

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI**

**BISHOP ÇATIYA GÖRE
SABİT GENİŞLİKLİ TIMELIKE EĞRİLER**

Mehmet Çetin EVİRGİN

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**



MANİSA-2015

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI**

**BISHOP ÇATIYA GÖRE
SABİT GENİŞLİKLİ TIMELIKE EĞRİLER**

Mehmet Çetin EVİRGİN

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**



MANİSA-2015

TEZ ONAYI

Mehmet Çetin EVİRGEN tarafından hazırlanan "**Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Timelike Eğriler**" adlı tez çalışması 15/09/2015 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**
Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Mehmet ÖNDER**
Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ**
Ege Üniversitesi

Enstitü Müdürü **Prof. Dr. Kenan DOST**

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet Çetin EVİRGEN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SEMBOLLER DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TEŞEKKÜR	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT	VI
GİRİŞ	1
1. Temel Kavramlar	2
2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatı	13
3. R_1^3 Minkowski 3-Uzayında Timelike Eğriler için Bishop Çatı	20
4. R_1^3 Minkowski 3-Uzayında Sabit Genişlikli Timelike Eğriler	31
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ.....	41

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	3-boyutlu Minkowski uzayı
S^2	Öklid-3 uzayında birim küre
S_1^2	Lorentziyen birim küre
H_0^2	Hiperbolik birim küre
κ	Frenet çatıya göre eğrilik
τ	Frenet çatıya göre burulma
k_1	Bishop çatıya göre 1. eğrilik
k_2	Bishop çatıya göre 2. eğrilik
$\wedge$	Vektörel çarpım
$\langle, \rangle$	İç çarpım
Λ	Işık konisi
$\ \quad \ $	Norm

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Minkowski-3 uzayında vektörler.....	7
Şekil 1.2. Minkowski-3 uzayında birim küreler	8
Şekil 4.1. Düzlemde sabit genişlikli çember.....	31

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında ve planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde olumlu ve yapıcı eleştirileriyle bana yol gösteren Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e ve önerilerde bulunan Sayın Muhammed Çetin'e ve çalışmam esnasında bana vakit ayıran Sayın Tayyibat Taner ve Doğan Çolak'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma boyunca manevi desteklerini her zaman hissettiğim, bugünlere gelmeme yardımcı olan ve beni destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Çetin EVİRGEN
Manisa, 2015

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Timelike Eğriler

Mehmet Çetin EVİRGEN

**Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Bishop çatısına göre karakterize edilen uzay eğrileri ile ilgili olan bu çalışma dört bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, bu çalışmada sözü geçen kavramlara ait temel tanımlar, sağlanması gereken şartlar verilmiştir. Ayrıca Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayı tanımlanmış ve bu uzaydaki eğrilerin Bishop çatısı hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, R. L. BISHOP un "There is more than one way to frame a curve" adlı makalesinin çevirisi yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, M. K. KARACAN ve B. BÜKCÜ nün "Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-Space" isimli makalesinin çevirisi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde de Minkowski 3-Uzayında Bishop çatısına göre sabit genişlikli timelike eğrilerle ilgili diferensiyel karakterizasyonlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Timelike eğri, sabit genişlikli eğriler, Bishop çatı

2015, 50 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Timelike Curves of Constant Breadth according to Bishop Frame

Mehmet Çetin EVİRGİN

**Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

This study which is related to the space curves characterized by Bishop frame consists of four sections.

In the first section, some basic definitions and conditions mentioned in the study are given. Furthermore, Euclidean Space and Minkowski 3-Space are defined and informations about the curves in Minkowski 3-space and their Bishop frames are given.

In the second section, R. L. BISHOP's article on "There is more than one way to frame a curve" has been translated.

In the third section, M. K. KARACAN and B. BÜKCÜ's article on "Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-Space" has been translated.

In the fourth section, the differential equations characterizing timelike curves of constant breadth according to Bishop frame in Minkowski 3-space are given.

Keywords: Timelike curve, curves of constant breadth, Bishop frame

2015, 50 pages

GİRİŞ

Sabit genişlikli eğriler üzerine ilk çalışmanın 1778'de Euler tarafından yayınlandığı görülmektedir [1]. Euler düzlemdeki sabit genişlikli eğrileri vermişti. Ball [2], Barbier [3], Blaschke [4] ve Mellish [5] düzlemdeki sabit genişlikli eğrilerin özellikleri üzerine çalıştı. Fujiwara 1914'deki çalışmasında 3 boyutlu Öklid uzayında sabit genişlikli uzay eğrisi kavramını tanımlamıştır [6]. Daha sonra Hammer düzlemsel sabit genişlikli eğrilerin analitik gösterimini verdi [7]. F. Reuleaux ise bu tür eğrileri bulmak için bir metot ile kinematik ve mühendislikte uygulamalarını vermiştir [8]. Smakal da sabit genişlikli eğriler üzerine çalıştı [9]. [10] de Köse, Minkowski fonksiyonu tarafından verilen bir ovalde sabit genişlik koşulunun giderildiğini gösterdi. Daha sonra Köse, bir uzay eğrisi (C) verildiğinde, bir uzay eğrisinin (C^*) ters yönlerde karşılıklı noktalarında aralarındaki uzaklığı sabit paralel teğetlerin belirlenebileceğini gösterdi [11]. Daha sonra Sezer, çalışmasında ele aldığı kavramları kullanarak, bu tür eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemleri kurmuş ve bir uzay eğrisinin sabit genişlikli eğri olması için bir kriter vermiştir [12]. Daha sonra E^3 de incelenen bu tür eğriler E^4 'e taşınmış ve bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir [13]. Bu çalışmaların ardından Akdoğan E^n de bu tür eğriler için oluşturulan diferansiyel denklemin çözümünü vermiştir [14]. Daha sonra Önder ve diğerleri Minkowski-3 uzayında sabit genişlikli timelike ve spacelike eğrilerin diferansiyel denklemlerinin karakterizasyonlarını verdi [15]. Ayrıca onlar E_1^3 de timelike veya spacelike eğrinin sabit genişlikli olması için gereken kriteri verdi. Kocayigit ve Önder de, bazı özel durumlarda normal eğriler, helisler ve küresel eğrilerin E_1^3 'de space ve timelike sabit genişlikli eğriler olabileceğini gösterdi.

Biz bu çalışmada E_1^3 de Bishop çatısına göre sabit genişlikli timelike eğrileri inceleyeceğiz. Bu tür eğrilerin diferansiyel karakterizasyonlarını vereceğiz.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ana konusuna temel teşkil edecek tanım ve kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.1. (Öklid Uzayı): R reel sayılar cismini göstermek üzere, $R^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ vektör uzayında, iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$R^n \times R^n \rightarrow R \quad (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

fonksiyonu R^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** denir [16].

Tanım 1.2. (Norm): $p \in R^n$ olmak üzere,

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

diyelim. $R^n \rightarrow R$, $p \rightarrow \|p\|$ fonksiyonu R^n uzayında bir normdur. Buna göre R^n vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır. $d(p, q) = \|p - q\|$ biçiminde tanımlanan $d : R^n \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu, R^n uzayında bir metriktir. Dolayısıyla R^n bir metrik uzaydır. Bu metrikle birlikte R^n uzayına **Öklid uzayı** denir ve kimi zaman E^n ile gösterilir [16].

Tanım 1.3. f , R^n uzayından R ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise f fonksiyonu C^0 sınıfından bir fonksiyondur. R^n den R ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^0(R^n, R)$ biçiminde gösterilir.

R^n nin her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^1 sınıfındandır denir.

f fonksiyonunun R^n nin her bir noktasında k ıncı basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^k sınıfındandır.

R^n den R ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^k(R^n, R)$ biçiminde gösterilir.

R^n nin her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur, denir. R^n den R ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(R^n, R)$ biçiminde gösterilir.

$p \in R^n$ için f fonksiyonu p noktasının en az bir açık komşuluğunda düzgün ise f fonksiyonu, p noktasında C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur [16].

Tanım 1.4. I , R reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \subset R \rightarrow E^n$ biçiminde diferansiyellenebilir α dönüşümüne, E^n uzayı içinde bir **eğri** denir [17].

Tanım 1.5. $\alpha_{*t}(\frac{d}{dx}|_t)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **hız vektörü** denir ve kısaca $\alpha'(t)$ ile gösterilir [16].

Tanım 1.6. $\alpha : I \rightarrow R^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine **düzenli eğri (regüler eğri)** denir [16].

Tanım 1.7. E^n uzayında, $\alpha : I \subset R \rightarrow E^n$ eğrisi için $\forall s \in I$, $\|\alpha'(s)\|=1$ ise α eğrisine **birim hızlı eğri** denir [16].

Tanım 1.8. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \rightarrow E^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin s noktasındaki **birim teğet vektörü** denir [16].

Tanım 1.9. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \rightarrow E^3$ eğrisi için,

$$\kappa : I \rightarrow R$$

$$s \rightarrow \kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin s noktasındaki **eğriliği** denir [16].

Tanım 1.10. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için, $\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s)$ eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki **asli normali** denir [16].

Tanım 1.11. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için, $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ eşitliği ile tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki **binormali** denir [16].

Tanım 1.12. $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$ vektörlerine $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir.

$$\left\{ \vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s) \right\}$$

kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir.

T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde **Frenet vektör alanları** denir [16].

Tanım 1.13. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere,

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** denir [16].

Teorem 1.1. Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir [16].

Teorem 1.2. $\alpha : I \rightarrow R^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T , N , B olduğuna göre

$$N \times B = T$$

$$B \times T = N$$

dir [16].

Tanım 1.14. $\alpha : I \rightarrow R^3$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $\frac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik yarıçapı fonksiyonu denir ve ρ ile gösterilir.

$t \in I$ için $\rho(t)$ sayısına $\alpha : I \rightarrow R^3$ eğrisinin, $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik yarıçapı denir [16].

