeşitli yöntemler ile elde edilmiştir. Örneğin, Rieck (1999) çalışmasında dağılımın hem tam sayı hem de kesirli momentleri sinh-normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu üzerinden belirlenmiştir. Alternatif olarak, BS dağılımı için birinci ve ikinci momentler, (2.5) ilişkisi kullanılarak da elde edilebilmektedir. Öyle ki, ki-kare dağılımının beklenen değer ve varyansı

$$E \left[\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{X}{\beta} + \frac{\beta}{X} - 2 \right) \right] = 1 \quad \text{ve} \quad Var \left[\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{X}{\beta} + \frac{\beta}{X} - 2 \right) \right] = 2$$

olduğundan BS dağılımının beklenen değer ve varyansı, bazı basit dönüşümler ve (2.6) ilişkisi kullanılarak

$$E(X) = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad \text{ve} \quad Var(X) = (\alpha\beta)^2 \left(1 + \frac{5\alpha^2}{4} \right)$$

elde edilmektedir. Ayrıca, dağılımın r -inci tam sayı momenti, (2.4) ilişkisi ile

$$E(X^r) = \beta^r \sum_{j=0}^r \binom{2r}{2j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{(2r-2j+2i)!}{2^{r-j+i}(r-j+i)!} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2r-2j+2i},$$

olarak belirlenmektedir. Yukarıdaki momentlerden faydalanılarak, dağılımın şeklinin incelenmesi için çarpıklık katsayısı (γ_1) ve basıklık katsayısı (γ_2)

$$\gamma_1 = \frac{16\alpha^2(11\alpha^2 + 6)^2}{(5\alpha^2 + 4)^3},$$

$$\gamma_2 = 3 + \frac{6\alpha^2(93\alpha^2 + 40)}{(5\alpha^2 + 4)^2},$$

olarak elde edilmektedir. Görüldüğü üzere BS dağılımının yoğunluk şekli yalnızca α değerinden etkilenmektedir. Burada γ_1 değeri açık bir biçimde her zaman pozitif olduğundan dağılımın sağa çarpık olduğu ve α artırıldığında çarpıklığın arttığı, α azaldığında ise dağılımın simetrikleştiği görülmektedir. γ_3 incelendiğinde, BS dağılımının her zaman standart normal dağılımın basıklık değeri olan 3 değerinden büyük basıklık değerine sahip olduğu, yani BS dağılımının standart normal dağılımdan daha kalın kuyruklu olduğu görülmektedir.

BS dağılımı oyf'sinin şeklini genellikle bozulmadan, $\beta = 1$ alarak inceleyebiliriz. Burada ilk olarak, $x \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow \infty$ limit durumlarında oyf'nin 0 olduğu görülmektedir. Ayrıca oyf'nin türevinin işareti yalnızca,

$$-x^3 - (\alpha^2 + 1)x^2 + (3\alpha^2 - 1)x + 1$$

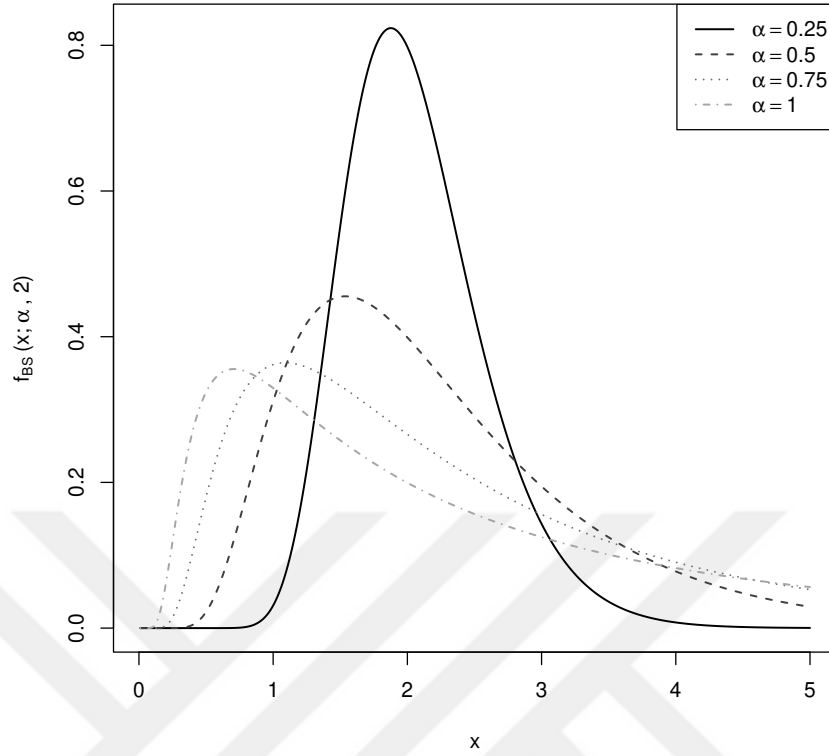
ifadesine bağlı olduğundan dağılımın tüm pozitif α ve β değerleri için tek modlu olduğu işaret incelemesiyle kolaylıkla görülebilir, ancak BS dağılımının modu açık bir biçimde ifade edilememektedir. Bu nedenle, yukarıda verilen ifadenin kökünün numerik olarak belirlenmesiyle dağılımın modu bulunabilmektedir. Eşitliğin çözümlemesi ile elde edilen kök değeri β ile çarpılarak dağılımın genel durumu için mod elde edilebilmektedir. Şekil 2.1'de $\beta = 2$ iken farklı α değerleri için BS dağılımı yoğunluk şekilleri verilmiştir. Buradan α değeri azaldığında dağılımın simetrikleştiği ve değişkenliğin azaldığı görülmektedir. α değerinin arttığı durumda ise dağılımın kuyruğunun kalınlaştığı gözlenmektedir. Buradan α şekil parametresinin dağılımın hem çarpıklığını hem de basıklığını yönettiği gözlenebilmektedir.

BS dağılımı bir ömür dağılım olması nedeni ile dağılımın güvenilirlik ve tehlike fonksiyonunun incelenmesi oldukça önemlidir. Buna göre BS dağılımı için güvenilirlik ve tehlike fonksiyonu sırasıyla

$$\begin{aligned} R_{BS}(x; \alpha, \beta) &= 1 - F_{BS}(x; \alpha, \beta) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}}\right)\right), \\ &= \Phi\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}}\right)\right), \quad x > 0, \end{aligned}$$

ve

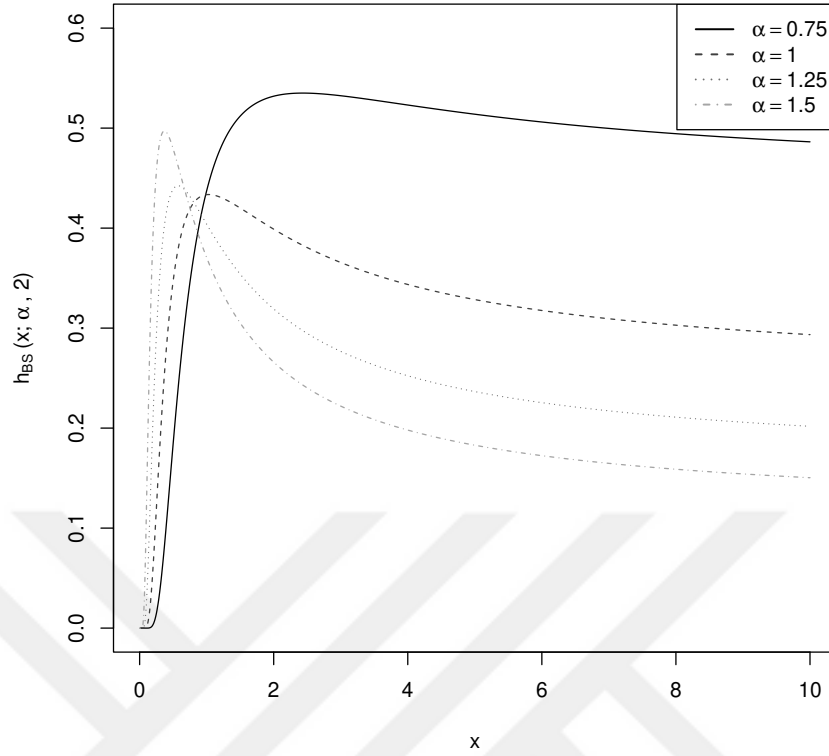
$$\begin{aligned} r_{BS}(x; \alpha, \beta) &= \frac{f_{BS}(x; \alpha, \beta)}{1 - F_{BS}(x; \alpha, \beta)}, \\ &= \frac{1}{2\alpha\beta} \left[\left(\frac{\beta}{x}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{x}\right)^{3/2} \right] \phi\left(\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}}\right]\right) \left[\Phi\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}}\right)\right) \right]^{-1}, \end{aligned}$$



Şekil 2.1. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için BS dağılımı yoğunluk grafikleri.

şeklinde yazılabilmektedir. Bir yaşam dağılımının veriye uygunluğu kontrol edilirken tehlike fonksiyonunun şeklinin incelenmesi oldukça önemlidir. BS tehlike fonksiyonunun şekli ilk olarak Mann ve ark. (1974) çalışmasında incelenmiş ve ortalama olarak azalmayan bir fonksiyon olduğu gözlenmiştir. Ancak tehlike fonksiyonunun tek modlu olduğunun ispatları Kundu ve ark. (2008) ve Bebbington ve ark. (2008) çalışmalarında verilmiştir. Şekil 2.2.'de $\beta = 2$ iken farklı α değerleri için tehlike fonksiyonu şekilleri verilmiştir. Şekilden tehlike fonksiyonunun tek modlu yapıda olduğu görülmektedir. Ayrıca $x \rightarrow \infty$ iken > 0 bir değere yakınsadığı ve bu nedenle BS dağılımı tehlike fonksiyonunun büyük x değerlerinde üstel dağılım gibi davrandığı sonucuna ulaşılabilmektedir.

Normal dağılımla doğrudan ilişkili olan BS dağılımı ayrıca literatürdeki bazı yaşam dağılımları ile de ilişkilidir. Örneğin, yorgunluk verilerini modellemede kullanılan bir diğer model olan ters Gaus dağılımının bir asimptotik durumu olarak BS dağılımının elde edildiği Bhattacharyya ve Fries (1982) çalışmasında verilmiştir. Ayrıca bu dağılım dağılım ile BS dağılım arasındaki bir diğer ilişki Desmond (1986) çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada bildirildiğine göre, ters Gaus dağılımlı bir rasgele değişken ve ters Gaus rasgele değişkenin çarpmaya göre tersinin eşit ağırlıktaki karması BS rasgele değişkendir. Bu ilişkinin pratik birçok kullanım alanı olmuştur. Örnek olarak bu bağıntı kullanılarak, Balakrishnan ve ark. (2011) çalışmasında BS dağılımının karmaları elde edilmiştir ve Pradhan ve Kundu (2013) çalışmasında progresif sansürlü örneklemelerde sonuç çıkarım yapılmıştır. BS rasgele



Şekil 2.2. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için BS dağılımının tehlike fonksiyonu grafikleri.

değişken için bir diğer kullanışlı bağıntı olarak sinh-normal rasgele değişkenle sahip olduğu ilişki gösterilebilir. Rieck ve Nedelman (1991) çalışmasında bir BS rasgele değişkeninin doğal logaritmasının sinh-normal rasgele değişken olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu ilişki sayesinde Rieck (1999) çalışmasında sinh-normal dağılım moment çıkaran fonksiyonu üzerinden BS dağılımı için tam sayı ve kesirli momentler elde edilmiştir.

Sonuç çıkarım bakımından BS dağılımı ilk olarak Birnbaum ve Saunders (1969b) çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmada, dağılımın en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin asimptotik dağılımları Engelhardt ve ark. (1981) çalışmasında, varlık ve tekliğinin ispatı ise Balakrishnan ve Zhu (2014) çalışmasında verilmiştir. Açık formda ve oldukça basit bir formülle yazılabilen değiştirilmiş (modified) momentler tahmin yöntemi, Ng ve ark. (2003) çalışmasında tanıtılmıştır. Daha sonra, From ve Li (2006) çalışmasında dört farklı parametre tahmin yöntemi paylaşılmıştır. Bayesçi yaklaşımla ilk parametre tahmini, Padgett (1982) çalışmasında şekil parametresi biliniyor kabul edilir iken bilgi içermeyen (non-informative) önsel dağılım kullanılarak ölçek parametresinin tahmin edilmesi ile gerçekleşmiştir. Daha sonra, Achcar (1993) çalışmasında her iki parametrenin de bilinmediği durumda Bayes tahmin ediciler elde edilmiştir. Son zamanlarda yapılan, Wang ve ark. (2016) çalışmasında parametreler için Bayes tahmini farklı önsel dağılımlar kullanılarak elde edilmiş ve Teimouri (2023) çalışmasında Gibbs örnekleyici üzerinden oldukça hızlı sonuç veren

Bayes tahmin ediciler önerilmiştir.

2.2. Genelleştirilmiş Birnbaum-Saunders Dağılımı

Tek değişkenli eliptik dağılımlar $\mathbb{R}$ 'de tanımlı tüm simetrik dağılımları içermektedir. Bir X rasgele değişkeni ancak ve ancak $g(u) \geq 0$ ve

$$\int_0^\infty u^{-1/2} g(u) du = 1$$

sağlayan bir üretici fonksiyon olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \frac{c}{\sigma} g\left(\left[\frac{x - \mu}{\sigma}\right]^2\right)$$

formunda ise eliptik dağılıma sahiptir denir. Burada c normalize sabitini, μ konum parametresini ve σ ölçek parametresini göstermektedir. X rasgele değişkeni ayrıca $X \sim EC(\mu, \sigma, g)$ olarak da gösterilir. Bu ailenin üyesi olan dağılımlara örnek olarak normal dağılım, t-dağılımı, Cauchy dağılımı, Laplace dağılımı, Lojistik dağılım, Kotz Tip VII dağılımı gösterilebilir. Eliptik dağılımlarla ilgili daha fazla bilgi için bazı kaynaklar: (Fang ve ark., 1990; Gupta ve Varga, 1993).

Çizelge 2.1. Bazı eliptik dağılımlar için normalize sabitleri ve üretici fonksiyonları.

Dağılım	c	$g()$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$
Cauchy	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{1+(z)^2}$
t	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}$	$\left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$
Laplace	$\frac{1}{2}$	$\exp(- z)$
Lojistik	1	$\frac{\exp(-z)}{(1+\exp(-z))^2}$
Pearson VII	$\frac{\Gamma(q)}{\sqrt{(r\pi)}\Gamma(q-1/2)}$	$\left(1 + \frac{z^2}{r}\right)^{-q}$
Generalized t	$\frac{p}{2q^{1/p}B(1/p, q)}$	$\left(1 + \frac{ z ^p}{q}\right)^{-q-1/p}$

Díaz-García ve Leiva-Sánchez (2005) çalışmasında (2.1) ve (2.2) kullanılan standart normal dağılım yerine eliptik dağılımlardan birinin kümülatif dağılım fonksiyonu ya da olasılık yoğunluk fonksiyonu ile değiştirilerek BS dağılımının bir genelleştirilmesi için dağılım ve olasılık yoğunluk

fonksiyonları sırasıyla

$$F_{GBS}(x; \alpha, \beta, g()) = G\left(\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right]\right), \quad x > 0,$$

$$f_{GBS}(x; \alpha, \beta, g()) = \frac{c}{2\alpha\beta} \left[\left(\frac{\beta}{x}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{x}\right)^{3/2} \right] g\left(\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right]\right), \quad x > 0,$$

olarak elde edilebilmektedir. Burada $G()$, eliptik dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Bu genelleştirme yapılırken normal dağılım yerine eliptik dağılım kullanılmasının nedeni olarak (a) normal dağılım altında geliştirilen teorinin, eliptik dağılımlar altında türetilen teorinin özel bir durumu olması; (b) normal dağılımın birçok özelliği eliptik dağılımlara genişletilebilir olması; (c) normal sonuç çıkarım teorisindeki bazı önemli istatistikler, tüm eliptik dağılım ailesi altında değişmez olması gösterilebilmektedir.

GBS dağılım ailesi için (2.4) ve (2.3) stokastik gösterimleri ise

$$T = \beta \left(\frac{\alpha S}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha S}{2}\right)^2 + 1} \right)^2 \sim GBS(\alpha, \beta, g) \quad (2.7)$$

ve

$$S = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right) \sim EC(0, 1, g) \quad (2.8)$$

verilen formlara dönüşmüştür. Burada $GBS(\alpha, \beta, g)$, g çekirdek fonksiyonu ile üretilmiş α ve β parametrelili genelleştirilmiş BS dağılımını göstermektedir.

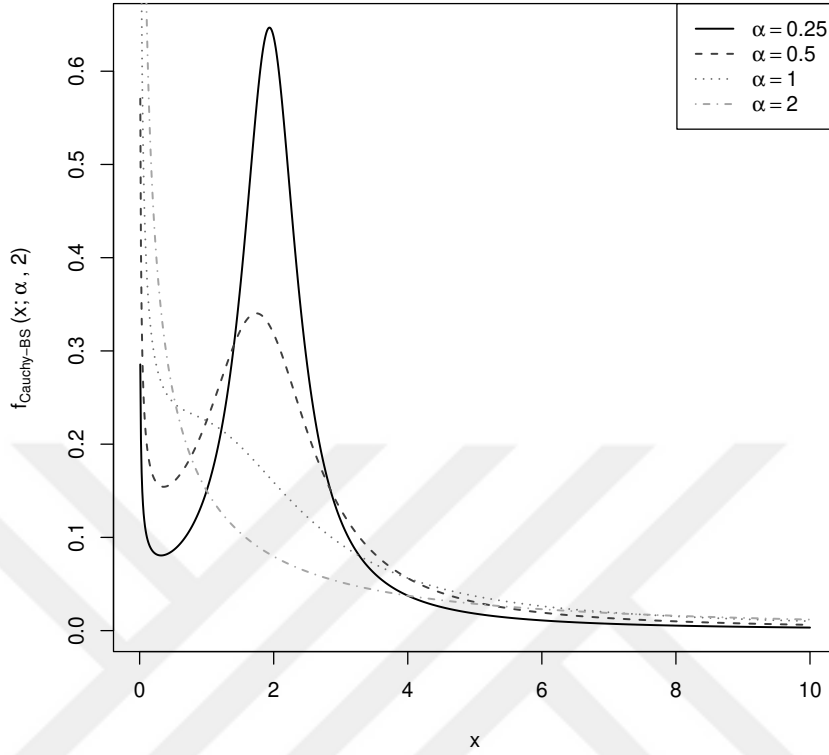
Aşağıda GBS ailesinin elemanı olan bazı dağılımlar için olasılık yoğunluk fonksiyonları, yoğunluk grafikleri ve literatür paylaşılmıştır.

