

BÖGEL SÜREKLİ ve $B-2\pi$ PERİYODİK FONKSİYONLAR

İÇİN KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

ONUR ÇETİNEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BÖGEL SÜREKLİ ve $B-2\pi$ PERİYODİK
FONKSİYONLAR İÇİN
KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

ONUR ÇETİNEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. FADİME DİRİK

SİNOP-2014

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 05/01/2015 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ



Üye : Yrd. Doç. Dr. Fadime DİRİK



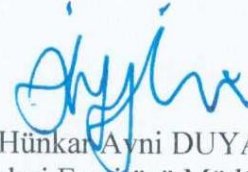
Üye : Yrd. Doç. Dr. B. Barış ALKAN



ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

30.01/2015



Doç. Dr. Hünkar Ayni DUYAR
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BÖGEL SÜREKLİ ve $B-2\pi$ PERİYODİK FONKSİYONLAR İÇİN

KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde double diziler, pozitif lineer operatörler, çalışmada kullanılacak uzaylar, Bögel süreklilik ile ilgili genel bilgiler ve bazı sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ise bu uzaylar için Korovkin tipi teorem ispatlanmış ve teoremin şartları bazı operatöre uygulanmıştır. Ayrıca bu bölümde katışık B -süreklilik modülü kullanılarak yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Double diziler, Pringsheim yakınsaklık, Pozitif lineer operatörler, Bögel süreklilik, Korovkin tipi teorem, Karışık B -Süreklilik modülü.

KOROVKIN TYPE THEOREMS FOR BÖGEL CONTINUOUS and $B-2\pi$ PERIODIC FUNCTIONS

ABSTRACT

This thesis consist of three chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, some general information about double sequences, positive linear operators and Bögel continuous functions has been recalled and some results concerning these concept have also been considered. In the third chapter, Korovkin type theorem for some spaces has been proved and conditions of this theorem have been applied to some special operators. In addition in this chapter convergence rate has been calculated by using modulus of continuity

Key Words: Double sequences, Positive linear operators, Bögel continuous functions, Korovkin type theorem, Modules of mixed B -continuity.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarında bana yardımlarını esirgemeyen sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Fadime DİRİK ve sayın hocam Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ' ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca bana destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Double Diziler ve Pringsheim Anlamda Yakınsaklık	2
2.2. Pozitif Lineer Operatörler	6
2.2.1. Pozitif Lineer Operatörler	6
2.2.2. Korovkin Teoremleri	8
2.3. Bölge Sürekli Fonksiyonlar	13
2.4. Bölge Sürekli ve $B-2\pi$ Periyodik Fonksiyonlar	14
2.5. n - Değişkenli Bölge Sürekli Fonksiyonlar	17
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	18
4. BULGULAR	19
4.1. Bölge Sürekli Fonksiyonlar İçin Korovkin Teoremi	19
4.2. Bölge Sürekli ve $B-2\pi$ Periyodik Fonksiyonlar İçin Korovkin Teoremi	29
4.3. n -Değişkenli Bölge Sürekli Fonksiyonlar İçin Korovkin Teoremi	39
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	49
6. KAYNAKLAR	50

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
(x_{mn})	: Reel terimli double dizi
Ω	: Tüm reel terimli double diziler uzayı
$L(f; x)$	: f fonksiyonunun L operatörü altındaki görüntüsü
$D(L)$	: L operatörün tanım kümesi
$R(L)$	: L operatörün değer kümesi
$C(D)$	: D üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$B(D)$	: D üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\ \cdot\ _B$	: $B(D)$ uzayının alışılmış supremum normu
$e_i, i = 0, 1, 2, 3$	: $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ üzerinde tanımlı test fonksiyonları
$\Delta_{s,t} f(x, y)$	: f fonksiyonunun karışık farkı
$C_b(D)$	: $D \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm Bögel sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_{2\pi}$	: $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli B sürekli ve iki değişkene göre $B-2\pi$ periyodik fonksiyonlar uzayı
$C_{2\pi, 2\pi}$	: $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli ve iki değişkene göre sürekli fonksiyonlar uzayı
$\omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2)$	: Karışık B -süreklilik modülü

1. GİRİŞ

1951 yılında H. Bohman toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyona yakınsaması problemini incelemiştir(Bohman, 1951). Sonrasında 1953 yılında P.P. Korovkin bu teoremi genelleştirmiş ve sürekli fonksiyonlar uzayını kullanarak yeni bir teorem ispatlamıştır (Korovkin, 1960). 1957 yılında V.I. Volkov pozitif lineer operatörlerin double dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlamıştır (Volkov, 1957). Daha sonra Korovkin teorisi süreklilik yerine Bögel süreklilik (B -süreklilik) kavramı kullanılarak genelleştirildi ve sürekli fonksiyonlar uzayından daha geniş olan B -sürekli fonksiyonlar uzayı için geçerli olduğu 1986 yılında C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonska tarafından ispatlandı (Badea ve ark., 1986). Daha sonra, sürekli ve her iki değişkene göre 2π - periyodik fonksiyonların uzayından daha geniş olan B -sürekli ve $B-2\pi$ periyodik fonksiyonlar için de geçerli olduğu C. Badea, I. Badea ve C. Cottin tarafından gösterilmiştir (Badea ve ark., 1988). 2001 yılında Dan Bărbosu $\mathbb{R}^n$ uzayının herhangi kompakt alt uzayı üzerinde tanımlı n -indisli pozitif lineer operatör için Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde etmiştir (D. Bărbosu, 2001).

Bu yüksek lisans tezinde ilk olarak double diziler ve pozitif lineer operatörler tanıtılacaktır. Sonrasında Bögel sürekli fonksiyonlar için C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonska tarafından verilen teorem ispatlanacak ve bu teoremi sağlayan bir örnek verilecektir. C. Badea I. Badea ve C. Cottin tarafından verilen B -sürekli ve $B-2\pi$ periyodik fonksiyonlar için teorem ispatlanacak ve bu teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verilecektir. Ayrıca bu iki uzay için ω_{mixed} karışık B -süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık oranı hesaplanacaktır. Son olarak Dan Bărbosu tarafından verilen n -indisli pozitif lineer operatör dizileri için Korovkin tipi teoremi ispatlanacak ve bu teoremi sağlayan bir örnek verilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Double Diziler ve Pringsheim Anlamda Yakınsaklık

Bu bölümde ilk olarak double dizi kavramı tanıtılıp, daha sonra double dizilerde sınırlılık ve yakınsaklık kavramları verilecektir. Ayrıca bu kavramlar ile ilgili bazı teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ (m,n) \rightarrow f(m,n)=x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna reel terimli double dizi denir.

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ double dizisi

$$x = (x_{mn}) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Reel terimli bütün double dizilerin cümlesi Ω ile gösterilip

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{R}\}$$

şeklindedir. Bu cümle $\forall x, y \in \Omega$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_{mn} + \beta y_{mn})$$

işlemi ile bir lineer uzaydır.

Tanım 2.1.2: $x = (x_{mn})$ reel terimli bir double dizi olsun. Tüm $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ için $|x_{mn}| < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı var ise x dizisine sınırlıdır denir (Pringsheim, 1900).

Örnek 2.1.3: Genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2m} & , m = n \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ double dizisi verilsin. Bu durumda $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $|x_{mn}| \leq \frac{1}{2}$ olup (x_{mn}) dizisi sınırlıdır.

Tanım 2.1.4: Bir $x = (x_{mn})$ reel terimli double dizisi verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_{mn} - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise $x = (x_{mn})$ dizisi l sayısına Pringsheim anlamında yakınsak, kısaca P -yakınsak, l değerine de $x = (x_{mn})$ dizisinin Pringsheim limiti, kısaca P -limiti denir ve $P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = l$ şeklinde gösterilir (Pringsheim, 1900).

Örnek 2.1.5: Genel terimi $(x_{mn}) = \left(\frac{1}{m+n} \right)$ olan double dizisi verilsin. Bu durumda

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{m+n} = 0 \text{ olduğu görülebilir.}$$

Biliyoruz ki yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat P -yakınsak double dizilerin sınırlı olması gerekmez. Örneğin genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} n & , m = 1 \\ m & , n = 1 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde $x = (x_{mn})$ double dizisini alalım. (x_{mn}) double dizisi

$$(x_{mn}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ m & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $|x_{mn}| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı bulunamadığından (x_{mn}) dizisi sınırlı değildir. Ayrıca $P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = 0$ olduğu görülebilir.