Tanım 1.15. (Öklid 3-uzayında Bishop çatısı): Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı, hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır, yani bir eğrinin ikinci türevi olmasa bile iyi tanımlıdır. Çatının her bileşenini paralel öteleme ile eğri üzerinde ortonormal çatı yardımıyla kolayca paralel taşıyabiliriz. Bu paralel öteleme çatısı şu gözleme dayalıdır: Verilen eğri için $\vec{T}(s)$ tek iken çatının geri kalanı için γ eğrisinin sırasıyla birinci eğriliği ve ikinci eğriliği k_1, k_2 (doğal eğrilikler) olmak üzere herhangi uygun keyfi bazları $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ seçelim, böylece bu çatı her noktada $\vec{T}(s)$ vektörüne dik normal düzlemedir. $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ türevleri sadece $\vec{T}(s)$ vektörüne bağlı ise herbiri birbirine bağlı değilse, doğal eğrilikler ne olursa olsun yol boyunca düzgün olarak $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ bazlarını değiştirebiliriz. Böylece

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\gamma'} \vec{T} \\ \nabla_{\gamma'} \vec{N}_1 \\ \nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere alternatif çatı denklemleri elde ederiz [18].

$$\kappa(s) = \sqrt{\|\gamma'(s)\|} = \sqrt{\|\vec{T}(s)\|}$$

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \quad k_1 \neq 0$$

$$\tau = \theta' = \frac{k_1 k_2' - k_1' k_2}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Burada κ , θ kutup koordinatları için etkin bir biçimde Kartezyen koordinat sistemine karşılık gelir [18].

Tanım 1.16. (Minkowski Uzayı): $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in E^n$ olmak üzere

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

iç çarpımına **Lorentz (Minkowski) iç çarpımı** denir [24]. Minkowski iç çarpımıyla tanımlı Öklid uzayına **Lorentz uzayı**, **Minkowski uzayı** veya **yarı-Öklid uzayı** denir ve E_1^n ile gösterilir.

Özel olarak $n=3$ ise E_1^3 uzayına **3-boyutlu Minkowski uzayı** denir. Bu durumda standart metrik, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in E_1^3$ olmak üzere

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklindedir [17, 19].

Tanım 1.17. E_1^3 uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

- i) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ veya $\vec{a} = 0$ ise $\vec{a}$ ya spacelike vektör,
- ii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle < 0$ ise $\vec{a}$ ya timelike vektör,
- iii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ ve $\vec{a} \neq 0$ ise $\vec{a}$ vektörüne lightlike (veya null) vektör denir

[19].

Tanım 1.18. E_1^3 uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere ;

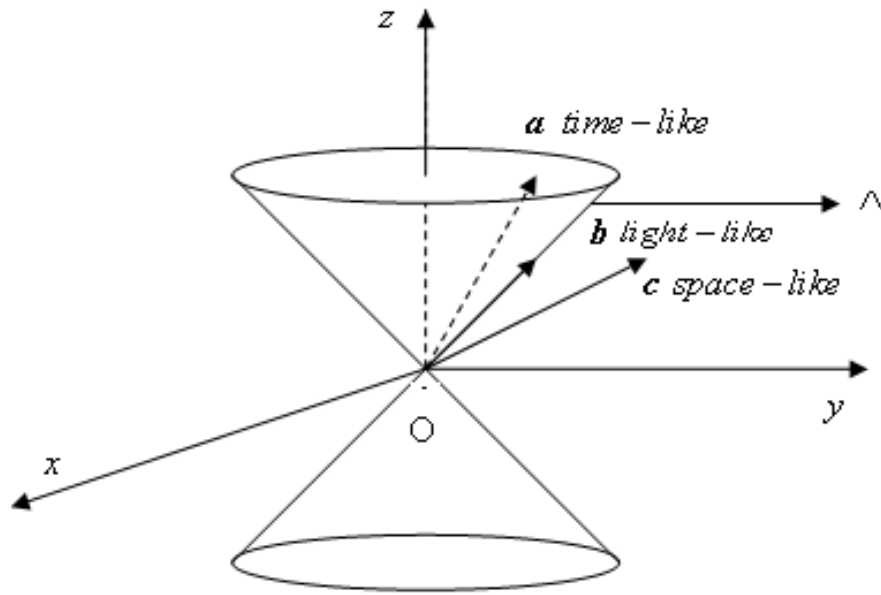
- i) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ise $\vec{a}$ ya birim spacelike vektör ,
- ii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1$ ise $\vec{a}$ ya birim timelike vektör denir [20,21].

Tanım 1.19. (Işık konisi): E_1^3 uzayında

$$\Lambda = \left\{ \vec{a} \in E_1^3 : \left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = 0, \vec{a} \neq 0 \right\}$$

cümlesine **Işık konisi** adı verilir.

E_1^3 uzayındaki timelike vektörler Λ nın içinde , lightlike (veya null) vektörler Λ nın üzerinde ve spacelike vektörler de Λ nın dışında bulunurlar (Şekil 1) [19].



Şekil 1:Minkowski-3 uzayında vektörler

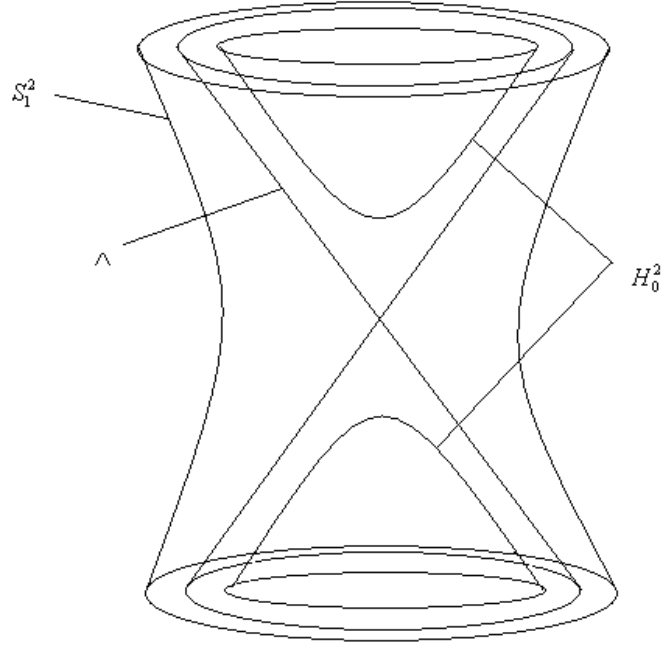
Tanım 1.20. E_1^3 uzayındaki Lorentz ve hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \left\{ \vec{a} \in E_1^3 : \left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ \vec{a} \in E_1^3 : \left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = -1 \right\}$$

biçiminde tanımlanırlar (Şekil 2) [19].



Şekil 2: Minkowski-3 uzayında birim küreler

Tanım 1.21. $y = y(u, v)$, E_1^3 uzayında bir yüzey olsun. Eğer $P \in y(u, v)$ için $\langle, \rangle|_P : y(u, v)|_P \times y(u, v)|_P \rightarrow R$, bir Lorentz iç çarpımı ise $y(u, v)$ ye timelike yüzey denir [22].

Yani, bir yüzeyin normal vektör alanı timelike (spacelike) ise yüzey bir spacelike (timelike) yüzeydir.

Tanım 1.22. E_1^3 uzayında iki vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin vektörel çarpımı denir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \text{ ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada,

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_2$$

dir [23].

Teorem 1.3. E_1^3 uzayında üç vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ olsun. Bu durumda ,

- i) $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
- ii) $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = -\left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle \vec{b} + \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle \vec{a}$
- iii) $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = 0$
- iv) $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = -\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle + \left(\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \right)^2$

dir [24].

Tanım 1.23. $\vec{a} \in E_1^3$ bir timelike vektör olsun. $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ olmak üzere,

- i) $\left\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \right\rangle < 0$ ise $\vec{a}$ ya future-pointing timelike vektör,
- ii) $\left\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \right\rangle > 0$ ise $\vec{a}$ ya past-pointing timelike vektör

denir [22].

Tanım 1.24. i) Hiperbolik Açı : $\vec{x}$ ve $\vec{y}$, E_1^3 uzayında iki future pointing (veya past pointing) timelike vektör olsun. Bu taktirde

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = - \left\| \vec{x} \right\| \left\| \vec{y} \right\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki *hiperbolik açı* denir.

ii) Merkez Açı : E_1^3 uzayının bir timelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. Bu taktirde

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \left\| \vec{x} \right\| \left\| \vec{y} \right\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki *merkez açı* denir.

iii) Spacelike Açı : E_1^3 uzayının bir spacelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. Bu taktirde

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \left\| \vec{x} \right\| \left\| \vec{y} \right\| \cos \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$ reel sayısına $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki *spacelike açı* denir.

iv) Lorentziyen timelike açı : E_1^3 uzayında $\vec{x}$ bir spacelike vektör ve $\vec{y}$ bir timelike vektör olsun. Bu taktirde

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \left\| \vec{x} \right\| \left\| \vec{y} \right\| \sinh \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki *Lorentziyen timelike açı* denir [17,20,21].

Tanım 1.25. Diferansiyellenebilir bir γ eğrisi için,

- i) $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L < 0$ ise, γ eğrisine **timelike eğri**,
- ii) $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L > 0$ ise, γ eğrisine **spacelike eğri**,
- iii) $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L = 0$ ise, γ eğrisine **null eğri** denir.

$\gamma(s) \in E_1^3$ olmak üzere γ eğrisi için üç durum söz konusudur [17, 19, 25,].

I. Durum: $\gamma(s)$ bir timelike eğri ise; $\vec{T}$ timelike, $\vec{N}$ spacelike, $\vec{B}$ spacelike vektörlerdir, yani

$$\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L = -1, \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle_L = 1, \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle_L = 1$$

$$\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle_L = \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle_L = \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle_L = 0$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{T} = \kappa \vec{N}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{N} = \kappa \vec{T} + \tau \vec{B}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{B} = -\tau \vec{N}$$

dir [26].

Tanım 1.26. (Minkowski 3-uzayında Bishop çatısı): Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı, hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır, yani bir eğrinin ikinci türevi olmasa bile iyi tanımlıdır. Çatının her bileşenini paralel öteleme ile eğri üzerinde ortonormal çatı yardımıyla kolayca paralel taşıyabiliriz. Bu paralel öteleme çatısı şu gözleme dayalıdır: Verilen eğri için $\vec{T}(s)$ tek iken çatının geri kalanı için γ eğrisinin sırasıyla birinci eğriliği ve ikinci eğriliği k_1, k_2 (doğal eğrilikler) olmak üzere herhangi uygun keyfi bazları $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ seçelim, böylece bu çatı her noktada $\vec{T}(s)$ vektörüne dik normal düzlemedir. $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ türevleri sadece $\vec{T}(s)$ vektörüne bağlı ise herbiri birbirine bağlı değilse, doğal eğrilikler ne olursa olsun yol boyunca düzgün olarak $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ bazlarını değiştirebiliriz. Böylece

$$\kappa(s) = \sqrt{\|\gamma'(s)\|_L} = \sqrt{\|\vec{T}(s)\|_L}$$

$$\theta(s) = \arg \tan \left(\frac{k_2}{k_1} \right), \quad k_1 \neq 0$$

olmak üzere alternatif çatı denklemleri elde ederiz. Burada κ, θ kutup koordinatları için etkin bir biçimde Kartezyen koordinat sistemine karşılık gelir [27].