Cauchy-BS dağılımı: Çizelge 2.1’de verilen Cauchy dağılımının çekirdek fonksiyonu kullanılarak *Cauchy – BS* dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Cauchy-BS}(x) = \frac{1}{2\alpha\beta\pi} \left[\left(\frac{\beta}{x}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{x}\right)^{3/2} \right] \left[1 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x} - 2 \right) \right]^{-1}, \quad x > 0,$$

olarak elde edilmektedir. Verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu için şekil incelemesi Wang ve ark. (2020) çalışmasında yapılmıştır. Bu çalışmada, dağılımın yoğunluk grafiğinin $\alpha \leq 0.910721$ olması durumunda azalan-artan-azalan, $\alpha > 0.910721$ durumunda ise monoton azalan bir şekil aldığı gösterilmiştir (Şekil 2.3). Alam (2022) çalışmasında ise dağılım parametrelerin tahmini için çeşitli tahmin ediciler önerilmiş ve bunların karşılaştırılması yapılmıştır. Ayrıca aynı çalışmada *Cauchy – BS* dağı-

lını önerilen tahmin yöntemleri kullanılarak farklı iklim verilerine uygulanmıştır.

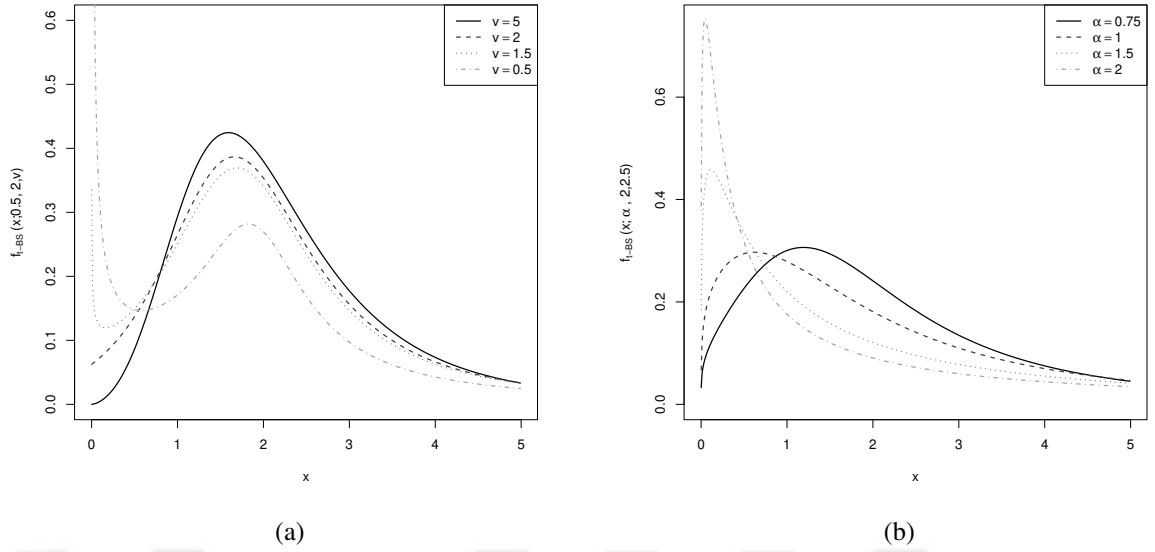


Şekil 2.3. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için Cauchy BS dağılımının yoğunluk fonksiyonu grafikleri.

t-BS dağılımı: Çizelge 2.1’de verilen *t* dağılımının çekirdek fonksiyonu kullanılarak üç parametrelili *t* – BS dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{t-BS}(x) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{2\alpha\beta\sqrt{v\pi}\Gamma(v/2)} \left[\left(\frac{\beta}{x} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{x} \right)^{3/2} \right] \left(1 + \frac{1}{v\alpha^2} \left[\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x} - 2 \right] \right)^{-(v+1)/2}, \quad x > 0$$

olarak elde edilmektedir. *t* dağılımı, parametresinin özel ve limit durumlarında Cauchy dağılımı ($v = 1$) ve normal dağılımı ($v \rightarrow \infty$) içerdiğinden, *t* – BS dağılımı da *Cauchy* – *BS* ve klasik *BS* dağılımlarını içermektedir. Bu nedenle *t* – *BS* dağılımı klasik *BS* ve *Cauchy* – *BS* dağılımlarından daha esnek yoğunluk şekillerine sahip olabilmektedir (Şekil 2.4). Bu esnek yapısı dağılımın özellikle tipik olmayan verilere uygulanmasını uygun kılmaktadır. Örneğin, Paula ve ark. (2012) çalışmasında dağılım, oldukça çarpık bir yapıya sahip olan sigorta verisine uygulanmıştır. Ayrıca Azevedo ve ark. (2012) çalışmasında dağılımın tehlike fonksiyonu incelenmiştir. Şekil 2.4’de dağılımın yoğunluk şekilleri önce α ve β sabit iken değişen v değerleri için, sonra da β ve v sabit iken değişen α değerleri için verilmiştir.



Şekil 2.4. (a) α ve β sabit iken değişen ve v değerleri; (b) β ve v sabit iken değişen ve α değerleri için t-BS yoğunluk grafikleri.

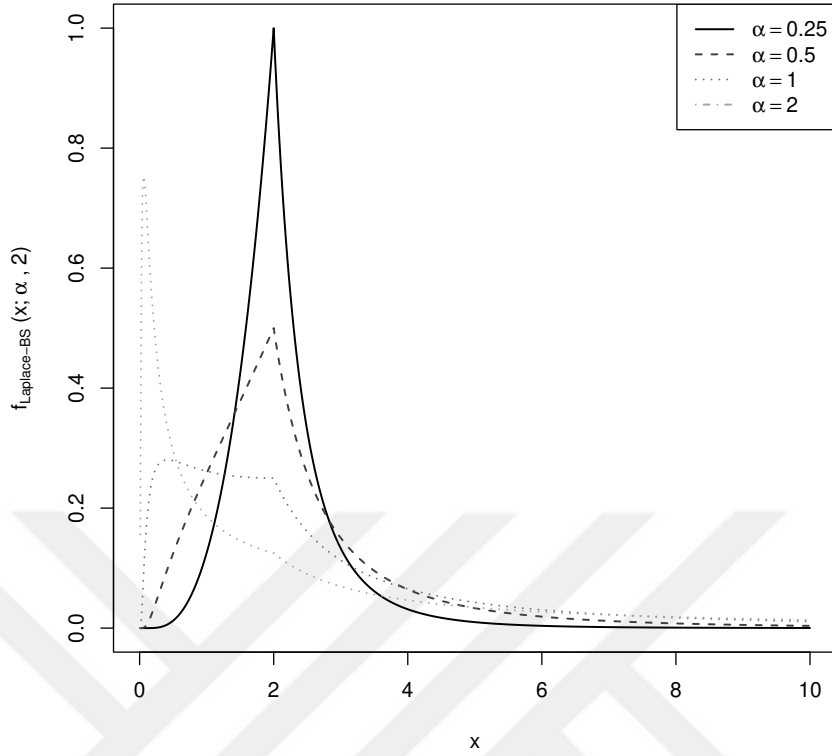
Laplace-BS dağılımı: Çizelge 2.1’de verilen Laplace dağılımının çekirdek fonksiyonu kullanılarak *Laplace – BS* dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{LBS}(x) = \frac{1}{4\alpha\beta} \left[\left(\frac{\beta}{x} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{x} \right)^{3/2} \right] e^{-\left| \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right|}, \quad x > 0,$$

olarak elde edilmektedir. Bu fonksiyon x için sürekli ancak dağılımın medyan değerini gösteren β değerinde türevlenebilir değildir. Yani, yoğunluk grafiğinde β noktasında köşe nokta oluşmaktadır. Dağılımın hem yoğunluk hem de tehlike fonksiyonu için şekil analizi Zhu ve Balakrishnan (2015) çalışmasında verilmiştir. Buna göre, şekil 2.5’te görüldüğü üzere dağılımın yoğunluk grafiği $\frac{4}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3} < \alpha < 1$ iken iki modlu diğer durumlarda ise tek modlu yapıda olmaktadır. Ayrıca Zhu ve Balakrishnan (2015) ve Zhu ve ark. (2019) çalışmalarında dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin varlık ve tekliği hem tam veri hem de sansürlü veri durumlarında incelenmiştir. Alam ve Nassar (2021) çalışmasında, dağılımı kirli (contaminated) veri durumunda, beton basınç dayanıklılığı verisine farklı tahmin ediciler ile uygulanmıştır.

Lojistik-BS dağılımı: Çizelge 2.1’de verilen lojistik dağılımının çekirdek fonksiyonu kullanılarak *lojistik – BS* dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{LojistikBS}(x) = \frac{1}{2\alpha\beta} \left[\left(\frac{\beta}{x} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{x} \right)^{3/2} \right] \frac{e^{-\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right)}}{\left(1 + e^{-\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right)} \right)^2}, \quad x > 0,$$



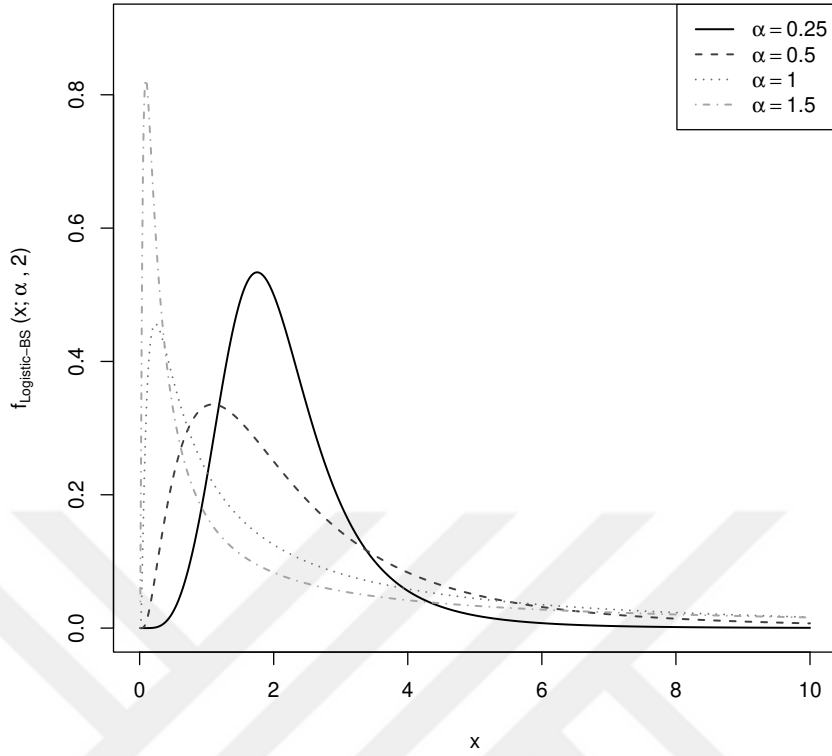
Şekil 2.5. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için Laplace BS dağılımının yoğunluk fonksiyonu grafikleri.

olarak elde edilebilmektedir. Normal dağılımın aksine lojistik dağılım için kdf açık olarak yazılabildiğinden logistic BS dağılımının da kdf'si açık olarak,

$$F_{LojistikBS}(x) = \frac{1}{\left(1 + e^{-\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}}\right)}\right)}, \quad x > 0$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Bu dağılımın tehlike fonksiyonu şeklinin incelendiği Alam ve Almalki (2021) çalışmasında ayrıca bu dağılımın yoğunluğunun klasik BS dağılımından daha ince ya da kalın kuyruklu olabileceği belirtmişlerdir (Şekil 2.6). Alam ve Almalki (2022) çalışmasında ise dağılımın özellikleri detaylı olarak incelenmiş ve kanser ve tüberküloz verilerinde uygulanarak literatürdeki diğer ilgili dağılımlarla kıyaslanmıştır.

Genelleştirilmiş t-BS dağılımını: Çizelge 2.1'de verilen ve McDonald ve Newey (1988) çalışmasında üstel güç (power exponential), normal, Laplace, t dağılımlarını içerecek şekilde tanımlanan genelleştirilmiş t dağılımı çekirdek fonksiyonu kullanılarak genelleştirilmiş $t - BS$ dağılımı için olasılık



Şekil 2.6. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için Lojistik BS dağılımının yoğunluk fonksiyonu grafikleri.

yoğunluk fonksiyonu

$$f_{GTBS}(x) = \frac{p}{4\alpha\beta q^{1/p} B(1/p, q)} \left(1 + \frac{1}{q} \left| \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right|^p \right)^{-(q+1/p)}$$

olacak şekilde Genç (2013) çalışmasında tanıtılmıştır. Dört parametre içeren dağılım, genişletilmiş BS ailesinin birçok elemanı içerdiği için oldukça esnek yoğunluk grafiğine sahiptir. Dağılımın esnekliğinden faydalanarak Nakamura ve ark. (2017) çalışmasında dağılım için bir regresyon modeli önermişlerdir.

Aşağıda Athayde (2017) çalışmasında verilen teorem ile GBS dağılım ailesi karakterize edilmiştir. Bu teoreme göre ölçek dönüşümü ve çarpmaya göre ters dönüşüme kapalı olan tüm rasgele değişkenler genelleştirilmiş BS dağılım ailesinin bir elemanıdır. Aynı çalışmada bu karakterizasyonu kullanarak gözlenen verilere GBS dağılımlarının uygunluğunu test etmek için grafiksel bir süreç tanımlamışlardır.

Teorem 1. (Athayde, 2017) T , pozitif uzayda tanımlı ve sürekli bir rasgele değişken olsun. O halde, $T \sim GBS(\alpha, \beta, g)$ olması için gerek ve yeter koşul uygun bir biçimde ölçeklenmiş T rasgele değişkenini ile aynı rasgele değişkenin çarpımına göre tersinin aynı dağılımlı olmasıdır.

3. YENİ BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIM AİLESİ

Önceki bölümde görüldüğü üzere klasik BS dağılımı için kümülatatif dağılım fonksiyonu normal dağılım kümülatif dağılım fonksiyonunda $\xi_{BS}(x) = \left(\sqrt{x} - \sqrt{1/x}\right)$ ($\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ durumu) fonksiyonu yazılması ile, log-normal dağılım ise $\xi_{LN}(x) = \ln x$ fonksiyonun yazılması ile elde edilmektedir. Bu iki fonksiyonun da tanım kümeleri $(0, \infty)$ olup, kesin artan ve türevlenebilir fonksiyonlar olduğu görülebilmektedir. Ayrıca fonksiyonların limit değerleri normal dağılımın tanım kümesi ile uyumludur. Yani, $x \rightarrow 0$ ise $\xi(x) \rightarrow -\infty$ ve $x \rightarrow \infty$ ise $\xi(x) \rightarrow \infty$ şeklindedir.

Bu çalışmada ise normal kdf yerine, $(-a, a)$ sınırlı uzayında tanımlı ve simetrik olan herhangi bir Z rasgele değişkeninin kdf'si $F_Z(\cdot)$ içine

$$k(x) = a \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

fonksiyonu

$$F_Z(k(x))$$

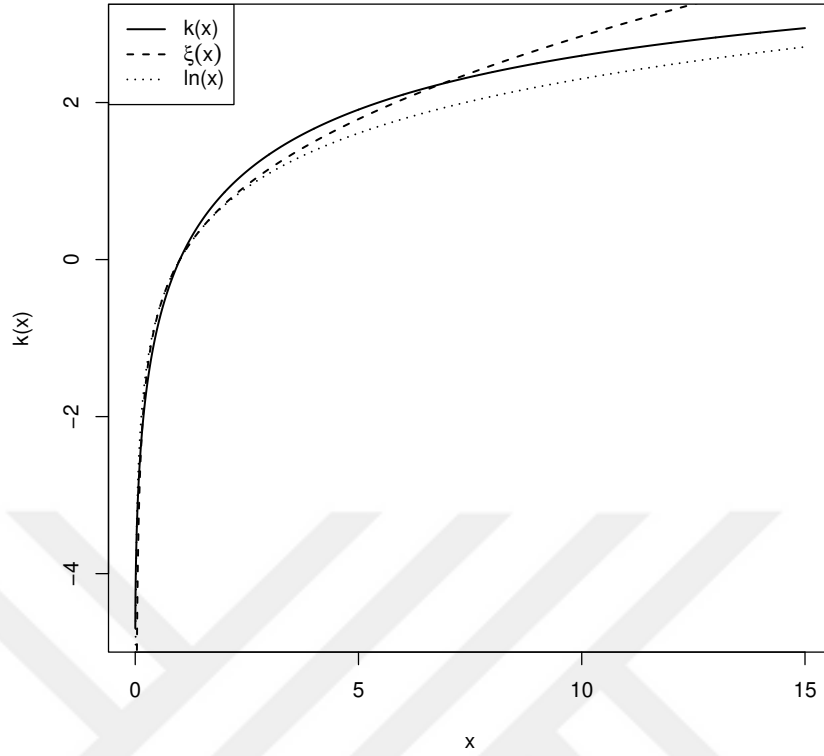
şeklinde kullanılarak yeni aile üretilecektir. Burada $k(\cdot)$ fonksiyonun bu formda seçilmesinin nedeni, BS ve log-normal dağılımda kullanılan $\xi_{BS}(\cdot)$ ve $\xi_{LN}(\cdot)$ fonksiyonları ile sahip olduğu benzer özelliklerdir (Şekil 3.1). Öyle ki $k(\cdot)$ fonksiyonu da

- tanım kümesi $(0, \infty)$,
- türevlenebilir,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -a$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = a$,

özelliklerini sağlamaktadır. Ayrıca bir önceki bölümde BS rasgele değişkenin çarpımın tersi dönüşümüne kapalı olmasının nedeni olan $\xi_{BS}(x) = -\xi_{BS}(1/x)$ özelliği de $k(x) = -k(1/x)$ olacak şekilde sağlanır.

$k(x)$ fonksiyonuna şekil ve ölçek parametrelerinin eklenmesi ile,

$$k(x; \alpha, \beta, a) = a \frac{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} - 1}{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} + 1}$$



Şekil 3.1. $k(x)$, $\xi_{BS}(x)$ ve $\xi_{LN}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri.

olarak yazılabilir. Bu fonksiyon kullanılarak yeni dağılım ailesi için kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla

$$H(x; \alpha, \beta, a) = F_z(k(x; \alpha, \beta, a)), \quad x > 0, \quad (3.1)$$

$$h(x; \alpha, \beta, a) = k'(x; \alpha, \beta, a) f_z(k(x; \alpha, \beta, a)), \quad x > 0, \quad (3.2)$$

formlarında elde edilir. Burada $f_z(\cdot)$, Z rasgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $k'(x; \alpha, \beta, a)$ ise k fonksiyonunun x 'e göre birinci türevini göstermektedir ve

$$k'(x; \alpha, \beta, a) = a\beta^{\alpha/2} \frac{x^{\alpha/2-1}}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2}$$

olarak elde edilmektedir.

Bu ailede bir dağılıma sahip olan bir X rasgele değişkeni, üretilmesinde kullanılan, sınırlı alanda tanımlı ve simetrik Z rasgele değişkeni ile aşağıdaki stokastik gösterimler üzerinden ilişkilidir.

$$X \stackrel{d}{=} \beta \left(\frac{2a}{a-Z} - 1 \right)^{2/\alpha}, \quad (3.3)$$

$$Z \stackrel{d}{=} a \frac{X^{\alpha/2} - \beta^{\alpha/2}}{X^{\alpha/2} + \beta^{\alpha/2}}. \quad (3.4)$$

Burada bu ilişkilerden faydalanılarak dağılımın çeşitli özellikleri elde edilebilmektedir.

