

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Gülseda KOÇ

Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modelinin
Caputo Kesirli Türevi ile Analizi

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

JÜRİ ÜYELERİ

Prof. Dr. İlknur KOCA

Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

AĞRI – 2025

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİTKİ NEKTAR POLİNASYON MATEMATİKSEL MODELİNİN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ İLE ANALİZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jüri: Prof. Dr. İlknur KOCA

Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Bu tez çalışmasında Bitki Nektar Polinasyon matematiksel modelinin kesirli türev operatörleri aracılığıyla analizi yapılmıştır. Bu matematiksel model literatürde iyi bilinen Caputo kesirli türevine genişletilmiştir. Daha sonra Caputo kesirli türev operatörü uygulanan modelin varlık-teklik çözümü Arzela-Ascoli teoremi yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Modelin kararlılık analizi Hyers-Ulam kararlılık teoremi ile yapıldıktan sonra Atangana-Owolabi nümerik yaklaşımı kullanılarak sayısal çözümlere ulaşılmıştır.

2025, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bitki Nektar Polinasyon matematiksel modeli, Caputo kesirli operatörü, Hyers-Ulam kararlılığı, Nümerik çözüm

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
ANALYSIS OF PLANT NECTAR POLLINATION MATHEMATICAL MODEL
WITH CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

Advisor Of Thesis: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jury: Prof. Dr. Prof. Dr. İlknur KOCA

Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

In this thesis, the mathematical model of Plant Nectar Pollination is analyzed through the application of fractional derivative operators. The model is extended by incorporating the well-established Caputo fractional derivative, widely recognized in the literature. Subsequently, the existence and uniqueness of the solution for the model involving the Caputo fractional derivative operator are established by employing the Arzela-Ascoli theorem. Following the stability analysis, which is conducted using the Hyers-Ulam stability theorem, numerical solutions are obtained via the Atangana-Owolabi numerical approach.

2025, 50 pages

Key Words: Mathematical Modeling of Plant Nectar Pollination, Caputo fractional operator, Hyers-Ulam stability, Numerical solution

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve yürütülmesinde değerli bilgi ve deneyimleriyle beni aydınlatan, içerik ve kaynak bakımından her türlü desteği sağlayan saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU' ya en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitim hayatımın her anında beni destekleyen, yanımda olan, haklarını asla ödeyemeyeceğim kıymetli aileme, tez çalışmamı hazırlarken desteğini esirgemeyen ve bana her aşamada yardımcı olan sevgili eşime, canım kızıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Haziran 2025

Gülseda KOÇ



İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	5
2.1. Kesirli Türev Operatörlerinde Kullanılan Temel Fonksiyonlar ve Dönüşümler	5
2.1.1. Gama Fonksiyonu.....	5
2.1.2. Beta Fonksiyonu	6
2.1.3. Mittag - Leffler Fonksiyonu	6
2.1.4. Wright Fonksiyonu	8
2.1.5. Laplace Dönüşümü	8
2.2. Kesirli Mertebeden Türev ve İntegraller.....	9
2.2.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi	10
2.2.2. Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali	12
2.2.3. Caputo Kesirli Türevi.....	14
2.2.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi ve İntegrali	15
3. MATERYAL VE YÖNTEM	19
3.1. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali	19
3.2. Caputo Kesirli Türev ve İntegrali	22
3.3. Caputo Kesirli Türev Operatörü İçin Nümerik Çözüm Yöntemi	24
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	31
4.1. Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modeli	31
4.2. Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modelinin Varlık ve Teklik Çözümleri	32
4.3. Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modelinin Hyers-Ulam Kararlılık Analizi.....	40
4.4. Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modelinin Nümerik Çözümü	43
5. SONUÇ	46
KAYNAKLAR	47



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$m!$	: Faktöriyel ($m!=1.2.3\dots m$)
$\lim$	: Limit
$Re(q)$	: q Karmaşık Sayısının Reel Kısmı
$\sum$	: Toplam Sembolü
$\prod$	: Çarpım Sembolü
$\int$	: İntegral
$\mathcal{L}$	: Laplace
$\Gamma(m)$	: Gama Fonksiyonu
$B(q, r)$	: Beta Fonksiyonu
$W(q; \theta, \gamma)$	: Wright Fonksiyonu
$E_{\psi}(q)$	: Tek Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{(\psi_1, \psi_2)}(q)$	: İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$\frac{d^n g(y)}{dy^n}$	: n. Mertebeden Türev
${}^{RL}D_t^{\varphi}g(t)$	: Riemann-Liouville Kesirli Türevi
${}^CD_t^{\varphi}g(t)$	: Caputo Kesirli Türevi
$D^{-\varphi}g(t)$	: Kesirli İntegral
${}^{CF}D_t^{\varphi}g(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi
${}^{CF}I^{\varphi}g(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Her canlı gibi bitkilerinde nesillerini devam ettirebilmeleri için üremeleri gerekmektedir. Tozlaşma (döllenme), eşeyssel olarak çoğalan bitkilerde meydana gelen ve bitkilerin nesillerinin devamının sağlanması için en önemli olaydır. Aynı türden bitkilerin birbirini dölleyebilmesi için hepsinin aynı dönemde çiçek açması gerekir. Polen ile yumurta eş zamanlı oluşur. Çiçeklerin erkek organları olgunlaştığı zaman erkek organların başçığından dişi organın tepeciğıne polen (çiçektozu) yaymaya başlar. Bu olaya tozlaşma denir.

Çiçeklerden nektar ve polen toplayan böcekler ve böceklerle tozlaşma sağlayan bitkiler arasındaki ilişki uzun bir geçmişe dayanan evrimleşme süreci ile ilgilidir. Doğada polinasyon abiyotik yollarla (rüzgar, su) ve biyotik yollarla (arılar, böcekler, kuşlar, yarasalar, kelebekler, insanlar vb.) gerçekleşmektedir (Karaman (2018)). Tozlaşma, polenlerin erkek organdan dişi organa taşınmasıyla gerçekleşirken eğer aynı çiçeğin içinde oluyorsa meydana gelen tozlaşma kendi kendine tozlaşma, farklı çiçekler arasında oluyorsa meydana gelen tozlaşma çapraz tozlaşmadır. Çapraz tozlaşmada ise aynı türden bitkiler arasında döllenme gerçekleşmektedir.

Tozlaşma (polinasyon), bitkisel üretimin temeli olup bitki türlerinde tozlaşma olmadan meyve tohum üretimi olmamaktadır. Doğada polinasyonun gerçekleşmesinde rüzgar, su, kuşlar, böcekler, bazı memeli hayvan türleri ve hatta insanlar polinatör yani tozlayıcı olarak işlev görürler. Bu tozlayıcılar arasında direkt çiçeklerle etkileşime girdikleri için en etkili olan böceklerdir ve tozlayıcı böcekler içerisinde ise arılar en önemli yere sahiptir (Yılmaz (2016)).

Polinasyonu sağlayan arılar tercih ettikleri çiçeklerin renk, koku ve biçimlerinden yola çıkarak kendileri için en gerekli olan besinin nerede olduğunu tespit eder ve bu bilgiyi kalıcı olarak hafızalarında tutabilirler (Sorkun ve dig. (2012)). Çiçeğin üzerine gelen arılara yapışan polenlerin arıların diğer çiçeklere konması ile polenler taşınmış olurlar. Son yıllarda polinasyonun önemi küresel ısınma ile birlikte daha da artmıştır. Kırsal ve kentsel alanlar arasında bağlantının oluşması polinasyonun devamlılığı için önemlidir. Ayrıca tüketim arttıkça mahsullere zarar veren en önemli faktör polinatörlere karşı kullanılan çeşitli tarım ilaçlarıdır. Bununla birlikte habitat kaybı, yangın ve doğal afetler sonucu yol ve imar çalışmalarının da neden olduğu durum polinatör canlıların yaşadıkları doğal alanları terk etmesi

ile tozlaşma faaliyetlerini olumsuz etkilemektedir.

Hareket halindeki dinamik sistemlerin matematiksel modelinin oluşturulması için türeve ihtiyaç vardır. Türev, fiziksel olayların hangi hızda ve nasıl değiştiğinin tespit edilebilmesini ve belli bir anındaki değişim hızının bulunmasını sağlar. Ancak türev tam sayılı türev olarak ele alınırken fiziksel olayların değişimini açıklamadaki eksikliklerin fark edilmesiyle ve tam sayılı türevin cevap vermekte zorlandığı durumlarda kolaylık sağlaması bakımından daha kapsamlı olan kesirli türevlere ihtiyaç duyulmuştur. 20. yüzyılda Davis, Al-Bassam, Erdelyi, Hardy, Kober, Osler, Weyl, Riesz, Samko, Sneddon, Zygmund, Littlewood gibi matematikçiler önemli çalışmalar yayımlamıştır ve bu çalışmaların incelenmesi matematikte teorik yaklaşımların yanı sıra uygulamaya yönelik çalışmalara da ihtiyaç duyulduğunu ortaya koymuştur. Kesirli türev kavramı günümüzde oldukça sık kullanılmaktadır. Bu kavram karşımıza L'hospital ve Leibniz arasındaki mektuplaşma ile çıkmıştır. L'hospital 1695'in 30 Eylül'ünde Leibniz'in çalışmasını konu alan bir mektup yazmıştır ve bu mektupta Leibniz'in çalışmasında $y(x)$ fonksiyonunun n . basamaktan türevi için kullandığı $\frac{d^n y}{dx^n}$ ifadesinde " $n = \frac{1}{2}$ olursa ne olur? " diye sormasıyla ve Leibniz'in bu soruya "Bir gün faydalı sonuçların çıkarılacağı bariz bir paradoks. " cevabını vermesiyle kesirli türev kavramı matematik dünyasına girmiştir (Miller ve Ross (1993)). Bu mektuplaşma sonucunda pek çok matematikçi 300 yıl boyunca bu alanda çalışmalar yapmıştır (Miller ve Ross (1993); Samko ve dig. (1993); Podlubny (1999)).

1695 yılında Leibniz ile L'hospital arasında gerçekleşen yazışmaların ardından 1730 yılında Euler kesirli basamaktan türev kavramını keşfetmiştir ve buna bağlı olarak gama fonksiyonunu tanımlamıştır. P. S. Laplace 1812 yılında kesirli türevi integraller yoluyla tanımlamıştır. 1822 yılında ise J. B. J. Fourier türev kavramını keyfi mertebeden tanımlamış ve bu alanda önemli gelişmeler sağlamıştır. Euler ve Fourier herhangi mertebeden bahsetmiştir fakat örnek ya da uygulama vermemişlerdir. Kesirli operatörler, N. H. Abel tarafından fiziksel bir problem olan tautachurane probleminde karşılaşılan integral denklemi çözmek amacıyla kullanılmıştır. Burada yer alan integral denklemi Riemann-Liouville kesirli integralinin özel bir halini temsil etmektedir. 1832 yılında Liouville üstel fonksiyonlar için kesirli dereceden türev ve integral kavramlarını ilk kez ortaya koymuştur. Ayrıca Liouville kesirli diferansiyel denklemleri çözmeye çalışmış ve çalışmalarını üç ayrı makalede yayımlamıştır. Bunun sonucunda 1847 yılında Riemann, Liouville'nin çalışmalarını destekleyip bugün bilinen Riemann-Liouville integralinin tanımını vermiştir (Butzer ve Westphal (2000)). Bu tanımın ilk çalışması 1869 yılında Sonin'in "Keyfi Mertebeden Diferansiyel" makalesinde yayımlanmış, 1892 yılında ise Riemann kesirli integral teorisini vermiştir.