Teorem 2.1.6: Bir double dizinin Pringsheim limiti tektir (Pringsheim, 1900).

Teorem 2.1.7: $x = (x_{mn}), y = (y_{mn}) \in \Omega$ olmak üzere $P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = a$ ve $P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} y_{mn} = b$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlik gerçekleşir (Pringsheim, 1900).

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} (x_{mn} + y_{mn}) = \left(P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} \right) + \left(P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} y_{mn} \right) = a + b$$

olur.

Teorem 2.1.8: $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = a$ olsun. O halde

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \lambda x_{mn} = \lambda a$$

sağlanır (Pringsheim, 1900).

Teorem 2.1.9: $x = (x_{mn}), y = (y_{mn}) \in \Omega$ olmak üzere $P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = a$ ve $P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} y_{mn} = b$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlik gerçekleşir (Pringsheim, 1900).

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} (x_{mn} \cdot y_{mn}) = \left(P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} \right) \cdot \left(P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} y_{mn} \right) = a \cdot b$$

Teorem 2.1.10: $x = (x_{mn}) \in \Omega$ ve $P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = a, a \neq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik gerçekleşir (Pringsheim, 1900).

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_{mn}} \right) = \frac{1}{P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn}} = \frac{1}{a}$$

Teorem 2.1.11: $x = (x_{mn}), y = (y_{mn}) \in \Omega, P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = a, P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} y_{mn} = b$ ve $b \neq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır (Pringsheim, 1900).

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{mn}}{y_{mn}} \right) = \frac{a}{b}$$

Tanım 2.1.12: Bir $x = (x_{mn}) \in \Omega$ verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n, p, q > N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise $x = (x_{mn})$ double dizisine P -Cauchy dizisi denir (Pringsheim, 1900).

Teorem 2.1.13: Bir $(x_{mn}) \in \Omega$ dizisinin P -yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir P -Cauchy dizisi olmasıdır (Pringsheim, 1900).

Tanım 2.1.14: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ double dizisi verilsin. $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ve $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ artan fonksiyonlar olmak üzere

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(m, n) \rightarrow h(m, n) = (i_m, j_n)$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$f \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, n) \rightarrow (f \circ h)(m, n) = x_{i_m j_n}$$

fonksiyonuna (x_{mn}) dizisinin bir alt dizisi denir (Pringsheim, 1900).

Örneğin; $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ double dizisini alalım. O halde $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ve $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

olmak üzere

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(m, n) \rightarrow (2m, 2n)$$

olup

$$f \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, n) \rightarrow x_{2m 2n} = \frac{1}{2m+2n}$$

fonksiyonu $(x_{mn}) = \left(\frac{1}{m+n} \right)$ dizisinin alt dizisi olur.

Teorem 2.1.15: Yakınsak bir double dizinin her alt dizisi de aynı değere yakınsaktır (Pringsheim, 1900).

Tanım 2.1.16: Bir $x = (x_{mn})$ double dizisi verilsin.

(i) $P - \liminf (x_{mn}) = P - \underline{\lim} (x_{mn}) = \sup_{k \geq 1} \left\{ \inf_{m, n \geq k} (x_{mn}) \right\}$ ifadesine (x_{mn}) double dizisinin

alt limiti,

(ii) $P - \limsup (x_{mn}) = P - \overline{\lim} (x_{mn}) = \inf_{k \geq 1} \left\{ \sup_{m, n \geq k} (x_{mn}) \right\}$ ifadesine (x_{mn}) double dizisinin

üst limiti denir. Başka bir deyişle bir dizinin alt dizilerinin limitlerinin en küçüğüne dizinin alt limiti, en büyüğüne de dizinin üst limiti denir (Pringsheim, 1900).

Örnek 2.1.17: Genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} -m & , n = 1 \\ -n & , m = 1 \\ (-1)^m & , m = n > 1 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan double dizisi verilsin. Bu durumda $P - \liminf (x_{mn}) = -1$ ve $P - \limsup (x_{mn}) = 1$ olduğu görülebilir.

2.2. Pozitif Lineer Operatörler

Bu bölümde öncelikle pozitif lineer operatörler tanıtılacak ve Korovkin teoremleri verilecektir.

2.2.1. Pozitif Lineer Operatörler

Tanım 2.2.1.1: X ve Y iki reel değerli fonksiyonların uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu takdirde “ X uzayında bir operatör tanımlanmıştır” denir ve bu durum $g(x) = L(f(t); x)$ şeklinde gösterilir. Burada $L(f(t); x)$ yerine $L(f; x)$ kullanacağız. X uzayına L operatörünün tanım kümesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Ayrıca $R(L) = \{g : g(x) = L(f(t); x), f \in D(L)\} \subset Y$ kümesine de L operatörünün değer kümesi denir.

X uzayı lineer uzay olduğunda lineer operatör tanımını verebiliriz.

Tanım 2.2.1.2: f_1 ve f_2 , X uzayında herhangi iki fonksiyon ve her $x \in X$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için L operatörü;

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyorsa bu taktirde L operatörüne lineer operatör denir. Tanımdan da görüleceği üzere $L(0; x) = 0$ olur.

Şimdi de lineer operatörler kümesi içinde çok önemli bir sınıf olan pozitif lineer operatör tanımını verelim.

Tanım 2.2.1.3: $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g(x) : g(x) \geq 0\}$ olsun. X uzayında tanımlanmış bir L operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif bir fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne pozitif lineer operatör denir.

L pozitif lineer operatörü için $LX^+ \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur. O halde aşıkardır ki her x için $f(x) \leq g(x)$ olursa $L(f; x) \leq L(g; x)$ olur. Yani pozitif lineer operatörler monotondur.

Örneğin; 1912 yılında S. Bernstein $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom tanımlanmıştır (Bernstein, 1912). Bernstein polinomu olarak bilinen bu polinom $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklindedir ve $x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $B_n(f; x)$ pozitif lineer operatördür.

D , $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi olmak üzere $C(D)$ ile D üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonlar uzayını ve $B(D)$ ile D üzerinde tüm sınırlı fonksiyonların uzayını gösterelim. $C(D)$ ve $B(D)$ uzayları $\|f\|_B := \sup_{x \in D} |f(x)|$ normu ile birer Banach uzayıdır. Ayrıca bu norma göre yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır. Burada “ $\Rightarrow$ ” simgesi ile düzgün yakınsaklığı göstereceğiz.

2.2.2. Korovkin Teoremleri

1951 yılında H.Bohman, toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

H. Bohman göstermiştir ki $x \in [0,1], 0 \leq a_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(a_{k,n}) P_{k,n}(x) \quad , \quad P_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif lineer operatör dizisinin $n \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığı üzerinde $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) $L_n(1; x) \Rightarrow 1$

(ii) $L_n(t; x) \Rightarrow x$

(iii) $L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$

olduğunu göstermiştir. H. Bohman' ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsızdır.

1953 yılında P.P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve Bohman' ın şartlarının genel halde de gerçekleştiğini göstermiştir.

Teorem 2.2.2.1: $(L_n), L_n : C[a,b] \rightarrow B[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_B = 0$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t; x) - x\|_B = 0$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2; x) - x^2\|_B = 0$

şartlarını sağlıyorsa o halde tüm reel ekseninde sınırlı herhangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f(x)\|_B = 0 \quad , \quad a \leq x \leq b$$

olur (Korovkin ,1960).

Örnek 2.2.2.2: $S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$ şeklinde tanımlı Szász operatörünün teoremin şartlarını sağladığını gösterelim.