Ayrıca, (3.3) eşitliğinde,

$$\frac{2a}{a - Z} - 1 = \frac{2}{1 - Z/a} - 1$$

olarak yazılabilmektedir. Burada $Z_1 = Z/a$ şeklinde tanımlanırsa, Z_1 rasgele değişkeni $(-1, 1)$ aralığında tanımlı olacaktır. Bu da genel durum için a değerinin üretilen dağılımlara etkisi olmadığını göstermektedir. Bu çalışma boyunca aksi belirtilmediği sürece $a = 1$ olarak kullanılacaktır. Bu nedenle $h(x; \alpha, \beta, a)$ yerine $h(x; \alpha, \beta)$ gösterimi, $H(x; \alpha, \beta, a)$ yerine ise $H(x; \alpha, \beta)$ gösterimi kullanılacaktır.

Bu ailede kullanılan üretici dağılımların sınırlı bir aralıkta olması nedeniyle, yeni elde edilen ailenin daha önce tanımlanmış GBS dağılım ailesinden matematiksel olarak daha basit formda modeller üretmesi beklenmektedir. Ayrıca $k(\cdot)$ fonksiyonunun $\xi_{BS}(\cdot)$ ile benzer özellikleri sağlaması sebebiyle aşağıdaki teorem ile verilen BS dağılımlarının sağladığı karakteristik özellikler bu aile tarafından da sağlanmaktadır.

Teorem 2. $X \sim H(x; \alpha, \beta)$ ve $c > 0$ bir sabit olsun. O halde,

1. $cX \sim H(x; \alpha, c\beta)$,
2. $X^{-1} \sim H(x; \alpha, \beta^{-1})$,

sağlanır.

İspat: İlk olarak, özellik (1)'in ispatı için $Y = cX$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda Y için kdf

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(cX \leq y) = H(y/c) = F_Z(k(y/c, \alpha, \beta))$$

olduğu görülebilir. Burada

$$k(y/c, \alpha, \beta) = \frac{\sqrt{(y/c\beta)^\alpha} - 1}{\sqrt{(y/c\beta)^\alpha} + 1} = k(y, \alpha, c\beta)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$F_Y(y) = H(y; \alpha, c\beta)$$

olduğu görülür.

Özellik (2)'nin ispatı için ise benzer şekilde $Y = X^{-1}$ tanımlayalım. Böylece $k(\cdot)$ 'nin özelliğini ve Z 'nin simetrikliğini kullanarak

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X^{-1} \leq y) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{y}\right) = 1 - H\left(\frac{1}{y}, \alpha, \beta\right) = 1 - F_Z\left(k\left(\frac{1}{y}, \alpha, \beta\right)\right) \\ &= F_Z\left(-k\left(y, \alpha, \frac{1}{\beta}\right)\right) = F_Z\left(k\left(y, \alpha, \frac{1}{\beta}\right)\right) = H\left(y, \alpha, \frac{1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

şeklinde ispatlanır. $\square$

Yukarıda verilen Teorem 1. ile önceki bölümde verilen Teorem 2. birlikte kullanıldığında aşağıdaki sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 1: $X \sim H(x; \alpha, \beta)$ ise

$$\frac{X}{\beta} \stackrel{d}{=} \frac{\beta}{X} \sim H(x; \alpha, 1)$$

sağlanır.

Sonuç 2: Yeni üretilen dağılım ailesi ayrıca GBS dağılım ailesinin bir elemanıdır.

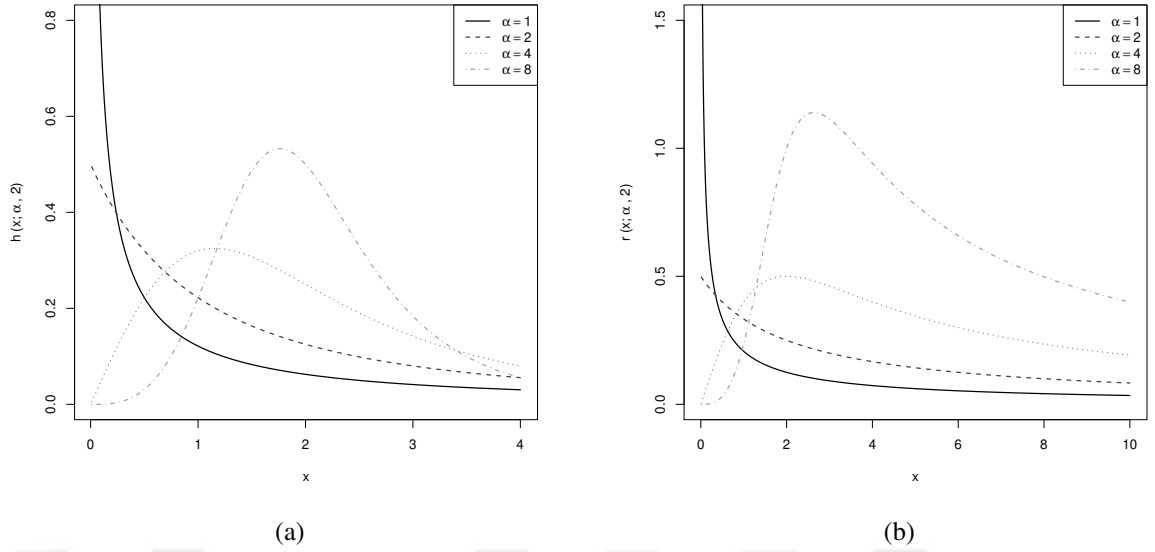
Burada ilk sonuç Teorem 2'deki özelliklerden ikinci sonuç ise Teorem 1'den elde edilmiştir.

Çizelge 3.1'de kullanılabilecek bazı Z rasgele değişkeni dağılımların bir listesi verilmiştir. Bu dağılımların kdf ve oyf'leri (3.1) ve (3.2) ifadelerinde kullanılması ile elde edilen yeni dağılımlar için olasılık yoğunluk fonksiyonları, kümülatif dağılım fonksiyonları ve tehlike fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.1. Yeni dağılım üretilirken kullanılabilecek üretici dağılımlar için fonksiyonlar

Dağılım	Kdf ($F_Z(z)$)	Oyf ($f_Z(z)$)	Tanım kümesi
Düzgün	$\frac{z+1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-1 \leq z \leq 1$
Arcsinus	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin z$	$\frac{1}{\pi \sqrt{(1+z)(1-z)}}$	$-1 \leq z \leq 1$
Kosinus	$\frac{\pi + z + \sin z}{2\pi}$	$\frac{\cos(z) + 1}{2\pi}$	$-\pi \leq z \leq \pi$
Sinus	$\frac{1 + \sin z}{2}$	$\frac{\cos(z)}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$
Çift yönlü kuvvet	$\begin{cases} (1/2)(1+z)^\gamma \\ 1 - (1/2)(1-z)^\gamma \end{cases}$	$\begin{cases} (\gamma/2)(1+z)^{\gamma-1} \\ (\gamma/2)(1-z)^{\gamma-1} \end{cases}$	$\begin{cases} -1 < z \leq 0 \\ 0 \leq z < 1 \end{cases}$
U-Karesel	$\frac{(1+z^3)}{2}$	$\frac{3z^2}{2}$	$-1 \leq z \leq 1$

Düzgün üretici dağılımı kullanılarak elde edilen dağılım: Çizelge 3.1'de düzgün dağılım için verilen fonksiyonlar kullanılarak önerilen ailenin bir elemanı için kümülatif dağılım fonksiyonu, olasılık



Şekil 3.2. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için log-lojistik dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.

yoğunluk fonksiyonu ve tehlike fonksiyonu sırasıyla

$$H(x; \alpha, \beta) = \frac{\sqrt{(x/\beta)^\alpha}}{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} + 1}, \quad x > 0,$$

$$h(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^{\alpha/2}}{2} \frac{x^{\alpha/2-1}}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2}, \quad x > 0,$$

$$r(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{2x} \frac{\sqrt{(x/\beta)^\alpha}}{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} + 1} \quad x > 0,$$

olarak elde edilir. Bu model literatürde bilinen bir dağılım olan log-lojistik dağılımdır (Şekil 3.2).

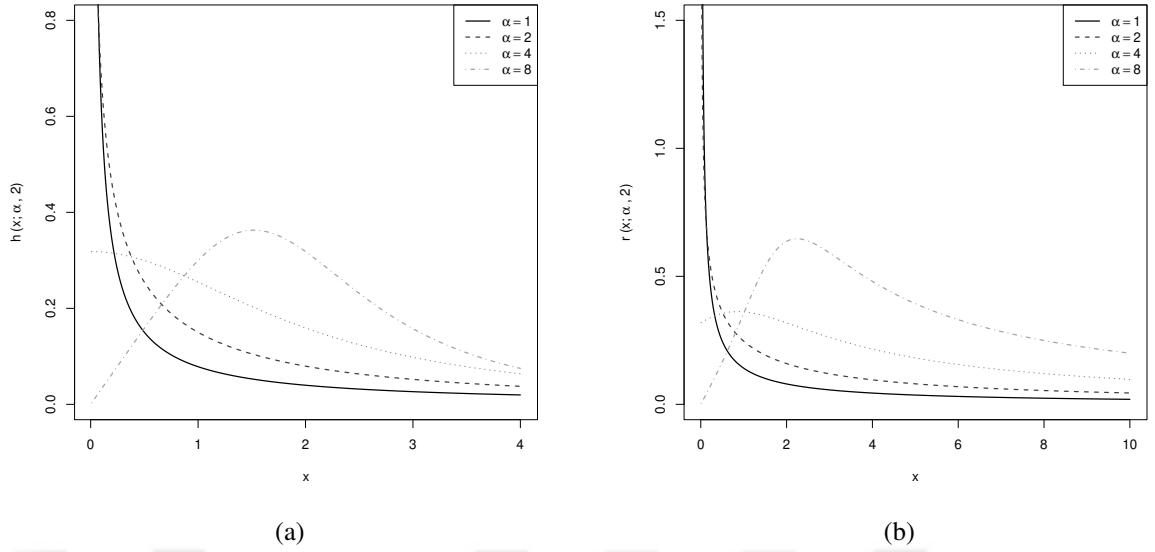
Arcsinus üretici dağılımı kullanılarak elde edilen dağılım: Çizelge 3.1’de arcsinus dağılımı fonksiyonları kullanılarak elde edilen kümülatif dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve tehlike fonksiyonu sırasıyla

$$H(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} - 1}{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} + 1} \right), \quad x > 0,$$

$$h(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^{\alpha/4}}{2\pi} \frac{x^{\alpha/4-1}}{\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}}, \quad x > 0,$$

$$r(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{2} \left(\arccos \left(\frac{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} - 1}{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} + 1} \right) \right)^{-1} \frac{x^{\alpha/4}}{\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}}, \quad x > 0$$

olarak elde edilir. Bu dağılım ise literatürde Cauchy kuvvet dağılımı olarak bilinmektedir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için Cauchy kuvvet dağılımının (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri.

Kosinüs üretici dağılımı kullanılarak elde edilen dağılım: Çizelge 3.1’de kosinüs dağılımı için verilen fonksiyonlar kullanılarak elde edilen dağılım için kümülatif dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve tehlike fonksiyonu sırasıyla

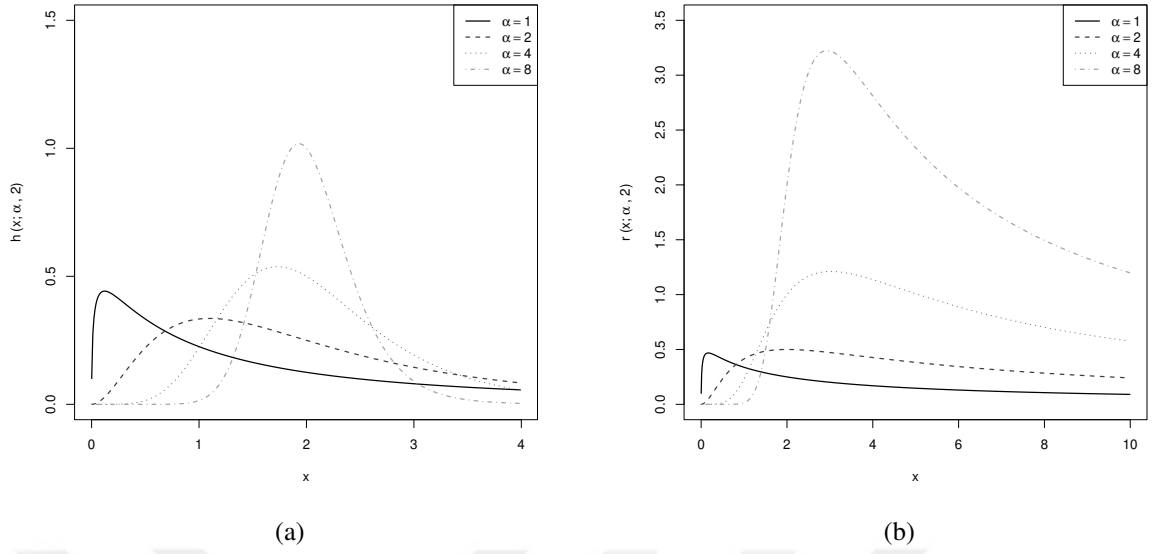
$$H(x; \alpha, \beta, \pi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} - 1}{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} + 1} + \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} - 1}{\sqrt{(x/\beta)^\alpha} + 1} \right), \quad x > 0,$$

$$h(x; \alpha, \beta, \pi) = \alpha \beta^{\alpha/2} \frac{x^{\alpha/2-1}}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} \sin^2 \left(\frac{\pi \sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} \right), \quad x > 0,$$

$$r(x; \alpha, \beta, \pi) = \left[\pi + \frac{1 - \sqrt{(x/\beta)^\alpha}}{1 + \sqrt{(x/\beta)^\alpha}} + \sin \left(\frac{1 - \sqrt{(x/\beta)^\alpha}}{1 + \sqrt{(x/\beta)^\alpha}} \right) \right]^{-1} \frac{\alpha \sqrt{\beta^\alpha} x^{\alpha/2-1}}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} \sin^2 \left(\frac{\pi \sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} \right), \quad x > 0,$$

olarak elde edilir. Şekil 3.4’de elde edilen dağılımın yoğunluk ve tehlike fonksiyonu grafikleri farklı α değerleri için çizdirilmiştir

Sinüs üretici dağılımı kullanılarak elde edilen dağılım: Çizelge 3.1’de verilen sinüs dağılımı kullanılarak elde edilen ve önerilen ailenin bir elemanı olan yeni dağılım için kümülatif dağılım fonksiyonu,



Şekil 3.4. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için kosinüs çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri .

olasılık yoğunluk fonksiyonu ve tehlike fonksiyonu sırasıyla

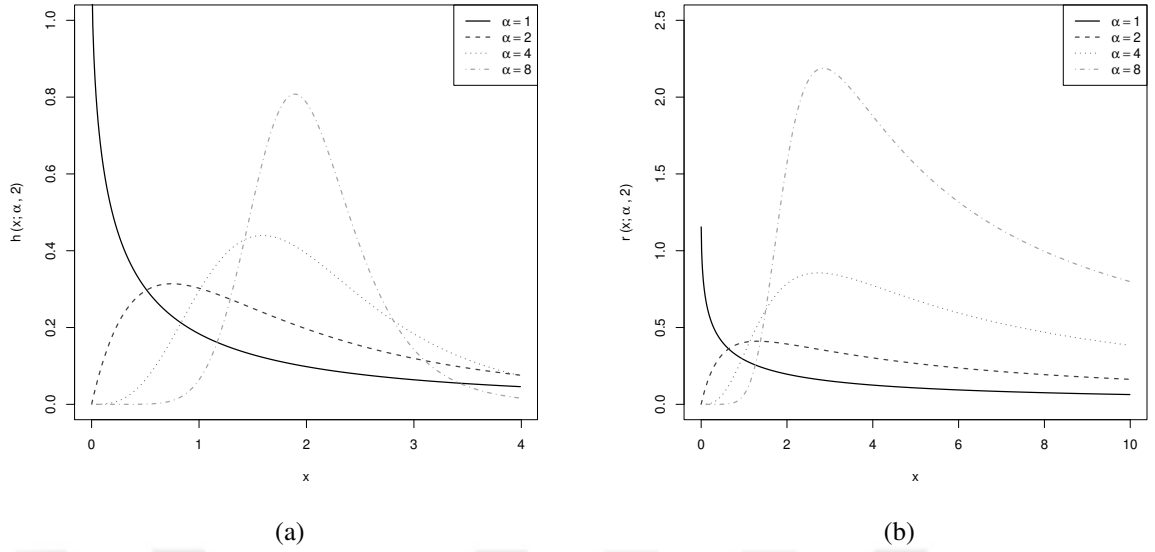
$$H(x; \alpha, \beta) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2 \sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha + 2}} \right), \quad x > 0,$$

$$h(x; \alpha, \beta) = \frac{\pi \alpha \sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha + 1}} \right)}{4x \left(\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha + 1} \right)^2}, \quad x > 0,$$

$$r(x; \alpha, \beta) = - \frac{\pi \alpha \sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \cos \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha - 1}}{\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha + 1}} \right)}{2x \left(\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha + 1} \right)^2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha + 1}} \right) - 1 \right)}, \quad x > 0,$$

olarak elde edilir. Şekil 3.5’de elde edilen dağılımın yoğunluk ve tehlike fonksiyonu grafikleri farklı α değerleri için çizdirilmiştir

Çift yönlü kuvvet üretici dağılımı kullanılarak elde edilen dağılım: Çizelge 3.1’de Çift yönlü kuvvet dağılımı kullanılarak elde edilen yeni dağılım için kümülatif dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk



Şekil 3.5. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için sinüs çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri .

fonksiyonu ve tehlike fonksiyonu sırasıyla

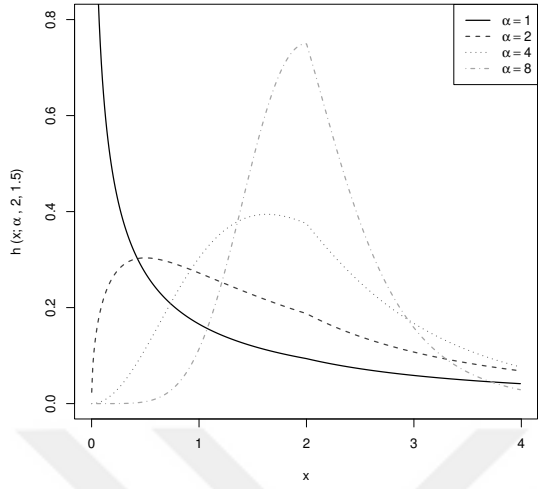
$$H(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 2^{\gamma-1} \left(\frac{\sqrt{x^\alpha}}{\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} \right)^\gamma, & 0 \leq x \leq \beta, \\ 1 - 2^{\gamma-1} \left(\frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} \right)^\gamma & \beta \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$h(x; \alpha, \beta) = \alpha \gamma 2^{\gamma-2} \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha/2} x^{\alpha\gamma/2-1}}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^{\gamma+1}}, & 0 \leq x \leq \beta, \\ \frac{\beta^{\alpha\gamma/2} x^{\alpha/2-1}}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^{\gamma+1}}, & \beta \leq x < \infty. \end{cases}$$

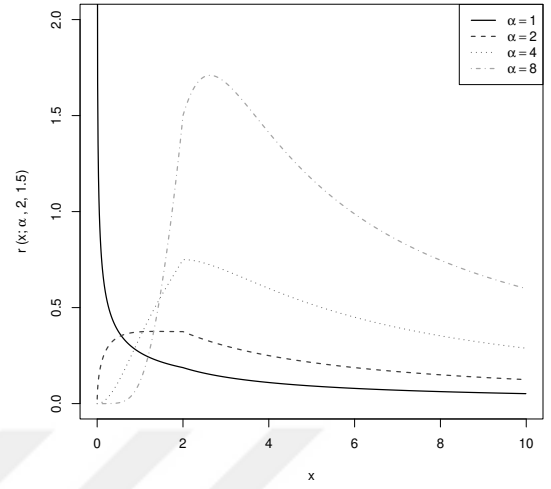
$$r(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha \gamma \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} + 1} \right)^{-\gamma} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} + 1 \right)^{\gamma-1}}{2x}, & 0 \leq x \leq \beta, \\ - \frac{\alpha 2^{\gamma-1} \gamma \sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} + 1 \right)^{-\gamma-1}}{x \left(2^\gamma \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} + 1 \right)^{-\gamma}} - 2 \right)} & \beta \leq x < \infty. \end{cases}$$

olarak elde edilir. Şekil 3.6 ve Şekil 3.7’de elde edilen yeni dağılımın yoğunluk ve tehlike fonksiyonu grafikleri farklı α ve γ değerleri için çizdirilmiştir. Bu şekillerden dağılımın β değerinde köşe noktaya sahip olduğu ve bu değerden sonra şekilde değişiklik olabildiği gözlenmektedir.