1967 yılında M. Caputo tarafından tanımlanan kesirli türev operatörü literatürde en çok kullanılan operatörlerden birisi olmuştur. Türev kavramına en yakın kesirli türev tanımı Riemann-Liouville tanımıdır fakat türev ve Riemann-Liouville kesirli türevi arasında oldukça önemli bir fark vardır. Sabitin türevi türev alınırken sıfır olmasına rağmen Riemann-Liouville kesirli türevinde sabitin türevi sıfır olmamaktadır. İşte bu problemi çözmek için M. Caputo (Caputo (1967)) kesirli türev tanımını yapmıştır. Bu tanım ile birlikte sabitin türevinin sıfır olma problemi ortadan kalkmıştır.

1974 yılında kesirli türevi konu alan ilk uluslararası konferans Connecticut eyaletinde Bertram Ross tarafından yapılmıştır ve aynı yıl kesirli hesapların tanım ve teoremlerini içeren ilk kitap Oldham ve Spanier tarafından yayımlanmıştır (Oldham ve Spanier (1974)). İkinci konferans 1984'de Birleşik Krallık sınırları içinde bulunan Glasgow şehrinde ve üçüncü konferans ise beş yıl sonra Japonya'daki Nihon Üniversitesinde düzenlenmiştir. 1980 yılında Japonya'da matematiksel etkinlikler düzenlenmiştir. Ayrıca kesirli türevin dört ciltlik bir makalede adı ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması gözlemlenmiştir. Kronolojik olarak (McBride (1979)), (Friedrich (1991)), (Miller ve Ross (1993)), (Kiryakova (1993)), (Podlubny (1999)), (Chen ve Moore (2001)), (Hilfer (2003)), (Kilbas (2006)), (Ahmad ve Sivasundaram (2009)), (Diethelm ve Ford (2010)), (Odibat (2010)) gibi kesirli türev hakkında yazılan kitaplar ile yine bu alanda yayımlanan dergiler (Fractional Calculus and Applied Analysis, Journal Of Fractional Calculus) konuya ilişkin çalışmalara yön vermiştir. 2004 yılından itibaren her 2 yılda bir uluslararası Automatic Control Federasyonu (IFAC) tarafından " Fractional Differentiation and Applications" adlı konferanslar düzenlenmektedir. Ayrıca 2007 yılında Sabancı Üniversitesinde düzenlenmiş olan "Kesirli Mertebeden Sistemler" adlı oturumlar kesirli türevin ülkemizde de önem kazandığını göstermektedir.

Caputo tarafından 1967 de tanımlanan kesirli türevde yerellik ve tekillik problemi matematiksel modellemede hesapsal zorluğa neden olduğu ve pek çok sayısal hesaplama gerektirdiği için algoritma kurmakta güçlük oluşturduğundan çekirdek fonksiyonların değiştirilmesi ile M. Caputo ve M. Fabrizio 2015 yılında tanımladıkları kesirli türevde tekillik problemini ortadan kaldırmışlardır. Sonrasında A. Atangana ve D. Baleanu (Atangana ve Baleanu) birlikte Caputo-Fabrizio tanımını daha da genelleştirerek yerellik sorununu ortadan kaldırmışlardır.

Euler ile başlayıp Atangana ve Baleanu'ya kadar uzanan kesirli türev kavramı pek çok matematikçi tarafından yorumlanıp genişletilmiştir. Günlük yaşam problemlerinde faydalı sonuçlar elde etmek için bilim insanları kesirli analizden yararlanmıştır. Sonuç olarak kesirli analiz fizik, biyoloji, tıp, psikoloji vb. birçok bilim dallarında uygulanmaktadır.

Bu doğrultuda çalışmamızda sırasıyla kesirli analiz ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilip Caputo kesirli türevi detaylandırılacak bitki nektar polinasyon matematiksel modeli Caputo kesirli türevine genişletilerek yeni bir model elde edilecek ve böylece elde edilen yeni modelin varlık ve tekliği gösterilecektir. Modelin teorik olarak analizi yapıldıktan sonra nümerik çözümler hesaplanacaktır. Nümerik çözümler yardımıyla sayısal çözümlere ulaşılacak ve yorumlanacaktır.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde kesirli mertebeden türev operatörlerini hesaplamada kullanılan fonksiyonlardan ve operatörlerden bahsedilecektir.

2.1. Kesirli Türev Operatörlerinde Kullanılan Temel Fonksiyonlar ve Dönüşümler

2.1.1. Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu kesirli analizde sıkça kullanılır. Faktöriyel kavramını klasik faktöriyel kavramının ötesine geçerek tam sayı olmayan reel ve karmaşık sayılar için de genelleştirir. $\Gamma(m)$ ile sembolize edilir. Gama fonksiyonu $m \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere ,

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır ve $m > 0$ için yakınsaktır.

Gama Fonksiyonun Bazı Özellikleri :

- $\Gamma(m)$ fonksiyonu $m > 0$ değeri için tanımlı ve süreklidir.
- Gama fonksiyonu, her sonlu pozitif reel sayılar kümesinde ki $[a, b]$ kapalı aralığında verilen integralde düzgün yakınsak olduğu zaman Gama fonksiyonunun türevi elde edilebilir.
- $\Gamma(m) = (m-1)!$
- $\Gamma(m+1) = m! = m(m-1)! = m\Gamma(m)$

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

eşitlikleri sağlanır (Podlubny (1999)).

Verilen özellikler birbiri ile ilişkilidir. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\Gamma(m+1) = \int_0^\infty t^m e^{-t} dt = [t^m e^{-t}]_0^\infty + m \int_0^\infty t^{m-1} e^{-t} dt = m\Gamma(m) \quad (2.2)$$

şeklinde ispat edilir.

2.1.2. Beta Fonksiyonu

$q > 0$ ve $p > 0$ olmak üzere

$$\beta(q, r) = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{r-1} dt, \quad \text{Re}(q) > 0, \text{Re}(r) > 0 \quad (2.3)$$

şeklinde beta fonksiyonu tanımlanır. Euler integralinin ilk türü olup bazı şartlarda kullanılması oldukça kullanışlıdır. Bazı özellikleri şu şekildedir:

- $\beta(q) = \frac{\Gamma(q)^2}{\Gamma(2q)}$
- $\beta(q, r) = \beta(r, q)$
- $\beta(q, r) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$
- $\beta(q, r) = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{q+r}} dt$
- $\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$

biçiminde özetlenebilir. Ayrıca beta fonksiyonu sayesinde gama fonksiyonun bazı özellikleri de kullanışlı hale getirilmiş olmaktadır.

2.1.3. Mittag - Leffler Fonksiyonu

Mittag - Leffler fonksiyon tanımı ilk olarak İsveçli bir matematikçi tarafından 1903 yılında yapılmıştır (Yang, 2011). Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan oldukça önemli bir fonksiyondur. e^q üstel fonksiyonunun bir genellemesidir. Bir diferansiyel

denklemin derecesi bire yaklaştıkça Mittag- Leffler fonksiyonu üstel çözüme yakınsamaktadır.

e^q üstel fonksiyonu seri olarak

$$e^q = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\Gamma(m+1)} \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Mittag-Leffler fonksiyonunun bir parametrelili genelleştirilmiş hali;

$$E_{\psi}(q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\Gamma(\psi m + 1)} \quad , \psi > 0 \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir. Özel olarak $\psi=1$ ve $\psi=2$ olması durumunda

$$E_1(q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\Gamma(m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} = e^q \quad (2.6)$$

ve

$$E_2(q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\Gamma(2m+1)} = \cosh(\sqrt{q}) \quad (2.7)$$

dir.

Mittag-Leffler fonksiyonunu ilk olarak $Re(\psi_1) > 0$ ve $Re(\psi_2) > 0$ olmak üzere,

$$E_{(\psi_1, \psi_2)}(q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\Gamma(\psi_1 m + \psi_2)} \quad (2.8)$$

Agarwal ve Humbert iki parametrelili fonksiyona genelleştirmiştir (Agarwal (1953)). ψ_1 ve ψ_2 'nin bazı özel değerleri için bu fonksiyon hesaplanırsa bilinen klasik fonksiyonlar ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonun kullanımı sayesinde, hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları da ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} E_{(1,1)}(q) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\Gamma(m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} = e^q \\ E_{(1,2)}(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\Gamma(m+2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{(m+1)!} = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+1}}{m+1} = \frac{e^q - 1}{q} \\ E_{(2,1)}(q^2) &= \cosh(q) \\ E_{(2,2)}(q^2) &= \frac{\sinh(q)}{q} \end{aligned}$$

2.1.4. Wright Fonksiyonu

Wright fonksiyonu kısmi türevli kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin çözüm-lerinde önemli bir rol üstlenir. Ayrıca Wright tarafından geliştirilen kesirli mertebeden difüzyon dalga denklemi iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu kullanımı ile fomüle edilmiştir. Humbert tarafından 1953 yılında en iyi kullanılabilecek şekilde genelleştirilmiştir. Tanımı şu şekildedir:

$$W(q; \theta, \gamma)(q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m! \Gamma(\gamma + m\theta)} \quad (2.9)$$

Ayrıca fonksiyon integral şeklinde de tanımlanabilir:

$$W(q; \theta, \gamma)(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} t^{-\gamma} e^{t+qt^{-\theta}} dt \quad (2.10)$$

Ha sembolü, Hankel'e ait bir simgedir (Podlubny (1999)).

2.1.5. Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü başta fizik, matematik ve mühendislik olmak üzere pek çok alanda kullanılmaktadır. Bu dönüşüm ile sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemler haline getirilmesi sağlanır ve kolayca çözümleri sağlanır.

$f(t)$ tek değişkenli kompleks fonksiyon olmak üzere Lebesgue integrali;

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.11)$$

$s > 0$ reel veya kompleks sayısına yakınsar. Burada $f(t)$ fonksiyonu orijinal fonksiyon olarak tanımlandığında bu fonksiyonun laplace dönüşümü $F(s)$ biçiminde gösterilir. Genellikle $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca $t > 0$ için $F(t)$, t değişkenine bağlı bir fonksiyon olsun. e^{-st} çekirdeği kullanılarak $F(t)$ 'nin Laplace dönüşümü;

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (2.12)$$

şeklindedir. Ters laplace dönüşümü ise $\mathcal{L}^{-1}F(s)$ şeklinde gösterilir.

Laplace Dönüşümün Bazı Özellikleri :

Laplace dönüşümleri tanımlı olan $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları ele alınsın.