$\gamma(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ regüler bir eğri olsun, yani herhangi bir s parametresi için türevi sıfırdan farklı bir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin $\vec{N}_1(s)$ birim vektörü bazı sabit $\vec{U}$ birim vektörleriyle sabit θ açısı yapıyorsa yani $s \in I$ için ise γ eğrisi slant helis olarak adlandırılır.

$\gamma: I \rightarrow E_1^3$ sıfırdan farklı k_1, k_2 doğal eğrilikleriyle birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisi bir slant helistir ancak ve ancak $\frac{k_1}{k_2}(s)$ sabittir [28].

2. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATI

Bu bölümde, R. L. BISHOP un "There is more than one way to frame a curve" adlı makalesinin çevirisi yapılmıştır.

Sürekli, diferansiyellenebilir C^3 sınıfından bir eğrinin Frenet çatısı, Öklidyen önergeler altında bu eğrinin özelliklerinin belirlenmesi adına standart bir araçtır. E^3 de non-dejenere (bozulmamış) C^3 sınıfından bir eğrinin, Frenet çatısı yardımıyla geometrik özellikleri incelenebilir. Frenet türev formülleri ve karşılık gelen ters-simetrik matris yardımıyla eğrinin özellikleri ve eğriyle ilgili diğer kavramlar bulunabilir. Bu bölümün amacı, aynı avantajlara sahip başka çatıların olduğunu göstermek ve bunları Frenet çatısıyla karşılaştırmaktır.

2.1. İzafi Paralel Alanlar

Bir γ eğrisi boyunca M normal vektör alanının türevi teğetsel ise M nin izafi paralel alan olduğunu söyleyebiliriz. İzafi paralel alanla kastedilen, M nin türevinin T teğetiyle lineer bağımlı olmasıdır. T ve v sırasıyla γ eğrisinin birim teğet vektör alanı ve hızı, aynı zamanda $M' = fT$ olmak üzere

$$\alpha = \gamma + M, \quad \gamma \in C^3$$
$$(\gamma + M)' = \gamma' + M' = (v + f)T$$

eşitlikleri yazılabilir.

O halde α ve γ eğrileri arasındaki parça (M) ikisine birden diktir. M nin uzunluğu ve eğriliğe bağlı olarak iki eğri arasındaki minimum uzunluğun parçası lokal olarak bu parçadır veya değildir. M yeterince kısa ise, lokal minimize uzunluğun parçası kolayca doğrulanır. Aksine, γ dan sabit uzaklıkta hareket eden bir eğri, M izafi paralel olduğundan $\gamma + M$ tarafından verilebilir.

Herhangi bir $\gamma(t_0)$ noktasındaki M_0 normal vektörü $M(t_0) = M_0$ olacak şekilde tek bir M izafi paralel alanı üretir. Eğer M ve M_0 ikisi birlikte bir noktada denk gelirlerse bunların farkı sıfır sabit uzunluğuna sahip olurlar. Bunun varlığını göstermek için yardımcı, uyarlanmış bir çatı ele alalım; eğer eğrinin Frenet çatısı mevcut olsaydı bunu yapabilecektik. Ancak biz dejenere olmuş eğriler (bazı noktalarda eğriliği kaybolmuş eğriler) için bunun varlığını göstermek istiyoruz.

Böyle çatılar, T ve diğer iki paralel alan kullanılarak Gram-Schmidt yöntemi yardımıyla oluşturulabilir. Eğer T, N_1, N_2 uyarlanmış bir çatı ise o zaman aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$T' = \rho_{01}N_1 + \rho_{02}N_2, \quad N_1' = -\rho_{01}T + \rho_{12}N_2, \quad N_2' = -\rho_{02}T - \rho_{12}N_1.$$

Şimdi, L sabit genişlikli izafi paralel normal alanı için koşul bulalım. θ düzgün açı fonksiyonu olmak üzere

$$M = L(\cos \theta N_1 + \sin \theta N_2) \quad (2.1)$$

yazılabilir. (2.1) eşitliğinin türevi alınır

$$M' = L(-\theta' \sin \theta N_1 + \cos \theta (-\rho_{01}T + \rho_{12}N_2) + \theta' \cos \theta N_2 + \sin \theta (-\rho_{02}T - \rho_{12}N_1))$$

düzenlersek;

$$M' = L[(\theta' + \rho_{12})(-\sin \theta N_1 + \cos \theta N_2) - (\rho_{01} \cos \theta + \rho_{02} \sin \theta)T] \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) eşitliğinden M nin izafi paralel alan olması için gerek ve yeter şart $\theta' + \rho_{12} = 0$ olmasıdır. Bu diferensiyel denklemin θ için her başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümü vardır. Aşağıda bu alanların varlığı ve tekliği için bir dizi teoremden bahsedilmiştir.

Teorem 2.1. γ, C^k sınıfından Öklid-3 uzayında regüler ve $k \geq 2$ için hızı sıfırdan farklı olan bir eğri olsun. O zaman $\gamma(t_0)$ noktasındaki her V_0 vektörü için γ eğrisi boyunca $V(t_0) = V_0$ ve bu iki izafi paralel alanın iç çarpımı sabit olacak şekilde C^{k-1} sınıfından tek bir V izafi paralel alanı vardır [18].

İspat. V ve W gibi iki izafi paralel alanın $\langle V, W \rangle$ iç çarpımının sabit olduğunu gösterelim. V ve W sırasıyla türevleri fT ve gT olan normal vektörler olsun. $\langle V, W \rangle$ iç çarpımının türevi alınır $\langle fT, W \rangle + \langle V, gT \rangle = 0$ elde edilir. Bu ise $\langle V, W \rangle$ iç çarpımının sabit olduğu anlamına gelir.

2.2. Özel uyarlanmış çatılar

R^3 ve R^3 ün bilinen alt uzaylarında C^2 regüler eğrisinin izafi paralel alanlarının yönlendirilmiş 1-boyutlu teğetsel parça ve 2-boyutlu normal parçalarını

içerdiği açıktır. Biz iki alt uzaya da uyan bu vektör uzayının ortonormal bazını "izafi paralel uyarlanmış çatı" olarak isimlendirebiliriz. İzafi paralel uyarlanmış çatılar, takip eden açık sonuçlara göre 2-boyutlu ortogonal grup tarafından parametrize edilebilir olduğundan her biri yönlendirilmiş sınıf içerisinde iki çember formundadır.

Teorem 2.2. *Eğer (T, M_1, M_2) izafi paralel uyarlanmış bir çatı ise o zaman izafi paralel uyarlanmış çatıların tamamı $(T, aM_1 + bM_2, cM_1 + dM_2)$ formunda ifade edilebilir. Burada $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, elemanları sabit olan ortogonal bir matristir. [18].*

(T, M_1, M_2) izafi paralel uyarlanmış bir çatı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\dot{T} &= k_1 M_1 + k_2 M_2 \\ \dot{M}_1 &= -k_1 T \\ \dot{M}_2 &= -k_2 T\end{aligned}\tag{2.3}$$

yazılabilir. Burada $(\cdot)$, yeni çatıda eğrinin yay parametresine göre türevini ifade etmektedir.

Teorem 2.2 izafi paralel uyarlanmış çatı için Cartan matrisinin [29,30] aşağıdaki gibi olduğunu gösterir.

$$\begin{bmatrix} 0 & ak_1 + bk_2 & ck_1 + dk_2 \\ -ak_1 - bk_2 & 0 & 0 \\ -ck_1 - dk_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Frenet çatısı da

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde Cartan matrisine sahiptir. Cartan matrisinde diğer tek olasılık olan bir girdinin yok edilmesiyle aşağıdaki matris elde edilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$$

ama öyle ki $f = \pm\kappa, g = \pm\tau$ ile Frenet çatısının yeniden yapımında bu kolayca görülebilir.

(2.3) eşitliklerinden κ eğriliği

$$\kappa = \left\| \dot{T} \right\| = \left\| k_1 M_1 + k_2 M_2 \right\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca eğrinin asli normali

$$N = \cos \theta M_1 + \sin \theta M_2 = (k_1 / \kappa) M_1 + (k_2 / \kappa) M_2$$

ve türevi de

$$\dot{N} = -\kappa T + \tau B = -\kappa T + \dot{\theta}(-\sin \theta M_1 + \cos \theta M_2)$$

olarak yazılabilir. Buradan $B = -\sin \theta M_1 + \cos \theta M_2$ ve $\dot{\theta} = \tau$ sonucuna ulaşılır.

Böylece κ ve belirsiz bir integrali olan $\theta = \int \tau ds$ eğri için kutupsal koordinatları ifade eder.

2.3. Bir Eğrinin Normal Yükselişi

(k_1, k_2) yi γ eğrisinin bir çeşit invaryantı olarak göstermek istiyoruz. Bunu göstermek izafi paralel uyarlanmış çatı tek olmadığı için (κ, τ) nun durumundan biraz daha zordur. Bununla birlikte Teorem 2.2 de bağımsızlık derecesini ayrıntılarıyla açıklamıştık. (k_1, k_2) yönlendirilmemiş durumda ortogonal dönüşüm, yönlendirilmiş durumda ise orijin etrafında dönme ile belirlenir. Bu yüzden (k_1, k_2) yi merkezi-Öklidiyen düzlem içinde γ nın yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş olarak düşünmeliyiz. Öyle ki Öklidiyen düzlem bir ayrılmış noktaya sahiptir. Bu durumda (k_1, k_2) yi γ nın normal yükselişi olarak düşünebiliriz. Bu durumun Frenet değişkenleri olan (κ, τ) dan bu derece farklı olması gerçekçi değildir. Çünkü yönlendirilmemiş durumda (κ, τ) ve Frenet çatı sadece iki elemanlı grupta bir eylemle τ ve B nin kimliksiz (non-identity) değişimiyle elde edilir. Yani burada (κ, τ) , $(\kappa, -\tau)$ dan ayrılamaz. (κ, τ) ve γ eğrisi arasındaki bağlantı için standart gerçekler Öklidiyen geometride (k_1, k_2) ve γ için benzer gerçekler gibidirler. İspatlar Frenet çatısı ile özdeştir ve aslında birleştirilmiş form içinde verilmiştir [30].