Karesel U üretici dağılımı kullanılarak elde edilen dağılım: Çizelge 3.1’de karesel U dağılımı kullanılarak elde edilen yeni dağılım için kümülatif dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve

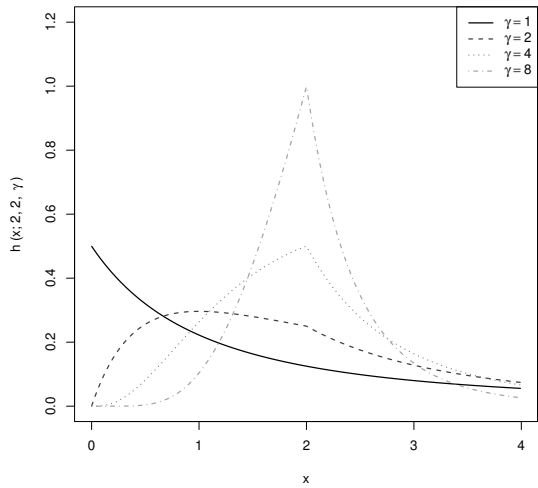


(a)

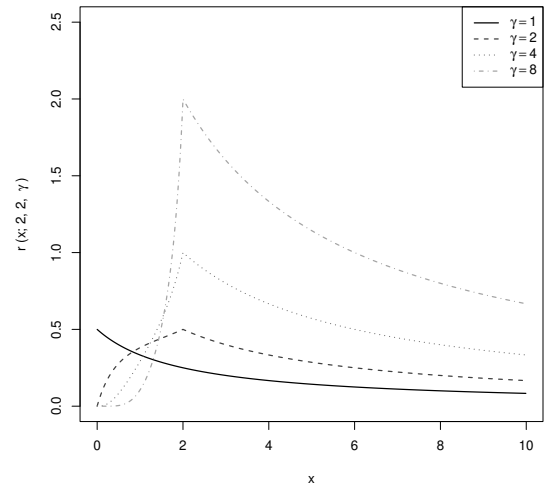


(b)

Şekil 3.6. Farklı α değerleri, $\beta = 2$ ve $\gamma = 1.5$ için çift yönlü kuvvet çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri .

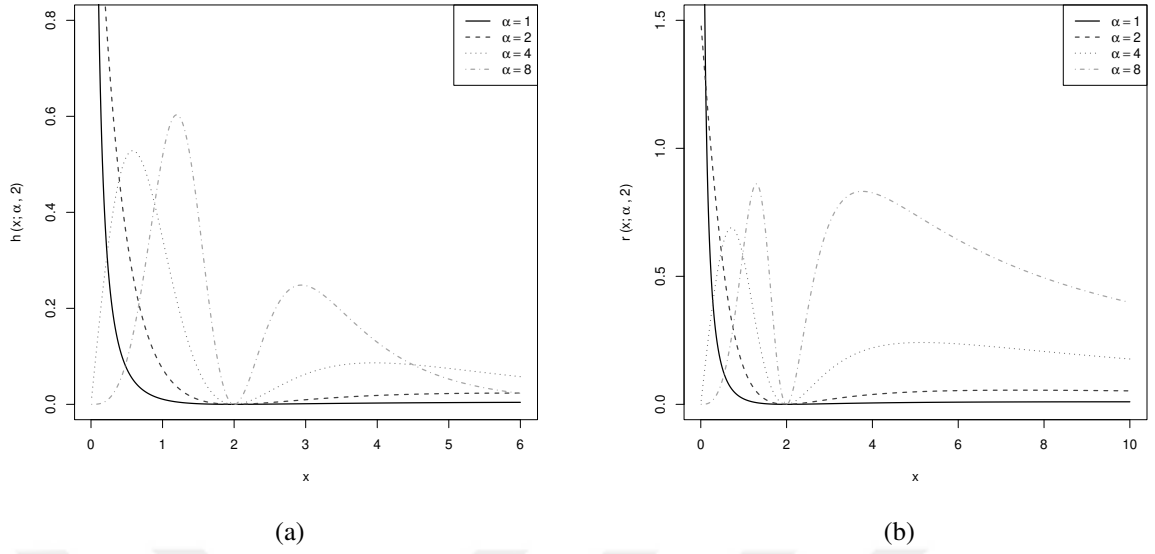


(a)



(b)

Şekil 3.7. Farklı γ değerleri, $\alpha = 2$ ve $\beta = 2$ için çift yönlü kuvvet çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri .



Şekil 3.8. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için karesel U çekirdek dağılımı ile üretilen yeni dağılım için (a) yoğunluk (b) tehlike fonksiyonu grafikleri .

tehlike fonksiyonu sırasıyla

$$H(x; \alpha, \beta) = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha} - 1 \right)^3}{2 \left(\sqrt{\left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha} + 1 \right)^3}, \quad x > 0,$$

$$h(x; \alpha, \beta) = \frac{3}{2} \alpha \beta^{\alpha/2} x^{\alpha/2-1} \frac{(\sqrt{x^\alpha} - \sqrt{\beta^\alpha})^2}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^4}, \quad x > 0,$$

$$r(x; \alpha, \beta) = \frac{3\alpha \sqrt{\left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha}}{x - x \left(\frac{x}{\beta} \right)^\alpha}, \quad x > 0,$$

olarak elde edilir. Şekil 3.8’de elde edilen yeni dağılımın yoğunluk ve tehlike fonksiyonu grafikleri farklı α değerleri için çizdirilmiştir. Görüldüğü üzere elde edilen dağılım iki modlu, β değerinde 0 olan bir yapıya sahiptir.

4. ÜÇGENSEL BIRNBAUM-SAUNDERS DAĞILIMI

Bu bölümde, Birbiçer ve Genç (2022) çalışmasında literatüre kazandırılmış, yeni bir genelleştirilmiş BS dağılımı olan, üçgensel BS (*TriBS*) dağılımı tanıtılacaktır. Bu dağılım, $(-1, 1)$ aralığında tanımlı simetrik üçgensel dağılım üzerinden elde edilmiştir. Z için kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{(1+z)^2}{2}, & -1 \leq z \leq 0, \\ 1 - \frac{(1-z)^2}{2}, & 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1+z, & -1 \leq z \leq 0, \\ 1-z, & 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

olarak verilmektedir. Bu çalışmada sunulan yeni dağılım üretim yöntemi ile üçgensel BS dağılım için kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$H(x, \alpha, \beta) = F_Z(k(x; \alpha, \beta)) = \begin{cases} \frac{2x^\alpha}{\left(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}\right)^2}, & 0 \leq t \leq \beta, \\ 1 - \frac{2\beta^\alpha}{\left(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}\right)^2}, & \beta \leq t < \infty, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$f(x; \alpha, \beta) = k'(x)f_Z(k(x)) = \begin{cases} \frac{2\alpha\sqrt{\beta^\alpha}x^{\alpha-1}}{\left(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}\right)^3}, & 0 \leq t \leq \beta, \\ \frac{2\alpha\beta^\alpha x^{\alpha/2-1}}{\left(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}\right)^3}, & \beta \leq t < \infty, \end{cases} \quad (4.2)$$

olarak elde edilir. Burada, klasik BS dağılımında olduğu gibi α şekil parametresini β ise dağılımın ölçek parametresini göstermektedir. Bu kısımdan itibaren bu dağılıma sahip olan X rasgele değişkeni için $X \sim TriBS(\alpha, \beta)$ gösterimi kullanılacaktır.

4.1. Kantil Fonksiyonu ve Dağılımın Limit Durumları

Dağılımın kantil fonksiyonu (4.1) kdf'sinin $0 < u < 1$ olacak şekilde bir u değerine eşitlenip çözülmesiyle

$$H^{-1}(u) = \beta \begin{cases} \left(\frac{u}{(\sqrt{u}-\sqrt{2})^2} \right)^{1/\alpha}, & 0 < u \leq 1/2, \\ \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-u} + \frac{2}{1-u}} \right)^{1/\alpha}, & 1/2 \leq u < 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

şeklinde elde edilir.

TriBS dağılımı için parametrelerin limit durumları

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} H(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

ve

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} H(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & x < \beta, \\ 1, & x \geq \beta, \end{cases}$$

olarak elde edilmektedir.

4.2. Şekil İncelemesi

Şekil incelemesini kolaylaştırmak için (4.2) oyf'sini

$$h(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} h_1(x), & 0 \leq x \leq \beta, \\ h_2(x), & \beta \leq x < \infty, \end{cases}$$

olacak şekilde gösterilsin. Burada, bu parçalar için türevler

$$h'_1(x) = \alpha \beta^{\alpha/2} x^{\alpha-2} \frac{[2(\alpha-1)\beta^{\alpha/2} - (2+\alpha)x^{\alpha/2}]}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^4} \quad (4.4)$$

$$h'_2(x) = 2\alpha \beta^\alpha x^{\alpha/2-2} \frac{[(\alpha/2-1)\beta^{\alpha/2} - (1+\alpha)x^{\alpha/2}]}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^4} \quad (4.5)$$

şekilde elde edilmektedir.

Teorem 3. *TriBS* dağılımının oyf'si $h(x; \alpha, \beta)$, $x = \beta$ noktasında sürekli fakat türevlenebilir değildir.

İspat: (4.2) ile verilen *TriBS* oyf'si

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} h(x; \alpha, \beta) = h_1(\beta) = \lim_{x \rightarrow \beta^+} h(x; \alpha, \beta) = h_2(\beta) = \frac{\alpha}{4\beta}$$

sağladığından süreklidir. Ancak,

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} h'(x; \alpha, \beta) = h'_1(\beta) = \frac{\alpha(\alpha - 4)}{16\beta^2} \neq \lim_{x \rightarrow \beta^+} h'(x; \alpha, \beta) = h'_2(\beta) = \frac{\alpha(\alpha + 4)}{16\beta^2}$$

olduğundan türevlenebilir değildir. $\square$

Teorem 4. *TriBS dağılımı için mod β 'nin sağ tarafında var olamaz.*

İspat: *TriBS* oyf'sinde β 'nin sağ tarafı yalnızca $h_2(x)$ tarafından kontrol edilmektedir. Bu fonksiyonunda (4.5)'de verilen türevinin işareti yalnızca

$$(\alpha/2 - 1)\beta^{\alpha/2} - (1 + \alpha)x^{\alpha/2}$$

ifadesine bağlıdır ve bu ifade düzenlenerek

$$\frac{\alpha}{2}(\beta^{\alpha/2} - x^{\alpha/2}) - \frac{\alpha}{2}x^{\alpha/2}$$

olarak yazılabilir. Burada $h_2(x)$ fonksiyonu $x > \beta$ iken 0'dan farklı bir değer alabildiğinden yukarıdaki ifade her zaman negatiftir. Dolayısıyla $h_2(x)$ artmayan bir fonksiyondur ve mod bu kısımda bulunamaz. $\square$

Teoreme 4.'e göre mod β değerinde ya da ondan daha küçük bir değerde ortaya çıkmalıdır. Bu durumda dağılımın modunu belirlemek için $h_1(x)$ fonksiyonunu incelemeliyiz. Bu inceleme ve sonucu aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 5. *Dağılımın modu*

$$x^* = \begin{cases} 0, & \alpha \leq 1, \\ \beta \left(\frac{2\alpha-2}{2+\alpha} \right)^{2/\alpha}, & 1 < \alpha < 4, \\ \beta, & \alpha \geq 4, \end{cases}$$

olarak elde edilir.

İspat: (4.4)'de verilen türevin işareti yalnızca köşeli parantez içerisindeki

$$2(\alpha - 1)\beta^{\alpha/2} - (2 + \alpha)x^{\alpha/2}$$

ifadesine bağlıdır. Bu ifadenin işaretleri yalnızca α 'nın değerlerinden etkilenmektedir. Bu nedenle $h_1'(x)$ işareti α 'nın üç farklı durumu için incelenmelidir. Bu durumlarda

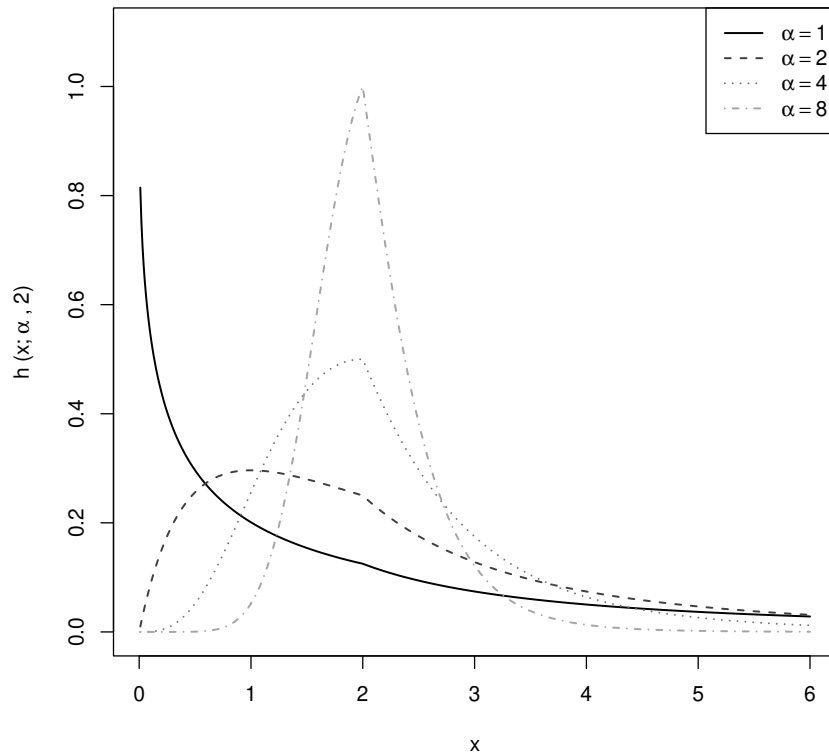
- $\alpha < 1$ için $h_1(x)$ 'in azalan fonksiyon olduğu görülmektedir. Bu nedenle mod değeri 0 olarak elde edilir.
- $1 < \alpha < 4$ için $h_1(x)$ fonksiyonunun tek bir maksimumu olmaktadır. Bu maksimum ise $h_1(x) = 0$ eşitiğinin çözümü olan

$$\beta \left(\frac{2\alpha - 2}{2 + \alpha} \right)^{2/\alpha}$$

değerinde oluşmaktadır.

- $\alpha \geq 4$ durumunda ise $x \leq \beta$ olduğu için $h_1(x)$ 'in artan fonksiyon olduğu görülmektedir. Bu nedenle, bu durumda mod β 'da oluşmaktadır. $\square$

Yukarıdaki üç teoremden elde edilen bilgiler Şekil 4.1'de görselleştirilmiştir. Buna göre *TriBS* dağılımının $\alpha < 1$ durumunda ters J şekilli, $\alpha > 2$ iken ise sağa çarpık bir biçimde tek modlu bir yoğunluğa sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için *TriBS* dağılımının yoğunluk fonksiyonu grafikleri.

4.3. Tehlike Fonksiyonu

TriBS dağılımı için tehlike fonksiyonu

$$r(x; \alpha, \beta) = \frac{h(x; \alpha, \beta)}{1 - H(x; \alpha, \beta)} = \begin{cases} r_1(x), & 0 \leq x \leq \beta, \\ r_2(x), & \beta \leq x < \infty, \end{cases}$$

formunda elde edilip, burada

$$\begin{aligned} r_1(x) &= \frac{2\alpha\beta^{\alpha/2}}{x(\beta^{\alpha/2} + 3x^{-\alpha/2}\beta^\alpha + x^{-\alpha}\beta^{3\alpha/2} - x^{\alpha/2})}, \\ r_2(x) &= \frac{\alpha}{x(1 + (\beta/x)^{\alpha/2})}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilir. Tehlike fonksiyonu da olasılık yoğunluk fonksiyonuna benzer şekilde süreklidir ancak

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} r'(x; \alpha, \beta) = \lim_{x \rightarrow \beta} r'_1(x) = \frac{\alpha(3\alpha - 4)}{8\beta^2}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \beta^+} r'(x; \alpha, \beta) = \lim_{x \rightarrow \beta} r'_2(x) = \frac{\alpha(\alpha - 4)}{8\beta^2}$$

olduğundan türevlenebilir değildir. Bu nedenle tehlike fonksiyonunda β değerinde köşe nokta gözlenmektedir.

Aşağıda verilen teoremden tehlike fonksiyonunun ikinci kısmı $r_2(x)$ için şekil incelemesi verilmiştir. Ancak, öncesinde bu fonksiyon için limit değerlerinin

$$\lim_{x \rightarrow \beta} r_2(x) = \frac{\alpha}{2\beta} \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} r_2(x) = 0$$

olduğunun görülmesi faydalı olacaktır.

Teorem 6. $x \in (\beta, \infty)$ iken ,

(a) $0 < \alpha \leq 4$ ise $r_2(x)$ kesin azalandır,

(b) $\alpha > 4$ ise $r_2(x)$ tek modludur.