$x \in [0, A]$, $(A \in \mathbb{R}^+)$, $f \in C[0, A]$ olsun.

$$(i) \quad S_n(1; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} e^{nx} = 1$$

$$(ii) \quad S_n(t; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} = x e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= x e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = x e^{-nx} e^{nx} = x$$

$$(iii) \quad S_n(t^2; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{k-1}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} + \frac{1}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} \right\}$$

$$= e^{-nx} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n^{k-2} x^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} \right\} = e^{-nx} \left\{ x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \right\} = x^2 + \frac{x}{n}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(1; x) - 1\| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(t; x) - x\| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(t^2; x) - x^2\| = 0$$

koşulları sağlandığından $\forall f \in C[0, A]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f; x) - f(x)\| = 0$$

olur.

Volkov 1957 yılında pozitif lineer operatörlerin double dizisi için Korovkin teoremi ispatlamıştır.

$e_0(x, y) = 1$, $e_1(x, y) = x$, $e_2(x, y) = y$, $e_3(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonları ve $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt alt kümesi verilsin.

Teorem 2.2.2.3: $L_{mn} : C(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör olsun. Eğer

$$(i) \quad P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)\|_B = 0$$

$$(ii) \quad P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|L_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)\|_B = 0$$

$$(iii) \quad P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|L_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)\|_B = 0$$

$$(iv) \quad P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|L_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)\|_B = 0$$

şartlarını sağlıyorsa $\mathbb{R}^2$ 'de sınırlı herhangi bir $f \in C(D)$ fonksiyonu için

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|L_{mn}(f; x, y) - f(x, y)\|_B = 0$$

olur (Volkov, 1957).

Örnek 2.2.2.4: $A, B > 0$ olmak üzere $D = [0, A] \times [0, B] \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı $f \in C(D)$ için double Szász operatörü

$$S_{mn}(f; x, y) = e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

şeklindedir. Bu operatörün teoremin şartlarını sağlar.

$$(i) \quad S_{mn}(e_0; x, y) = e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_0\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!}$$

$$= e^{-mx} e^{mx} e^{-ny} e^{ny}$$

$$= 1$$

$$(ii) \quad S_{mn}(e_1; x, y) = e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_1\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{(mx)^k}{k!} e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!}$$

$$= e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{(mx)^k}{k!} e^{-ny} e^{ny}$$

$$= e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{(mx)^k}{k!}$$

$$= e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{k-1} x^k}{(k-1)!}$$

$$= x e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(mx)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= x e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{(k)!}$$

$$= x e^{-mx} e^{mx}$$

$$= x$$

$$(iv) \quad S_{mn}(e_2; x, y) = e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_2\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n} \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n} \frac{(ny)^j}{j!}$$

$$= e^{-mx} e^{mx} e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n} \frac{(ny)^j}{j!}$$

$$= e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^{j-1} y^j}{(j-1)!}$$

$$= y e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ny)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!}$$

$$= y e^{-ny} e^{ny}$$

$$= y$$

$$\text{(iv)} \quad S_{mn}(e_3; x, y) = e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_3 \left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n} \right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\frac{k}{m} \right)^2 + \left(\frac{j}{n} \right)^2 \right] \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^2}{m^2} \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!} + e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{m^2} \frac{(mx)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!} + e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} \frac{(ny)^j}{j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} e^{ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{m^2} \frac{(mx)^k}{k!} + e^{-mx} e^{-ny} e^{mx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} \frac{(ny)^j}{j!}$$

$$= e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{m^{k-1} x^k}{(k-1)!} + e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{n} \frac{n^{j-1} y^j}{(j-1)!}$$

$$= e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{m} \frac{m^{k-1} x^k}{(k-1)!} + e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{m^{k-1} x^k}{(k-1)!}$$

$$+ e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{n} \frac{n^{j-1} y^j}{(j-1)!} + e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{n^{j-1} y^j}{(j-1)!}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 e^{-mx} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-2} x^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{x}{m} e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&\quad + y^2 e^{-ny} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^{j-2} y^{j-2}}{(j-2)!} + \frac{y}{n} e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^{j-1} y^{j-1}}{(j-1)!} \\
&= x^2 e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} + \frac{x}{m} e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} + y^2 e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!} + \frac{y}{n} e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!} \\
&= x^2 e^{-mx} e^{mx} + \frac{x}{m} e^{-mx} e^{mx} + y^2 e^{-ny} e^{ny} + \frac{y}{n} e^{-ny} e^{ny} \\
&= x^2 + y^2 + \frac{x}{m} + \frac{y}{n}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$(i) \quad P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)\|_B = 0$$

$$(ii) \quad P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)\|_B = 0$$

$$(iii) \quad P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)\|_B = 0$$

$$(iv) \quad P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)\|_B = 0$$

koşulları gerçekleşir. Bu durumda herhangi bir $f \in C(D)$ fonksiyonu için

$$P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)\|_B = 0 \text{ olur.}$$

2.3. Bölge Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1: $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ üzerinde tanımlı reel değerli bir f fonksiyonu verilsin.

$\forall (x, y) \in I^2$ için $\Delta_{s,t} f(x, y) = f(x, y) - f(x, t) - f(s, y) + f(s, t)$ olmak üzere f fonksiyonu

$$\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ t \rightarrow y}} \Delta_{s,t} f(x, y) = 0$$

şartını sağlıyorsa bu f fonksiyonuna Bögel süreklili (kısaca B -süreklili) fonksiyon denir (Bögel, 1934,1935,1962).

I^2 üzerinde tanımlı reel değerli tüm B -süreklili fonksiyonların uzayı $C_b(I^2)$ ile gösterilir. Sürekli her fonksiyon B -süreklilidir ancak tersine B -süreklili bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez. Dahası $\Delta_{s,t} f(x,y)=0$ olan ve $f(x,y)=g(x)+h(y)$ biçiminde yazılabilen sınırsız B -süreklili fonksiyon vardır.

Örnek 2.3.2: $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , (x,y) = (0,0) \\ \frac{x-y}{x+y} & , (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlansın. Buradan $\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ t \rightarrow y}} \Delta_{s,t} f(x,y) = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla f fonksiyonu B -süreklili bir fonksiyondur. Ayrıca f fonksiyonu sürekli değildir.

Örnek 2.3.3: $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \frac{1}{x} & , x \neq 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 & , y = 0 \\ \frac{1}{y} & , y \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. f fonksiyonu sınırsız bir fonksiyon olup $\Delta_{s,t} f(x,y) = 0$ olduğu görülür. Ayrıca f fonksiyonu sürekli değildir.

2.4. Bögel Sürekli $B-2\pi$ Periyodik Fonksiyonlar

Tanım 2.4.1: $D \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli bir f fonksiyonu verilsin. $\forall (x,y), (s,t) \in D$ için f fonksiyonu $\Delta_{s,t} f(x+2\pi, y+2\pi) = \Delta_{s,t} f(x,y)$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $B-2\pi$ periyodik fonksiyon denir (Bögel, 1934, 1935, 1962).

$B_{2\pi}$ ile $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm B -süreklili, $B-2\pi$ periyodik fonksiyonların uzayını, $C_{2\pi, 2\pi}$ ile reel değerli tüm iki değişkenli sürekli ve her iki

değişkene göre 2π -periyodik fonksiyonların uzayını gösterelim. Bu durumda $C_{2\pi,2\pi} \subset B_{2\pi}$ olur. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.4.2: Bir $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $k_x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x \in [2k_x\pi, 2(k_x+1)\pi)$ için $f(x, y) = (x - 2k_x\pi)\sin y + 2k_x\pi$ şeklinde tanımlansın.

$\forall (x, y), (s, t) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x, t) &= [(x - 2k_x\pi)\sin y + 2k_x\pi] - [(x - 2k_x\pi)\sin t + 2k_x\pi] \\ &= (x - 2k_x\pi)(\sin y - \sin t) \\ &= (x + 2\pi - 2(k_x + 1)\pi)(\sin y - \sin t) \\ &= f(x + 2\pi, y) - f(x + 2\pi, t) \end{aligned}$$

olup f ilk değişkene göre 2π periyodik olur. f fonksiyonu ikinci değişkene göre de 2π periyodik olduğundan bu f fonksiyonu 2π periyodik fonksiyon olur. Dolayısıyla

$$\Delta_{s,t} f(x, y) = \Delta_{s,t} f(x + 2\pi, y + 2\pi)$$

olup f B - 2π periyodik fonksiyon olur.

$$\begin{aligned} |\Delta_{s,t} f(x, y)| &= |f(x, y) - f(x, t) - f(s, y) + f(s, t)| \\ &= |[(x - 2k_x\pi)\sin y + 2k_x\pi] - [(x - 2k_x\pi)\sin t + 2k_x\pi] \\ &\quad - [(s - 2k_s\pi)\sin y + 2k_s\pi] + [(s - 2k_s\pi)\sin t + 2k_s\pi]| \\ &= |x - s + 2(k_x - k_s)\pi| |\sin y - \sin t| \end{aligned}$$

olup

$$\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ t \rightarrow y}} \Delta_{s,t} f(x, y) = 0$$

elde edilir. Buradan f B -süreklî fonksiyon olur. Böylece $f \in B_{2\pi}$ olduğu görülür.