- c_1 ve c_2 katsayılar olmak üzere $\mathcal{L}\{c_1f(t) + c_2g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}$
- $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad (s > a)$
- Laplace dönüşümleri tanımlı olan $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları için bu dönüşümler sırasıyla $F(s)$ ve $G(s)$ olmak üzere; $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$
- $f(t)$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise ve $n \in \mathbb{Z}$ için n . mertebeden türevinin Laplace dönüşümü ;

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{k-1}(t)|_{t=0}$$

- $G(t) = \int_0^t f(v)dv$ olmak üzere;

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(v)dv\right\} = \frac{\mathcal{L}\{F(t)\} + G(0^+)}{s}$$

2.2. Kesirli Mertebeden Türev ve İntegraller

Klasik analizde limit, türev ve integral en önemli kavramlardır. Günümüze kadar pek çok matematikçi bu kavramlara uygun tanımlar geliştirmeye çalışmışlardır. Gerçek hayat problemlerinin matematiksel çözümünde diferansiyel denklemler sıkça kullanılır. Ancak tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlerin cevap veremediği durumlarda kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulmuştur. Kesirli analizi klasik analizden ayıran en temel özellik klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımının bulunmamasıdır. Bu alan, klasik analizin tamsayı mertebeli türev ve integral kavramlarını rasyonel veya kompleks mertebeye genişletilmesidir. Kesirli türev veya integrali tanımlamak için pek çok farklı operatör

vardır. Bunlardan en bilinenleri Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Caputo-Fabrizio tanımlarıdır. Bu tanımlar, çözüm yönteminin probleme özgü gereksinimlerine göre kullanılmasını sağlar.

2.2.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi

Sürekli bir fonksiyon olan $z = g(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden klasik türevi;

$$g'(t) = \frac{dg}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(t-h)}{h} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır. $z = g(t)$ ' nin ikinci mertebeden klasik türevi ;

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d^2g}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(t) - g'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{g(t) - g(t-h)}{h} - \frac{g(t-h) - g(t-2h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t) - 2g(t-h) + g(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklinde olup benzer şekilde üçüncü mertebeden türev ise

$$g'''(t) = \frac{d^3g}{dt^3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t) - 3g(t-h) + 3g(t-2h) - g(t-3h)}{h^3} \quad (2.15)$$

dir. Bu durumda klasik anlamda türev genelleştirilirse,

$$g^n(t) = \frac{d^n g}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} g(t-jh) \quad (2.16)$$

$g(t)$ ' nin genel türevi elde edilir.

Burada

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-j+1)}{j!}$$

olup n ve j sabitlerinin genel binom gösterimidir.

Genel tanım üzerinden yeniden düzenleme yapılırsa ,

$$g_h^\varphi(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\varphi} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\varphi}{j} g(t - jh) \quad (2.17)$$

ifadesine ulaşılır. (2.17) denkleminde $\binom{\varphi}{j}$ ' den sonraki tüm terimlerde 0 (sıfır) elde edileceği için $\varphi \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\varphi \leq n$, $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_h^\varphi(t) = g^{(\varphi)}(t) = \frac{d^\varphi g}{dt^\varphi} \quad (2.18)$$

bulunur.

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ j \end{bmatrix} = \frac{(\varphi)(\varphi+1)(\varphi+2) \cdots (\varphi+j-1)}{j!}$$

olup negatif değerlerde kolaylık sağlaması için kullanıldığında

$$\begin{bmatrix} -\varphi \\ j \end{bmatrix} = \frac{(-\varphi)(-\varphi+1)(-\varphi+2) \cdots (-\varphi+j-1)}{j!} = (-1)^j \begin{bmatrix} \varphi \\ j \end{bmatrix}$$

olup (2.18) denkleminde φ yerine $-\varphi$ getirildiğinde

$$g_h^{-\varphi}(t) = \frac{1}{h^\varphi} \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} \varphi \\ j \end{bmatrix} g(t - jh) \quad (2.19)$$

denkleminde ulaşılır. Burada $\varphi \in \mathbb{Z}^+$ dır.

n sabit olduğunda $h \rightarrow 0$ iken $g_h^{-\varphi}(t)$ limiti 0' a yakınsar. $n \rightarrow \infty$ kabul edildiğinde ise $h = \frac{t-a}{n}$ olur ve böylece sıfıra yakınsamamış olur. Burada a değeri sabit ve $g_h^{-\varphi}(t)$ sınır değeri sonlu veya sonsuz olduğu düşünülür ise

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} g_h^{-\varphi}(t) = {}_a D_t^{(-\varphi)}(t)$$

şeklindedir. a ve t sınır olup ${}_a D_t^{(-\varphi)}(t)$ ifadesi t fonksiyonunun integralidir (Podlubny (1999)).

Genel tanım üzerinde yeniden düzenleme yapılırsa ;

$$\frac{d^\varphi}{dt^\varphi} g(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\varphi} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\varphi!}{j!(\varphi-j)!} g(t - jh) \quad (2.20)$$

elde edilir ve bu denkleminin faktöriyel ifadeleri Gamma fonksiyonu kullanılarak yeniden yazılırsa

$$\frac{d^\varphi}{dt^\varphi}g(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\varphi} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\Gamma(\varphi+1)}{j! \Gamma(\varphi+1-j)} g(t-jh) \quad (2.21)$$

ifadesine ulaşılır. Bu tanım Grünwald-Letnikov Kesirli Türev tanımıdır. İçerdiği limit onu oldukça karmaşık yapmaktadır. Bu yüzden tanımındaki limiti bütün fonksiyonlara uygulanabilir hale getirmek ve geliştirmek gerekmektedir.

2.2.2. Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali

Grünwald-Letnikov kesirli türevinin işlevsel olmadığı tanımından görülmektedir. Bunun için bazı uygulanabilir benzerlikler bulunarak Riemann-Liouville integrali yazılabilir.

$$g^\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h}\right)^\varphi \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\varphi}{j} g(t-jh), \quad h = \frac{t-\alpha}{n}, \quad \varphi < t$$

formu için ilk olarak φ yerine $-\varphi$ yazılırsa

$$\begin{aligned} g^{-\varphi}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h}\right)^{-\varphi} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{-\varphi}{j} g(t-jh), \quad h = \frac{t-\alpha}{n}, \quad \alpha < t \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^\varphi \sum_{j=0}^n (-1)^j (-1)^j \frac{\Gamma(\varphi+j)}{\Gamma(\varphi)j!} g(t-jh) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^\varphi \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(\varphi+j)}{\Gamma(\varphi)j!} g(t-jh) \end{aligned}$$

ve burdan kesirli integral

$$I^{(\varphi)}g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^\varphi \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(\varphi+j)}{\Gamma(\varphi)j!} g(t-jh), \quad h = \frac{t-\alpha}{n}, \quad \alpha < t$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g^{-\varphi} = I^\varphi$ integral operatörü ve $g(t)$ fonksiyonu üzerinde bir işlemdir. Şimdi φ ' nın farklı durumlarını ele alalım:

$\varphi=1$ için

$$\begin{aligned}
I^1 g(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^1 \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma(1)j!} g(t-jh) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n h g(t-jh), \quad h = \left(\frac{(t-\alpha)-0}{n} \right) \\
&= \int_0^{t-\alpha} g(t-x) dt, \quad (t-x=v; -dx=dv) \\
&= - \int_t^\alpha g(v) dv \\
I^1(g) &= \int_\alpha^t g(v) dv
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde;

$$\begin{aligned}
\varphi = 2 \text{ için } I^2(g) &= \int_\alpha^t (t-v)g(v)dv \\
\varphi = 3 \text{ için } I^3(g) &= \frac{1}{2!} \int_\alpha^t (t-v)^2 g(v)dv \\
&\vdots \\
\varphi = n \text{ için } I^n(g) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_\alpha^t (t-v)^{n-1} g(v)dv
\end{aligned}$$

genelleştirilmiş tanıma buradan ulaşılır ve böylece elde edilen integral

$$I_t^\varphi = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_\alpha^t (t-v)^{\varphi-1} g(v)dv, \quad \alpha < t \quad (2.22)$$

Riemann- Liouville Kesirli İntegralidir . (2.22) integrali ile Riemann-Liouville kesirli türevi yazılabilir.

Tanım 2.1 : g , $[a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve $n \geq \varphi \geq n-1, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere φ . mertebeden Riemann-Liouville sol ve sağ kesirli türevleri,

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\varphi g(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\varphi)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\varphi-1} g(\tau) d\tau \\
{}_t D_b^\varphi g(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\varphi)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\varphi-1} g(\tau) d\tau
\end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilir . Riemann-Liouville kesirli türev tanımı klasik türevin pek çok özelliğini sağlamaktadır. Kesirli türevin φ . mertebeden anlamlı olabilmesi tam sayı olması durumunda sağlanması gerekir.

2.2.3. Caputo Kesirli Türevi

Riemann-Liouville operatörü, kesirli türev ve integralin uygulamalarında oldukça önemlidir. Bilimin ilerlemesi ile birlikte Riemann-Liouville kesirli türev tanımında bazı değişikliklere ihtiyaç duyulmuştur. Matematiksel modelleme ile elde edilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemler başlangıç koşulları ile verilir. Çünkü tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları ile açıklanabilirliği Caputo kesirli türevini diğer tanımlardan ayırır ve kullanışlı hale getirir. Caputo Kesirli Türevi ;

$${}_a^C D_t^\varphi g(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \varphi)} \int_a^t \frac{g^n(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\varphi - n + 1}}, \quad n \geq \varphi \geq n - 1 \quad (2.24)$$

olarak tanımlanır. Şayet φ değerini $(0, 1)$ aralığında alırsak,

$${}_a D_t^\varphi g(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \varphi)} \int_a^t \frac{g'(\tau) d\tau}{(t - \tau)^\varphi} \quad (2.25)$$

şeklinde elde edilir. $\varphi = n$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$D_n^\varphi g(t) = g^n(x)$$

olup $n = 0$ olması durumunda Caputo kesirli türevi,

$$D_0^\varphi g(t) = g(x)$$

elde edilir. Riemann-Liouville kesirli türevi klasik analizin pek çok özelliğini sağlamaktadır. Ancak klasik analizde bilinenin aksine Riemann-Liouville kesirli türevinde sabit fonksiyonun türevi sıfır olmamaktadır.

Örnek: $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(t) = c$ sabit fonksiyonunu Riemann-Liouville ve Caputo

kesirli türev tanımına uygulayalım.

$$\begin{aligned}
{}_{{\alpha}}^{RL}D_t^{\varphi}(c) &= \frac{d^n}{dt^n} I_t^{n-\varphi}(c) \\
&= \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-\varphi)} \int_{{\alpha}}^t (t-x)^{n-\varphi-1}(c)dt \\
&= \frac{d^n}{dt^n} \frac{c}{\Gamma(n-\varphi)} \frac{(t-x)^{n-\varphi}}{(\varphi-n)} \Big|_{{\alpha}}^t \\
&= \frac{d^n}{dt^n} \frac{c}{\Gamma(n-\varphi)} \left[0 + \frac{(t-{\alpha})^{n-\varphi}}{n-\varphi} \right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n} \frac{c}{\Gamma(n-\varphi)} \frac{(t-{\alpha})^{n-\varphi}}{n-\varphi} \\
&= \frac{c}{(n-\varphi)\Gamma(n-\varphi)} \left[\frac{d^n}{dt^n} (t-{\alpha})^{n-\varphi} \right] \\
&= \frac{c}{\Gamma(1+n-\varphi)} \frac{(n-\varphi)!(t-{\alpha})^{n-\varphi-n}}{(n-\varphi-n)!} \\
&= \frac{c}{\Gamma(1+n-\varphi)} \frac{\Gamma(1+n-\varphi)(t-{\alpha})^{-\varphi}}{(-\varphi)!} \\
&= c \frac{1}{\Gamma(1-\varphi)(t-{\alpha})^{\varphi}} \neq 0
\end{aligned}$$

Burada klasik analizdeki farklı bir sonuç elde edilmiştir. Paydada bulunan $(t - \alpha)$ ifadesinde $t = \alpha$ olduğunda ifade sonsuz olup süreksiz olacak ve böylece türev tanımsız olacaktır. Riemann-Liouville kesirli türevi kullanışlı olmamaktadır. Şimdi Caputo kesirli türev tanımına uygulayalım.

$$\begin{aligned}
{}_{{\alpha}}^CD_t^{\varphi}(c) &= {}_{\alpha}I_t^{(n-\varphi)} \left[\frac{d^n}{dt^n}(c) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\varphi)} \int_{{\alpha}}^t (t-x)^{n-\varphi-1} \left[\frac{d^n}{dx^n} c \right] dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\varphi)} \int_{{\alpha}}^t (t-x)^{n-\varphi-1} 0 dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup Caputo kesirli türevi ile elde edilen sonuç klasik türev ile aynı olmuştur.