İspat: $r_2(x)$ için türevinin işareti,

$$\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha/2} \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) - 1$$

ifadesine bağlıdır ve bu değer $(\alpha - 4)/2$ den küçük ya da eşittir. Bu nedenle, $\alpha \leq 4$ iken $r_2(x) < 0$ dir. $\alpha > 4$ durumunda ise $r_2'(x) > 0$ dır ve

$$\lim_{x \rightarrow \beta} r_2'(x) > 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} r_2'(x) < 0$$

olduğundan $r_2(x)$ tek modludur. $\square$

Teorem 7. $\alpha \leq 1$ iken $r_1(x)$ kesin azalan bir fonksiyondur ve aşağıdaki limitlere sahiptir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} r_1(x) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \beta} r_1(x) = \frac{\alpha}{2\beta}.$$

İspat: $r_1(x)$ 'in türevinin işareti

$$(\alpha + 2)x^{3\alpha/2} + 3\beta^\alpha(\alpha - 2)x^{\alpha/2} + 2\beta^{\alpha/2}[(\alpha - 1)\beta^\alpha - x^\alpha]$$

ifadesine bağlıdır. Bu ifadedeki üçüncü terim $\alpha \leq 1$ iken negatiftir. Kalan terimler ise

$$x^{\alpha/2}[(\alpha + 2)x^\alpha + 3\beta^\alpha(\alpha - 2)]$$

şeklinde yazılabilir ve burada köşeli parantez içindeki kısım

$$\begin{aligned} \alpha x^\alpha + \beta^\alpha(3\alpha - 4) + 2(x^\alpha - \beta^\alpha) &< \alpha\beta^\alpha + \beta^\alpha(3\alpha - 4) + 2(x^\alpha - \beta^\alpha) \\ &= 4\beta^\alpha(\alpha - 1) + 2(x^\alpha - \beta^\alpha) < 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu nedenle $\alpha \leq 1$ için $r_1(x)$ kesin azalandır. $\square$

Teorem 8. $1 < \alpha \leq 4/3$ ise $r_1(x)$ tek modludur.

İspat: Burada $r_1'(x)$ için limit değerleri

$$\lim_{x \rightarrow 0} r_1'(x) = \begin{cases} \infty, & 1 < \alpha < 2, \\ \frac{4}{\beta^2}, & \alpha = 2, 0, \quad \alpha > 2, \end{cases}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \beta} r_1'(x) = \frac{\alpha(3\alpha - 4)}{8\beta^2},$$

olarak belirlenir. Burada ikinci limit $\alpha > 4/3$ iken pozitif, diğer durumda ise negatiftir. Bu nedenle $1 < \alpha < 4/3$ için $r_1(x) = 0$ sağlayan en az bir kök vardır.

Buradan kolayca $r_1'(x) = 0$ ise

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)x^{\alpha/2} - \beta^{3\alpha/2}(1 - \alpha)x^{-\alpha} - \beta^{\alpha/2} - 3\beta^{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)x^{-\alpha/2} = 0$$

sağlanır. Bu eşitlik

$$(\alpha + 2)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{3\alpha/2} + 3(\alpha - 2)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha/2} - 2\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} + 2(\alpha - 1) = 0$$

şeklinde düzenlenip $z = (x/\beta)^{\alpha/2}$ alındığında problem

$$q(z) = (\alpha + 2)z^3 - 2z^2 + 3(\alpha - 2)z + 2(\alpha - 1) = 0,$$

kübik polinomun kökünü bulma problemine dönüşür. Burada

$$\lim_{z \rightarrow 0} q(z) = 2(\alpha - 1) > 0, \quad \text{ve} \quad \lim_{z \rightarrow 1} q(z) = 6\alpha - 8$$

olmak üzere $q'(z) = 0$ eşitliğini $(0, 1)$ aralığında yalnızca,

$$z^* = \frac{2 + \sqrt{4 - 9(\alpha^2 - 4)}}{3(\alpha + 2)}$$

sağlar. Burada $q''(z^*) > 0$ olduğundan, z^* bir minimum noktasıdır. Bu da $q(z) = 0$ ya da $r_1'(x) = 0$ çözümlerinin $(0, z^*)$ aralığında tek olduğunu gösterir. $r_1'(x)$ 'in incelenen limitleri nedeniyle bu çözümün maksimum olduğu sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 9. $\alpha^* = 1.46706326 \dots$, olmak üzere $4/3 < \alpha < \alpha^*$ ise $r_1(x)$ N-şekillidir.

İspat: z^* minimum değerini göstermek üzere $q(z)$ fonksiyonunu z -ekseni ile iki noktada kesişsin. Bu durum $q(z) = 0$ olana kadar devam etmektedir ve bu durumda z -ekseni minimum noktanın tanjantı olur. Şimdi ilk olarak $q(z^*) = 0$ sağlayan z^* değerini tespit edelim. Önceki lemmanın ispatından

$$z^* = \frac{2 + \sqrt{4 - 9(\alpha^{*2} - 4)}}{3(\alpha^* + 2)}$$

ancak ve ancak

$$\alpha^* = \frac{6 + 4z^* - 6z^{*2}}{3(z^{*2} + 1)}$$

olduğundan $q(z) = 0$ eşitliği ile $\alpha = \alpha^*$ birlikte ele alındığında

$$z^4 + 12z^3 + 6z^2 - 4z - 3 = 0$$

eşitliğine indirgenir. Bu eşitliğin tek çözümü ise $z^* = 0.628964010 \dots$ olarak elde edilir. Bu değer $q(z)$ 'yi minimum yapmaktadır. O halde $\alpha^* = 1.46706326 \dots$ olarak elde edilir. Buradan, $4/3 < \alpha < \alpha^*$ iken $q(z)$ fonksiyonunun $(0, \beta)$ aralığında iki kökü olduğu anlaşılır. $r_1'(x)$ 'in işaret incelemesinden ise $r_1(x)$ 'in $N-$ şekilli olduğu belirlenir. $\square$

Teorem 10. $r(x)$ tehlike fonksiyonunun şekli aşağıdaki maddeler üzerinden incelenir.

- (a) $0 < \alpha \leq 1$ iken $r(t)$ kesin azalandır.
- (b) $1 < \alpha \leq 4/3$ iken $r(t)$ tek modludur ve mod β 'nin sol tarafında gözlemlenir.
- (c) $4/3 < \alpha < \alpha^*$ iken $\alpha^* = 1.46706326 \dots$ olmak üzere $r(t)$ iki modludur. Modlardan biri β 'nin sol tarafında iken diğeri sağ tarafındadır.
- (d) $\alpha^* \leq \alpha \leq 4$ iken $r(t)$ tek modludur ve mod β değerindedir.
- (e) $\alpha > 4$ iken $r(t)$ tekmodludur ve mod β 'nin sağ tarafında gözlemlenir.

Şekil 4.2'de çeşitli parametre değerleri için tehlike fonksiyonları verilmiştir. Burada β eşik değerinden sonra tehlike fonksiyonunun daha hızlı azaldığı gözlemlenebilir. Bu özellik tehlike modellenmesi açısından ilginç bulunabilir.

4.4. Momentleri

TriBS dağılımının momentleri verilmeden önce aşağıda verilen iki integral kullanışlı olacaktır. Bu integraller, Gradshteyn ve Ryzhik (2014) tarafından verilen 3.194.1 ve 3.194.2 numaralı formülleridir ve sırasıyla aşağıdaki gibi verilmişlerdir.

$$\int_0^u \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^v} dx = \frac{u^\mu}{\mu} {}_2F_1(v, \mu; 1+\mu; -\beta u), \quad \mu > 0, \quad (4.7)$$

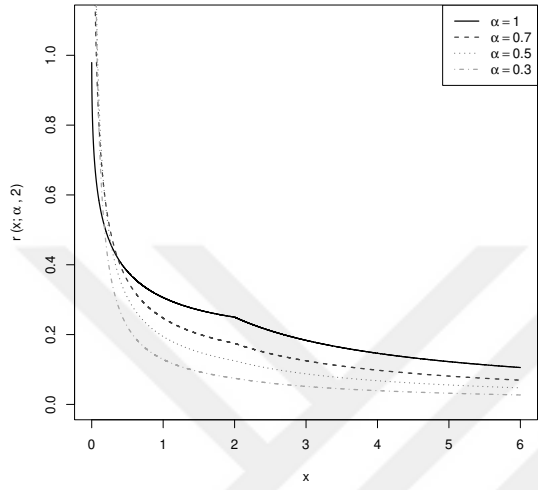
$$\int_u^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^v} dx = \frac{u^{\mu-v}}{\beta^v(v-\mu)} {}_2F_1(v, v-\mu; v-\mu+1; -\frac{1}{\beta u}), \quad v > \mu. \quad (4.8)$$

Bu formüllerde kullanılan ${}_2F_1(., .; .; .)$ fonksiyonu genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu göstermektedir ve $(z)_k = z(z+1) \dots (z+k-1)$ olmak üzere

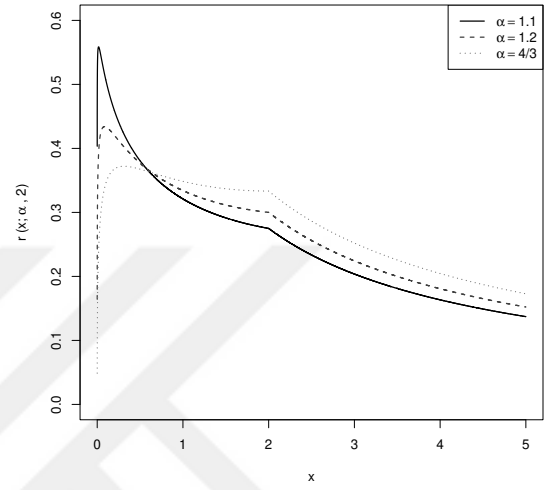
$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}$$

seri gösterimi olarak ifade edilir.

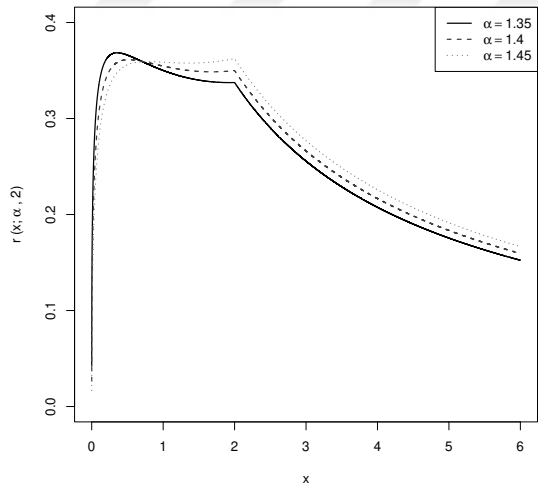
Dağılım için n -inci moment aşağıdaki teoremden verilecektir.



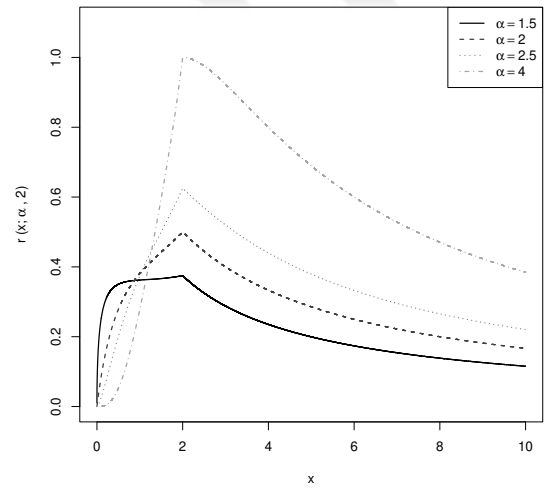
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.2. Farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için tehlike fonksiyonu grafikleri.

Teorem 11. $\alpha > n$ için $X \sim TriBS(\alpha, \beta)$ rasgele değişkeninin n -inci momenti

$$E(X^n) = 2\alpha\beta^n \left[\frac{1}{\alpha+n} {}_2F_1\left(3, 2 + \frac{2n}{\alpha}; 3 + \frac{2n}{\alpha}; -1\right) + \frac{1}{\alpha-n} {}_2F_1\left(3, 2 - \frac{2n}{\alpha}; 3 - \frac{2n}{\alpha}; -1\right) \right] \quad (4.9)$$

olarak elde edilir.

İspat: (3.3) stokastik gösterimi kullanılarak

$$\begin{aligned} E(X^n) &= E \left[\beta^n \left(\frac{2}{1-Z_1} - 1 \right)^{2n/\alpha} \right] \\ &= \int_{-1}^0 \beta^n \left(\frac{2}{1-z} - 1 \right)^{2n/\alpha} (1+z) dz + \int_0^1 \beta^n \left(\frac{2}{1-z} - 1 \right)^{2n/\alpha} (1-z) dz \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada her iki integral için (4.7) ve (4.8) kullanılırsa teoremdeki sonuç elde edilir.

□

Not olarak β artırıldığında dağılımın n -inci momenti de artmaktadır. Bu durum β ölçek parametresi olduğu için beklenen bir durumdur. Aşağıdaki iki teoremle $\alpha/2$ mertebeli momentleri için basit ifadeler verilecektir.

Teorem 12. $X \sim TriBS(\alpha, \beta)$ ise

$$E(X^{\alpha/2}) = \beta^{\alpha/2} (4 \ln 2 - 1)$$

dir.

İspat: (3.3) stokastik gösterimi kullanılarak,

$$\left(\frac{X}{\beta} \right)^{\alpha/2} = \frac{1+Z_1}{1-Z_1} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} Z_1^k$$

şeklinde yazılsın. Burada iki tarafın da beklenen değeri alındığında sağ taraf

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{(k+1)(k+2)} &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(k+1)} \\ &= 1 + 2(\ln 4 - 1) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradaki son eşitlik, Prudnikov ve ark. (1986) çalışmasında verilen 5.1.8.2 eşitliğinden elde edilmiştir. □

Teorem 13. $X \sim TriBS(\alpha, \beta)$ ise

$$E \left(\ln \left(\frac{X}{\beta} \right)^{\alpha/2} \right) = 0$$

dir.

İspat: (3.3) stokastik gösterimi kullanılarak,

$$E \left(\ln \left(\frac{X}{\beta} \right)^{\alpha/2} \right) = E \left(\ln \left(\frac{2}{1-Z} - 1 \right) \right)$$

olarak yazılabilir. Burada sağ tarafta, beklenen değer içindeki ifadenin Taylor serisi açılımı

$$2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z^{2i+1}}{2i+1}$$

olarak elde edilmektedir. Simetrik üçgensel dağılımın tüm tek sayı momentler 0 olduğundan yukarıdaki toplamın da beklenen değeri 0 olacaktır. $\square$

Ayrıca yukarıdaki teoremden $E(\ln(X)) = \ln(\beta)$ olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.1’de farklı α değerleri ve $\beta = 2$ için hesaplanan çarpıklık ve basıklık katsayıları verilmiştir. Ölçek parametresi β , çarpıklık ve basıklık üzerinde bir etkisi olmadığından sabit alınmıştır. Bu değerler, μ_n , n -inci momenti göstermek üzer çarpıklık ve basıklık sırasıyla, $\delta_1 = (\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3)/(\mu_2 - \mu_1^2)^{3/2}$ ve $\delta_2 = (\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4)/(\mu_2 - \mu_1^2)^2$ hesaplanarak elde edilmiştir. Çizelgeden de görüldüğü üzere α artırıldığında dağılımın hem çarpıklığında hem de basıklığında azalma meydana gelmektedir. Ayrıca dağılım çarpıklığının $\alpha = 100$ değerine kadar büyütülmesine rağmen normal dağılımın çarpıklığı olan 3 değerinden daha fazla olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.1. $\beta = 2$ ve farklı α değerleri için hesaplanan çarpıklık ve basıklık katsayıları.

α	4	5	6	7	8	9	10	20	100
Çarp.	4.6027	2.6733	1.9595	1.5705	1.3200	1.1429	1.0101	0.4781	0.0941
Bask.	-	30.5245	15.1420	10.5439	8.4304	7.2491	6.5096	4.5972	4.0999

4.5. Sıra İstatistikleri ve Örneklem Ekstremlerinin Dağılımları

$x_1, x_2, \dots, x_n$ örnekleme karşılık gelen sıralanmış örnekleme $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ şeklinde gösterilsin. Buna göre, $X_{(1)}$ en küçük değeri ve $X_{(n)}$ en büyük değerine karşılık gelen kümülatif dağılım fonksiyonu sırasıyla

$$H_{1:n}(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \left[1 - \frac{2x^\alpha}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} \right]^n, & 0 \leq x \leq \beta, \\ 1 - \frac{2^n \beta^{\alpha n}}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^{2n}}, & \beta \leq x < \infty, \end{cases}$$

ve

$$H_{n:n}(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{2^n x^{\alpha n}}{(\sqrt{x^\alpha + \beta^\alpha})^{2n}}, & 0 \leq x \leq \beta, \\ \left[1 - \frac{2\beta^\alpha}{(\sqrt{x^\alpha + \beta^\alpha})^2}\right]^n, & \beta \leq x < \infty, \end{cases}$$

olarak verilir.

i -inci sıra istatistiği için olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$h_{i:n}(x) = \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} \alpha \begin{cases} \frac{\sqrt{\beta^\alpha} 2^i x^{\alpha i-1} [2\sqrt{(x\beta)^\alpha + \beta^\alpha - x^\alpha}]^{n-i}}{(\sqrt{x^\alpha + \beta^\alpha})^{2n+1}}, & 0 \leq x \leq \beta, \\ \frac{(\beta^\alpha 2)^{n-i+1} x^{\alpha/2-1} [2\sqrt{(x\beta)^\alpha + x^\alpha - \beta^\alpha}]^{i-1}}{(\sqrt{x^\alpha + \beta^\alpha})^{2n+1}}, & \beta \leq x < \infty, \end{cases} \quad (4.10)$$

şeklindedir.

Sonraki bölümlerde görüleceği üzere β parametresinin en çok olabilirlik tahmini sıra istatistiğinde olabilmektedir. Bu nedenle tahminin standart hatası klasik yöntem olan bilgi matrisi kullanımı ile elde edilememektedir. Bunun yerine (4.10) kullanılarak bu büyüklük elde edilebilmektedir.

4.6. Sonuç Çıkarım

Bu bölümde, *TriBS* dağılımı parametrelerinin tahmini için çeşitli yöntemler verilecektir.

4.6.1. Momentler Yöntemi

TriBS dağılımı için elde edilen moment özel bir fonksiyon içermektedir ve bu durum momentler tahmin edicisini elde etmeyi zorlaştırmaktadır. Bu nedenle dağılımın momentler tahmin edicisi elde edilirken, (3.4) stokastik gösterimi, yani dağılımın üçgensel dağılımla ilişkisi kullanılacaktır. Simetrik üçgensel dağılımın birinci ve ikinci momentleri sırasıyla, $E(Z_1) = 0$ ve $E(Z_1^2) = 1/6$ olduğu bilinmektedir. $x_1, x_2, \dots, x_n$ rasgele örnekleme *TriBS* dağılımından çekilsin. Örneklem momentlerine karşılık gelen teorik momentlere eşitlenip bazı işlemler uygulandıktan sonra

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha + 1}} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha + 1}}\right)^2 &= \frac{1}{6}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

eşitlikleri elde edilmektedir. Bu iki eşitliğin birlikte α ve β 'ya göre nümerik olarak çözülmesiyle parametrelerin momentler tahminleri (MM) olan $\hat{\alpha}_{MM}$ ve $\hat{\beta}_{MM}$ belirlenir.

4.6.2. Değiştirilmiş Momentler Yöntemleri

Bu bölümde, teorem 12 ve teorem 13'te verilen moment ifadeleri kullanılarak bir önceki verilen momentler tahmin edicisinin alternatifi ve hesaplanması daha kolay olan iki değiştirilmiş momentler tahmin (MMM) edicisi önerilecektir.

İlk momentler tahmin edici için

$$E \left[\ln \left(\frac{X}{\beta} \right)^{\alpha/2} \right] = 0$$

bilgisini kullanılacaktır. Buradan birkaç basit işlem sonrasında β için kapalı formda olan

$$\hat{\beta}_{MM1} = e^{(1/n) \sum_{i=1}^n \ln x_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{1/n}$$

tahmin edicisi elde edilir. Daha sonra, bu ifade (4.11)'de yerine yazılıp $\hat{\alpha}_{MMM1}$ tahmini tek boyutlu kök araştırmasıyla elde belirlenebilir.