Teorem 2.3. İki C^2 regular eğrilerin Öklidiyen uzayda eş olmaları için gerek ve yeter şart aynı normal yükselişe sahip olmalarıdır. Bir merkezi Öklidiyen düzlemde herhangi parametrelendirilmiş sürekli eğri için, bir C^2 regüler eğrisi vardır ve verilen eğrinin normal yükselişine sahiptir. Örneğin iki eğri, eğrilik ve torsiyonlarında aynı yay uzunluğu parametrizasyonuna sahiplerse eştirler. Yönlendirilmiş durum için modifikasyonlar aşikardır: Öklidiyen uzay ile merkezi-Öklidiyen düzlemi yönlü ve eşdeğerliklerini (kongrüans) uygun yapınız.

2.4. Karşılaştırma ve uygulamalar

Frenet invaryantlarının geometrik özelliklerinin kolaylaştırılması ve Frenet değişmezleri onların tercih edilmelerini sağlayacaktır. Onların varlığı, yine de, normal yükselişin var olmasından daha genel pozisyonu olan bir eğri gerektiriyor. Özellikle bir Frenet aracı için γ eğrisi C^3 olmak zorunda ve γ', γ'' lineer bağımsız olmalı. Halbuki normal gelişim için ise sadece $\gamma \in C^2$ ve γ' sıfırdan farklı olması gerekir.

Aynı κ ve τ gibi, özel eğrilerde normal gelişim sıklıkla basit özelliklere sahiptir. Şurası açıktır ki düz bir çizginin (doğrunun) sabit sıfır eğrisine eşit normal bir yükselişi vardır. κ sabit ve $\tau=0$ olduğunda yarıçapı $\frac{1}{\kappa}$ olan çember elde ederiz; normal gelişiminde $(\kappa, 0)$ sürekli eğrisini elde ederiz, burada orijinden uzaklık κ ve kutupsal θ açısı $\theta' = \tau = 0$ sağlar. Öklid hareketinin alt grup parametrelerinden birinin yörüngesinden elde edilen diğer eğriler helis eğrileridir. Helisler merkezi-Öklidiyen düzlem grubunun bir parametrelili alt grubuyla elde edilirler ve sabit hızlı merkezi çember diye adlandırılırlar.

Bir dejenere olmamış C^3 düzlem eğrisi $\tau=0$ ile karakterize edilir. Bu demektir ki normal yükselişinde $\theta = \text{sabit}$ yani orijinden geçen bir doğru üzerinde (boyunca) uzanır. Bir genelleme yapılacak olursa bir C^2 regular eğrisinin bir düzlem içinde uzanması (olması) için gerek ve yeter şart normal yükselişin merkezin içinden geçen bir doğru boyunca uzanmasıdır. Normal yükselişi bir doğru üzerinde merkezden geçen bir eğri düşündüğümüzde, bu eğri düzlemde bir yönden başka bir yöne eğilir. C^1 olan, merkeze doğru bir doğru üzerinde ve merkezden

dışarı başka bir doğru üzerinde hareket eden normal yükseliş eğrisini düşündüğümüzde o zaman $\tau = 0$ dır ama düzlemsel değildir.

κ ve τ ile ilgili küre içinde uzanan uzaydaki C^3 eğrisi o kadar karışıktır ki farklı yapılan ölçüm testleri ya tamamlanmamış ya da hatalı versiyonlarıyla doludur.

Genellikle bu eğriye $(\kappa' / \tau \kappa^2)' = \tau / \kappa$ diferensiyel denklemi karşılık gelir. Buradaki zorluk τ ve κ' nün eğri üzerinde bazı noktalarda (ama her yerde değil), yok olabileceği gerçeğidir. Eğer (κ, τ) ile (k_1, k_2) arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurursak aşağıdaki geometrik karakterizasyon takip edilir:

Teorem 2.4. Bir C^2 eğrisinin küresel olması için gerek ve yeter şart, normal yükselişinin merkezden değil de bir doğru üzerinde uzanmasıdır. Bu doğrunun merkezden uzaklığı ve kürenin yarıçapı aynıdır [18].

İspat. γ eğrisi P merkezli yarıçapı r olan bir küre üzerinde uzanıyorsa, o zaman $\langle \gamma - P, \gamma - P \rangle = r^2$ dir. Yay uzunluğu ile ilgili olarak diferensiyel alınırsa bazı f ve g fonksiyonları için $\langle T, \gamma - P \rangle = 0$, bu yüzden de $\gamma - P = fM_1 + gM_2$ dir. Ama;

$$f' = \langle \gamma - P, M_1 \rangle' = \langle T, M_1 \rangle + \langle \gamma - P, -k_1 T \rangle = 0$$

ve benzer olarak g de sabittir. Daha sonra $\langle T, \gamma - P \rangle$ nin diferensiyeli alınarak aşağıdaki elde edilir:

$$\langle k_1 M_1 + k_2 M_2, \gamma - P \rangle + \langle T, T \rangle = fk_1 + gk_2 + 1 = 0.$$

Yani (k_1, k_2) , $fx + gy + 1 = 0$ doğrusu üzerindedir. Dahası;

$$r^2 = \langle \gamma - P, \gamma - P \rangle = f^2 + g^2 = 1/d^2$$

dir ve burada d doğrunun merkeze uzaklığını gösterir.

Karşıt olarak, f ve g sabit iken $fx + gy + 1 = 0$ diyelim. $P = \gamma - fM_1 - gM_2$ olsun. O zaman $P' = T + (fk_1 + gk_2)T = 0$ ve bu yüzden P sabittir. Benzer bir türev uygularsak $r^2 = \langle \gamma - P, \gamma - P \rangle$ nin de sabit olduğu görülür. Bu yüzden γ eğrisi P merkezli ve yarıçapı r olan küre üzerinde uzanır.

Daha genel olarak, bir C^3 regüler uzay eğrisinin oskulator küresinin yarıçapı, normal gelişimin teğet doğrusuna merkezden uzaklığının karşılıklı durumuyla verilir.

Düzlem içinde normal yükselişi bir doğru boyunca olan, duran, bir köşe oluşturarak dönüp başka bir doğru boyunca ilerleyen ve bu iki doğrunun da orijinden geçmediği bir C^1 eğrisi alalım. Bu şekilde C^1 e karşılık gelen uzay eğrisi bir küreden başka bir küreye geçer. Mümkünse bağlantı yerinde arakesit çemberi boyunca ilerler. Bu eğrinin burulma ve eğriliği, eğrinin küresel olmadığı durumda $(\kappa' / \tau \kappa^2)' = \tau / \kappa$ diferansiyel denklemini sağlar.

2.5. Genellemeler

n boyutlu Öklid uzayı merkezli eğriler için, C^n pürüzsüz (düzgün) eğrisi ve bozulmamış üst düzey grubunun birden çok varsayımı ile birlikte düşündüğümüzde sadece tek bir Frenet çatısı tanımlayabiliriz. Cartan matrisinin bağımsız girdilerinden $n-1$ hariç hepsi yok olur ve bunların $n-2$ si pozitifdir. Bu girdiler eğrinin kesin diferensiyel Öklid invariantlarının bütün bir kümesidir.

Yönlü Öklid uzayında n boyutlu bir eğrinin normal gelişimi, 3 boyutlu durumun ileri doğru genellemesi ile ifade edilir. Bu herhangi bir C^2 regular eğrisi için ortaya çıkar ve $n-1$ boyutunun merkezi Öklid uzay merkezinde sürekli olarak devam eden parametrize olmuş bir eğridir. Yani bu eğri daha uygun bir ortogonal dönüşüm olarak söylenir. Bu eğri Cartan matrisinin bağımsız girdilerinin 0 olduğu $n-1$ hariç hepsine sahip olan izafi paralel uyarlanmış çatıdan çıkar. Düşük boyutlu düzlem ya da küre içinde n boyutlu uzaydaki eğriler basitçe codimension ın düşük boyut düzleminde uzanan normal yükseliş eğrileri olarak karakterize edilir.

3. R_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA TİMELİKE EĞRİLER İÇİN BISHOP ÇATI

Bu bölümde, M. K. KARACAN ve B. BÜKCÜ'nün "Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-Space" isimli makalesinin çevirisi yapılmıştır.

Sürekli, diferansiyellenebilir C^3 sınıfından timelike eğrinin Frenet çatısı, yarı Öklidyen önergeler altında bu eğrinin özelliklerinin çözümlenmesi adına standart bir araçtır. Frenet çatının bir özelliği de timelike eğriye uyarlanmasıdır. Öyle ki elemanlarının ikisi de timelike eğriye dik veya teğettir. Bu bölümün amacı, aynı avantajlara sahip başka çatıların olduğunu göstermek ve bunları Frenet çatısıyla karşılaştırmaktır.

3.1. Paralel Alanlar

3.1.1. İzafi Paralel Alanlar

Bir α eğrisi boyunca N normal vektör alanının türevi teğetsel ise izafi paralel olarak söyleyebiliriz. İzafi paralel alanla kastedilen, N 'nin türevinin T teğetiyle lineer bağımlı olmasıdır. T ve v sırasıyla α eğrisinin birim teğet vektör alanı ve hızı, aynı zamanda $N' = fT$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha + N, \alpha \in C^3 \\ (\alpha + N)' &= \alpha' + N' = (v + f)T\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir.

O halde β ve α eğrileri arasındaki parça (N) ikisine birden diktir. N 'nin uzunluğu ve eğriliğe bağlı olarak iki eğri arasındaki minimum uzunluğun parçası lokal olarak bu parçadır veya değildir. N yeterince kısa ise, lokal minimize uzunluğun parçası kolayca doğrulanır. Aksine, α dan sabit uzaklıkta hareket eden bir eğri, N izafi paralel olduğundan $\alpha + N$ tarafından verilebilir.

Herhangi bir $\alpha(t_0)$ noktasındaki N_0 normal vektörü $N(t_0) = N_0$ olacak şekilde tek bir N izafi paralel alanı üretir. Eğer N ve N_0 ikisi birlikte bir noktada denk gelirlerse bunların farkı sıfır sabit uzunluğuna sahip olurlar. Bunun varlığını göstermek için yardımcı, uyarlanmış bir çatı ele alalım; eğer eğrinin Frenet çatısı

mevcut olsaydı bunu yapabilecektik. Ancak biz dejenere olmuş eğriler (bazı noktalarda eğriliği kaybolmuş eğriler) için bunun varlığını göstermek istiyoruz.