2.2.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi ve İntegrali

Caputo türev tanımı $(t - \tau)^{-\varphi}$ çekirdeği için $t = \tau$ olması durumunda tekilliği sağlamadığı için 2015 yılında Caputo ve Fabrizio kesirli türev tanımını yeniden yapmıştır.

Bununla birlikte Losado ve Nieto bu tanımın kesirli integral tanımını yapmışlardır.

Tanım 2.2 : (2.25) Caputo denkleminde çekirdek olan $(t - \tau)^{-\varphi}$ yerine $e^{-\frac{\varphi}{1-\varphi}\tau}$ ve $\frac{1}{\Gamma(1-\varphi)}$ yerine $\frac{M(\varphi)}{(1-\varphi)}$ yazılırsa

$${}^{CF}D_t^\varphi g(t) = \frac{M(\varphi)}{(1-\varphi)} \int_a^t g'(\tau) e^{-\frac{\varphi}{1-\varphi}(t-\tau)} d\tau \quad (2.26)$$

denklemine Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi denir. Tanımda verilen $M(\varphi)$ normalleştirme sabiti ve $M(0) = M(1) = 1$ 'dir (Caputo ve Fabrizio (2015)).

Tanım 2.3 : Caputo kesirli türevi, $b > 0$ ve $f \in H^1(0, b)$ olmak üzere,

$${}^CD^\varphi g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\varphi)} \int_0^t (t-\tau)^{-\varphi} g'(\tau) d\tau, \quad \varphi \in (0, 1)$$

yazılabilir ve bu denklemde $(t-\tau)^{-\varphi}$ çekirdeği yerine $e^{-\frac{\varphi}{1-\varphi}t}$ ve $\frac{1}{\Gamma(1-\varphi)}$ yerine ise $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\varphi^2)}}$ yazılırsa $0 < \varphi < 1$ için Caputo-Fabrizio Kesirli türevi ;

$${}^{CF}D^\varphi g(t) = \frac{(2-\varphi)M(\varphi)}{2(1-\varphi)} \int_0^t e^{-\frac{\varphi}{1-\varphi}(t-\tau)} g'(\tau) d\tau \quad (2.27)$$

elde edilir ve burada $M(\varphi)$, φ 'e bağlı normalleştirme sabitidir.

Bu tanıma göre f sabit bir fonksiyon ise caputo türevinde olduğu gibi

$${}^{CF}D^\varphi g = 0$$

şeklinde olduğu görülür. Yeni çekirdekte $t = \tau$ olduğunda tekillik problemi oluşmamaktadır. Laplace dönüşümü diferansiyel denklemlerin çalışmasında önemli rol oynamaktadır. Yeni kesirli türev tanımına uygulanırsa $0 < \varphi < 1$ aralığında φ değeri için

$$\mathcal{L}({}^{CF}D^\varphi g(t))(s) = \frac{(2-\varphi)M(\varphi)}{2(s+\varphi(1-s))} (s\mathcal{L}g(t) - f(0)), \quad s > 0 \quad (2.28)$$

olup Laplace dönüşümü Caputo-Fabrizio türevi ile çalışıldığında oldukça faydalı bir araçtır. $\varphi \in (0, 1)$ olmak koşulu ile φ . mertebeden kesirli türev tanımı ile kesirli integral tanımı

yapılabilir. $\varphi \in (0, 1)$ için kesirli türev denklemi ,

$${}^{CF}D^\varphi g(t) = u(t), \quad t \geq 0$$

olup laplace dönüşümü ile

$$\mathcal{L}[{}^{CF}D^\varphi g(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s), \quad s > 0$$

elde edilir. Buradan ;

$$\frac{(2-\varphi)M(\varphi)}{2(s+\varphi(1-s))}(s\mathcal{L}[g(t)](s) - f(0)) = \mathcal{L}[u(t)](s), \quad s > 0 \quad (2.29)$$

olup benzer şekilde ,

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{1}{s}g(0) + \frac{2\varphi}{s(2-\varphi)M(\varphi)}\mathcal{L}[u(t)](s) + \frac{2(1-\varphi)}{(2-\varphi)M(\varphi)}\mathcal{L}[u(t)](s), \quad s > 0$$

yazılır ve buradan ters laplace özellikleri kullanılarak,

$$g(t) = \frac{2(1-\varphi)}{(2-\varphi)M(\varphi)}u(t) + \frac{2\varphi}{(2-\varphi)M(\varphi)}\int_0^t u(s)ds + g(0), \quad t \geq 0 \quad (2.30)$$

$f(0)$ yerine c sabiti kullanılırsa

$$g(t) = \frac{2(1-\varphi)}{(2-\varphi)M(\varphi)}u(t) + \frac{2\varphi}{(2-\varphi)M(\varphi)}\int_0^t u(s)ds + c, \quad t \geq 0, \quad c \in R$$

olur. Burada $c \in R$ sabit olup

$${}^{CF}D^\varphi g(t) = u(t), \quad t \geq 0$$

denkleminin çözümüdür. Bu denklem sistemi ,

$$\frac{(2-\varphi)M(\varphi)}{2(1-\varphi)}\int_0^t e^{[-\frac{\varphi}{1-\varphi}(t-s)]}g'(s)ds = u(t), \quad t \geq 0$$

ya da

$$\int_0^t e^{\left[\frac{\varphi}{1-\varphi}s\right]} g'(s) ds = \frac{2(1-\varphi)}{(2-\varphi)M(\varphi)} e^{\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}t\right)} u(t), \quad t \geq 0$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$g'(t) = \frac{2(1-\varphi)}{(2-\varphi)M(\varphi)} (u'(t) + \frac{\varphi}{1-\varphi} u(t)), \quad t \geq 0$$

denklemini elde edilir. Böylece

$$g(t) = \frac{(2-\varphi)M(\varphi)}{2(1-\varphi)} [u(t) - u(0)] + \frac{2\varphi}{(2-\varphi)M(\varphi)} \int_0^t u(s) ds + g(0), \quad t \geq 0 \quad (2.31)$$

elde edilir ve Caputo-Fabrizio kesirli integrali tanımlanır (Losada ve Nieto (2015)).

$${}^{CF}I^\varphi g(t) = \frac{2(1-\varphi)}{(2-\varphi)M(\varphi)} u(t) + \frac{2\varphi}{(2-\varphi)M(\varphi)} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0 \quad (2.32)$$

şeklinde ifade edilir.

g fonksiyonunun birinci dereceden integrali $0 < \varphi < 1$ olmak üzere

$$\frac{2(1-\varphi)}{(2-\varphi)M(\varphi)} + \frac{2\varphi}{(2-\varphi)M(\varphi)} = 1$$

olup buradan $M(\varphi)$ ifadesi

$$M(\varphi) = \frac{2}{2-\varphi}$$

olarak bulunur. Böylece yeni bir Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımı yazılabilir.

Tanım 2.4 : $0 < \varphi < 1$ olmak üzere φ . mertebeden kesirli türevi

$${}^{CF}D_*^\varphi g(t) = \frac{1}{1-\varphi} \int_0^t g'(\tau) e^{\left[-\frac{\varphi(t-\tau)}{1-\varphi}\right]} d\tau \quad (2.33)$$

şeklindedir (Losada ve Nieto (2015)).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Kesirli analiz, klasik anlamdaki türevi ve integrali rasyonel veya kompleks mertebeye geneller. Kesirli türev ve integrali tanımlamak için birçok yol vardır. Literatürde en çok kullanılan tanımlar Riemann-Liouville ve Caputo'dur. Klasik anlamdaki türev tanımlarından Riemann-Liouville kesirli türevi türev kavramına en yakın kesirli türev tanımı olup kesirli analize önemli derecede katkı sağlamaktadır. Ancak türev ve Riemann-Liouville kesirli türev tanımı arasındaki önemli fark olan sabitin türevinin Riemann-Liouville kesirli türevinde sıfır olmaması ve fiziksel yorum gerektiren başlangıç değer problemlerinde kullanışlı olmaması sebebi ile Caputo tarafından 1967 yılında yeni bir tanım geliştirilmiştir.

3.1. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali

φ . mertebeden bilinen Riemann-Liouville kesirli integrali ve kesirli türevi ;

$$I^\varphi g(t) = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t - \tau)^{\varphi-1} g(\tau) d\tau, \quad \varphi > 0$$

ve

$${}^{RL}D^\varphi g(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \varphi)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\varphi-1} g(\tau) d\tau$$

şeklindedir. ${}_aD_t^\varphi$ ve ${}_tD_b^\varphi$ notasyonları yerine sırasıyla D_{a+}^φ ve D_{b-}^φ kullanılmaktadır. Aynı şekilde ${}_aI_t^\varphi$ ve ${}_tI_b^\varphi$ notasyonları yerine sırasıyla I_{a+}^φ ve I_{b-}^φ kullanılmaktadır.

Riemann-Liouville operatörü ile ilgili bazı önemli özellikler şu şekildedir (Podlubny (1999)):

- **Lineerlik:** Riemann-Liouville kesirli türev operatörü tam sayılı türevlerde olduğu gibi lineerlik özelliklerini sağlar.

$$D^\varphi(\mu f(t) + \psi g(t)) = \mu D^\varphi f(t) + \psi D^\varphi g(t)$$

İspat :

$$\begin{aligned}
D^\varphi(\mu f(t) + \psi g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n - \varphi)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\varphi-1} (\mu f(\tau) + \psi g(\tau)) d\tau \\
&= \frac{\mu}{\Gamma(n - \varphi)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\varphi-1} f(\tau) d\tau \\
&\quad + \frac{\psi}{\Gamma(n - \varphi)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\varphi-1} g(\tau) d\tau \\
&= \mu D^\varphi f(t) + \psi D^\varphi g(t)
\end{aligned}$$

- **Birleşme Özelliği :** Riemann-Liouville kesirli integrali $\varphi > 0$ ve $\rho > 0$ olmak üzere

$$I_t^\varphi(I_t^\rho g(t)) = I_t^\rho(I_t^\varphi g(t)) = I_t^{\varphi+\rho} g(t)$$

birleşme özelliğine sahiptir.