İkinci değiştirilmiş momentler tahmin edici için ise

$$E \left[\left(\frac{X}{\beta} \right) \right] = E \left[\left(\frac{\beta}{X} \right) \right] = 4 \ln 2 - 1,$$

beklenen değer eşitliği kullanılacaktır. Buradan,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^{\alpha/2} = 4 \ln 2 - 1$$

ve

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta}{x_i} \right)^{\alpha/2} = 4 \ln 2 - 1$$

birlikte çözülmesiyle

$$\hat{\beta}_{MM2} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha/2}}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha/2}} \right]^{1/\alpha}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde bu ifade (4.11)'de yerine yazıldıktan sonra $\hat{\alpha}_{MMM2}$ tahmini tek boyutlu kök araştırmasıyla belirlenir.

Bu bölümde verilen momentler tahmin ediciler yalnızca tek değişkenli kök bulma problemleri içerdiğinden açık bir biçimde önceki bölümde verilen momentler yönteminden daha hızlı çalışacaklardır.

4.6.3. Yüzdelik (Percentile) Tahmin Edici

TriBS dağılımının kdf'si açık olarak ifade edilebildiğinden, dağılımın yüzdelik tahmin edicisini (P) tanımlamak büyük avantaj sağlar. Bu yöntemde tahmin ediciler örneklem yüzdelikleri ile kitle yüzdeliklerinin eşitlenip çözülmesi ile elde edilir. Öyle ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ rasgele örnekleme $TriBS(\alpha, \beta)$ dağılımından çekilsin. Burada, 25-inci ve 75-inci ($x_{0.25}$ ve $x_{0.75}$) yüzdelikler seçilmiştir. Böylece,

$$\frac{2x_{0.25}^\alpha}{(\sqrt{x_{0.25}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} = 0.25$$

ve

$$\frac{1 - 2\beta^\alpha}{(\sqrt{x_{0.75}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} = 0.75$$

eşitliklerinin birlikte çözülmesiyle parametreleri yüzdelik tahmin edicileri

$$\hat{\alpha}_P = \frac{4 \ln(\sqrt{8} - 1)}{\ln(x_{0.75} - \ln(x_{0.25}))},$$

$$\hat{\beta}_P = \frac{x_{0.75}}{(\sqrt{8} - 1)^{[\ln(x_{0.75}) - \ln(x_{0.25})] / (2 \ln(\sqrt{8} - 1))}},$$

şeklinde elde edilir.

Bu yöntem ile elde edilen tahminler örneklemdaki yalnızca iki gözlem ile elde edildiğinden iyi sonuç vermesi beklenmemektedir. Ancak, hesaplamalarının kolay olması nedeniyle bu tahminler başka algoritmalarda başlangıç tahmini olarak kullanıma uygundur.

4.6.4. En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

$x_1, x_2, \dots, x_n$ örnekleme $TriBS$ dağılımından alınmış olsun ve $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ sıralı gözlemleri ifade etsin. Bu yöntemde tahmin ediciler, parametre değerlerine göre

$$\sum_{j=1}^r \left(\frac{2x_{(j)}^\alpha}{(\sqrt{x_{(j)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} - \frac{j}{n+1} \right)^2 + \sum_{j=r+1}^n \left(1 - \frac{2\beta^\alpha}{(\sqrt{x_{(j)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} - \frac{j}{n+1} \right)^2, \quad (4.12)$$

ifadesinin minimizasyonu ile elde edilir. Burada $r, x_{(r)} \leq \beta < x_{(r+1)}$ sağlayan tamsayı değeridir.

En küçük kareler tahminleri (LS) α ve β için, $\hat{\alpha}_{LS}$ ve $\hat{\beta}_{LS}$ olarak gösterilir ve bir tekrarlamalı bir algoritma kullanılarak bulunur. Bu algoritma, β için örneklem medyanı ile başlatılır ve $\beta^{(k+1)} - \beta^{(k)} / \beta^{(k)} < 10^{-6}$ olana kadar α ve β için tahminler sırasıyla bulunur.

Algoritma:

Adım 1: $k = 0$ alınır.

Adım 2: (4.12)'de verilen $\beta, \beta^{(k)} = \tilde{X}$ olacak şekilde örneklem medyanı olarak seç.

Adım 3: $\alpha^{(k+1)}$ 'i, α 'ya göre (4.12)'de minimize ederek bul.

Adım 4: (4.12)'deki α 'yı $\alpha^{(k+1)}$ ile değiştir.

Adım 5: $\beta^{(k+1)}$ 'i, β 'ya göre (4.12)'de minimize ederek bul.

Adım 6: r 'yi güncelle.

Adım 7: $k + 1 \leftarrow k$.

Adım 8: Yakınsayama koşulu sağlanana kadar Adım 3'ten 7'ye tekrarla.

4.6.5. Maksimum Aralıkların Çarpımı Yöntemi

$X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleme $TriBS(\alpha, \beta)$ dağılımından çekilmiş olsun ve $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ örnekleme karşılık gelen sıralı gözlemleri temsil etsin. Ardışık sıralı gözlemler arasındaki kümülatif dağılım fonksiyonu değerlerinin farkları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_1 = H(X_{(1)}; \alpha, \beta),$$

$$D_i = H(X_{(i)}; \alpha, \beta) - H(X_{(i-1)}; \alpha, \beta),$$

$$D_{n+1} = 1 - H(X_{(n)}; \alpha, \beta), \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Maksimum aralıkların çarpımı (MPS) tahmin edicileri, aralıkların geometrik ortalaması olan G 'nin logaritmasını maksimize eder. Yani, $\theta = (\alpha, \beta)$ için $\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln G$, burada

$$\ln G = \ln \sqrt[n+1]{D_1 D_2 \cdots D_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \ln D_i.$$

Bu yöntem, özellikle maksimum olabilirlik yönteminin iyi performans gösteremediği ya da kullanışlı olmadığı durumlarda iyi bir alternatif olmaktadır (Cheng ve Amin, 1983).

4.6.6. En Çok Olabilirlik Yöntemi

Tam Veri Durumu:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ örnekleme $TriBS(\alpha, \beta)$ dağılımından alınmış bir örneklem olsun ve $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ örnekleme karşılık gelen sıralı gözlemleri temsil etsin.

Bu örneklem için olabilirlik fonksiyonu şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta|x) &= \prod_{i=1}^n h(x_i; \alpha, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^r \left(\frac{2\alpha\sqrt{\beta^\alpha}x_{(i)}^{\alpha-1}}{(\sqrt{x_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^3} \right) \prod_{i=r+1}^n \left(\frac{2\alpha\beta^\alpha x_{(i)}^{\alpha/2-1}}{(\sqrt{x_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^3} \right), \end{aligned}$$

burada $r, 1, 2, \dots, n$ tam sayı değerlerinden biri olmak üzere $x_{(r)} \leq \beta < x_{(r+1)}$ eşitsizliğini sağlamaktadır. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu sabit terimler dikkate alınmaksızın,

$$l(\alpha, \beta|x) = n \ln \alpha + (n-r) \frac{\alpha \ln \beta}{2} - 3 \sum_{i=1}^n \ln(\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^r \ln x_i + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \sum_{i=r+1}^n \ln x_i$$

olarak yazılabilir. Bu log-olabilirlik fonksiyonunu α ve β 'ya göre birlikte maksimum yapılması ile elde edilen $\hat{\alpha}_{MLE}$ ve $\hat{\beta}_{MLE}$ değerleri en çok olabilirlik (ML) tahmin değerleridir.

Aşağıdaki üç teoremden sırasıyla β bilindiğinde α için, α bilindiğinde β için ve her iki parametre de bilinmiyorken en çok olabilirlik tahmin edicilerinin varlık ve tekliği incelencektir.

Teorem 14. β bilinirken α için en çok olabilirlik tahmin edicisi parametre uzayında var ve tektir.

İspat: β bilinirken log-olabilirlik fonksiyonunun α 'ya göre birinci türevi sabit terim olmadan

$$\frac{dl}{d\alpha} = l'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \left(n - \frac{r}{2}\right) \ln(\beta) - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i \sqrt{x_i^\alpha} + \ln \beta \sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} + \sum_{i=1}^r \ln x_{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=r+1}^n \ln x_{(i)},$$

olarak elde edilir. Buradan $\lim_{\alpha \rightarrow 0} l'(\alpha) = \infty$ ve

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} l'(\alpha) = (n-2r) \ln(\beta) + \sum_{i=1}^n \ln x_i - 2 \sum_{i=r+1}^n \ln x_{(i)}$$

olduğu görülebilir. Burada ikinci limit

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} l'(\alpha) = \sum_{i=1}^r \ln \left(\frac{x_{(i)}}{\beta} \right) + \sum_{i=r+1}^n \ln \left(\frac{\beta}{x_{(i)}} \right)$$

şeklinde düzenlenebilir ve bu ifadenin negatif olduğu açıktır. Dahası, $l'(\alpha)$ sürekli fonksiyon olduğundan $(0, \infty)$ arasında kökü vardır. Ayrıca,

$$\frac{d^2 l}{d\alpha^2} = l''(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_i \beta)^\alpha} (\ln x_i - \ln \beta)^2}{(\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2}$$

ikinci türevi de negatiftir. Böylece $l'(\alpha)$ azalan bir fonksiyon olduğu görülür. Bu da β bilindiğinde $\hat{\alpha}_{MLE}$ 'nin var ve tek olduğunu gösterir. □

Teorem 15. α bilinirken β için en çok olabilirlik tahmin edicisi parametre uzayında var ve tektir.

İspat: β için log-olabilirlik fonksiyonu $l(\beta)$ sürekli bir fonksiyondur ancak $i = 1, 2, \dots, n$ için x_i noktalarında türevlenebilir değildir. Bu da $\lim_{\beta \rightarrow x^-} l'(\beta) \lim_{\beta \rightarrow x^+} l'(\beta) < 0$ iken $l(\beta)$ x noktasında yerel maksimumdur.

Şimdi parametre uzayı sınırlarında $l(\beta)$ için limitleri

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} l'(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} \left(n - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{\beta^\alpha} + \sqrt{x_i^\alpha}} \right) = \infty$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} l'(\beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{2\beta} \right) \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(n - 3 \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{\beta^\alpha} + \sqrt{x_i^\alpha}} \right) \\ &= 0(-2n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\gamma(\beta) = n - \frac{r}{2} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \sqrt{(x_i/\beta)^\alpha}}$$

olmak üzere

$$l'(\beta) = \frac{\alpha}{\beta} \gamma(\beta) \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{\beta^\alpha} + \sqrt{x_i^\alpha}}$$

şekinde yazılabildiğinden ve bu ifade $r = 1, 2, \dots, n$ için $[x_{(r)}, x_{(r+1)})$ aralığında sürekli olduğundan, ifadenin burada en az bir kökü vardır. O halde $x_{(r)} \leq \beta < x_{(r+1)}$ için $l'(\beta) = 0$ eşitliği

$$n - \frac{r}{2} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{\beta^\alpha} + \sqrt{x_i^\alpha}} \quad (4.13)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin çözümü

$$l''(\beta) = -\frac{3}{4} \alpha^2 \beta^{\alpha/2-2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{(\sqrt{\beta^\alpha} + \sqrt{x_i^\alpha})^2}$$

ifadesini negatif yapar. Bu nedenle bu çözüm $l(\beta)$ fonksiyonunu maksimum yapar.

Not olarak $l'(\beta) < 0$ ancak ve ancak $\gamma(\beta) < 0$ olmaktadır. Ayrıca,

$$\gamma'(\beta) = -\frac{3\alpha\beta^{\alpha/2-1}}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{(\sqrt{\beta^\alpha} + \sqrt{x_i^\alpha})^2} < 0$$

olduğundan $\gamma(\beta)$ azalan bir fonksiyondur. Dahası,

$$l''(\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2}(\gamma'(\beta)\beta - \gamma(\beta)) = 0$$

için çözüm $\beta = \frac{\gamma(\beta)}{\gamma'(\beta)}$ eşitliğinin çözümüdür ve $[x_{(r)}, x_{(r+1)})$ de $l'(\beta)$ fonksiyonunu minimum yapar.

Bu çözüme β_0 diyelim.

Şimdi $\beta > \beta_0$ için $l'(\beta) < 0$ olduğunu varsayalım. Yani, β_0 'dan daha büyük olan $l'(\beta) = 0$ için başka kök yoktur. Bunu ispatlamak için, β_0 'den büyük bir β^* 'ın $l'(\beta^*) = 0$ olduğunu varsayalım.

O zaman

$$l''(\beta^*) = \frac{\alpha}{\beta^{*2}}(\gamma'(\beta^*)\beta^* - \gamma(\beta^*)) < 0,$$

elde ederiz. Bu ise $\beta^* > \gamma(\beta_0)/\gamma'(\beta_0)$ olduğundan bir çelişkidir.

Son olarak, $l'(\beta)$, $x_{(r)}$ noktasında var olmadığından, orada bir sıçrama süreksizliği olduğunu göstermeliyiz. Bunu da

$$\lim_{\beta \rightarrow x_{(r)}} l'(\beta) - \lim_{\beta \rightarrow x_{(r)}} l'(\beta) = \frac{\alpha}{2x_{(r)}} > 0,$$

şeklinde gösterebiliriz. Böylece, $x_{(r)}$, $l'(\beta)$ 'nin bir kökü olamaz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 16. α ve β parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicisi parametre uzayında var ve tektir.

İspat: $\theta = (\alpha, \beta)$ olsun. Mäkeläinen ve ark. (1981) çalışmasındaki Teorem 2.1'e göre bir yerel maksimumun varlığını göstermek için, parametre uzayının sınırlarına yaklaştığında, olabilirlik fonksiyonunun sıfıra yaklaştığını kolayca gösterilebilmektedir.

Parametrelerin MLE'sinin tekliğini göstermek için Mäkeläinen ve ark. (1981) çalışmasında verilen sonuç 2.5'e göre, $l_\alpha = 0$ ve $l_\beta = 0$ tahmin denklemlerinin çözümlerinde log-olabilirlik fonksiyonunun ikinci türevlerine bakılmalıdır. Burada $l_\alpha = 0$ ve $l_\beta = 0$ log-olabilirlik fonksiyonunun sırasıyla α ve β parametrelerine göre birinci türevlerini göstermektedir. Tahmin denklemlerinin çözümlerinde log-olabilirlik fonksiyonunun ikinci türevlerinin matrisi

$$D^2l = \begin{pmatrix} l_{\alpha\alpha} & l_{\alpha\beta} \\ l_{\beta\alpha} & l_{\beta\beta} \end{pmatrix},$$

olarak verilir. Burada

$$l_{\alpha\alpha} = -\frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_i\beta)^\alpha} \ln^2(x_i/\beta)}{(\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} < 0,$$

$$l_{\beta\beta} = -\frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_i\beta)^\alpha}}{(\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} < 0$$

ve

$$l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha} = -\frac{3\alpha\beta}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_i\beta)^\alpha} \ln(\beta/x_i)}{(\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2},$$

şeklindedir. Buna göre D^2l için determinant

$$\begin{aligned} \det D^2l &= l_{\alpha\alpha}l_{\beta\beta} - l_{\alpha\beta}^2 \\ &= \frac{3n}{4\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_i\beta)^\alpha}}{(\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} + \left(\frac{3\alpha}{4\beta} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_i\beta)^\alpha} \ln^2(x_i/\beta)}{(\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_i\beta)^\alpha}}{(\sqrt{x_i^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} \right\} \end{aligned}$$

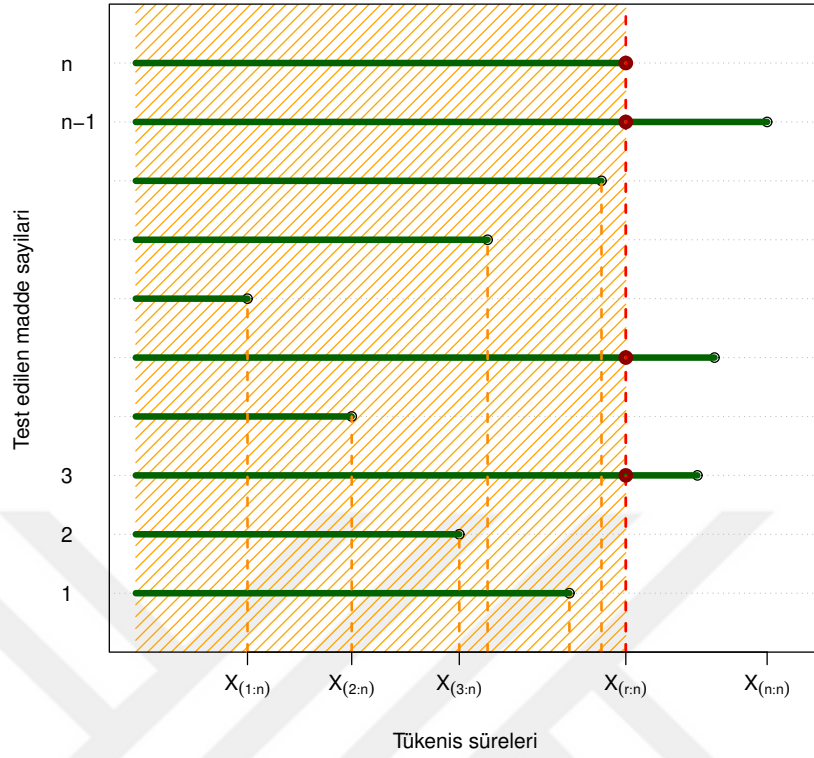
olarak yazılabilir. Bu determinant Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden pozitifdir. Böylece MLE'lerin tekliği gösterilmiş olur. $\square$

Tip II Sansürlü Veri Durumu:

Bir verinin sansürlü olması, o verinin bazı kısımları ile ilgili elimizde tam bilgi olmaması anlamına gelmektedir. Bu durum genellikle yapılan yaşam testlerinde deney tasarımı nedeniyle doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Örneğin, n birimlik nesneler bir yaşam testine alınıp ömürlerinin incelenmesi durumunda, tüm nesnelerin tükenmesini beklemek ekonomik olarak mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda, yaşam testi belli bir zamana ya da tükenen nesne sayısına kadar sürdürülebilir ve incelemeyen gözlemler doğal olarak sağdan sansürlenmiş olur. Burada eğer test önceden belirlenmiş bir tükenen nesne sayısına ulaşıldığında sonlandırılıyorsa buna tip II ya da tükeniş sansürleme denir.

Tip II sağdan sansürlemede yalnızca ilk r nesnenin tükenişini gözleyebiliriz. Böylece $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ sıralanmış tükeniş gözlemleri ele alındığında, $1 < r < n$ tam sayıları için X gözlemlerinin tam değerleri r -inci tükenişten sonra incelenemeyecek yalnızca $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(r)}$ tükenişleri tam olarak bilinebilecektir. Bu sansürleme şemasında, $X_{(r+1)}, X_{(r+2)}, \dots, X_{(n)}$ gözlemleri sansürlenmekte yani hakkında sadece göreceli olarak bilgi sahibi olunabilmektedir. Öyle ki, sağdan sansürlü durumda tam olarak bu $n - r$ nesnenin tükeniş sürelerinin $X_{(r:n)}$ gözlemini aştığını biliriz (Şekil 4.3).