Ancak $f\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) - f(-\pi, 0) = -\pi$ ve $f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) - f(\pi, 0) = \pi$ olduğundan f fonksiyonu birinci değişkene göre 2π periyodik değildir. Dolayısıyla $f \notin C_{2\pi, 2\pi}$ olur.

Lemma 2.4.3: Eğer f fonksiyonu B - 2π periyodik fonksiyon ise $\forall (x, y), (s, t) \in \mathbb{R}^2$, $h, k, m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\Delta_{s+2h\pi, t+2k\pi} f(x+2m\pi, y+2n\pi) = \Delta_{s,t} f(x, y)$$

olur.

Lemma 2.4.4: Bir f fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu B - 2π periyodik fonksiyon ise $\forall (x, y), (s, t) \in \mathbb{R}^2$ için $\exists M > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq M$$

olur.

Her $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu bir sınırlı, B - 2π periyodik fonksiyon ve bir B -sabitinin toplamı şeklinde yazılabilir.

Sabit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x, y) = \Delta_{x_0, y_0} f(x, y) + f(x_0, y) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$ yazılabilir. Lemma 2.4.3 ve Lemma 2.4.4' e göre $\Delta_{x_0, y_0} f$ fonksiyonu 2π periyodik ve sınırlıdır. Ayrıca $\Delta_{s,t}(\Delta_{x_0, y_0} f)(x, y) = \Delta_{s,t} f(x, y)$ olup $\Delta_{x_0, y_0} f$ fonksiyonu B -sürekli.

Her $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu 2π periyodik, sürekli fonksiyon ve bir B -sabitinin toplamı şeklinde yazılamaz.

Lemma 2.4.5: Bir $f \in B_{2\pi}$ düzgün B -sürekli fonksiyonu verilsin. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $\forall (x, y), (s, t) \in \mathbb{R}^2$ için $|x-s| \leq \delta(\varepsilon), |y-t| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq \varepsilon$$

olur.

2.5. n -Değişkenli Bölge Sürekli Fonksiyonlar

2001 yılında Dan Bărbosu n -değişkenli fonksiyonlar için B -süreklilik kavramını vermiştir.

Kabul edelim ki $X \subset \mathbb{R}$ kompakt bir alt küme, $D = X^n$ ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. n -değişkenli karışık fark $\Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(s_1, s_2, \dots, s_n) - \sum_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_{i-1}, s_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n f(x_1, \dots, x_{i-1}, s_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, s_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - \dots \\ &\quad + (-1)^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5.1: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ için

$$\lim_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)} \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

şartını sağlıyorsa bu f fonksiyonu B -süreklidir denir (Bărbosu, 2001).

$C_b(D)$ ile D üzerinde tanımlı tüm reel değerli B -sürekli fonksiyonların uzayı, $C(D)$ ile D üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere $C(D) \subset C_b(D)$ olur. Yani sürekli her fonksiyon B -süreklidir ancak tersi doğru değildir. Tersinin doğru olmadığı önceki bölümde $n = 2$ için gösterildi.

3. MATERYAL ve YÖNTEMLER

Bulgular bölümünün ilk kısmında Bögel sürekli fonksiyonlar için Korovkin tipi teorem ispatlandı. Teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verildi ve ayrıca karışık B -süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık oranı hesaplandı.

İkinci kısımda Bögel sürekli ve $B-2\pi$ periyodik fonksiyonlar uzayı için Korovkin tipi teorem ispatlandı. Teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verildi. Yine bu teorem için yakınsaklık oranı hesaplandı.

Bulgular bölümünün son kısmında ise n -indisli Bögel sürekli fonksiyonlar uzayı için Korovkin teoremi ispatlandı. Teoremin şartları sağlayan bir örnek verildi.

4. BULGULAR

4.1. Bölge Sürekli Fonksiyonlar İçin Korovkin Tipi Teorem

1986 yılında C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonska, sürekli fonksiyonların uzayını kapsayan B -sürekli fonksiyonların uzayını kullanarak Korovkin tipi teorem ispatladı.

Şimdi bu teoremi vermeden önce bize gerekli olan C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonska tarafından ispatlanan bir Lemma verelim.

Lemma 4.1.1: Bir $f \in C_b(I^2)$ fonksiyonu verilsin. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $A(\varepsilon) = A(\varepsilon, f)$ ve $B(\varepsilon) = B(\varepsilon, f)$ pozitif sayılar olmak üzere her $(x, y), (s, t) \in I^2$ için

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon)(x-s)^2 + B(\varepsilon)(y-t)^2$$

olur (Badea ve ark., 1986).

İspat: : f fonksiyonu B -sürekli olduğundan aynı zamanda düzgün B -süreklidir. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I^2$ olmak üzere $|x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon)$ ve $|y_1 - y_2| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda

$$|\Delta_{x_2, y_2} f(x_1, y_1)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$\forall \varepsilon > 0$ ve $(x, y), (s, t) \in I^2$ için aşağıdaki dört durum incelensin.

(i) $|x-s| \leq \delta(\varepsilon)$ ve $|y-t| \leq \delta(\varepsilon)$

(ii) $|x-s| \leq \delta(\varepsilon)$ ve $|y-t| \geq \delta(\varepsilon)$

(iii) $|x-s| \geq \delta(\varepsilon)$ ve $|y-t| \leq \delta(\varepsilon)$

(iv) $|x-s| \geq \delta(\varepsilon)$ ve $|y-t| \geq \delta(\varepsilon)$

(i) durumunda (3.1) ifadesinden

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.2)$$

elde edilir. Ayrıca f B -sürekli olduğundan aynı zamanda B -sınırlıdır. O halde $\forall (x, y) \in I^2$ için

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq M \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. (ii) durumunun ikinci eşitsizliğinde $|y - t| \geq \delta(\varepsilon)$ olduğundan $(y - t)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} > 1$ elde edilir. (3.3) ifadesi düzenlenirse

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq M (y - t)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} \quad (3.4)$$

elde edilir. Aynı şekilde (iii) durumunun ilk eşitsizliğinde $|x - s| \geq \delta(\varepsilon)$ olduğundan $(x - s)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} > 1$ elde edilir. (3.3) ifadesi düzenlenirse

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq M (x - s)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} \quad (3.5)$$

elde edilir. (iv) eşitsizlikleri ve (3.3) ifadesinden

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq M (x - s)^2 (y - t)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-4} \quad (3.6)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (3.2), (3.4), (3.5) ve (3.6) eşitsizliklerinden

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + M (x - s)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} + M (y - t)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} + M (x - s)^2 (y - t)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-4} \quad (3.7)$$

elde edilir. Ayrıca $y, t \in [0, 1]$ olduğundan $(y - t)^2 \leq 1$ olup (3.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |\Delta_{s,t} f(x, y)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + M (x - s)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} + M (y - t)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} + M (x - s)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-4} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + M [\delta(\varepsilon)]^{-2} \left\{ 1 + [\delta(\varepsilon)]^{-2} \right\} (x - s)^2 + M [\delta(\varepsilon)]^{-2} (y - t)^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. O halde $A(\varepsilon) = M[\delta(\varepsilon)]^{-2} \left\{ 1 + [\delta(\varepsilon)]^{-2} \right\}$ ve $B(\varepsilon) = M[\delta(\varepsilon)]^{-2}$ seçimleri ile ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}
e_0(x, y) &= 1, & e_1(x, y) &= x, & e_2(x, y) &= y, & e_3(x, y) &= x^2 + y^2 & \text{ve} \\
F_{x,y}(s, t) &= f(s, y) + f(x, t) - f(s, t) \quad \text{olsun. Ayrıca tüm } (s, t), (x, y) \in I^2 \text{ için} \\
\Delta_{x,y} F_{x,y}(u, v) &= F_{x,y}(s, t) - F_{x,y}(x, t) - F_{x,y}(s, y) + F_{x,y}(x, y) \\
&= f(s, y) + f(x, t) - f(s, t) - f(x, y) - f(x, t) + f(x, t) \\
&\quad - f(s, y) - f(x, y) + f(s, y) + f(x, y) + f(x, y) - f(x, y) \\
&= -f(s, t) + f(x, t) + f(s, y) - f(x, y) \\
&= -\Delta_{x,y} f(s, t)
\end{aligned}$$

olup sabit bir $(x, y) \in I^2$ için f B -sürekliliğinden $F_{x,y}$ fonksiyonunun da B -sürekliliği olduğu görülür.