İspat :

$$\begin{aligned}
I_t^\varphi(I_t^\rho g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_a^t (t - \tau)^{\varphi-1} I_t^\rho g(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varphi)\Gamma(\rho)} \int_a^t (t - \tau)^{\varphi-1} d\tau \int_a^\tau (\tau - x)^{\rho-1} g(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varphi)\Gamma(\rho)} \int_a^t g(x) dx \int_\tau^t (t - \tau)^{\varphi-1} (\tau - x)^{\rho-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varphi + \rho)} \int_a^t (t - x)^{(\varphi+\rho-1)} g(x) dx \\
&= I_t^{\varphi+\rho} g(t) \dots \dots (1)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
I_t^\rho(I_t^\varphi g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_a^\tau (\tau - x)^{\rho-1} I_t^\varphi g(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\rho)\Gamma(\varphi)} \int_a^\tau (\tau - x)^{\rho-1} dx \int_a^t (t - \tau)^{\varphi-1} g(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\rho)\Gamma(\varphi)} \int_a^\tau g(\tau) d\tau \int_x^t (t - \tau)^{\varphi-1} (\tau - x)^{\rho-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varphi + \rho)} \int_a^\tau (t - \tau)^{(\rho+\varphi-1)} g(\tau) d\tau \\
&= I_t^{\rho+\varphi} g(t) \dots \dots (2)
\end{aligned}$$

olup (1) ve (2) eşitliğinden ispat tamamlanır.

- Bazı özel φ değerleri için Riemann-Liouville kesirli türev operatörü :

1. $\varphi = m - 1$ için

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\varphi g(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m I^{m-(m-1)}g(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m I^1g(t) \\ &= g^{m-1}(t) \end{aligned}$$

2. $\varphi = n \in N$ için

$$\begin{aligned} {}_aD_t^n g(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^0g(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n g(t) \\ &= g^n(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} {}_tD_b^n g(t) &= (-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^0g(t) \\ &= - \left(\frac{d}{dt}\right)^n g(t) \\ &= (-1)^n g^n(t) \end{aligned}$$

3. $\varphi = 0$ için

$$\begin{aligned} {}_aD_t^0 g(t) &= g(t) \\ {}_tD_b^0 g(t) &= g(t) \end{aligned}$$

özelliklerini sağlar.

- **Ters işlem :** Riemann-Liouville kesirli türev operatörü ,
 $g(t)$ sürekli , $g \in C[a, b]$ ve $\varphi \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\varphi ({}_aI_t^\varphi g(t)) &= g(t) \\ {}_tD_b^\varphi ({}_tI_b^\varphi g(t)) &= g(t) \end{aligned}$$

ters işlem özelliğini sağlar.

- $0 \leq m - 1 < \rho < m$ olmak üzere

$${}_aI_t^\varphi ({}_aD_t^\rho g(t)) = {}_aD_t^{\rho-\varphi} g(t) - \sum_{i=1}^m [{}_aD_t^{\rho-i} g(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\varphi-i}}{\Gamma(\varphi-i+1)}$$

eğer $\varphi = \rho$ ise

$${}_a I_t^\varphi ({}_a D_t^\rho g(t)) = g(t) - \sum_{i=1}^m [{}_a D_t^{\varphi-i} g(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\varphi-i}}{\Gamma(\varphi-i+1)}$$

elde edilir (Podlubny (1999)).

3.2. Caputo Kesirli Türev ve İntegrali

$t = \tau$ noktasında Riemann-Liouville tanımı Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerleri biçiminde tanımlanan başlangıç koşullarına sahiptir. $k_1, k_2, \dots, k_m$ keyfi sabitler olsun.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} D_t^{\varphi-1} g(t) &= k_1 \\ \lim_{t \rightarrow a} D_t^{\varphi-2} g(t) &= k_2 \\ &\vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} D_t^{\varphi-m} g(t) &= k_m \end{aligned}$$

şeklinde başlangıç koşulları elde edilir. Bu şekilde tanımlanan başlangıç değer problemleri matematiksel olarak çözülebilirken sonuçları kullanışlı olmamaktadır. Matematiksel modellemenin kullanım alanı arttıkça fiziksel yorum gerektiren başlangıç değer problemlerinde en iyi yaklaşımı 1967 yılında Caputo yapmıştır. Fiziksel olarak yorumlanabilir olması, tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerle benzer şekilde çalışması Caputo tanımını avantajlı kılar.

Caputo Kesirli Türevi;

$${}_a^C D_t^\varphi g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\varphi)} \int_a^t \frac{g^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\varphi-n+1}}, \quad n \geq \varphi \geq n-1$$

şeklindedir. ${}_a^C D_t^\varphi$ ve ${}_t^C D_b^\varphi$ notasyonları yerine sırasıyla ${}^C D_{a+}^\varphi$ ve ${}^C D_{b-}^\varphi$ kullanılır.

Caputo operatörü ile ilgili bazı önemli özellikler şu şekildedir (Podlubny (1999)):

- **Lineerlik:** Caputo kesirli türev operatörü tam sayılı türevlerde olduğu gibi lineerlik özelliklerini sağlar.

$${}^C D^\varphi (\mu f(t) + \psi g(t)) = \mu {}^C D^\varphi f(t) + \psi {}^C D^\varphi g(t)$$

elde edilir.

İspat:

$$\begin{aligned}
{}^C D^\varphi(\mu f(t) + \psi g(t)) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\varphi} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{\varphi}{i} (\mu f(t-ih) + \psi g(t-ih)) \\
&= \mu \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\varphi} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{\varphi}{i} f(t-ih) \\
&\quad + \psi \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\varphi} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{\varphi}{i} g(t-ih) \\
&= \mu {}^C D^\varphi f(t) + \psi {}^C D^\varphi g(t)
\end{aligned}$$

- Bazı özel φ değerleri için Caputo kesirli türev operatörü :

1. $0 < \varphi < 1$ için

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\varphi g(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\varphi)} \int_a^t (t-\tau)^{-\varphi} g'(\tau) d\tau \\
{}_t^C D_b^\varphi g(t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\varphi)} \int_t^b (\tau-t)^{-\varphi} g'(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

2. $\varphi = n$ için

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^n g(t) &= g^n(t) \\
{}_t^C D_b^n g(t) &= (-1)^n g^n(t)
\end{aligned}$$

3. $\varphi = 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^0 g(t) &= g(t) \\
{}_t^C D_b^0 g(t) &= g(t)
\end{aligned}$$

özelliklerini sağlar.

- **Birleşme Özelliği:** $g(t)$ sürekli fonksiyon ve $\varphi, \rho > 0$ olmak üzere

$${}^C D_t^\varphi [{}^C D_t^\rho g(t)] = {}^C D_t^\rho [{}^C D_t^\varphi g(t)] = {}^C D_t^{\varphi+\rho} g(t)$$

yazılır .

- **Homojenlik:** k herhangi bir sabit olmak üzere ,

$${}_a^C D_t^\varphi k g(t) = k [{}_a^C D_t^\varphi g(t)]$$

şeklinde yazılır (Podlubny (1999)).

- Riemann-Liouville kesirli integrali ve Caputo türev arasındaki bağıntı aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.1 $g \in C^n[a, b]$ ve $n - 1 < \varphi < n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_a^\varphi {}_a^C D_t^0 g(t) &= g(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{g^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i \\ I_t^\varphi {}_b^C D_b^0 g(t) &= g(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i g^{(i)}(b)}{i!} (b-t)^i \end{aligned}$$

olarak yazılır ancak $0 < \varphi \leq 1$ olduğunda

$$I_a^\varphi {}_a^C D_t^\varphi g(t) = g(t) - g(a)$$

$$I_t^\varphi {}_b^C D_b^\varphi g(t) = g(t) - g(b)$$

elde edilir (Kilbas (2006)).

- Aynı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralinin Caputo türevi

$${}_a^C D_{a+}^\varphi I_{a+}^\varphi g(t) = g(t)$$

$${}_b^C D_{b-}^\varphi I_{b-}^\varphi g(t) = g(t)$$

şeklindedir.

3.3. Caputo Kesirli Türev Operatörü İçin Nümerik Çözüm Yöntemi

Aşağıda Caputo kesirli diferansiyel denklem olan

$${}_0^C D_t^\varphi y(t) = g(t, y(t)) \quad (3.1)$$

eşitliği için analizin temel teoremi dikkate alınarak uygulanırsa,

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t g(v, y(v))(t - v)^{\varphi-1} dv \quad (3.2)$$

elde edilir. O zaman $t = t_{n+1}$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$y(t_{n+1}) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \quad (3.3)$$

ve

$$y(t_n) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4) denklemlerinin farkları alınır

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir ve böylece

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + A_{\varphi,1} + A_{\varphi,2} \quad (3.6)$$

ifadesine ulaşılır. Burada

$$A_{\varphi,1} = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \quad (3.7)$$

ve

$$A_{\varphi,2} = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \quad (3.8)$$

dır.

$g(t, y(t))$ fonksiyonu Lagrange interpolasyonu kullanılarak yaklaşık olarak ,

$$\begin{aligned} P(t) &\simeq \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} g(t_n, y_n) + \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} g(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ &= \frac{g(t_n, y_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (t - t_n) \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$A_{\varphi,1} = \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} (t - t_{n-1}) dt - \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)(t - t_n) dt \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} A_{\varphi,1} &= \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} y^{\varphi-1} (t_{n+1} - y - t_{n-1}) dy - \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} y^{\varphi-1} (t_{n+1} - y - t_n) dy \\ &= \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{2ht_{n+1}^\varphi}{\varphi} - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} \right\} - \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{ht_{n+1}^\varphi}{\varphi} - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

olup

$$A_{\varphi,1} = \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{2h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} \right\} - \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} \right\} \quad (3.12)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} A_{\varphi,2} &= \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} (t - t_{n-1}) dt - \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} (t - t_n) dt \\ &= \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} y^{\varphi-1} (t_n - y - t_{n-1}) dy + \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi} \\ &= \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{ht_n^\varphi}{\varphi} - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi+1} \right\} + \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi+1)} t_n^{\varphi+1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklindedir. Buradan yaklaşık çözüm şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) &= + \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{2h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{h}{\varphi} t_n^\varphi - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi} \right\} \\ &\quad + \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{t_n^\varphi}{\varphi+1} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Teorem 3.2 :

$${}_0^C D_t^\varphi y(t) = g(t, y(t))$$

denkleminin bir çözümü $y(t)$ olsun. Burada g 'nin sınırlı olduğu bir kesirli diferansiyel denklemin verilmektedir. $y(t)$ 'nin sayısal çözümü şu şekildedir :

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) = & \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{2h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{h}{\varphi} t_n^\varphi - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi} \right\} \\
& + \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{t_n^\varphi}{\varphi+1} \right\} + R_n^\varphi(t)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Burada

$$R_n^\varphi(t) < \frac{h^{3+\varphi}M}{12\Gamma(\varphi+1)} \left\{ (n+1)^\varphi + n^2 \right\}$$

dir.