Bağımsız ve aynı $h(x; \theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $H(x; \theta)$ kümülatif dağılım fonksiyonuna sahip bir dağılımdan, n elemanlı bir örneklem seçilsin ve bunlardan $r > 0$ adetinin tükenişi



Şekil 4.3. Tip II sağ sansürlü veriler için örnek diyagram.

gözlemlenebilsin. Bu örneklem için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta|x) = \frac{n!}{(n-r)!} [1 - H(x_{(r)}; \theta)]^{n-r} \prod_{i=1}^r h(x_{(i)}; \theta) \quad (4.14)$$

olarak verilmektedir. Bu fonksiyonu θ parametre vektörüne göre maksimize ederek, Tip-II sağ sansürlü örneklem için parametrelerin maksimum olabilirlik edicileri belirlenmektedir.

Tip II sağdan sansürlü n birimlik örneklem $TriBS(\alpha, \beta)$ dağılımından çekilmesi durumunda (4.14) olabilirlik fonksiyonu sabit terim ihmal edilerek

$$L(\alpha, \beta|x) \propto \left(\prod_{i=1}^r h(X_{(i)}; \alpha, \beta) \right) [1 - H(X_{(r)}; \alpha, \beta)]^{n-r}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^r \frac{2\alpha\beta^{\alpha/2} X_{(i)}^{\alpha-1}}{(\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^3} \right), \begin{cases} \prod_{i=k+1}^r \left(\frac{\beta}{X_{(i)}} \right)^{\alpha/2} \left[\frac{2\beta^\alpha}{(\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} \right]^{n-r}, & \beta \leq X_{(r)} \\ \left[1 - \frac{2X_{(r)}^\alpha}{(\sqrt{X_{(r)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^2} \right]^{n-r}, & \beta > X_{(r)}, \end{cases}$$

olarak yazılabilir. Burada $k, X_{(k)} < \beta < X_{(k+1)}$ sağlayan bir tam sayıdır. Ayrıca, olabilirlik fonksiyonu

için bu form elde edilirken

$$I_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & \text{bakadeerlerde,} \end{cases}$$

gösterge fonksiyon olmak üzere, (4.2) ile verilen *TriBS* olasılık yoğunluk fonksiyonunun

$$h(x; \alpha, \beta) = \frac{2\alpha\beta^{\alpha/2}x^{\alpha-1}}{(\sqrt{x^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha})^3} \left(I_{[0,\beta]}(x) + I_{[\beta,\infty)}(x) \left(\frac{\beta}{x} \right)^{\alpha/2} \right),$$

olarak yazılabilmesinden faydalanarak elde edilmiştir. Bu olabilirlik fonksiyonu, iki parçadan oluştuğu için bu fonksiyonun maksimizasyonu iki durum olarak incelenecektir.

Birinci durum ($\beta \leq X_{(r)}$): Bu koşul altında log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta|x) = & r \ln \alpha + \alpha \left(n - \frac{k}{2} \right) \ln \beta + \alpha \sum_{i=1}^r \ln X_{(i)} - \frac{\alpha}{2} \sum_{i=k+1}^r \ln X_{(i)} \\ & - 3 \sum_{i=1}^r \ln \left(\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha} \right) + 2(n-r) \ln \left(\sqrt{X_{(r)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha} \right), \end{aligned}$$

olarak belirlenmektedir. Bu fonksiyonun α ve β parametrelerine göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenerek

$$\begin{aligned} \frac{\delta l}{\delta \alpha} = & \frac{r}{\alpha} + \left(n - \frac{k}{2} \right) \ln \beta + \sum_{i=1}^r \ln X_{(i)} - \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^r \ln X_{(i)} \\ & - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^r \frac{\sqrt{\beta^\alpha} \ln \beta + \sqrt{X_{(i)}^\alpha} \ln X_{(i)}}{\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} + (n-r) \frac{\sqrt{\beta^\alpha} \ln \beta + \sqrt{X_{(r)}^\alpha} \ln X_{(r)}}{\sqrt{X_{(r)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} = 0, \\ \frac{\delta}{\delta \beta} = & \left(n - \frac{k}{2} \right) - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^r \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} + (n-r) \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{X_{(r)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} = 0 \end{aligned}$$

normal eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitliğin aynı anda nümerik olarak çözümü ile $\beta \leq X_{(r)}$ durumu için log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\hat{\alpha}_1$ ve $\hat{\beta}_1$ değerlerini belirleriz.

İkinci durum ($\beta > X_{(r)}$): Bu durum için log-olabilirlik fonksiyonu

$$r \ln \alpha + \frac{r\alpha}{2} \ln \beta + \alpha \sum_{i=1}^r \ln X_{(i)} - 3 \sum_{i=1}^r \ln \left(\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha} \right) + (n-r) \ln \left(1 - \frac{2X_{(r)}^\alpha}{\left(\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha} \right)^2} \right),$$

olarak yazılabilir. Bu fonksiyonun α ve β parametrelerine göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenmesi ile

elde edilen normal denklemler,

$$\frac{\delta l}{\delta \alpha} = \frac{r}{\alpha} + \frac{r}{2} \ln \beta + \sum_{i=1}^r \ln X_{(i)} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^r \frac{\sqrt{\beta^\alpha} \ln \beta + \sqrt{X_{(i)}^\alpha} \ln X_{(i)}}{\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} +$$

$$2(n-r) \frac{X_{(r)}^\alpha \sqrt{\beta^\alpha} \ln (\beta / X_{(r:n)})}{\left(\sqrt{X_{(r)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha} \right) \left(\beta^\alpha + 2\sqrt{\beta^\alpha X_{(r)}^\alpha} - X_{(r)}^\alpha \right)} = 0,$$

$$\frac{\delta l}{\delta \beta} = \frac{r}{2} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^r \frac{\sqrt{\beta^\alpha}}{\sqrt{X_{(i)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha}} + 2(n-r) \frac{X_{(r)}^\alpha \sqrt{\beta^\alpha}}{\left(\sqrt{X_{(r)}^\alpha} + \sqrt{\beta^\alpha} \right) \left(\beta^\alpha + 2\sqrt{\beta^\alpha X_{(r)}^\alpha} - X_{(r)}^\alpha \right)},$$

olarak verilebilir. Bu iki eşitliğin nümerik olarak birlikte çözülmesi ile $(\beta > X_{(r)})$ için olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\hat{\alpha}_2$ ve $\hat{\beta}_2$ değerlerini belirleriz.

TriBS dağılımına sahip tip II sansürlü örneklem için parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri $\hat{\alpha}_{ML}$ ve $\hat{\beta}_{ML}$

$$l(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML}) = \max\{l(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1), l(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2)\}$$

ile elde edilir.

5. SİMÜLASYON

Bu bölümde, önceki bölümde *TriBS* dağılımı için önerilen tahmin edicilerin performanslarını incelemek için bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Çalışmada küçük, orta ve büyük örneklemeler ele alınmıştır ve α parametresinin değerini değiştirerek tahminlerin yanlılığının α ile nasıl değiştiğini gösterilmiştir. Dağılımın kantil fonksiyonu kullanılarak *TriBS*(0.5, 1) ve *TriBS*(1.5, 1) dağılımlarından $n = 20(10)80$ boyutlarında 10,000'er örneklem oluşturulmuştur. Tüm tahminlerin için yanlılıkların ortalamaları ve MSE'lerin (hata kareler ortalaması) hesaplamaları R programında (R Core Team, 2022) yapılmıştır. Momentler yöntemi tahminleri için, *rootSolve* paketindeki *multiroot* fonksiyonunu kullanarak iki doğrusal olmayan tahmin denklemini çözülmüştür. *multiroot* fonksiyonundaki parametrelerin başlangıç değerleri, α için yüzdelik tahmin edicisi ve β için örneklem medyanını seçilmiştir. Bu tahmin ediciler kapalı formda oldukları için seçilmiştir. İki değişkenli optimizasyona ihtiyaç duyulduğunda, R programındaki *optim* fonksiyonunu kullanılmıştır.

Simülasyon sonuçları, Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'de rapor edilmiştir. Bu çizelgelerden, yanlılığın ve MSE'nin her bir tahmin edici için örneklem büyüklüğü arttıkça azaldığını gözlemlenmektedir. Buradan, tüm tahmin edicilerin asimptotik olarak yansız olduğu söylenebilir. LS ve $\alpha = 0.5$ durumundaki MPS hariç tüm tahmin ediciler α 'yı yüksek tahmin etmektedir. Çizelge 5.1'den görülebileceği gibi, β tahmininin dağılımın azalan şekli ($\alpha < 1$) olduğunda büyük bir MSE'ye sahip olduğu gözlemlenebilir. Her iki çizelgeden de α artırıldığında β için tahmin edicilerin performanslarının iyileştiği gözlemlenebilir.

Minimum MSE kriterine göre tüm tahmin edicilerin performanslarını incelenirse, MPS yönteminin α 'yı tahmin etmek için diğer tüm tahmin edicilerden üstün olduğu görülmektedir. Ayrıca, β 'yı tahmin etmek için MPS tahmin edicisi, $\alpha = 0.5$ iken diğerlerinden daha iyi MSE değerleri elde edilmektedir. Ek olarak, $\alpha = 1.5$ olduğunda, MPS tahmin edicisi sadece küçük örneklerde iyi performans gösterir. Örneklem büyüklüğü arttığında β 'yı tahmin etmede, LS ve MLE tahmin edicileri, MPS tahmin edicisinden daha iyi MSE bakımından daha iyi sonuç göstermektedir. Yanlılıklar üzerinden ise LS tahmin edicisi neredeyse tüm durumlarda α 'yı tahmin etmede diğerlerinden daha iyi performans gösterdiği açıktır. $\alpha = 0.5$ iken, ML, MPS ve LS tahmin edicileri en az yanlılığa sahiptir. Hem tablolardan hem de α 'nın gerçek değerinin artmasının, aynı örnek boyutunda β tahmin edicilerinin yanlılıklarını ve MSE'lerini azalttığını, ancak α tahmin edicileri için arttığını gözlemlenebilmektedir. Ancak, β 'nın MLE'si için durum tersine dönmektedir. Beklendiği gibi, yanlılık ve MSE açısından en kötü sonuçlar yüzdelik tahmin edicisi tarafından elde edilmektedir. MSE kriterine göre, veri ters J şeklinde oldu-

ğunda ($\alpha < 1$), uygulamalarda MPS tahmin edicileri önerileirken, büyük örnekler için LS ve ML tahmin edicilerinin de kullanışlı olduğu görülmektedir.



Çizelge 5.1. Parametre değerleri $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1$ olacak şekilde değişen örneklem büyüklükleri ile üretilmiş veriler için farklı tahmin yöntemleri ile elde edilen yanlılık ve hata kareler ortalaması (parantez içinde) değerleri.

n	$\hat{\alpha}_P$	$\hat{\beta}_P$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_{MPS}$	$\hat{\beta}_{MPS}$	$\hat{\alpha}_{MM}$	$\hat{\beta}_{MM}$	$\hat{\alpha}_{MMM1}$	$\hat{\beta}_{MMM1}$	$\hat{\alpha}_{MMM2}$	$\hat{\beta}_{MMM2}$	$\hat{\alpha}_{ML}$	$\hat{\beta}_{ML}$
20	0.0719 (0.0368)	0.6684 (5.0688)	-0.0077 (0.0149)	0.4647 (2.9055)	0.0135 (0.0063)	0.4482 (1.4167)	0.0365 (0.0139)	0.5017 (2.9363)	0.0301 (0.0127)	0.5168 (3.1336)	0.0206 (0.0116)	0.8088 (8.6503)	0.0721 (0.0164)	0.8379 (4.7966)
30	0.0519 (0.0217)	0.3652 (1.5799)	-0.0022 (0.0093)	0.2718 (1.0879)	0.0033 (0.0040)	0.3094 (0.8216)	0.0231 (0.0079)	0.2846 (1.2115)	0.0206 (0.0076)	0.3343 (1.4374)	0.0115 (0.0070)	0.5653 (5.0170)	0.0459 (0.0092)	0.4766 (1.5666)
40	0.0349 (0.0138)	0.2868 (1.0658)	-0.0040 (0.0067)	0.2114 (0.7665)	-0.0021 (0.0031)	0.2374 (0.5903)	0.0163 (0.0054)	0.2113 (0.7421)	0.0161 (0.0055)	0.2285 (0.8361)	0.0079 (0.0051)	0.4130 (2.3661)	0.0333 (0.0061)	0.3279 (0.8784)
50	0.0287 (0.0110)	0.2071 (0.6880)	-0.0022 (0.0053)	0.1559 (0.4984)	-0.0058 (0.0025)	0.1932 (0.4477)	0.0130 (0.0042)	0.1711 (0.5225)	0.0134 (0.0043)	0.1766 (0.5754)	0.0048 (0.0038)	0.3547 (2.5881)	0.0249 (0.0045)	0.2545 (0.6062)
60	0.0252 (0.0087)	0.1703 (0.5348)	-0.0029 (0.0042)	0.1211 (0.3620)	-0.0077 (0.0022)	0.1587 (0.3449)	0.0103 (0.0034)	0.1390 (0.3975)	0.0109 (0.0034)	0.1553 (0.4535)	0.0046 (0.0033)	0.2943 (1.5165)	0.0206 (0.0037)	0.1999 (0.4470)
70	0.0203 (0.0071)	0.1468 (0.4259)	-0.0016 (0.0036)	0.1229 (0.3170)	-0.0087 (0.0019)	0.1392 (0.2866)	0.0098 (0.0029)	0.1174 (0.3236)	0.0090 (0.0029)	0.1247 (0.3474)	0.0038 (0.0027)	0.2652 (1.6059)	0.0181 (0.0030)	0.1721 (0.3581)
80	0.0176 (0.0060)	0.1304 (0.3620)	-0.0019 (0.0032)	0.1026 (0.2571)	-0.0089 (0.0018)	0.1138 (0.2361)	0.0076 (0.0025)	0.1020 (0.2782)	0.0069 (0.0025)	0.1056 (0.2904)	0.0025 (0.0024)	0.2275 (0.9480)	0.0158 (0.0026)	0.1380 (0.2966)

Çizelge 5.2. Parametre değerleri $\alpha = 1.5$ ve $\beta = 1$ olacak şekilde değişen örneklem büyüklükleri ile üretilmiş veriler için farklı tahmin yöntemleri ile elde edilen yanlılık ve hata kareler ortalaması (parantez içinde) değerleri.

n	$\hat{\alpha}_P$	$\hat{\beta}_P$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_{ML}$	$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\alpha}_{MM}$	$\hat{\beta}_{MM}$	$\hat{\alpha}_{MMM1}$	$\hat{\beta}_{MMM1}$	$\hat{\alpha}_{MMM2}$	$\hat{\beta}_{MMM2}$	$\hat{\alpha}_{MPS}$	$\hat{\beta}_{MPS}$
20	0.2249 (0.3414)	0.0517 (0.1180)	-0.0144 (0.1281)	0.0449 (0.1000)	0.1010 (0.1134)	0.0550 (0.1013)	0.1003 (0.1169)	0.0473 (0.0996)	0.0913 (0.1156)	0.0493 (0.1093)	0.0666 (0.1057)	0.0663 (0.1650)	-0.1141 (0.0941)	0.0447 (0.0966)
30	0.1439 (0.1870)	0.0375 (0.0753)	-0.0116 (0.0812)	0.0301 (0.0610)	0.0678 (0.0681)	0.0318 (0.0620)	0.0667 (0.0710)	0.0266 (0.0622)	0.0595 (0.0673)	0.0314 (0.0665)	0.0376 (0.0639)	0.0460 (0.1114)	-0.0966 (0.0606)	0.0251 (0.0611)
40	0.1099 (0.1268)	0.0274 (0.0554)	-0.0069 (0.0610)	0.0171 (0.0443)	0.0519 (0.0467)	0.0176 (0.0435)	0.0467 (0.0492)	0.0158 (0.0453)	0.0428 (0.0484)	0.0264 (0.0513)	0.0262 (0.0464)	0.0412 (0.0877)	-0.0776 (0.0441)	0.0219 (0.0443)
50	0.0849 (0.0945)	0.0229 (0.0445)	-0.0061 (0.0480)	0.0135 (0.0342)	0.0387 (0.0375)	0.0179 (0.0342)	0.0369 (0.0382)	0.0191 (0.0365)	0.0350 (0.0378)	0.0164 (0.0390)	0.0145 (0.0361)	0.0332 (0.0731)	-0.0674 (0.0351)	0.0179 (0.0350)
60	0.0667 (0.0739)	0.0217 (0.0372)	-0.0081 (0.0383)	0.0146 (0.0284)	0.0337 (0.0306)	0.0128 (0.0287)	0.0312 (0.0309)	0.0135 (0.0305)	0.0289 (0.0308)	0.0160 (0.0325)	0.0127 (0.0299)	0.0249 (0.0610)	-0.0628 (0.0304)	0.0127 (0.0281)
70	0.0606 (0.0630)	0.0171 (0.0313)	-0.0068 (0.0326)	0.0086 (0.0241)	0.0295 (0.0252)	0.0109 (0.0246)	0.0282 (0.0264)	0.0118 (0.0248)	0.0251 (0.0252)	0.0134 (0.0276)	0.0120 (0.0252)	0.0236 (0.0550)	-0.0555 (0.0250)	0.013 (0.0244)
80	0.0510 (0.0539)	0.0115 (0.0271)	-0.0020 (0.0293)	0.0101 (0.0209)	0.0268 (0.0221)	0.0108 (0.0215)	0.0236 (0.0223)	0.0110 (0.0225)	0.0225 (0.0220)	0.0132 (0.0236)	0.0085 (0.0216)	0.0226 (0.0494)	-0.0507 (0.0222)	0.0102 (0.0215)

6. VERİ ANALİZİ

Bu bölümde, *TriBS* dağılımının performansı gerçek veri analizi ile incelenecektir. Ayrıca *TriBS* dağılımının performansı ikinci bölümde verilmiş klasik *BS* dağılımı ve *LaplaceBS*, *LojistikBS* ve *tBS* dağılımları gibi bazı genelleştirilmiş *BS* dağılımları ile kıyaslanacaktır.