Teorem 4.1.2: $L_{mn} : C_b(I^2) \rightarrow B(I^2)$ pozitif lineer operatör olsun. Tüm $(x, y) \in I^2$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

- (i) $L_{mn}(e_0; x, y) = e_0(x, y)$
- (ii) $L_{mn}(e_1; x, y) = e_1(x, y) + u_{mn}(x, y)$
- (iii) $L_{mn}(e_2; x, y) = e_2(x, y) + v_{mn}(x, y)$
- (iv) $L_{mn}(e_3; x, y) = e_3(x, y) + w_{mn}(x, y)$

koşulları sağlansın. Eğer

$$P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|u_{mn}(x, y)\|_B = 0, \quad P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|v_{mn}(x, y)\|_B = 0, \quad P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|w_{mn}(x, y)\|_B = 0$$

ise herhangi bir $f \in C_b(I^2)$ fonksiyonu için

$$P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|L_{mn}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)\|_B = 0$$

olur (Badea ve ark., 1986).

İspat: $f \in C_b(I^2)$ keyfi olarak seçilsin, $(x, y) \in I^2$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\begin{aligned} f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y) &= f(x, y) - L_{mn}(f(s, y) + f(x, t) - f(s, t); x, y) \\ &= f(x, y)L_{mn}(1; x, y) - L_{mn}(f(s, y) + f(x, t) - f(s, t); x, y) \\ &= L_{mn}(f(x, y); x, y) - L_{mn}(f(s, y) + f(x, t) - f(s, t); x, y) \\ &= L_{mn}(f(x, y) - f(s, y) - f(x, t) + f(s, t); x, y) \\ &= L_{mn}(\Delta_{x,y} f(s, t); x, y) \end{aligned} \quad (3.9)$$

olur. Dahası her $g \in C_b(I^2)$ fonksiyonu için

$$|L_{mn}(g; x, y)| = \max\{L_{mn}(g; x, y), L_{mn}(-g; x, y)\} \quad (3.10)$$

olur. L_{mn} operatörünün monotonluğu ve $C(\varepsilon) = \max\{A(\varepsilon), B(\varepsilon)\}$ için Lemma 3.1.1' den

$$\begin{aligned} |f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y)| &= |L_{mn}(\Delta_{x,y} f(s, t); x, y)| \\ &\leq L_{mn}(|\Delta_{x,y} f(s, t)|; x, y) \\ &\leq L_{mn}\left(\frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon)(x-s)^2 + C(\varepsilon)(y-t)^2; x, y\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{3} L_{mn}(1; x, y) + C(\varepsilon) L_{mn}(x^2 - 2xs + s^2; x, y) \\ &\quad + C(\varepsilon) L_{mn}(y^2 - 2yt + t^2; x, y) \\ &= \frac{\varepsilon}{3} L_{mn}(1; x, y) + C(\varepsilon) [x^2 L_{mn}(1; x, y) - 2x L_{mn}(s; x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +L_{mn}(s^2; x, y) + y^2 L_{mn}(1; x, y) - 2yL_{mn}(t; x, y) + L_{mn}(t^2; x, y) \Big] \\
& = \frac{\varepsilon}{3} L_{mn}(e_0; x, y) + C(\varepsilon) \Big[(x^2 + y^2) L_{mn}(e_0; x, y) - 2xL_{mn}(e_1; x, y) \\
& \quad - 2yL_{mn}(e_2; x, y) + L_{mn}(e_3; x, y) \Big] \tag{3.11}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (i),(ii), (iii), (iv) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\left| f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y) \right| & \leq \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \Big[x^2 + y^2 - 2x(x + u_{mn}(x, y)) \\
& \quad - 2y(y + v_{mn}(x, y)) + x^2 + y^2 + w_{mn}(x, y) \Big] \\
& = \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \Big[w_{mn}(x, y) - 2x \cdot u_{mn}(x, y) - 2y \cdot v_{mn}(x, y) \Big] \tag{3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left| \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \Big[w_{mn}(x, y) - 2x \cdot u_{mn}(x, y) - 2y \cdot v_{mn}(x, y) \Big] \right| \\
& \leq \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \Big[|w_{mn}(x, y)| + 2|x| |u_{mn}(x, y)| + 2|y| |v_{mn}(x, y)| \Big] \tag{3.13}
\end{aligned}$$

elde edilir. $x, y \in I = [0, 1]$ olduğundan $|x| \leq 1$ ve $|y| \leq 1$ olup (3.14) ifadesi düzenlenirse

$$\left| f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \Big[|w_{mn}(x, y)| + 2|u_{mn}(x, y)| + 2|v_{mn}(x, y)| \Big] \tag{3.14}$$

olur. I^2 üzerinde supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{x,y \in I^2} \left| f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y) \right| & \leq \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \Big[\sup_{x,y \in I^2} |w_{mn}(x, y)| + 2 \sup_{x,y \in I^2} |u_{mn}(x, y)| \\
& \quad + 2 \sup_{x,y \in I^2} |v_{mn}(x, y)| \Big]
\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\left\| f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y) \right\|_B \leq \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \Big[\|w_{mn}(x, y)\| + 2\|u_{mn}(x, y)\| + 2\|v_{mn}(x, y)\| \Big]$$

olup $P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|L_{mn}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)\|_B = 0$ elde edilip ispat tamamlanır.

Not 4.1.3: Eğer Teorem 4.1.2 ' deki (i) şartı sağlanmaz ise (3.9) eşitsizliği gerçekleşmez. Bunun için eğer (i) şartı yerine

$$L_{mn}(e_0; x, y) = e_0(x, y) + \alpha_{mn}(x, y)$$

şartı alınırsa

$$|f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y)| \leq |f(x, y)| \alpha_{mn}(x, y) + \frac{\varepsilon}{3} [1 + \alpha_{mn}(x, y)] + C(\varepsilon) [w_{mn}(x, y)$$

$$-2x \cdot u_{mn}(x, y) - 2y \cdot v_{mn}(x, y) + (x^2 + y^2) \alpha_{mn}(x, y)]$$

eşitsizliği gerçekleşir. Açıkça görülür ki eğer $\alpha_{mn}(x, y) = 0$ ise bu eşitsizlik (3.12) eşitsizliğine dönüşür. Ancak daha önceden bahsedildiği gibi sınırsız B -sürekli fonksiyonlar da vardır. $|f(x, y)| \alpha_{mn}(x, y)$ terimi gerçekten bunun kritik bir örneği olup yukarıdaki eşitsizliklerden eğer $\alpha_{mn}(x, y)$ her $m, n \rightarrow \infty$ için 0' a düzgün yakınsıyorsa bütün $(x, y) \in I^2$ için yakınsamanın noktasal yakınsaklık olduğu görülür.