İspat :

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) = & \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \\
& - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt
\end{aligned} \tag{3.16}$$

dir ve böylece (3.15) denklemi

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) = & \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} L_1(t)(t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} R_1(t)(t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \\
& - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} L_2(t)(t_n - t)^{\varphi-1} dt + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} R_2(t)(t_n - t)^{\varphi-1} dt \\
= & \frac{g(t_n, y_n)}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{2h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{h}{\varphi} t_n^\varphi - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi} \right\} + \frac{g(t_{n-1}, y_{n-1})}{h\Gamma(\varphi)} \\
& \times \left\{ \frac{h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{t_n^\varphi}{\varphi+1} \right\} + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} R(t)(t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \\
& - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} R(t)(t_n - t)^{\varphi-1} dt
\end{aligned} \tag{3.17}$$

lagrange polinomu kullanılarak elde edilir. Sonraki adımı şu şekilde tanımlanır:

$$R_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} R_1(t)(t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} R_1(t)(t_n - t)^{\varphi-1} dt \tag{3.18}$$

dır ve burada

$$R_1(t) = \frac{g^{n+1}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j) \tag{3.19}$$

olup dolayısıyla

$$R_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{g^{(n+1)}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)(t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \\ - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} \frac{g^{(n+1)}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)(t_n - t)^{\varphi-1} dt \quad (3.20)$$

olup buradan $\|g(t)\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|$ dir.

$$\|g^{(3)}(t, y(t))\|_\infty < M < \infty$$

olduğunu varsayalım. Oluşan hata teriminin normu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\|R_n(t)\|_\infty = \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{g^{(3)}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)(t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} \frac{g^{(n+1)}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)(t_n - t)^{\varphi-1} dt \right\|_\infty \quad (3.21)$$

dolayısıyla eşitsizliği

$$\|R_n(t)\|_\infty \leq \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{g^{(n+1)}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)(t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} \frac{g^{(n+1)}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)(t_n - t)^{\varphi-1} dt \right\|_\infty \quad (3.22)$$

şeklinde gösterilir. Buradan

$$\left\| \frac{1}{6\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} g^{(3)}(t, y(t)) \prod_{j=0}^2 (t - t_j)(t_n - t)^{\varphi-1} dt \right\|_\infty \\ \leq \frac{1}{6\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} \|g^{(3)}(t, y(t))\|_\infty \left\| \prod_{j=0}^2 (t - t_j) \right\| (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \\ \leq \frac{1}{6\Gamma(\varphi)} \|g^{(3)}(t, y(t))\|_\infty \left\| \prod_{j=0}^2 (t - t_j) \right\| \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \\ \leq \frac{2h^3}{4 \times 6\Gamma(\varphi)} \|g^{(3)}(t, y(t))\|_\infty \frac{t_{n+1}^\varphi}{\varphi} \\ < \frac{h^3 t_{n+1}^\varphi M}{12\Gamma(\varphi + 1)} \quad (3.23)$$

elde edilir ve sonuç olarak

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{g^{(n+1)}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)(t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \right\|_{\infty} < \frac{h^3 t_{n+1}^{\varphi} M}{12\Gamma(\varphi+1)} \quad (3.24)$$

ve

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} \frac{g^{(n+1)}(t, y(t))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t - t_j)(t_n - t)^{\varphi-1} dt \right\|_{\infty} < \frac{h^3 t_{n+1}^{\varphi} M}{12\Gamma(\varphi+1)} \quad (3.25)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \|R_n(t)\|_{\infty} &< \frac{h^3 M}{12\Gamma(\varphi+1)} (t_{n+1}^{\varphi} + t_n^{\varphi}) \\ &< \frac{h^3 M}{12\Gamma(\varphi+1)} ((n+1)^{\varphi} + n^{\varphi}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

olur. Tekrar değerlendirecek olursak

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} g(t_i, y(t_i)) dt \right\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} \|g(t_i, y(t_i))\| dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|g(t_i, y(t_i))\| \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|g(t_i, y(t_i))\| \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{(t_{n+1} - t_i)^{\varphi}}{\varphi} - \frac{(t_{n+1} - t_{i+1})^{\varphi}}{\varphi} \right\} \\ &\leq \frac{h^{\varphi}}{\Gamma(\varphi+1)} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|g(t_i, y(t_i))\| \sum_{i=0}^n \{ (n+1-i)^{\varphi} - (n-i)^{\varphi} \} \\ &\leq \frac{h^{\varphi}}{\Gamma(\varphi+1)} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|g(t_i, y(t_i))\| \{ (n+1)^{\varphi} + 1 \} \\ &\leq \frac{h^{\varphi}}{\Gamma(\varphi+1)} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|g(t, y(t))\| \{ (n+1)^{\varphi} + 1 \} \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) dt \right\| < \frac{h^{\varphi} C_n^{\varphi}}{\Gamma(\varphi+1)} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|g(t, y(t))\| \quad (3.28)$$

ve

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} g(t, y(t)) \right\| < \frac{h^\varphi S_n^\varphi}{\Gamma(\varphi + 1)} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|g(t, y(t))\| \quad (3.29)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty < \frac{h^\varphi}{\Gamma(\varphi + 1)} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|g(t, y(t))\| \{C_n^\varphi + S_n^\varphi\} \quad (3.30)$$

olup böylece teorem ispat edilmiş olur (Atangana ve Owolabi (2018)).



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bitkilerde polinasyon adı verilen tozlaşma, bitkilerin meyve ve tohum üretiminde çok önemli bir süreç olup ekosistemin devamlılığı ve biyolojik çeşitliliğin korunması için hayati önem taşımaktadır. İyi tozlaşan ürünler daha yüksek verimle sonuçlanır. Çiçeğin erkek organlarındaki polenlerin dişi organlara taşınması işlemi olan polinasyon, polinatör adı verilen canlılar ile gerçekleşmektedir. Bitkilerden bitkilere polen taşıyıp bitkilerin üreme sürecini desteklerler. Bu işlem bitkilerin tohum oluşturmalarını ve böylece çoğalmalarını sağlamaktadır. En bilinen polinatörler (tozlayıcılar) arılar, kelebekler, kuşlar, insanlar, su, rüzgar ve bazı memeli hayvan türleridir. Değişen koşullar ile bitkinin vereceği tepkimeleri öngörmek, bitkilerin gelişim ve üreme sürecinde karşılaşılan sorunları çözümlmek, verim ile ilgili tahminde bulunmak ve yüksek verim alabilmek önem arz etmektedir. Bu doğrultuda matematiksel bir model ortaya konmuştur.

Bu bölümde çalışılacak olan model tanıtılıp Caputo kesirli türev operatörüne genişletilecektir.

4.1. Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modeli

Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modeli aşağıda verilmiştir (Wang (2019)).

$$\begin{aligned} D_t\{N_1\} &= G_1(.)N_1 + \sigma_1\beta_0FN_0 + \sigma_1\beta_2FN_2 \\ D_t\{N_2\} &= G_2(.)N_2 + \sigma_2\beta_2FN_2 \\ D_t\{F\} &= \alpha N_1 - (\omega + \beta_0N_0 + \beta_2N_2)F \end{aligned} \quad (4.1)$$

Verilen (4.1) denklem sisteminde ;

N_1 bitkinin popülasyon yoğunluğunu ,

N_2 tozlaştırıcının popülasyon yoğunluğunu,

F bitkinin ürettiği çiçek ve meyve sayısını temsil etmektedir.

Ayrıca bu denklem sisteminde, $G_i(.)$ karşılıklı yarar ilişkisi (mutualizm) açısından bir türün diğer türle etkileşime girmediği durumda tür başına değişim oranı, β_2 tozlaşma oranı veya

nektar tüketim oranı, σ_1 bitkilerin bir çiçek veya meyveden yeni yetişkin bitkilere dönüşüm oranı, σ_2 tozlayıcı tarafından alınan kaynakların biyokütleye dönüşüm oranı, α nektar üretiminde birey başına düşen bitki oranı, ω nektar kaybı (nektarın bozulma oranı) şeklinde tanımlanır. $\sigma_1\beta_0N_0$ tozlaşmanın yalnızca biyotik faktörler aracılığıyla değil, rüzgar gibi abiyotik faktörler aracılığıyla da gerçekleşebileceği anlamına gelir. β_0 ve N_0 sırasıyla rüzgar akış oranını ve rüzgarla taşınan polen yoğunluğunu temsil etmektedir. Burada r_1 bitkinin içsel büyüme oranını, r_2 tozlayıcının ölüm oranını ve d_1 ise bitki türü içerisindeki bireylerin oluşturduğu tür içi rekabet düzeyi olmak üzere kolaylık sağlaması açısından büyüme fonksiyonları $G_1(N_1) = r_1 - d_1N_1$ ve $G_2(N_2) = -r_2$ dir.

Yukarıdaki model $N_1 = P$, $\beta_2N_2 = W$, $F = M$, $\alpha = a$, $\sigma_1 = b_1$, $\sigma_2\beta_2 = b_2$, $\beta_0N_0 = c_1$ ve $\omega + \beta_0N_0 = c_2$ eşitlikleri kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} P_t &= P(t)(r_1 - d_1P(t)) + b_1(c_1 + W(t))M(t) \\ W_t &= W(t)(-r_2 + b_2M(t)) \\ M_t &= aP(t) - (c_2 + W(t))M(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

denklem sistemine indirgenir.

Banach uzayında $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı ve sürekli F fonksiyonu $P, W, M \in F$ ve $P(t) \geq 0$, $W(t) \geq 0$, $M(t) \geq 0$ olmak üzere Caputo türev operatörünün tanımı kullanılarak orijinal model değiştirilmeden (4.2) denklem sistemi daha geniş bir denklem sistemi haline getirilerek

$$\begin{aligned} {}^C_0D_t^\varphi P(t) &= P(t)(r_1 - d_1P(t)) + b_1(c_1 + W(t))M(t) \\ {}^C_0D_t^\varphi W(t) &= W(t)(-r_2 + b_2M(t)) \\ {}^C_0D_t^\varphi M(t) &= aP(t) - (c_2 + W(t))M(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) denklem sisteminin başlangıç değerleri aşağıdaki gibidir.

$P(0) = P_0(0)$, $W(0) = W_0(0)$, $M(0) = M_0(0)$. Ayrıca denklem sisteminin tüm parametreleri pozitifdir.

4.2. Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modelinin Varlık ve Teklik Çözümleri

Bu bölümde (4.3) denklem sisteminin varlığı ve ve tekliği incelenecektir. Riemann-Liouville kesirli integral tanımını yardımıyla (4.3) denklem sistemi yeniden düzenlenirse ,

$$\begin{aligned} P(t) - P(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [P(v)(r_1 - d_1 P(v)) + b_1(c_1 + W(v))M(v)] dv \\ W(t) - W(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [W(v)(-r_2 + b_2 M(v))] dv \\ M(t) - M(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [aP(v) - (c_2 + W(v))M(v)] dv \end{aligned} \quad (4.4)$$

denklem sistemi elde edilir.

Başlangıç değerleri sıfır kabul edilirse,

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [P(v)(r_1 - d_1 P(v)) + b_1(c_1 + W(v))M(v)] dv \\ W(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [W(v)(-r_2 + b_2 M(v))] dv \\ M(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [aP(v) - (c_2 + W(v))M(v)] dv \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir.