Böyle çatılar, T ve diğer iki paralel alan kullanılarak Gram-Schmidt yöntemi yardımıyla oluşturulabilir.

Teorem 3.1. α bir timelike eğri olsun. Eğer $\{T, N_1, N_2\}$ bir uyarlanmış çatı ise o zaman çatının türevleri eğrinin parametresiyle ilgili olarak aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_{01} & \rho_{02} \\ \rho_{01} & 0 & \rho_{12} \\ \rho_{02} & \rho_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

İspat.Bazı ρ_{00}, ρ_{01} ve ρ_{02} fonksiyonları için ;

$$T' = \rho_{00}T + \rho_{01}N_1 + \rho_{02}N_2 \quad (3.1)$$

yazabiliriz.(3.1) denkleminde aşağıdakileri elde ederiz:

$$-\rho_{00} = \langle T', T \rangle_L = 0,$$

$$\rho_{01} = \langle T', N_1 \rangle_L,$$

$$\rho_{02} = \langle T', N_2 \rangle_L.$$

Buradan da;

$$T' = 0.T + \rho_{01}N_1 + \rho_{02}N_2.$$

Benzer şekilde;

$$N_1' = \rho_{10}T + \rho_{11}N_1 + \rho_{12}N_2$$

ve

$$N_2' = \rho_{20}T + \rho_{21}N_1 + \rho_{22}N_2,$$

Buradan;

$$\rho_{10} = -\langle N_1', T \rangle_L = \langle T', N_1 \rangle_L = \rho_{01},$$

$$\rho_{11} = \langle N_1', N_1 \rangle_L = 0,$$

$$\rho_{12} = \langle N_1', N_2 \rangle_L$$

ve

$$\begin{aligned}\rho_{20} &= \langle N_2', T \rangle_L = \langle T', N_2 \rangle_L = \rho_{02}, \\ \rho_{21} &= \langle N_2', N_1 \rangle_L = \langle N_1', N_2 \rangle_L = -\rho_{12}, \\ \rho_{22} &= \langle N_2', N_2 \rangle_L = 0.\end{aligned}$$

Bununla da aşağıdakiye ulaşırız:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_{01} & \rho_{02} \\ \rho_{01} & 0 & \rho_{12} \\ \rho_{02} & \rho_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

veya kısaca

$$X' = KX.$$

Bundan başka K , $K^T = -\varepsilon K \varepsilon$ için yarı eğrilik simetrisidir. Burada $\varepsilon = 1, 1$ ve -1 deki elemanların diyagonal matrisidir. Şimdi biz L sabit genişlikli izafi paralel normal alanı için koşul bulalım. Burada θ düzgün açı fonksiyonudur öyle ki;

$$N = L[N_1 \cos \theta + N_2 \sin \theta].$$

Türev alırsak;

$$N' = L[(\theta' + \rho_{12})(-N_1 \sin \theta + N_2 \cos \theta) + (\rho_{01} \cos \theta + \rho_{02} \sin \theta)T]$$

olarak elde ederiz. Yukarıdaki eşitlikten N nin izafi paralel alan olması için gerek ve yeter şart $\theta' = -\rho_{12}$ olmasıdır. Bu diferensiyel denklemin θ için her başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümü vardır.

Teorem 3.2. α , C^k sınıfından Minkowski-3 uzayında regüler ve $k \geq 2$ için hızı sıfırdan farklı olan bir timelike eğri olsun. O zaman $\alpha(t_0)$ noktasındaki her X_0 vektörü için, α eğrisi boyunca $X(t_0) = X_0$ ve bu iki izafi paralel alanın iç çarpımı sabit olacak şekilde C^{k-1} sınıfından tek bir X izafi paralel alanı vardır.

İspat. X ve Y gibi iki izafi paralel alanın iç çarpımı olan $\langle X, Y \rangle_L$ nin sabit olduğunu gösterelim. X ve Y sırasıyla türevleri fT ve gT olan normal vektörler olsun. O zaman $\langle X, Y \rangle_L$ nin türevi,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle_L &= \langle X', Y \rangle_L + \langle X, Y' \rangle_L \\
&= \langle fT, Y \rangle_L + \langle X, gT \rangle_L \\
&= f\langle T, Y \rangle_L + g\langle X, T \rangle_L \\
&= f \cdot 0 + g \cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $\langle X, Y \rangle_L$ sabittir.

3.2. Özel uyarlanmış çatılar

R^3 ve R^3 ün bilinen alt uzaylarında C^2 regüler eğrisinin izafi paralel alanlarının yönlendirilmiş 1-boyutlu teğetsel parça ve 2-boyutlu normal parçalarını içerdiği açıktır ve yarı Öklidiyen uzayındaki iç çarpım değerinden ortaya çıkan bir Lorentzian iç çarpımı vardır. Biz iki alt uzaya da uyan bu vektör uzayının ortonormal bazını "izafi paralel uyarlanmış çatı" olarak isimlendirebiliriz. Yarı Öklid uzayının tercih edilmiş bir merkezi olduğunu farz edersek o zaman timelike eğrinin normal uzayını da aynı şekilde düşünürüz ve daha uygun(doğru) bir izafi paralel uyarlanmış çatı merkezi söyleyebiliriz. İzafi paralel uyarlanmış çatılar, takip eden açık sonuçlara göre 2-boyutlu yarı ortogonal grup tarafından parametrize edilebilir olduğundan dolayı her biri merkezleştirilmiş sınıf içerisinde iki Lorentzian çember formundadır.

Teorem 3.3. *Eğer $\{T, N_1, N_2\}$ izafi paralel uyarlanmış çatı ise o zaman izafi paralel uyarlanmış çatıların tamamı $\{T, aN_1 + bN_2, cN_1 + dN_2\}$ formunda ifade edilebilir,*

Burada $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, elemanları sabit olan yarı ortogonal bir matristir.

$\{T, N_1, N_2\}$ izafi paralel uyarlanmış bir çatı olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\dot{T} = k_1 N_1 + k_2 N_2$$

$$\dot{N}_1 = k_1 T$$

$$\dot{N}_2 = k_2 T$$

yazılabilir. Burada $(\dot{\cdot})$, yeni çatıda eğrinin yay parametresine göre türevini ifade etmektedir.

Teorem 3.3 izafî paralel uyarlanmış çatı için Cartan matrisinin [29,30] aşağıdaki gibi olduğunu gösterir.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & ak_1 + bk_2 & ck_1 + dk_2 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Frenet çatısı yarı Cartan matrise sahiptir:

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix},$$

Yarı Cartan matrisinde diğer tek olasılık olan bir girdinin yok edilmesiyle aşağıdaki matris elde edilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \\ f & -g & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & f & g \\ f & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Yarı Cartan matrislerinin girişlerini anlatmak bu şekilde kolaydır: Gerçekten;

$$\kappa = \left\| \dot{T} \right\|_L = \|k_1 N_1 + k_2 N_2\|_L = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}.$$

Burada eğrinin asli normalini,

$$N = N_1 \cos \theta + N_2 \sin \theta = \left(\frac{k_1}{\kappa} \right) N_1 + \left(\frac{k_2}{\kappa} \right) N_2, \quad (3.3)$$

ve türevi şöyle yazabiliriz:

$$\dot{N} = \kappa T + \tau B = \kappa T + \theta'(-N_1 \sin \theta + N_2 \cos \theta).$$

olarak yazılabilir.

$\{T, N_1, N_2\}$ kurallara uygun şekilde olduğunda $B = -\sin \theta N_1 + \cos \theta N_2$ ve $\dot{\theta} = \tau$ sonucuna ulaşılır. Böylece κ ve belirsiz bir integrali olan $\theta = \int \tau ds$ eğri için kutupsal koordinatları ifade eder.

3.3. Bir Timelike Eğrinin Normal Yükselişi

(k_1, k_2) yi α eğrisinin bir çeşit invaryantı olarak göstermek istiyoruz. Bunu göstermek (düşünmek) izafi paralel uyarlanmış çatı tek olmadığı için (κ, τ) nun durumundan biraz daha zordur. Bununla birlikte teorem 2.2 de bağımsızlık derecesini ayrıntılarıyla açıklamıştık. (k_1, k_2) yönlendirilmemiş durumda yarı ortogonal dönüşüm, yönlendirilmiş durumda ise orijin etrafında yarı dönme ile belirlenir. Bu yüzden (k_1, k_2) yi merkezi-Öklidiyen düzlem içinde α nın yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş olarak düşünmeliyiz. Bu durumun Frenet değişkenlerinden bu derece farklı olması gerçekçi değildir. Çünkü burada (κ, τ) , $(\kappa, -\tau)$ dan ayrılmış değildir. (κ, τ) ve α timelike eğrisi arasındaki bağlantı için standart gerçekler yarı Öklidiyen geometride (k_1, k_2) ve α için benzer gerçekler gibidirler. Bu deliller Frenet çatısı ile özdeştir ve aslında birleştirilmiş form içinde verilmiştir [30].

Teorem 3.4. *İki C^2 regular timelike eğrilerin yarı Öklidiyen uzayda eş olmaları için gerek ve yeter şart aynı normal yükselişe sahip olmalarıdır. Bir merkezi yarı Öklidiyen düzlemde herhangi parametrelendirilmiş sürekli eğri için, bir C^2 regüler eğrisi vardır ve verilen eğrinin normal yükselişine sahiptir. Örneğin iki eğri, eğrilik ve torsiyonlarında aynı yay uzunluğu parametrizasyonuna sahiplerse eştirler.*

Teorem 3.5. *α bir C^2 regular timelike eğri olsun. Bu durumda onun normal yükselişi orijin boyunca olmayan bir doğru üzerinde uzanıyorsa o zaman α , p merkezli r yarıçaplı Lorentzian küre üzerindedir. Bu doğrunun orijinden uzaklığı ve Lorentzian kürenin yarıçapı aynıdır.*

İspat. $\Rightarrow$: α bir Lorentzian küre üzerinde uzanıyor ve merkez p , yarıçap r ise o zaman

$$\langle \alpha - p, \alpha - p \rangle_L = r^2. \quad (3.4)$$

Yay uzunluğu ile ilgili olarak türev alınırsa;

$$\langle T, \alpha - p \rangle_L = 0. \quad (3.5)$$

Buradan;

$$\alpha - p = fN_1 + gN_2 \quad (3.6)$$

Bazı f, g fonksiyonları için elde edilir.(3.6) denkleminde aşağıdakini elde ederiz:

$$f = \langle \alpha - p, N_1 \rangle_L, g = \langle \alpha - p, N_2 \rangle_L \quad (3.7)$$

(3.7) nin türevini alırsak:

$$\begin{aligned} f' &= (\langle \alpha - p, N_1 \rangle_L)' \\ &= \langle T, N_1 \rangle_L + \langle \alpha - p, N_1' \rangle_L \\ &= 0 + \langle \alpha - p, k_1 T \rangle_L \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bu $f = \text{sabit}$ anlamına gelir.