Örnek 4.1.4: $0 \leq x, y \leq 1$ olmak üzere double Bernstein operatörü

$$B_{mn}(f; x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} f\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j}$$

şeklindedir. Bu operatör için teoremin şartlarının sağlar.

$$(i) B_{mn}(e_0; x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} e_0\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= (x + (1-x))^m (y + (1-y))^n = 1$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad B_{mn}(e_1; x, y) &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} e_1 \left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n} \right) x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j} \\
&= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} \frac{k}{m} x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j} \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!k!} \frac{k}{m} x^k (1-x)^{m-k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y^j (1-y)^{n-j} \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!k!} x^{k+1} (1-x)^{m-1-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!k!} x^k (1-x)^{m-1-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} x^k (1-x)^{m-1-k} = x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad B_{mn}(e_2; x, y) &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} e_2 \left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n} \right) x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j} \\
&= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} \frac{j}{n} x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{j} \frac{j}{n} x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{j}{n} y^j (1-y)^{n-j} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{j}{n} y^j (1-y)^{n-j} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} y^j (1-y)^{n-j}
\end{aligned}$$

$$= y \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)! j!} y^j (1-y)^{n-1-j}$$

$$= y \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} y^j (1-y)^{n-1-j}$$

$$= y(y + (1-y))^{n-1} = y$$

$$\textbf{(iv)} \quad B_{mn}(e_3; x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} e_3 \left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n} \right) x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} \left[\left(\frac{k}{m} \right)^2 + \left(\frac{j}{n} \right)^2 \right] x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} \left(\frac{k}{m} \right)^2 x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$+ \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n} \right)^2 x^k (1-x)^{m-k} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{k^2}{m^2} x^k (1-x)^{m-k} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$+ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{j^2}{n^2} y^j (1-y)^{n-j} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)! k!} \frac{k^2}{m^2} x^k (1-x)^{m-k} + \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)! j!} \frac{j^2}{n^2} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!} \frac{k}{m} x^k (1-x)^{m-k} + \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{j}{n} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!} \frac{k-1}{m} x^k (1-x)^{m-k} + \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!} \frac{1}{m} x^k (1-x)^{m-k}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{j-1}{n} y^j (1-y)^{n-j} + \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{1}{n} y^j (1-y)^{n-j} \\
& = \frac{m-1}{m} \sum_{k=2}^m \frac{(m-2)!}{(m-k)!(k-2)!} x^k (1-x)^{m-k} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{m-k} \\
& + \frac{n-1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-j)!(j-2)!} y^j (1-y)^{n-j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} y^j (1-y)^{n-j} \\
& = \frac{m-1}{m} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(m-2)!}{(m-2-k)!k!} x^{k+2} (1-x)^{m-2-k} + \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!k!} x^{k+1} (1-x)^{m-1-k} \\
& + \frac{n-1}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-j)!j!} y^{j+2} (1-y)^{n-2-j} + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} y^{j+1} (1-y)^{n-1-j} \\
& = x^2 \frac{m-2}{2} \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-2}{k} x^k (1-x)^{m-2-k} + x \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} x^k (1-x)^{m-1-k} \\
& + y^2 \frac{n-1}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} y^j (1-y)^{n-2-j} + y \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} y^j (1-y)^{n-1-j} \\
& = x^2 + y^2 + \frac{x-x^2}{m} + \frac{y-y^2}{n}
\end{aligned}$$

olur. Buradan $u_{mn}(x, y) = 0$, $v_{mn}(x, y) = 0$ ve $w_{mn}(x, y) = \frac{x-x^2}{m} + \frac{y-y^2}{n}$ olup

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_{mn}(x, y)\|_B = 0, \quad P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|v_{mn}(x, y)\|_B = 0, \quad P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|w_{mn}(x, y)\|_B = 0$$

olduğundan herhangi bir $f \in C_b(I^2)$ fonksiyonu için

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|B_{mn}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)\|_B = 0$$

gerçeklenir.

1988 yılında C. Badea, I. Badea, C. Cottin ve H.H. Gonksa $L_{mn} : C_b(I^2) \rightarrow B(I^2)$ pozitif lineer operatörleri için karışık B -süreklilik modülünü kullanarak yakınsaklık oranını hesaplamıştır.

$f \in C_b(I^2)$ için karışık B -süreklilik modülü $\delta_1, \delta_2 > 0$ olmak üzere

$$\omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2) = \sup \left\{ \left| \Delta_{s,t} f(x, y) \right| : |s - x| \leq \delta_1 \text{ ve } |t - y| \leq \delta_2 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

$\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0$ için $\omega_{mixed}(f, \delta_1, \delta_2) \rightarrow 0$ olması için gerek ve yeter şart f B -süreklilik fonksiyondur. Ayrıca $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ için

$$\omega_{mixed}(f, \lambda_1 \delta_1, \lambda_2 \delta_2) \leq (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \omega_{mixed}(f, \delta_1, \delta_2)$$

olur.

Teorem 4.1.5: $L_{mn} : C_b(I^2) \rightarrow B(I^2)$ pozitif lineer operatör olsun. $\forall (x, y) \in I^2$ ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left| f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y) \right| &\leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{L_{mn}((x-s)^2; x, y)} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{L_{mn}((y-t)^2; x, y)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{L_{mn}((x-s)^2; x, y)} \sqrt{L_{mn}((y-t)^2; x, y)} \right\} \omega_{mixed}(f, \delta_1, \delta_2) \end{aligned}$$

olur (Badea ve ark., 1988).

İspat: $f \in C_b(I^2)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{s,t} f(x, y) \right| &\leq \sup_{\substack{|x-s| \leq \delta_1 \\ |y-t| \leq \delta_2}} \left| \Delta_{s,t} f(x, y) \right| \\ &\leq \omega_{mixed}(f; |x-s|, |y-t|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \omega_{mixed} \left(f; \frac{|x-s|}{\delta_1} \delta_1, \frac{|y-t|}{\delta_2} \delta_2 \right) \\
&\leq \left(1 + \frac{|x-s|}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{|y-t|}{\delta_2} \right) \omega_{mixed} (f; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\left| f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y) \right| &\leq \left| L_{mn}(\Delta_{s,t} f(x, y); x, y) \right| \\
&\leq L_{mn}(|\Delta_{s,t} f(x, y)|; x, y) \\
&\leq L_{mn} \left(\left(1 + \frac{|x-s|}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{|y-t|}{\delta_2} \right) \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2); x, y \right) \\
&\leq L_{mn} \left(1 + \frac{|x-s|}{\delta_1} + \frac{|y-t|}{\delta_2} + \frac{|x-s||y-t|}{\delta_1 \delta_2}; x, y \right) \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2) \\
&\leq \left\{ L_{mn}(1; x, y) + \frac{1}{\delta_1} L_{mn}(|x-s|; x, y) + \frac{1}{\delta_2} L_{mn}(|y-t|; x, y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} L_{mn}(|x-s||y-t|; x, y) \right\} \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
\left| f(x, y) - L_{mn}(F_{x,y}; x, y) \right| &\leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{L_{mn}((x-s)^2; x, y)} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{L_{mn}((y-t)^2; x, y)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{L_{mn}((x-s)^2; x, y)} \sqrt{L_{mn}((y-t)^2; x, y)} \right\} \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Bölge Sürekli $B-2\pi$ Periyodik Fonksiyonlar İçin Korovkin Tipi Teorem

1988 yılında C. Badea, I. Badea ve C. Cottin $B-2\pi$ periyodik ve B -süreklili fonksiyonlar için Korovkin tipi teorem ispatladılar. Önce teoremin ispatı için bize gerekli olan bir lemma verelim.

Lemma 4.2.1: Bir $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu verilsin. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $A(\varepsilon) = A(\varepsilon, f) > 0$ ve $B(\varepsilon) = B(\varepsilon, f) > 0$ olmak üzere $\forall (x, y), (s, t) \in \mathbb{R}^2$ için

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon) \sin^2 \frac{x-s}{2} + B(\varepsilon) \sin^2 \frac{y-t}{2}$$

olur (Badea ve ark., 1988).

İspat: $\forall \varepsilon > 0$, f düzgün B -süreklili fonksiyon olsun. Lemma 2.4.5' ten $\exists \delta(\varepsilon) \in]0, \pi]$ sayısı vardır öyle ki $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $|x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon)$ ve $|y_1 - y_2| \leq \delta(\varepsilon)$ olmak üzere

$$|\Delta_{x_2, y_2} f(x_1, y_1)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2)$$

olur.