Varlık ve teklik teoremini uygulayabilmek için $T : K \rightarrow K$ operatörünü

$$\begin{aligned} TP(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [P(v)(r_1 - d_1 P(v)) + b_1(c_1 + W(v))M(v)] dv \\ TW(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [W(v)(-r_2 + b_2 M(v))] dv \\ TM(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} [aP(v) - (c_2 + W(v))M(v)] dv \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlansın. Basit bir görünüm elde etmek amacıyla

$$\begin{aligned} s(t, P(t)) &= P(t)(r_1 - d_1 P(t)) + b_1(c_1 + W(t))M(t) \\ s(t, W(t)) &= W(t)(-r_2 + b_2 M(t)) \\ s(t, M(t)) &= aP(t) - (c_2 + W(t))M(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

notasyonları kullanılsın.

Lemma 4.1 : T operatörü $T : K \rightarrow K$, tamamen sürekli ve kompaktır.

İspat : $V \subset K$ sınırlı olsun. p, w, m pozitif sabitler olmak üzere $\forall P, W, M \in V$ için $\|P\| < p$, $\|W\| < w$ ve $\|M\| < m$ dir.

$$L_1 = \max_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq P \leq p}} s(t, P(t))$$

$$L_2 = \max_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq W \leq w}} s(t, W(t))$$

$$L_3 = \max_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq M \leq m}} s(t, M(t))$$

şeklinde L_1, L_2, L_3 tanımlansın. $\forall P, W, M \in V$ için

$$\begin{aligned} \|TP(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, P(v)) dv \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|s(v, P(v))\| dv \\ &\leq \frac{L_1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} dv \\ &= \frac{L_1}{\Gamma(1+\varphi)} t^\varphi \end{aligned}$$

olup buradan

$$\|TP(t)\| \leq \frac{L_1}{\Gamma(1+\varphi)}$$

elde edilir. Aynı adımlar $W(t)$ ve $M(t)$ için de uygulandığında,

$$\begin{aligned} \|TW(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, W(v)) dv \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|s(v, W(v))\| dv \\ &\leq \frac{L_2}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} dv \\ &= \frac{L_2}{\Gamma(1+\varphi)} t^\varphi \end{aligned}$$

olup

$$\|TW(t)\| \leq \frac{L_2}{\Gamma(1+\varphi)}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\|TM(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, M(v)) dv \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|s(v, M(v))\| dv \\ &\leq \frac{L_3}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} dv \\ &= \frac{L_3}{\Gamma(1+\varphi)} t^\varphi\end{aligned}$$

olup

$$\|TM(t)\| \leq \frac{L_3}{\Gamma(1+\varphi)}$$

bulunur. Buradan $T(V)$ ' nin sınırlı olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $T(V)$ ' nin kompakt olduğunu gösterilsin.

$P(t), W(t), M(t) \in V$ ve $t_1 < t_2$ olsun. $\forall \epsilon > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ sayısı vardır.

$$\begin{aligned}
& \|TP(t_2) - TP(t_1)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} s(v, P(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, P(v)) dv \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} s(v, P(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, P(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, P(v)) dv \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} \|(t_2 - v)^{\varphi-1} - (t_1 - v)^{\varphi-1}\| \|s(v, P(v))\| dv \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} \|(t_1 - v)^{\varphi-1}\| \|s(v, P(v))\| dv \\
&\leq \frac{L_1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} ((t_2 - v)^{\varphi-1} - (t_1 - v)^{\varphi-1}) dv + \frac{L_1}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv \\
&= \frac{L_1}{\Gamma(\varphi)} \left(\int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} dv - \int_0^{t_2} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv + \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv \right) \\
&= \frac{L_1}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_2^\varphi + (t_1 - t_2)^\varphi - t_1^\varphi + (t_1 - t_2)^\varphi) \\
&\leq \frac{2L_1}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_2)^\varphi + \frac{L_1}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_1)^\varphi \\
&= \frac{2L_1}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_2)^\varphi \\
&< \frac{2L_1}{\Gamma(1 + \varphi)} \delta^\varphi = \epsilon
\end{aligned}$$

olup buradan $\|TP(t_2) - TP(t_1)\| \leq \epsilon$ eşitsizliği elde edilir.

Aynı adımlar $W(t)$ ve $M(t)$ için gösterilsin.

$W(t)$ için,

$$\begin{aligned}
& \|TW(t_2) - TW(t_1)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} s(v, W(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, W(v)) dv \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} s(v, W(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, W(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, W(v)) dv \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} \|(t_2 - v)^{\varphi-1} - (t_1 - v)^{\varphi-1}\| \|s(v, W(v))\| dv \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} \|(t_1 - v)^{\varphi-1}\| \|s(v, W(v))\| dv \\
&\leq \frac{L_2}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} ((t_2 - v)^{\varphi-1} - (t_1 - v)^{\varphi-1}) dv + \frac{L_2}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv \\
&= \frac{L_2}{\Gamma(\varphi)} \left(\int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} dv - \int_0^{t_2} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv + \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv \right) \\
&= \frac{L_2}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_2^\varphi + (t_1 - t_2)^\varphi - t_1^\varphi + (t_1 - t_2)^\varphi) \\
&\leq \frac{2L_2}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_2)^\varphi + \frac{L_2}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_1)^\varphi \\
&= \frac{2L_2}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_2)^\varphi \\
&< \frac{2L_2}{\Gamma(1 + \varphi)} \delta^\varphi = \epsilon
\end{aligned}$$

olup buradan $\|TW(t_2) - TW(t_1)\| \leq \epsilon$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de $M(t)$ için gösterilsin.

$$\begin{aligned}
& \|TM(t_2) - TM(t_1)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} s(v, M(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, M(v)) dv \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} s(v, M(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, M(v)) dv \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} s(v, M(v)) dv \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} \|(t_2 - v)^{\varphi-1} - (t_1 - v)^{\varphi-1}\| \|s(v, M(v))\| dv \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} \|(t_1 - v)^{\varphi-1}\| \|s(v, M(v))\| dv \\
&\leq \frac{L_3}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_2} ((t_2 - v)^{\varphi-1} - (t_1 - v)^{\varphi-1}) dv + \frac{L_3}{\Gamma(\varphi)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv \\
&= \frac{L_3}{\Gamma(\varphi)} \left(\int_0^{t_2} (t_2 - v)^{\varphi-1} dv - \int_0^{t_2} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv + \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - v)^{\varphi-1} dv \right) \\
&= \frac{L_3}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_2^\varphi + (t_1 - t_2)^\varphi - t_1^\varphi + (t_1 - t_2)^\varphi) \\
&\leq \frac{2L_3}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_2)^\varphi + \frac{L_3}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_1)^\varphi \\
&= \frac{2L_3}{\Gamma(1 + \varphi)} (t_1 - t_2)^\varphi \\
&< \frac{2L_3}{\Gamma(1 + \varphi)} \delta^\varphi = \epsilon
\end{aligned}$$

olup buradan da $\|TM(t_2) - TM(t_1)\| \leq \epsilon$ eşitsizliği elde edilir. Bu durumda Arzela-Ascoli teoremini kullanarak $\overline{T(V)}$ 'nin kompaktlığı elde edilmiştir.

Teorem 4.1 : $S : [u_1, u_2] \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyon ve $S(t, \cdot), [u_1, u_2]$ aralığında artan fonksiyon olsun. Öyle k_1 ve k_2 değerleri bulunabilir ki, $B(n)k_1 \leq S(t, k_1)$, $B(n)k_2 \geq S(t, k_2)$, $0 \leq k_1(t) \leq k_2(t)$, $k_1 \leq t \leq k_2$ eşitsizlikleri sağlanır. Böylece (4.3) denklem sistemi pozitif çözüme sahiptir.

İspat : Sistemin tamamen sürekli olduğunu Lemma 4.1 yardımıyla gösterilmiştir. Şimdi sabit nokta teoremini kullanarak T nin artan bir operatör olduğunu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
TP_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, P_1(v)) dv \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, P_2(v)) dv \\
&= TP_2(t)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
TW_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, W_1(v)) dv \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, W_2(v)) dv \\
&= TW_2(t)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
TM_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, M_1(v)) dv \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, M_2(v)) dv \\
&= TM_2(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.1 kullanılarak $T : \langle k_1, k_2 \rangle \rightarrow \langle k_1, k_2 \rangle$ dönüşümünün kompakt olduğu gösterilmiştir.

Şimdi sistemin pozitif ve tek bir çözümünün olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
&\|TP_1(t) - TP_2(t)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} (s(v, P_1(v)) - s(v, P_2(v))) dv \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} C_1 \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|P_1(v) - P_2(v)\| dv
\end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılarak ,

$$\|TP_1(t) - TP_2(t)\| \leq \left\{ \frac{C_1 t^\varphi}{\Gamma(\varphi + 1)} \right\} \|P_1(v) - P_2(v)\|$$

bulunur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
& \|TW_1(t) - TW_2(t)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} (s(v, W_1(v)) - s(v, W_2(v))) dv \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} C_2 \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|W_1(v) - W_2(v)\| dv
\end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılarak ,

$$\|TW_1(t) - TW_2(t)\| \leq \left\{ \frac{C_2 t^\varphi}{\Gamma(\varphi + 1)} \right\} \|W_1(v) - W_2(v)\|$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \|TM_1(t) - TM_2(t)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} (s(v, M_1(v)) - s(v, M_2(v))) dv \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} C_3 \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|M_1(v) - M_2(v)\| dv
\end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılarak ,

$$\|TM_1(t) - TM_2(t)\| \leq \left\{ \frac{C_3 t^\varphi}{\Gamma(\varphi + 1)} \right\} \|M_1(v) - M_2(v)\|$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{C_1 t^\varphi}{\Gamma(\varphi + 1)} \right\} < 1 \\
& \left\{ \frac{C_2 t^\varphi}{\Gamma(\varphi + 1)} \right\} < 1 \\
& \left\{ \frac{C_3 t^\varphi}{\Gamma(\varphi + 1)} \right\} < 1
\end{aligned}$$

sonuçları geçerli olup T operatörünün daraldığını gösterir ve Bitki Nektar Polinasyon matematiksel modelinin sabit nokta teoremi yardımıyla tek bir pozitif çözümü olduğu gösterilmiş olur.

4.3. Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modelinin Hyers-Ulam

Kararlılık Analizi

Hyers-Ulam kararlılığı; ilk defa 1940 yılında Wisconsin Üniversitesinde konuşma yapan S. Ulam'ın fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisi ile ilgili ortaya attığı sorusunu, D. Hyers'in 1941 yılında Banach uzayları için yanıtlanmasıyla birlikte ortaya çıkmıştır. Ulam'ın probleminin bir genelleştirilmesi olarak fonksiyonel denklemlerin yerine diferansiyel denklemlerin kullanılmasıyla yeni bir çalışma alanı oluşmuştur.

(4.3) denklem sistemi Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir. Öncelikle aşağıdaki tanım sağlanmalıdır.