Benzer olarak g de sabittir. O zaman (3.5) denkleminin türevi ve teorem 3.2 kullanılarak aşağıdakileri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \langle T, \alpha - p \rangle_L &= 0 \\ \langle T', \alpha - p \rangle_L + \langle T, T \rangle_L &= 0 \\ \langle k_1 N_1 + k_2 N_2, \alpha - p \rangle_L - 1 &= 0 \\ k_1 \langle N_1, \alpha - p \rangle_L + k_2 \langle N_2, \alpha - p \rangle_L - 1 &= 0 \\ fk_1 + gk_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Bu şu anlama gelir ki (k_1, k_2) ,

$$fx + gy - 1 = 0 \quad (3.8)$$

doğrusu üzerindedir. Bununla birlikte l doğrusunun orijinden uzaklığı

$$\frac{1}{f^2 + g^2} = \frac{1}{r^2} = d.$$

dir.

$\Leftarrow$: Aksine $fx + gy - 1 = 0$ alalım. Burada f ve g sabitlerdir. $\vec{p\alpha} = fN_1 + gN_2$ olsun.

O zaman

$$\begin{aligned}
-p' &= -\alpha' + fN_1' + gN_2' \\
&= -T + fk_1T + gk_2T \\
&= [-1 + fk_1 + gk_2]T \\
&= 0.T \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Sonuç olarak p sabittir. Bununla beraber

$$\left\| \vec{p\alpha} \right\|_L^2 = \langle \alpha - p, \alpha - p \rangle_L = r^2,$$

olsun. O zaman

$$\left(\langle \alpha - p, \alpha - p \rangle_L \right)' = 2 \langle T, \alpha - p \rangle_L = 0$$

olarak elde edilir. Burada

$$\left\| \vec{p\alpha} \right\|_L^2 = \langle \alpha - p, \alpha - p \rangle_L = r^2 = \text{sabit}$$

Sonuç olarak α timelike eğrisi p merkezli r yarıçaplı Lorentzian küre üzerindedir.

Tanım 3.1. Bir katı cisim α timelike eğrisi boyunca hareket ettirilirse öyle ki eğri birim hızlı bir eğri olsun. O zaman cismin rotasyon hareketinde, ki bu rotasyon açısal hız vektörü tarafından belirlenir, bir değişim gerçekleşir. Bu vektörü sağlayan ifade

$$T' = \varpi \wedge_L T, N_1' = \varpi \wedge_L N_1, N_2' = \varpi \wedge_L N_2.$$

dir. Bu vektör Darboux vektörü olarak adlandırılır.

Teorem 3.6. α eğrisinin Darboux vektörü ϖ olsun. $\alpha : I \rightarrow R^3, \{k_1, k_2\}$ eğrilikleriyle ve ϖ ye tekabül eden W matrisi verilsin. O zaman aşağıdaki elde edilir:

$$\varpi = -k_2 N_1 + k_1 N_2$$

ve

$$W = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

İspat. Hepsinden önce ϖ Darboux vektörünü bulalım. O zaman şunu yazabiliriz:

$$\varpi = aT + bN_1 + cN_2 \quad (3.9)$$

ve buradan da;

$$\begin{aligned} T' &= \varpi \wedge_L T = -T \wedge_L (aT + bN_1 + cN_2) \\ &= -b(T \wedge_L N_1) - c(T \wedge_L N_2) \\ k_1 N_1 + k_2 N_2 &= cN_1 - bN_2 \end{aligned}$$

O zaman $c = k_1$ ve $b = k_2$ dir. Benzer olarak,

$$\begin{aligned} N_1' &= \varpi \wedge_L N_1 = -N_1 \wedge_L (aT + bN_1 + cN_2) \\ &= -a(N_1 \wedge_L T) - c(N_1 \wedge_L N_2) \\ k_1 T &= cT + aN_2, \quad a = 0, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_2' &= \varpi \wedge_L N_2 = -N_2 \wedge_L (aT + bN_1 + cN_2) \\ &= -a(N_2 \wedge_L T) - b(N_2 \wedge_L N_1) \\ k_2 T &= -bT + aN_1, \quad b = -k_2. \end{aligned}$$

Bu durumda Darboux vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\varpi = -k_2 N_1 + k_1 N_2 = (0, -k_2, k_1)_{\{T, N_1, N_2\}}.$$

Sonuç olarak aşağıdaki matrisi elde ederiz:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.7. Eğer T, α regular timelike eğrisinin teğet vektörü ise, aşağıdaki formüllere ulaşılır:

$$a) T' \wedge_L T'' = -\kappa^2 \varpi - (k_2' k_1 - k_2 k_1') T, \quad k_1 \neq 0, \quad k_1 \neq 0$$

$$b) \det(T, T', T'') = k_2' k_1 - k_2 k_1'$$

$$c) \frac{\det(T, T', T'')}{\|T' \wedge_L T''\|_L^2} = \theta' \text{ veya } \tau$$

Burada ϖ, α timelike eğrisinin Darboux vektörüdür.

İspat. (a) Aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\langle T'', T \rangle_L = -\kappa^2,$$

$$\langle T'', N_1 \rangle_L = k_1',$$

$$\langle T'', N_2 \rangle_L = k_2',$$

Buradan;

$$\begin{aligned} T'' &= k_1' N_1 + k_2' N_2 + k_1(k_1 T) + k_2(k_2 T) \\ &= (k_1^2 + k_2^2)T + k_1' N_1 + k_2' N_2 \\ &= \kappa^2 T + k_1' N_1 + k_2' N_2 \end{aligned}$$

ϖ Darboux vektörünün tanımından aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$T' = \varpi \wedge_L T.$$

Buradan aşağıdakileri elde ederiz:

$$\begin{aligned} T' \wedge_L T'' &= -T'' \wedge_L (\varpi \wedge_L T) \\ &= \langle T'', T \rangle_L \varpi - \langle T'', \varpi \rangle_L T \\ &= -\kappa^2 \varpi - \langle T'', -k_2 N_1 + k_1 N_2 \rangle_L T \\ &= -\kappa^2 \varpi + k_2 \langle T'', N_1 \rangle_L T - k_1 \langle T'', N_2 \rangle_L T \\ &= -\kappa^2 \varpi - k_2 k_1' T - k_1 k_2' T \\ &= -\kappa^2 \varpi - (k_2 k_1' - k_1 k_2') T. \end{aligned}$$

(b) Son eşitlikten aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\langle T' \wedge_L T'', T \rangle_L = \langle -\kappa^2 \varpi - (k_2 k_1' - k_1 k_2') T, T \rangle_L$$

ve buradan da;

$$\begin{aligned} \det(T, T' T'') &= -\kappa^2 \langle \varpi, T \rangle_L + (k_2 k_1' - k_1 k_2') \langle T, T \rangle_L \\ &= -\kappa^2 \langle -k_2 N_1 + k_1 N_2, T \rangle_L + (k_2 k_1' - k_1 k_2')(-1) \\ &= k_1 k_2' - k_2 k_1'. \end{aligned}$$

(c) $T' = \varpi \wedge_L T$ eşitliğinden, $(T \wedge_L T')$ vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$T \wedge_L T' = T \wedge_L (\varpi \wedge_L T)$$

$$\begin{aligned}
&= \langle T, T \rangle_L \varpi + \langle T, \varpi \rangle_L T \\
&= \varpi + 0.T \\
&= \varpi.
\end{aligned}$$

O zaman $T \wedge_L T' = \varpi$ eşitliğinin normunu alırsak aşağıdakini elde ederiz:

$$\|T \wedge_L T'\|_L^2 = k_1^2 + k_2^2.$$

(3.3) eşitliğinden doğrudan doğruya aşağıdakini görürüz:

$$\tan \theta = \frac{k_2}{k_1} \quad (3.10)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{k_2}{k_1} \right).$$

(3.10) eşitliğinden türev alırsak aşağıdaki elde edilir:

$$\theta' = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1} \right)'}{1 + \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2}.$$

Sonuçta da;

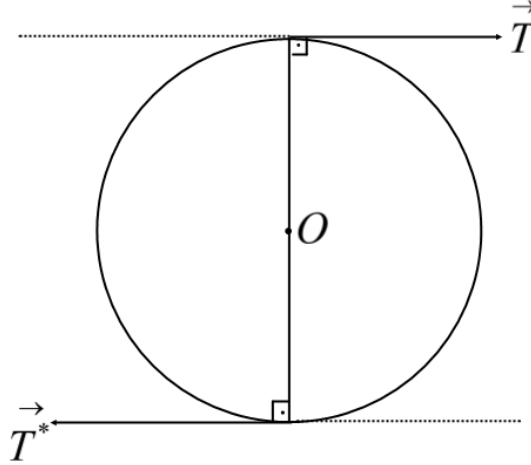
$$\theta' = \frac{\det(T, T' T'')}{\|T' \wedge_L T''\|_L^2} = \text{veya } \tau.$$

4. R_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ TİMELIKE EĞRİLER

Bu bölümde Minkowski-3 uzayında Bishop çatısına göre sabit genişlikli timelike eğrileri inceleyeceğiz.

Tanım 4.1. (C) bir timelike eğri olsun. Eğer (C) , $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ karşılıklı noktalarında ve zıt yönlerde paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklık daima sabitse, bu durumda (C) sabit genişlikli bir timelike eğri olarak adlandırılır. Ayrıca (C) ve (C^*) eğrilerinin, $\alpha(s)$ ile $\alpha^*(s)$ karşılıklı noktalarında paralel ve zıt yönlerde teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklık daima sabitse bu durumda bu eğri çiftine sabit genişlikli timelike eğri çifti denir [33].