$\forall \varepsilon > 0$, $(x, y), (s, t) \in \mathbb{R}^2$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $(x', y') = (x + 2k\pi, y + 2l\pi)$ olmak üzere aşağıdaki dört durum incelensin:

(i) $|x' - s| \leq \delta(\varepsilon), |y' - t| \leq \delta(\varepsilon)$

(ii) $|x' - s| > \delta(\varepsilon), |y' - t| \leq \delta(\varepsilon)$

(iii) $|x' - s| \leq \delta(\varepsilon), |y' - t| > \delta(\varepsilon)$

(iv) $|x' - s| > \delta(\varepsilon), |y' - t| > \delta(\varepsilon)$

(i) durumunda (4.2) ifadesinden

$$|\Delta_{s,t} f(x', y')| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.3)$$

elde edilir. Ayrıca f fonksiyonu düzgün B -sürekli olduğundan aynı zamanda B -sınırlıdır. O halde $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\left| \Delta_{s,t} f(x', y') \right| \leq M \quad (4.4)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. (ii) durumunda $|x' - s| > \delta(\varepsilon)$ olduğundan

$$\frac{\sin^2 \frac{x' - s}{2}}{\sin^2 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} \geq 1 \text{ elde edilir. (4.3) ifadesi düzenlenirse}$$

$$\left| \Delta_{s,t} f(x', y') \right| \leq \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} \sin^2 \frac{x' - s}{2} \quad (4.5)$$

elde edilir. Aynı şekilde (iii) ve (iv) den

$$\left| \Delta_{s,t} f(x', y') \right| \leq \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} \sin^2 \frac{y' - t}{2} \quad (4.6)$$

$$\left| \Delta_{s,t} f(x', y') \right| \leq \frac{M}{\sin^4 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} \sin^2 \frac{x' - s}{2} \sin^2 \frac{y' - t}{2} \quad (4.7)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (4.2),(4.4),(4.5),(4.6) eşitsizliklerinden

$$\left| \Delta_{s,t} f(x', y') \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \left[\frac{M}{\sin^2 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} + \frac{M}{\sin^4 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} \right] \sin^2 \frac{x' - s}{2} + \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} \sin^2 \frac{y' - t}{2} \quad (4.8)$$

olur. Lemma 2.4.3' ten

$$\left| \Delta_{s,t} f(x', y') \right| = \left| \Delta_{s,t} f(x + 2k\pi, y + 2l\pi) \right| = \left| \Delta_{s,t} f(x, y) \right|$$

olduğundan

$$|\Delta_{s,t} f(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \left[\frac{M}{\sin^2 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} + \frac{M}{\sin^4 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} \right] \sin^2 \frac{x' - s}{2} + \frac{M}{\sin^2 \frac{\delta(\varepsilon)}{2}} \sin^2 \frac{y' - t}{2}$$

elde edilir.

$e(s, t) = 1$, $\phi_1(s, t) = \sin s$, $\phi_2(s, t) = \sin t$, $\varphi_1(s, t) = \cos s$, $\varphi_2(s, t) = \cos t$ ve $U_{mn} f(x, y) = L_{mn}(f(\cdot, y) + f(x, \cdot) - f(\cdot, \cdot); x, y)$ olsun.

Teorem 4.2.2: $L_{mn} : B_{2\pi} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ pozitif lineer operatör olsun. Tüm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

- (i) $L_{mn}(e(s, t); x, y) = 1$
- (ii) $L_{mn}(\phi_1(s, t); x, y) = \sin x + u_{mn}(x, y)$
- (iii) $L_{mn}(\phi_2(s, t); x, y) = \sin y + v_{mn}(x, y)$
- (iv) $L_{mn}(\varphi_1(s, t); x, y) = \cos x + t_{mn}(x, y)$
- (v) $L_{mn}(\varphi_2(s, t); x, y) = \cos y + w_{mn}(x, y)$

koşulları sağlansın. Eğer $m, n \rightarrow \infty$ için

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_{mn}(x, y)\| = 0, \quad P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|v_{mn}(x, y)\| = 0, \quad P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|t_{mn}(x, y)\| = 0, \\ P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|w_{mn}(x, y)\| = 0$$

ise herhangi bir $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu için

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \|U_{mn} f(x, y) - f(x, y)\| = 0$$

olur (Badea ve ark., 1988).

İspat : $f \in B_{2\pi}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olsun. (i) şartından

$$f(x, y) - U_{mn} f(x, y) = L_{mn}(\Delta_{x,y} f(s, t); x, y)$$

olur. Dahası her $g \in C_b(I^2)$ fonksiyonu için

$$|L_{mn}(g; x, y)| = \max\{L_{mn}(g; x, y), L_{mn}(-g; x, y)\} \quad (4.9)$$

olur. L_{mn} operatörünün monotonluğu ve $C(\varepsilon) = \max\{A(\varepsilon), B(\varepsilon)\}$ için Lemma 3.2.1' den

$$\begin{aligned} |f(x, y) - U_{mn} f(x, y)| &= |L_{mn}(\Delta_{x,y} f(s, t); x, y)| \\ &\leq L_{mn}(|\Delta_{x,y} f(s, t)|; x, y) \\ &\leq L_{mn}\left(\frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \left\{ \sin^2 \frac{x-s}{2} + \sin^2 \frac{y-t}{2} \right\}; x, y\right) \\ &\leq L_{mn}\left(\frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \left\{ \frac{1 - \cos(x-s)}{2} + \frac{1 - \cos(y-t)}{2} \right\}; x, y\right) \\ &\leq L_{mn}\left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{2 - \cos(x-s) - \cos(y-t)\}; x, y\right) \\ &\leq L_{mn}\left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{2 - \cos x \cos s - \sin x \sin s \right. \\ &\quad \left. - \cos y \cos t - \sin y \sin t\}; x, y\right) \\ &\leq L_{mn}\left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{2 - \cos x \varphi_1(s, t) - \sin x \phi_1(s, t) \right. \\ &\quad \left. - \cos y \varphi_2(s, t) - \sin y \phi_2(s, t)\}; x, y\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} L_{mn}(e(s, t); x, y) + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{2 L_{mn}(e(s, t); x, y) \\ &\quad - \cos x L_{mn}(\varphi_1(s, t); x, y) - \sin x L_{mn}(\phi_1(s, t); x, y) \end{aligned}$$

$$-\cos y L_{mn}(\varphi_2(s, t); x, y) - \sin y L_{mn}(\phi_2(s, t); x, y)\}$$

elde edilir. Bu ifade (i), (ii), (iii), (iv), (v) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} |f(x, y) - U_{mn} f(x, y)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{2 - \cos x (\cos x - t_{mn}(x, y)) - \sin x (\sin x - u_{mn}(x, y)) \\ &\quad - \cos y (\cos y + w_{mn}(x, y)) - \sin y (\sin y + v_{mn}(x, y))\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{2 - \cos^2 x - \cos x t_{mn}(x, y) - \sin^2 x - \sin x u_{mn}(x, y) \\ &\quad - \cos^2 y - \cos y w_{mn}(x, y) - \sin^2 y - \sin y v_{mn}(x, y)\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} - \frac{C(\varepsilon)}{2} \{\cos x t_{mn}(x, y) + \sin x u_{mn}(x, y) \\ &\quad + \cos y w_{mn}(x, y) + \sin y v_{mn}(x, y)\} \\ &\leq \left| \frac{\varepsilon}{3} - \frac{C(\varepsilon)}{2} \{\cos x t_{mn}(x, y) + \sin x u_{mn}(x, y) \right. \\ &\quad \left. + \cos y w_{mn}(x, y) + \sin y v_{mn}(x, y)\} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{|\cos x| |t_{mn}(x, y)| + |\sin x| |u_{mn}(x, y)| \\ &\quad + |\cos y| |w_{mn}(x, y)| + |\sin y| |v_{mn}(x, y)|\} \end{aligned}$$

elde edilir. $|\cos x| \leq 1$ ve $|\sin x| \leq 1$ olduğundan bu ifadesi düzenlenirse

$$|f(x, y) - U_{mn} f(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{|t_{mn}(x, y)| + |u_{mn}(x, y)| + |w_{mn}(x, y)| + |v_{mn}(x, y)|\}$$

olur. $\mathbb{R}^2$ üzerinde supremum alınırsa

$$\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |f(x, y) - U_{mn} f(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \left\{ \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |t_{mn}(x, y)| + \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |u_{mn}(x, y)| \right\}$$

$$+ \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |w_{mn}(x,y)| + \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |v_{mn}(x,y)| \Big\}$$

olur. Buradan da

$$\|f(x,y) - U_{mn}f(x,y)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \{\|u_{mn}(x,y)\| + \|w_{mn}(x,y)\| + \|v_{mn}(x,y)\|\}$$

olup $P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|U_{mn}f(x,y) - f(x,y)\| = 0$ elde edilip ispat tamamlanır.