Tanım 4.1 : $\zeta > 0$ için

$$\begin{aligned} |P(t) - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, P(v)) dv| &\leq \zeta_1 \\ |W(t) - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, W(v)) dv| &\leq \zeta_2 \\ |M(t) - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, M(v)) dv| &\leq \zeta_3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

olup modelin $\tilde{P}(t)$, $\tilde{W}(t)$, $\tilde{M}(t)$ içinde çözümü olduğunu kabul edilsin.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, \tilde{P}(v)) dv \\ \tilde{W}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, \tilde{W}(v)) dv \\ \tilde{M}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, \tilde{M}(v)) dv \end{aligned} \quad (4.9)$$

olup aynı şekilde ,

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(t) - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, \tilde{P}(v)) dv| &\leq \zeta_1 \\ |\tilde{W}(t) - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, \tilde{W}(v)) dv| &\leq \zeta_2 \\ |\tilde{M}(t) - \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} s(v, \tilde{M}(v)) dv| &\leq \zeta_3 \end{aligned} \quad (4.10)$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
|P(t) - \tilde{P}(t)| &\leq \zeta_1 \eta_1 \\
|W(t) - \tilde{W}(t)| &\leq \zeta_2 \eta_2 \\
|M(t) - \tilde{M}(t)| &\leq \zeta_3 \eta_3
\end{aligned} \tag{4.11}$$

dır.

Teorem 4.2 : *Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel modelinin, Caputo kesirli türev tanımı ile oluşturulan (4.3) denklem sistemi Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir.*

İspat : $P(t), W(t), M(t)$ ile birlikte $\tilde{P}(t), \tilde{W}(t), \tilde{M}(t)$ (4.3) denklem sisteminin çözümleri olduğu varsayılarak $P(t)$ ve $\tilde{P}(t)$ çözümlerinin farklarının normu alınır,

$$\begin{aligned}
\|P(t) - \tilde{P}(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|s(v, P(v)) - s(v, \tilde{P}(v))\| dv \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \Delta_1 \|P - \tilde{P}\|
\end{aligned}$$

olur ve burada $\zeta_1 = \Delta_1$, $\frac{1}{\Gamma(\varphi)} = \eta_1$ alınır

$$\|P(t) - \tilde{P}(t)\| \leq \zeta_1 \eta_1 \tag{4.12}$$

elde edilir.

Buradan hareketle $W(t)$ ve $\tilde{W}(t)$ çözümlerinin farklarının normu alınır,

$$\begin{aligned}
\|W(t) - \tilde{W}(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|s(v, W(v)) - s(v, \tilde{W}(v))\| dv \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \Delta_2 \|W - \tilde{W}\|
\end{aligned}$$

olur aynı şekilde $\zeta_2 = \Delta_2$, $\frac{1}{\Gamma(\varphi)} = \eta_2$ alınır,

$$\|W(t) - \tilde{W}(t)\| \leq \zeta_2 \eta_2 \tag{4.13}$$

elde edilir.

Yine aynı şekilde $M(t)$ ve $\tilde{M}(t)$ çözümlerinin farklarının normu alınır,

$$\begin{aligned}\|M(t) - \tilde{M}(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} \|s(v, M(v)) - s(v, \tilde{M}(v))\| dv \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \Delta_2 \|M - \tilde{M}\|\end{aligned}$$

olur ve $\zeta_3 = \Delta_3$, $\frac{1}{\Gamma(\varphi)} = \eta_3$ alınırsa,

$$\|M(t) - \tilde{M}(t)\| \leq \zeta_3 \eta_3 \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.12), (4.13) ve (4.14) eşitsizliklerinin yardımıyla (4.3) denklem sistemi Hyers-Ulam kararlı olup böylece ispat tamamlanır.

4.4. Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modelinin Nümerik Çözümü

Caputo kesirli türevi için genişletilmiş Bitki Nektar Polinasyon Matematiksel Modeli (4.3) denklem sisteminde gösterilmiştir. Elde edilen (4.4) sistemi analizin temel teoremi ile yeniden düzenlendiğinde $Z_i, i = 1, 2, 3$ çekirdekleri için (4.15) denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}P(t) - P(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} Z_1(v, P(v)) dv \\ W(t) - W(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} Z_2(v, W(v)) dv \\ M(t) - M(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^t (t-v)^{\varphi-1} Z_3(v, M(v)) dv\end{aligned} \quad (4.15)$$

Böylece bu sistemde olduğu gibi

$$\begin{aligned}P_{n+1}(t) - P(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\varphi-1} Z_1(t, P(t)) dt \\ W_{n+1}(t) - W(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\varphi-1} Z_2(t, W(t)) dt \\ M_{n+1}(t) - M(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-t)^{\varphi-1} Z_3(t, M(t)) dt\end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir ve t_n değeri için de yazılırsa

$$\begin{aligned} P_n(t) - P(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} Z_1(t, P(t)) dt \\ W_n(t) - W(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} Z_2(t, W(t)) dt \\ M_n(t) - P(0) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} Z_3(t, M(t)) dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. (4.16) ve (4.17) sistemlerinde her bir denklemin kendi içinde farkları alınır,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) - P_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} Z_1(t, P(t)) dt + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} Z_1(t, P(t)) dt \\ W_{n+1}(t) - W_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} Z_2(t, W(t)) dt + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} Z_2(t, W(t)) dt \\ M_{n+1}(t) - M_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^{\varphi-1} Z_3(t, M(t)) dt + \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^{t_n} (t_n - t)^{\varphi-1} Z_3(t, M(t)) dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur. (4.16) ve (4.17) sisteminden hareketle

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= \frac{Z_1(t_n, P_n(t))}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{2h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{h}{\varphi} t_n^\varphi - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi} \right\} \\ &+ \frac{Z_1(t_{n-1}, P_{n-1}(t))}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{t_n^\varphi}{\varphi+1} \right\} + {}^1R_n^\varphi(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

yazılır buradan

$${}^1R_n^\varphi(t) < \frac{h^{3+\varphi}M}{12\Gamma(\varphi+1)} \left\{ (n+1)^\varphi + n^2 \right\}$$

ifadesine ulaşılır.

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \frac{Z_2(t_n, W_n(t))}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{2h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{h}{\varphi} t_n^\varphi - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi} \right\} \\ &+ \frac{Z_2(t_{n-1}, W_{n-1}(t))}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{t_n^\varphi}{\varphi+1} \right\} + {}^2R_n^\varphi(t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

yazılır buradan

$${}^2R_n^\varphi(t) < \frac{h^{3+\varphi}M}{12\Gamma(\varphi+1)} \left\{ (n+1)^\varphi + n^2 \right\}$$

ifadesine ulaşılır.

$$\begin{aligned}
M_{n+1} - M_n = & \frac{Z_3(t_n, M_n(t))}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{2h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{h}{\varphi} t_n^\varphi - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi} \right\} \\
& + \frac{Z_3(t_{n-1}, M_{n-1}(t))}{h\Gamma(\varphi)} \left\{ \frac{h}{\varphi} t_{n+1}^\varphi - \frac{t_{n+1}^{\varphi+1}}{\varphi+1} + \frac{t_n^\varphi}{\varphi+1} \right\} + {}^3R_n^\varphi(t)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

yazılır buradan

$${}^3R_n^\varphi(t) < \frac{h^{3+\varphi}M}{12\Gamma(\varphi+1)} \left\{ (n+1)^\varphi + n^2 \right\}$$

ifadesine ulaşılır.

Böylece

$${}^iR_n^\varphi(t) < \frac{h^{3+\varphi}M}{12\Gamma(\varphi+1)} \left\{ (n+1)^\varphi + n^2 \right\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

eşitsizliği elde edilir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada Bitki Nektar Polinasyon matematiksel modelinin analizi yapılmıştır. Üç farklı diferansiyel denklem içeren bu model bitkinin popülasyonu, tozlaştırıcının popülasyonu, bitkinin ürettiği çiçek ve meyve sayısı olarak incelenmiştir. Tamsayı mertebeden verilen Bitki Nektar Polinasyon matematiksel modeli öncelikle kesirli mertebeden Caputo operatörüne genişletilmiştir. Daha sonra sırasıyla modelin Arzela-Ascoli teoremi yardımıyla varlık ve teklik çözümleri yapılmış, Hyers-Ulam kararlılık teoremi yardımıyla kararlılık analizi yapılmış, Atangana-Owolabi nümerik yaklaşımı ile sayısal çözümleri yapılmıştır. Bu çalışmanın sonucunda kesirli türev operatörleri alanında çalışma yapan araştırmacılar, Bitki Nektar Polinasyon matematiksel modelini Caputo kesirli türev operatöründen farklı operatörlere uygulayabilir, farklı matematiksel modelleri Caputo kesirli türev operatörüne genişletilerek analizlerini yapabilirler.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R. (1953). A propos dune note de humbert, pierre. *Comptes rendus hebdomadaires des seances de l academie des sciences*, 236(21):2031–2032.
- Ahmad, B. ve Sivasundaram, S. (2009). Existence results for nonlinear impulsive hybrid boundary value problems involving fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3(3):251–258.
- Atangana, A. ve Baleanu, D. New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Therm. Sci.*, 20.
- Atangana, A. ve Owolabi, K. M. (2018). New numerical approach for fractional differential equations. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 13(1):3.
- Butzer, P. L. ve Westphal, U. (2000). An introduction to fractional calculus. In *Applications of fractional calculus in physics*, s. 1–85. World Scientific.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical journal international*, 13(5):529–539.
- Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 1(2):73–85.
- Chen, Y. ve Moore, K. L. (2001). Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 01CH37228)*, volume 2, s. 1421–1426. IEEE.
- Diethelm, K. ve Ford, N. (2010). The analysis of fractional differential equations. *Lecture notes in mathematics*, 2004.
- Friedrich, C. (1991). Relaxation and retardation functions of the maxwell model with fractional derivatives. *Rheologica Acta*, 30:151–158.
- Hilfer, R. (2003). On fractional relaxation. *Fractals*, 11(supp01):251–257.

- Karaman, M. R. (2018). Arı polinasyonu. *Türkiye Klinikleri Animal Nutrition And Nutritional Diseases-Special Topics*, 4(3):26–32.
- Kilbas, A. A. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier.
- Kiryakova, V. S. (1993). *Generalized fractional calculus and applications*. CRC press.
- Losada, J. ve Nieto, J. J. (2015). Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):87–92.
- McBride, A. C. (1979). Fractional calculus and integral transforms of generalized functions. *Pitman Publishing Limited, London*.
- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *Wiley*.
- Odibat, Z. M. (2010). Analytic study on linear systems of fractional differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(3):1171–1183.
- Oldham, K. B. ve Spanier, J. (1974). The fractional calculus, vol. 111 of mathematics in science and engineering.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Elsevier.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I., ve others (1993). Fractional integrals and derivatives, vol. 1. *Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science publishers, Yverdon*.
- Sorkun, K., Yılmaz, B., Özkırım, A., Özkök, A., Gençay, Ö., ve Bölükbaşı, D. (2012). Yaşam için arılar. *Türkiye Arı Yetiştiricileri Merkez Birliği Yayın*, (5).
- Wang, Y. (2019). Dynamics of a plant-nectar-pollinator model and its approximate equations. *Mathematical biosciences*, 307:42–52.

Yang, X. (2011). Local fractional laplace's transform based on the local fractional calculus. In *International Conference on Computer Science and Information Engineering*, s. 391–397. Springer.

Yılmaz, K. (2016). Bal arılarının bitkisel üretimdeki önemi. *Ordu'da Tarım*, 20(118):1–2.



ÖZGEÇMİŞ