Düzlemde sabit genişlikli eğri örneği verecek olursak ilk akla gelen çemberdir. Bütün doğrultularda aynı genişliktedir ve karşılıklı noktalardaki paralel doğrular arasında genişliği değiştirilmeden hareket ettirilebilir



Şekil 4.1: Düzlemde sabit genişlikli çember

(C) ve (C^*) , E_1^3 te sıfırdan farklı Bishop eğriliği ile verilen birim hızlı eğri çifti olmak üzere, bu eğri çifti sırasıyla $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ karşılıklı noktalarında zıt yönlerde paralel teğetlere sahip olsun. $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$, k_1 ve k_2 sırasıyla (C) eğrisi boyunca Bishop çatı hareketlerini ve Bishop eğriliklerini gösterebilir. Ayrıca

$\{\vec{T}^*, \vec{N}_1^*, \vec{N}_2^*\}$, k_1^* ve k_2^* de (C^*) eğrisi boyunca, sırasıyla Bishop çatı hareketlerini ve Bishop eğriliklerini gösterebilirsin. (C^*) eğrisinin $\alpha^*(s^*)$ noktasındaki yer vektörü

$$\vec{\alpha}^*(s^*) = \vec{\alpha}(s) + m_1(s)\vec{T}(s) + m_2(s)\vec{N}_1(s) + m_3(s)\vec{N}_2(s) \quad (4.1)$$

şeklinde açıklanabilir. Burada $m_i(s)$ ($i=1,2,3$) ler (C) nin s yay uzunluğunun diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Bishop formüllerini kullanarak (4.1) in s ile ilgili olarak diferansiyelini şu şekilde elde edebiliriz:

$$\frac{d\vec{\alpha}^*}{ds} = \vec{T}^* \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \frac{dm_1}{ds} + k_1 m_2 + k_2 m_3\right) \vec{T} + \left(k_1 m_1 + \frac{dm_2}{ds}\right) \vec{N}_1 + \left(k_2 m_1 + \frac{dm_3}{ds}\right) \vec{N}_2 \quad (4.2)$$

(C) ve (C^*) ın karşılıklı noktalarında $\vec{T}^* = -\vec{T}$ olduğu zaman aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{ds} = -\frac{ds^*}{ds} - 1 - k_1 m_2 - k_2 m_3 \\ \frac{dm_2}{ds} = -k_1 m_1 \\ \frac{dm_3}{ds} = -k_2 m_1 \end{cases} \quad (4.3)$$

(C) eğrisinin $\kappa(s)$ eğriliğinin aşağıdaki gibi olduğu iyi bilinmektedir:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \kappa$$

Burada φ , (C) timelike eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti ile verilen sabit doğru arasındaki açıdır. Buradan, (4.3) sistemini aşağıdaki gibi tekrar yazabiliriz:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{d\varphi} = -\lambda_1 m_2 - \lambda_2 m_3 - f \\ \frac{dm_2}{d\varphi} = -\lambda_1 m_1 \\ \frac{dm_3}{d\varphi} = -\lambda_2 m_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Burada;

$$\lambda_1 = \rho k_1 = \frac{k_1}{\kappa} = \cos(\theta), \quad \lambda_2 = \rho k_2 = \frac{k_2}{\kappa} = \sin(\theta), \quad \left(\theta = \int \tau ds \right)$$

ve

$$f(\varphi) = \rho + \rho^*, \quad \rho = \frac{1}{\kappa}, \quad \rho^* = \frac{1}{\kappa^*}$$

dir. Burada ρ ve ρ^* sırasıyla $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s^*)$ noktalarındaki eğrilik yarıçapını gösterir. Sistem (4.4) ten m_2 , m_3 ve onların türevleri yok edilerek, m_1 ile ilgili olarak üçüncü türev durumundaki aşağıdaki diferansiyel denklemi elde ederiz:

$$a_1 m_1''' + b_1 m_1'' + c_1 m_1' + d_1 m_1 = e_1 \quad (4.5)$$

Buradan:

$$\begin{aligned} a_1 &= (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^3 + \lambda_1'' \lambda_2^3 (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') \\ b_1 &= \lambda_2 \left[(\lambda_1'')^2 \lambda_2^3 + \lambda_1'' (-\lambda_2^2 \lambda_1 \lambda_2'' + (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2) + \lambda_2'' (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2 \right] \\ c_1 &= \lambda_1'' \left[\lambda_2^3 \lambda_2'' \lambda_1' - (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') (\lambda_2^3 \lambda_1^2 + \lambda_1 (\lambda_2')^2 - \lambda_2 \lambda_1' \lambda_2' + \lambda_2^5) \right] \\ &\quad - (\lambda_1'')^2 \lambda_2^3 \lambda_2' - (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2 (\lambda_2'' \lambda_2' + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')) \\ d_1 &= -\lambda_2 \lambda_1'' \left[(-\lambda_2^4 \lambda_1 - \lambda_2^2 \lambda_1^3) \lambda_2'' + ((\lambda_1^3 + \lambda_1^2 \lambda_2 + 3\lambda_2^3) \lambda_2' - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_1' (-2\lambda_2 + \lambda_1)) (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') \right] \\ &\quad - (\lambda_2^6 + \lambda_2^4 \lambda_1^2) (\lambda_1'')^2 - \left[(\lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_2^3) \lambda_2'' + 3(\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') (\lambda_1 \lambda_1' + \lambda_2 \lambda_2') \right] (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2 \\ e_1 &= -\lambda_1'' \left[\lambda_2^3 (f \lambda_1' - f' \lambda_1) \lambda_2'' - (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') (-\lambda_2^3 f'' + (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') (-\lambda_2 f' + \lambda_2' f)) \right] \\ &\quad - (\lambda_1'')^2 (-\lambda_2^3 \lambda_2' f + \lambda_2^4 f') + (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2 \left[(-\lambda_2 f' + \lambda_2' f) \lambda_2'' - f'' (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') \right]. \end{aligned}$$

Burada ve sonra $(')$, $''$ ile ilgili diferansiyelleri gösterebiliriz. Aynı şekilde sistem (4.4) te m_1, m_3 ve onların türevleri yok edilerek, m_2 ile ilgili olarak üçüncü dereceden aşağıdaki diferansiyel denklemi elde ederiz:

$$a_2 m_2''' + b_2 m_2'' + c_2 m_2' + d_2 m_2 = e_2 \quad (4.6)$$

Buradan;

$$a_2 = -\lambda_1^2 \lambda_2$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= 2\lambda_1' \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2' \lambda_1^2 \\
c_2 &= \lambda_1'' \lambda_1 \lambda_2 - 2(\lambda_1')^2 \lambda_2 + \lambda_1^4 \lambda_2 - \lambda_2' \lambda_1' \lambda_1 + \lambda_2^3 \lambda_1^2 \\
d_2 &= \lambda_1^3 (\lambda_1' \lambda_2 - \lambda_2' \lambda_1) \\
e_2 &= \lambda_1^3 (\lambda_2' f - f' \lambda_2).
\end{aligned}$$

Ayrıca sistem (4.4) ten m_1 , m_2 ve onların türevleri yok edilerek λ_3 ile ilgili aşağıdaki üçüncü dereceden diferansiyel denklemi elde ederiz:

$$a_3 m_3''' + b_3 m_3'' + c_3 m_3' + d_3 m_3 = e_3 \quad (4.7)$$

Buradan;

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\lambda_2^2 \lambda_1 \\
b_3 &= 2\lambda_2' \lambda_2 \lambda_1 + \lambda_1' \lambda_2^2 \\
c_3 &= \lambda_2'' \lambda_2 \lambda_1 - 2(\lambda_2')^2 \lambda_1 - \lambda_1' \lambda_2' \lambda_2 + \lambda_1^3 \lambda_2^2 + \lambda_2^4 \lambda_1 \\
d_3 &= \lambda_2^3 (\lambda_2' \lambda_1 - \lambda_1' \lambda_2) \\
e_3 &= \lambda_2^3 (\lambda_1' f - f' \lambda_1).
\end{aligned}$$

(C) eğrisi ve $f(\varphi)$ fonksiyonu verildiğinde, (4.3), (4.4) sistemleri veya (4.5), (4.6), (4.7) denklemlerinin çözümünden m_i ($i=1,2,3$) değerlerini bulabiliriz. (4.5), (4.6), (4.7) denklemleri m_i katsayılarına göre (C) ve (C^*) timelike eğrilerinin diferansiyel karakterizasyonlarını ifade eder.

(C) ve (C^*) sabit genişlikli timelike eğri çifti olduğu için, $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s^*)$ karşılıklı noktalar arasındaki d uzaklığı da sabittir. Bu nedenle,

$$d^2 = \|\vec{d}\|_L^2 = \|\vec{\alpha}^*(s^*) - \vec{\alpha}(s)\|_L^2 = |-m_1^2 + m_2^2 + m_3^2| = k^2 = sbt, \quad k \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

(4.8) in φ ye göre türevinden aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \|\vec{d}\|_L^2 = -m_1 m_1' + m_2 m_2' + m_3 m_3' = 0 \quad (4.9)$$

(4.4) sisteminde verilen eşitlikleri (4.9) da yerine yazarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$m_1 f = 0 \quad (4.10)$$

Bu bağlantı E_1^3 teki (C) ve (C^*) timelike eğrilerinin sabit genişlikli eğri çifti olduğunu ifade eder. Burada iki temel durum söylenebilir:

Durum 1: $f(\varphi) = 0 \left(\frac{ds^*}{ds} + 1 = 0 \right)$ olsun. Bu, (C^*) eğrisi, C timelike eğrisinin sabit

vektörü ile ötelenmesini ifade eder. Aşağıdaki sabit vektör tarafından verilen (C) timelike eğrisinin bir dönüşümü olduğu anlamına gelir. Öyle ki bu vektör:

$$\vec{d} = m_1 \vec{T} + m_2 \vec{N}_1 + m_3 \vec{N}_2. \quad (4.11)$$

dir.