6.1. Kalça Çevresi Verisi

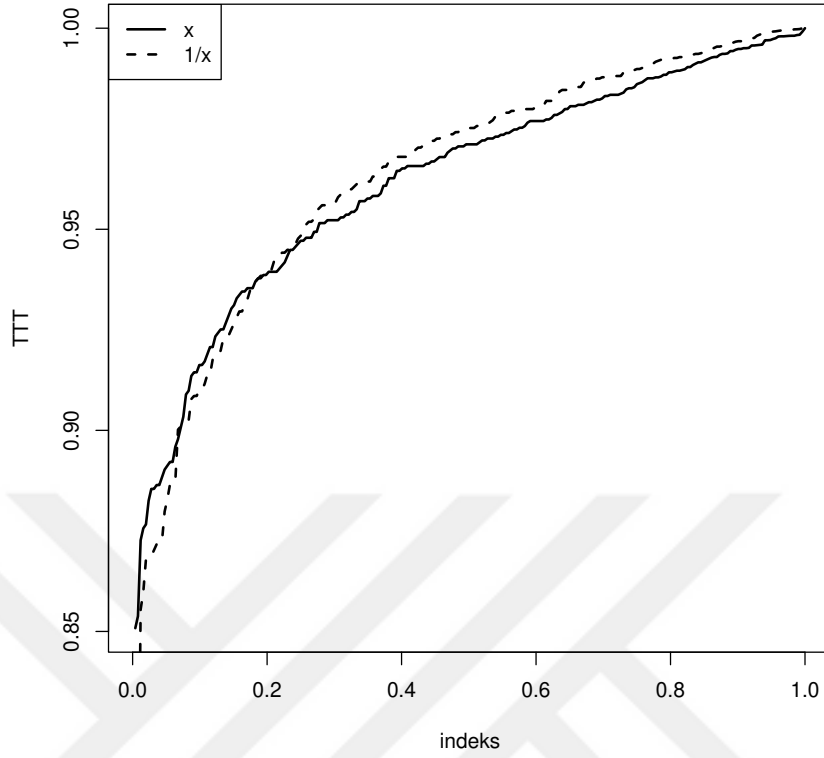
Johnson (1996) çalışmasından alınmış olan gerçek verinin tümü 252 erkek için yaş, boy, ağırlık ve 10 farklı vücut çevre ölçümü içermektedir. Bu çalışmada, bu verideki kalça çevresi (cm) ölçümü incelenmiştir. Veri için özet istatistikler Çizelge 6.1’de verilmiştir. Buradan verinin sağa çarpık olduğu ve normal dağılımdan daha büyük basıklığa sahip olduğu gözlenmektedir. Ayrıca, Şekil 6.1’de verilen TTT (total time on test) grafiğinde verinin ve verinin tersi için oluşturulan eğrilerin uyumlu olduğu, bu da verinin *GBS* dağılımları ile modellenmesi için uygun olduğunu göstermektedir (Athayde, 2017). Bu nedenle *TriBS* dağılımı ve diğer *GBS* dağılımları veriyi modelleme için kullanımı uygundur.

Çizelge 6.1. Kalça çevresi verisi için özet istatistikler

Ortalama	Standart Sapma	Medyan	Çarpıklık	Basıklık	Min	Mak
99.9048	7.1641	99.3	1.4882	10.3002	85	147.7

Karşılaştırılan modeller için en çok olabilirlik tahminleri Çizelge 6.2’de rapor edilmiştir. *TriBS* modeli varsayımında β için en çok olabilirlik tahmini 129. ve 130. sıra istatistikleri arasında belirlenmiştir. *LaplaceBS* modelinde β için en çok olabilirlik tahmini medyan değeri olarak elde edilmiştir. Ayrıca, önerilen diğer yöntemler ile tahmin sonuçları Çizelge 6.3’te verilmiştir. Elde edilen tahmin değerlerinin, β ’nın en çok olabilirlik tahminine yakın olduğu ancak, ikinci alternatif momentler tahminlerinin diğer tüm tahminlerden uzak olduğu görülmektedir.

Uyumun-iyiliğini (goodness-of-fit) incelemek için Çizelge 6.2’de elde edilen en çok olabilirlik tahminlerine karşılık gelen bazı büyüklükler hesaplanmıştır. Bunlardan, AIC (Akaike Bilgi Kriteri) k tahmin edilen parametre sayısı olmak üzere, $(-2)(\log - lik) + 2k$ formülü ile hesaplanmıştır. Bir diğer karşılaştırma ölçümü olarak, BIC (Bayesci Bilgi Kriteri) değerini de $(-2)(\log - lik) + k \ln(n)$ formülü ile hesaplıyoruz. Küçük AIC ve BIC değerine sahip olan model daha iyi modeli göstermektedir. Çizelge 6.2, hem AIC hem de BIC değerlerine göre *TriBS* dağılımının veri için en uygun model olduğunu göstermektedir. Bu uygunluk ayrıca, Şekil 6.2’de de görülmektedir. Şekilde görüldüğü üzere *TriBS* dağılımı verinin modu içeren parçasını en iyi modelleyen dağılımdır.



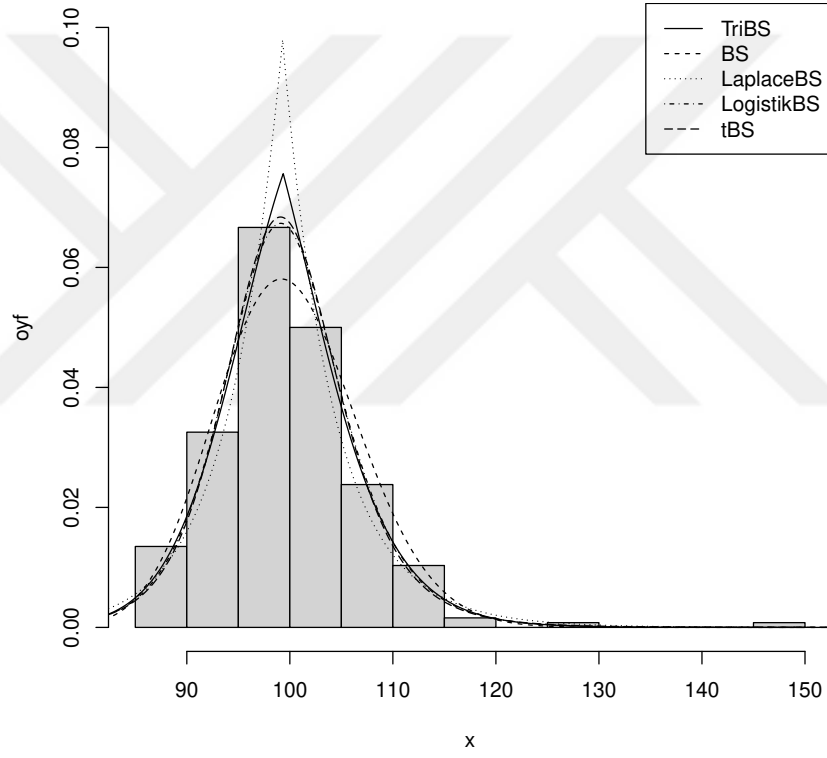
Şekil 6.1. Kalça çevresi verisi ve tersi için TTT grafiği.

Çizelge 6.2. Kalça çevresi verisi için en çok olabilirlik tahminleri ve karşılık gelen log-olabilirlik, AIC ve BIC değerleri

Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\nu}$	log-olabilirlik	AIC	BIC
<i>BS</i>	0.0691	99.6671		-843.5304	1691.061	1698.120
<i>LaplaceBS</i>	0.0514	99.3000		-838.0147	1680.029	1687.088
<i>LojistikBS</i>	0.0374	99.3951		-835.6188	1675.238	1682.296
<i>tBS</i>	0.0564	99.3678	6.0262	-834.9342	1675.868	1686.457
<i>TriBS</i>	30.0595	99.3584		-835.2747	1674.549	1681.608

Çizelge 6.3. Kalça çevresi verisinde *TriBS* dağılımı parametreleri için elde edilen diğer tahmin değerleri

Model	Yüzdelik	EKK	MM	MM1	MM2
$\hat{\alpha}$	29.9160	29.8402	30.1631	30.1138	28.2490
$\hat{\beta}$	99.4316	99.3258	99.4836	99.6622	101.5839



Şekil 6.2. Kalça çevresi verisi için uydurulan modeller.



7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yeni bir yaşam dağılımı üretim süreci tanıtılmıştır. Sonrasında bu süreç üzerinden üretilen dağılımların, Athayde (2017) çalışmasında verilen karakterizasyonu sağladığı ve bu nedenle GBS ailesinin yeni bir elemanı olduğu gösterilmiştir. Bu yöntem ile üretilebilecek bazı dağılımlar tanıtılmış ve sonrasında üçgensel BS dağılımı detaylı olarak incelenmiştir. Yeni dağılımın aşağıda da verilen bazı ilginç özellikleri gösterilmiştir:

- GBS ailesinin elemanı olduğu için bu dağılım da bazı dönüşümler altında kapalıdır ve ölçek parametresi aynı zamanda dağılımın medyanını göstermektedir.
- Kümülatif dağılım fonksiyonu açık bir formdadır. Bu, yüzdelik ve MPS gibi alternatif tahmin yöntemlerini kullanırken kolay hesaplama avantajı sağlamaktadır.
- İki parçalı yapısı sayesinde iki farklı kuyruk davranışına sahiptir. Bu özellik, eşik değere sahip bir veri kümesi için, eşik değerin öncesi ve sonrasındaki modellemeler için kullanışlı bir dağılım olmasını sağlayabilir.
- Esnek bir tehlike fonksiyonu yapısına sahiptir. β parametresinden önce ve sonra tehlike fonksiyonu farklı şekillere sahip olabilmektedir.
- Parametrelerin maksimum olabilirlik tahminleri parametre uzaylarında tek olarak varlardır. Bu durum, uygun başlangıç değerleri kullanıldığında tahminlerin elde edilmesini garanti eder.

Aşağıdaki maddelerin her biri daha sonraki araştırmalarda değerlendirilebilir:

- Burada önerilen dağılım ailesi için Sanhueza ve ark. (2008) çalışmasında olduğu gibi genel sonuçlar elde etmek üzere çalışılabilir.
- Farklı bir çekirdek dağılım seçilerek, elde edilen yeni dağılım detaylı olarak incelenebilir.
- Simetrik çift-yönlü kuvvet dağılımı, simetrik üçgensel dağılımı genelleştirdiğinden, simetrik çift-yönlü kuvvet dağılımı çekirdek dağılımına dayalı üretilen dağılım *TriBS* dağılımını genelleştirecektir. Bu sayede üretilen daha esnek dağılım detaylı olarak incelenebilir.
- Elde edilen dağılımların daha karmaşık sansürlü örnekler durumunda uygulamaları araştırılabilir.
- Önerilen dağılım farklı regresyon uygulamalarında incelenebilir.

Ayrıca, *BS* ve log-lojistik dağılımının kullanıldığı diğer konular, *TriBS* dağılımı için de açık araştırma problemleri olarak incelenebilir.



KAYNAKLAR

- Achcar, J. A., 1993. Inferences for the Birnbaum—Saunders fatigue life model using Bayesian methods. *Computational statistics & data analysis*, 15(4):367–380.
- Alam, F. M. A., 2022. On Comparing Different Methods of Estimation for the Parameters of a Pathological Distribution with Application to Climate Data. *Austrian Journal of Statistics*, 51(4):120–147.
- Alam, F. M. A. ve Almalki, A. M., 2021. The hazard rate function of the logistic Birnbaum-Saunders distribution: Behavior, associated inference, and application. *Journal of King Saud University-Science*, 33(7):101580.
- Alam, F. M. A. ve Almalki, A. M., 2022. On Modeling Cancer and Tuberculosis Data Using the Birnbaum–Saunders Lifetime Model Established on a Logistic Kernel. *Applied Sciences*, 12(10):5000.
- Alam, F. M. A. ve Nassar, M., 2021. On Modeling Concrete Compressive Strength Data Using Laplace Birnbaum-Saunders Distribution Assuming Contaminated Information. *Crystals*, 11(7):830.
- Athayde, E., 2017. A characterization of the generalized Birnbaum–Saunders distribution. *Revstat-Statistical Journal*, 15:333–354.
- Azevedo, C., Leiva, V., Athayde, E., ve Balakrishnan, N., 2012. Shape and change point analyses of the Birnbaum–Saunders-t hazard rate and associated estimation. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(12):3887–3897.
- Balakrishnan, N., Gupta, R. C., Kundu, D., Leiva, V., ve Sanhueza, A., 2011. On some mixture models based on the Birnbaum–Saunders distribution and associated inference. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(7):2175–2190.
- Balakrishnan, N. ve Zhu, X., 2014. On the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimates of the parameters of Birnbaum–Saunders distribution based on type-i, type-ii and hybrid censored samples. *Statistics*, 48(5):1013–1032.
- Bebbington, M., Lai, C.-D., ve Zitikis, R., 2008. A proof of the shape of the Birnbaum-Saunders hazard rate function. *Mathematical Scientist*, 33(1).
- Bhattacharyya, G. ve Fries, A., 1982. Fatigue failure models — Birnbaum-Saunders vs. Inverse Gaussian. *IEEE Transactions on Reliability*, 31(5):439–441.
- Birbiçer, I. ve Genç, A. I., 2022. An alternative for Laplace Birnbaum-Saunders distribution. *Mathematica Slovaca*, 72(4):1063–1090.

- Birnbaum, Z. ve Saunders, S. C., 1968. A probabilistic interpretation of Miner's rule. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16(3):637–652.
- Birnbaum, Z. W. ve Saunders, S. C., 1969a. Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of applied probability*, 6(2):328–347.
- Birnbaum, Z. W. ve Saunders, S. C., 1969b. Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of applied probability*, 6(2):328–347.
- Chang, D. S. ve Tang, L. C., 1994a. Graphical analysis for Birnbaum-Saunders distribution. *Microelectronics Reliability*, 34(1):17–22.
- Chang, D. S. ve Tang, L. C., 1994b. Random number generator for the Birnbaum-Saunders distribution. *Computers & industrial engineering*, 27(1-4):345–348.
- Cheng, R. ve Amin, N., 1983. Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 45(3):394–403.
- Chew, V., 1968. Some useful alternatives to the normal distribution. *The American Statistician*, 22(3):22–24.
- Desmond, A., 1985. Stochastic models of failure in random environments. *Canadian Journal of Statistics*, 13(3):171–183.
- Desmond, A. F., 1986. On the relationship between two fatigue-life models. *IEEE Transactions on Reliability*, 35(2):167–169.
- Díaz-García, J. A. ve Leiva-Sánchez, V., 2005. A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 128(2):445–457.
- Engelhardt, M., Bain, L. J., ve Wright, F., 1981. Inferences on the parameters of the Birnbaum-Saunders fatigue life distribution based on maximum likelihood estimation. *Technometrics*, 23(3):251–256.
- Fang, K. W., Kotz, S., ve Ng, K. W., 1990. *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall/CRC.
- Fletcher, H., 1911. A verification of the theory of Brownian movements and a direct determination of the value of NE for gaseous ionization. *Physical Review (Series I)*, 33(2):81.
- Freudenthal, A. M. ve Shinozuka, M., 1961. Structural safety under conditions of ultimate load failure and fatigue. *Teknik Rapor*, Columbia University.
- From, S. G. ve Li, L., 2006. Estimation of the parameters of the Birnbaum-Saunders distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 35(12):2157–2169.
- Genç, A. I., 2013. The generalized T Birnbaum-Saunders family. *Statistics*, 47(3):613–625.

- Gradshteyn, I. S. ve Ryzhik, I. M., 2014. Table of integrals, series, and products. Academic press.
- Gupta, A. K. ve Varga, T., 1993. Elliptically contoured models in statistics, Cilt 240. Springer Science & Business Media.
- Johnson, R. W., 1996. Fitting percentage of body fat to simple body measurements. *Journal of Statistics Education*, 4(1).
- Kundu, D., Kannan, N., ve Balakrishnan, N., 2008. On the hazard function of Birnbaum–Saunders distribution and associated inference. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(5):2692–2702.
- Leiva, V., 2019. An interview with Sam C. Saunders. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 35(1):133–137.
- Leiva, V., Riquelme, M., Balakrishnan, N., ve Sanhueza, A., 2008. Lifetime analysis based on the generalized Birnbaum–Saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(4):2079–2097.
- Mäkeläinen, T., Schmidt, K., ve Styán, G. P., 1981. On the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimate of a vector-valued parameter in fixed-size samples. *The Annals of Statistics*:758–767.
- Mann, N., Schafer, R., ve Singpurwalla, N., 1974. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. Wiley Series in Probability and Statistics - Applied Probability and Statistics Section. Wiley. URL <https://books.google.com.tr/books?id=yfdTAAAAAAAJ>.
- Marshall, A. W. ve Olkin, I., 2007. *Life distributions*, Cilt 13. Springer.
- McDonald, J. B. ve Newey, W. K., 1988. Partially adaptive estimation of regression models via the generalized t distribution. *Econometric theory*, 4(3):428–457.
- Miner, M. A., 2021. Cumulative Damage in Fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 12(3):A159–A164.
- Nakamura, L. R., Rigby, R. A., Stasinopoulos, D. M., Leandro, R. A., Villegas, C., ve Pescim, R. R., 2017. Modelling location, scale and shape parameters of the birnbaumsaunders generalized t distribution. *Journal of Data Science*, 15(2):221–237.
- Ng, H., Kundu, D., ve Balakrishnan, N., 2003. Modified moment estimation for the two-parameter Birnbaum–Saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 43(3):283–298.
- Padgett, W., 1982. On Bayes estimation of reliability for the Birnbaum-Saunders fatigue life model. *IEEE Transactions on Reliability*, 31(5):436–438.
- Paula, G. A., Leiva, V., Barros, M., ve Liu, S., 2012. Robust statistical modeling using the Birnbaum-Saunders-t distribution applied to insurance. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 28(1):16–34.

- Pradhan, B. ve Kundu, D., 2013. Inference and optimal censoring schemes for progressively censored Birnbaum–Saunders distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 143(6):1098–1108.
- Prudnikov, A., Brychkov, Y., ve Marichev, O., 1986. Integrals and series, Vol I. Gordon and Breach.
- R Core Team, 2022. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Rieck, J. R., 1999. A moment-generating function with application to the Birnbaum-Saunders distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 28(9):2213–2222.
- Rieck, J. R., 2003. A comparison of two random number generators for the Birnbaum–Saunders distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 32(5):929–934.
- Rieck, J. R. ve Nedelman, J. R., 1991. A log-linear model for the Birnbaum—Saunders distribution. *Technometrics*, 33(1):51–60.
- Sanhueza, A., Leiva, V., ve Balakrishnan, N., 2008. The generalized Birnbaum–Saunders distribution and its theory, methodology, and application. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 37(5):645–670.
- Saunders, S. C., 1974. A family of random variables closed under reciprocation. *Journal of the American Statistical Association*, 69(346):533–539.
- Seshadri, V., 1965. On random variables which have the same distribution as their reciprocals. *Canadian Mathematical Bulletin*, 8(6):819–824.
- Teimouri, M., 2023. Fast Bayesian Inference for Birnbaum-Saunders Distribution. *Computational Statistics*, 38(2):569–601.
- Wang, M., Sun, X., ve Park, C., 2016. Bayesian analysis of Birnbaum–Saunders distribution via the generalized ratio-of-uniforms method. *Computational Statistics*, 31:207–225.
- Wang, R., Xu, X., ve Gu, B., 2020. Statistical Analysis of Two-parameter Generalized Birnbaum-Saunders Cauchy Distribution. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 10(4):1614–1635.
- Zhu, X. ve Balakrishnan, N., 2015. Birnbaum–Saunders distribution based on Laplace kernel and some properties and inferential issues. *Statistics & Probability Letters*, 101:1–10.
- Zhu, X., Balakrishnan, N., ve Saulo, H., 2019. On the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimates of parameters of Laplace Birnbaum–Saunders distribution based on Type-i, Type-ii and hybrid censored samples. *Metrika*, 82:759–778.

ÖZGEÇMİŞ

İsmet BİRBİÇER, Lisans eğitimini 2014 yılında, yüksek li-sans eğitimini ise 2017 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümünde tamamladı. 2015 yılından beri Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. 2018 yılında aynı bölümde doktora çalışmalarına başlamıştır.