Aslında, $f(\varphi) = 0$ ise o zaman $\vec{d}$ sabittir. Bu gerçeği (4.11) in φ ye göre diferansiyelini alarak ve $f = 0$ ve Bishop formülü için (4.4) ile verilen eşitlikleri kullanarak doğrulayabiliriz. Bu nedenle $\frac{d\vec{d}}{d\varphi} = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla $\frac{d\vec{d}}{d\varphi} = 0$ ise o zaman $\vec{d}$ sabittir. Buradan (4.3), (4.4) sistemlerini ve (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemlerini yeniden yazarsak aşağıdaki sistemleri elde ederiz:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{ds} = -k_1 m_2 - k_2 m_3 \\ \frac{dm_2}{ds} = -k_1 m_1 \\ \frac{dm_3}{ds} = -k_2 m_1 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{d\varphi} = -\lambda_1 m_2 - \lambda_2 m_3 \\ \frac{dm_2}{d\varphi} = -\lambda_1 m_1 \\ \frac{dm_3}{d\varphi} = -\lambda_2 m_1 \end{cases} \quad (4.13)$$

$$a_1 m_1''' + b_1 m_1'' + c_1 m_1' + d_1 m_1 = 0 \quad (4.14)$$

Burada:

$$\begin{aligned}
a_1 &= (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^3 + \lambda_1'' \lambda_2^3 (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') \\
b_1 &= \lambda_2 \left[(\lambda_1'')^2 \lambda_2^3 + \lambda_1'' (-\lambda_2^2 \lambda_1 \lambda_2'' + (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2) + \lambda_2'' (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2 \right] \\
c_1 &= \lambda_1'' \left[\lambda_2^3 \lambda_2'' \lambda_1' - (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') (\lambda_2^3 \lambda_1^2 + \lambda_1 (\lambda_2')^2 - \lambda_2 \lambda_1' \lambda_2' + \lambda_2^5) \right] \\
&\quad - (\lambda_1'')^2 \lambda_2^3 \lambda_2' - (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2 (\lambda_2'' \lambda_2' + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')) \\
d_1 &= -\lambda_2 \lambda_1'' \left[(-\lambda_2^4 \lambda_1 - \lambda_2^2 \lambda_1^3) \lambda_2'' + ((\lambda_1^3 + \lambda_1^2 \lambda_2 + 3\lambda_2^3) \lambda_2' - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_1' (-2\lambda_2 + \lambda_1)) (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') \right] \\
&\quad - (\lambda_2^6 + \lambda_2^4 \lambda_1^2) (\lambda_1'')^2 - \left[(\lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_2^3) \lambda_2'' + 3(\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1') (\lambda_1 \lambda_1' + \lambda_2 \lambda_2') \right] (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1')^2.
\end{aligned}$$

$$a_2 m_2''' + b_2 m_2'' + c_2 m_2' + d_2 m_2 = 0 \quad (4.15)$$

Buradan da;

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\lambda_1^2 \lambda_2 \\
b_2 &= 2\lambda_1' \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2' \lambda_1^2 \\
c_2 &= \lambda_1'' \lambda_1 \lambda_2 - 2(\lambda_1')^2 \lambda_2 + \lambda_1^4 \lambda_2 - \lambda_2' \lambda_1' \lambda_1 + \lambda_2^3 \lambda_1^2 \\
d_2 &= \lambda_1^3 (\lambda_1' \lambda_2 - \lambda_2' \lambda_1).
\end{aligned}$$

$$a_3 m_3''' + b_3 m_3'' + c_3 m_3' + d_3 m_3 = 0 \quad (4.16)$$

Burada:

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\lambda_2^2 \lambda_1 \\
b_3 &= 2\lambda_2' \lambda_2 \lambda_1 + \lambda_1' \lambda_2^2 \\
c_3 &= \lambda_2'' \lambda_2 \lambda_1 - 2(\lambda_2')^2 \lambda_1 - \lambda_1' \lambda_2' \lambda_2 + \lambda_1^3 \lambda_2^2 + \lambda_2^4 \lambda_1 \\
d_3 &= \lambda_2^3 (\lambda_2' \lambda_1 - \lambda_1' \lambda_2)
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.2. E_1^3 te Bishop çatısına göre sabit genişlikli timelike eğri çiftinin karakterize edilmiş genel diferensiyel denklemleri ve sistemleri (4.12), (4.13) ve (4.14), (4.15), (4.16) ile verilmiştir.

Durum 2. $m_1 = 0$ olsun. O zaman üç durum ortaya çıkar:

i) $m_2 = \text{sabit}$ ve $m_3 = 0$ alabiliriz ((4.4)ten). O zaman $f(\varphi) = -\lambda_1 m_2$ dir.

ii) $m_2 = 0$ ve $m_3 = \text{sabit}$ alabiliriz ((4.4)ten). O zaman $f(\varphi) = -\lambda_2 m_3$ dır.

iii) Şimdi üçüncü ve önemli bir durum olarak $m_2 = \text{sabit}$ ve $m_3 = \text{sabit}$ olduğu hali göz önünde bulunduralım. $m_2 = \text{sabit}$ ise $m_3 = \text{sabit}$ ve $f(\varphi) = 0$ dır ((4.4)ten), o

zaman $\frac{k_1}{k_2} = \frac{-m_3}{m_2} = \text{sabit}$ elde ederiz. Bu, (C) eğrisinin Bishop çatısına göre bir

timelike slant helis olduğu anlamına gelir. Böylece sıradaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3. E_1^3 te Bishop çatısına göre karşılıklı noktalarındaki eğrilik yarıçaplarının toplamı sıfır olan sabit genişlikli timelike eğri çiftini göz önüne alalım. Eğer (4.1) denklemiyle verilen birinci normal elemanı $m_3 = \text{sabit}$ ve ikinci normal elemanı $m_3 = \text{sabit}$ ise o zaman (C) timelike eğrisi Bishop çatısına göre bir timelike slant helis tir.

KAYNAKLAR

1. Euler, L., *De Curvis Triangularibus*, Acta Acad. Petropol., 1778 (1780), 3-30.
2. Ball, N.H., *On ovals*, American Mathematical Monthly, 1930, 37(7), 348-353.
3. Barbier, E., *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1860, 2(5), 273-286.
4. Blaschke, W., *Leibziger Berichte*, 1917, 67, 290.
5. Mellish, A.P., *Notes on Differential Geometry*, Annals of Mathematics, 1931, 32(1), 181-190.
6. Fujiwara, M., *On Space Curves of Constant Breadth*, Tohoku Mathematical Journal, 1914, 5, 180-184.
7. Hammer, P.C., *Constant Breadth Curves in the Plane*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1955, 6(2), 333-334.
8. Reuleaux, F., *The Kinematics of Machinery* (Translated by A. B. W. Kennedy), Dover Pub., New York, 1963, 653 p.
9. Smakal, S., *Curves of Constant Breadth*, Czechoslovak Mathematical Journal, 1973, 23(1), 86-94.
10. Köse, Ö., *Düzlemde Ovalar ve Sabit Genişlikli Eğrilerin Bazı Özellikleri*, Doğa Bilim Dergisi, Seri B, 1984, 8(2), 119-126.
11. Köse, Ö., *On Space Curves of Constant Breadth*, Doğa Tr. J. Math, 1986, 10(1), 11-14.
12. Sezer, M., *Differential Equations Characterizing Space Curves of Constant Breadth and a Criterion for These Curves*, Turkish J. of Math, 1989, 13(2), 70-78.
13. Mağden, A., and Köse, Ö., *On the Curves of Constant Breadth in E^4 Space*, Tr. J. of Mathematics, 1997, 21 : 277-284.
14. Akdoğan, Z., Mağden, A., *Some Characterization of Curves of Constant Breadth in E^n Space*, Turk J Math, 2001, 25, 433-444.
15. Önder, M., Kocayigit, H., Candan, E., *Differential Equations Characterizing Timelike and Spacelike Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-Space E_1^3* , J. Korean Math. Soc., 2011, 48(4), 849-866.

16. Sabuncuoğlu, A., *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayıncılık, Ankara, 2006, 440 s.
17. O'Neill, B., *Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983, 483 p.
18. Bishop, R.L., *There is More Than One Way to Frame a Curve*, American Mathematical Monthly, 1975, 82(3), 246-251.
19. Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., *Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi*, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Yayın No:0006, Manisa, 2012, 170 s.
20. Önder, M., Uğurlu, H.H., *On the Developable Mannheim Offsets of Timelike Ruled Surfaces*, Proc. Natl. Acad. Sci. India, Section A Phys. Sci., 84(4) (2014) 541-548
21. Önder, M., Uğurlu, H.H., *On the Developable Mannheim Offsets of Spacelike Ruled Surfaces*, Iranian Journal of Science and Technology (Science) (In press)
22. Uğurlu H. H., Kocayığıt H., *The Frenet and Darboux Instantaneous Rotain Vectors of Curves on Time-Like Surface*, Mathematical & Computational Applications, 1996, Vol. 1, No.2, pp. 133-141.
23. Uğurlu H. H., Topal, A., *Relation Between Darboux Instantaneous Rotain Vectors of Curves on a Time-Like Surfaces*, Mathematical & Computational Applications, 1996, Vol. 1, No.2, pp. 149-157.
24. Kocayigit, H., *Minkowski 3-Uzayında Time-like Asal Normalli Space-like Egrilerin Frenet ve Darboux vektörleri*, 2004, C.B.Ü. Fen Bilimleri Enstisüsü Yüksek Lisans Tezi,.
25. Duggal, K. L. and Beyancu, A., *Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifolds and Appications*, 1996, Kluwer Academic Publisher.
26. Walrave, J., *Curves and Surfaces in Minkowski Space*, K.U. Leuven, Faculty of Sciences, 1995, 147 p. (Ph.D. Thesis).
27. Bükçü, B., Karacan., M.K., *The Bishop Darboux Rotation Axis of The Spacelike Curve in Minkowski 3- Space*, 2007, JFS, Vol 30, 1- 5, E.U.F.F. Turkey.
28. Bükçü, B., Karacan, M.K., *On the Slant Helices according to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space*, Tamkang Journal of Mathematics, 2008, 39(3), 255-262.

29. Guggenheimer H.W., *Differential Geometry*, McGraw-Hill, New York, 1963.
30. O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966
31. Hanson, A.J., Ma, H., *Parallel Transport Approach to Curve Framing*, Indiana University, Technical Report TR425, January 11, 1995.
32. Karacan, M.K., Bükcü, B., *Bishop Frame of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space*, SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Fen Dergisi (E-Dergi), 2008, 3(1), 80-90.
33. Kocayiğit, H., Önder, M., *Space Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-Space*, Annali di Matematica, 2013, 192(5), 805-814.
34. Lopez, R., *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*, arXiv:0810.3351v1, 2008.
35. Wong, Y.C., *A Global Formulation of the Condition for a Curve to Lie in a Sphere*, Monatsh Math, 1963, 67, 363-365.
36. Wong, Y.C., *On an Explicit Characterizations of Spherical Curves*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1972, 34(1), 239-242.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Çetin EVİRGEN

Doğum Yeri ve Yılı: Kütahya, 1986

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mce172@yahoo.com

Eğitim Durumu

Lise : Kütahya Anadolu Öğretmen Lisesi, 2004

Lisans : Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi,
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi
Matematik Öğretmenliği, 2010