Şimdi bu teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verelim:

Örnek 4.2.3: $t_{s,p} = \frac{2s\pi}{N_p + 2}$, $s = 1, 2, \dots, N_p + 2$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{1,n} = 1$ olmak üzere

$\phi_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{N_n} \rho_{v,n} \cos vx$ formundaki negatif olmayan kosinüs polinomu olmak üzere

$$K_{m,n}(f; x, y) = \frac{4}{(N_m + 2)(N_n + 2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} f(t_{k,m}, t_{l,n}) \phi_m(t_{k,m} - x) \phi_n(t_{l,n} - y)$$

operatörünü ele alalım (Bojanic, 1974; Shisha ve Bond, 1968).

$f \in C_{2\pi, 2\pi}$ olmak üzere süreklilik modülü

$$\omega(f; \delta_1) = \sup \left\{ |f(u, v) - f(x, y)| : (u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} < \delta_1 \right\}, \delta_1 > 0$$

şeklinde tanımlıdır. $C_{2\pi, 2\pi}$ üzerinde tanımlı herhangi bir $\{S_{m,n}\}$ pozitif lineer operatörü

için $\alpha_{m,n}(x, y) = \sqrt{S_{m,n} \left(\sin^2 \frac{u-x}{2} + \sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y \right)}$ olmak üzere

$$|S_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)| \leq (S_{m,n}(1; x, y) + \pi^2) \omega(f; \alpha_{m,n}(x, y)) + |f(x, y)| |S_{m,n}(1; x, y) - 1|$$

olduğunu gösterebiliriz.

Derecesi d olan herhangi τ trigonometrik polinomu için eğer $d \leq n-1$ ise

$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \tau\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(t) dt$ eşitliğinin olduğu biliniyor. Şimdi $K_{m,n}(1; x, y)$ ve

$\alpha_{m,n}(x, y) = \sqrt{K_{m,n}\left(\sin^2 \frac{u-x}{2} + \sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y\right)}$ ifadelerini hesaplamalıyız.

$t_{s,p} = \frac{2s\pi}{N_p + 2}$, $s=1, 2, \dots, N_p + 2$ olmak üzere derecesi $\geq N_p + 1$ olan her τ

trigonometrik polinomu için

$\frac{2}{N_p + 2} \sum_{s=1}^{N_p+2} \tau(t_{s,p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(t) dt$ dir. $\phi_m(u-x)$ ve $\phi_n(v-y)$ fonksiyonlarının dereceleri

sırasıyla N_m ve N_n ayrıca $\sin^2 \frac{u-x}{2} \phi_m(u-x)$ ve $\sin^2 \frac{v-y}{2} \phi_n(v-y)$ trigonometrik

fonksiyonlarının dereceleri sırasıyla $N_m + 1$ ve $N_n + 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} K_{m,n}(1; x, y) &= \frac{4}{(N_m + 2)(N_n + 2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \phi_m(t_{k,m} - x) \phi_n(t_{l,n} - y) \\ &= \left(\frac{2}{N_m + 2} \sum_{k=1}^{N_m+2} \phi_m(t_{k,m} - x) \right) \left(\frac{2}{N_n + 2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \phi_n(t_{l,n} - y) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m(u - x) du \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(v - y) dv \right) = 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_{m,n}\left(\sin^2 \frac{u-x}{2} + \sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y\right) &= \frac{4}{(N_m + 2)(N_n + 2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \sin^2 \frac{t_{k,m} - x}{2} \phi_m(t_{k,m} - x) \phi_n(t_{l,n} - y) \\ &\quad + \frac{4}{(N_m + 2)(N_n + 2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \sin^2 \frac{t_{l,n} - y}{2} \phi_m(t_{k,m} - x) \phi_n(t_{l,n} - y) \\ &= \left(\frac{2}{N_m + 2} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sin^2 \frac{t_{k,m} - x}{2} \phi_m(t_{k,m} - x) \right) \left(\frac{2}{N_n + 2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \phi_n(t_{l,n} - y) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{N_m + 2} \sum_{k=1}^{N_m+2} \phi_m(t_{k,m} - x) \right) \left(\frac{2}{N_n + 2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \sin^2 \frac{t_{l,n} - y}{2} \phi_n(t_{l,n} - y) \right) \\
&= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{u-x}{2} \phi_m(u-x) du \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(v-y) dv \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m(u-x) du \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{v-y}{2} \phi_n(v-y) dv \right) \\
&= \frac{1-\rho_{l,m}}{2} + \frac{1-\rho_{l,n}}{2} = 1 - \frac{\rho_{l,m} + \rho_{l,n}}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$|K_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)| \leq (1 + \pi^2) \omega \left(f; \left(1 - \frac{\rho_{l,m} + \rho_{l,n}}{2} \right)^{1/2} \right)$$

bulunur. Yani herhangi bir $f \in C_{2\pi, 2\pi}$ fonksiyonu için

$$P\text{-}\lim \|K_{m,n}(f) - f\|_B = 0$$

elde edilir.

1992 yılında C. Cottin $L_{mn} : B_{2\pi} \rightarrow B(\mathbb{R}^2)$ pozitif lineer operatörleri için karışık B-süreklilik modülünü kullanarak yakınsaklık oranını hesaplamıştır.

Teorem 4.2.4: $L_{mn} : B_{2\pi} \rightarrow B(\mathbb{R}^2)$ pozitif lineer operatör olsun. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
|f(x, y) - U_{mn} f(x, y)| &\leq \left\{ 1 + \frac{\pi}{\delta_1} \sqrt{L_{mn} \left(\sin^2 \frac{x-s}{2}; x, y \right)} + \frac{\pi}{\delta_2} \sqrt{L_{mn} \left(\sin^2 \frac{y-t}{2}; x, y \right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi^2}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{L_{mn} \left(\sin^2 \frac{x-s}{2} \sin^2 \frac{y-t}{2}; x, y \right)} \right\} \omega_{mixed}(f, \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

olur (Cottin, 1992).

İspat: $\forall (x, y), (s, t) \in \mathbb{R}^2, k, l \in \mathbb{Z}$ için $(x', y') = (x + 2k\pi, y + 2l\pi)$ seçelim öyle ki

$|x' - s| \leq \pi$ ve $|y' - t| \leq \pi$ olsun. $f \in B_{2\pi}$ olduğundan $|\Delta_{s,t} f(x, y)| = |\Delta_{s,t} f(x', y')|$ olur.

$|x' - s| \leq \pi \left| \sin \frac{x-s}{2} \right|$ ve $|y' - t| \leq \pi \left| \sin \frac{y-t}{2} \right|$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
|\Delta_{s,t} f(x', y')| &\leq \sup_{\substack{|x-s| \leq \delta_1(\varepsilon) \\ |y-t| \leq \delta_2(\varepsilon)}} |\Delta_{s,t} f(x', y')| \\
&\leq \omega_{mixed} \left(f, |x' - s|, |y' - t| \right) \\
&\leq \omega_{mixed} \left(f, \frac{|x' - s|}{\delta_1}, \frac{|y' - t|}{\delta_2} \right) \\
&\leq \omega_{mixed} \left(f, \frac{\pi}{\delta_1} \left| \sin \frac{x-s}{2} \right|, \frac{\pi}{\delta_2} \left| \sin \frac{y-t}{2} \right| \right) \\
&\leq \left(1 + \frac{\pi}{\delta_1} \left| \sin \frac{x-s}{2} \right| \right) \left(1 + \frac{\pi}{\delta_2} \left| \sin \frac{y-t}{2} \right| \right) \omega_{mixed} (f, \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
|f(x, y) - U_{mn} f(x, y)| &= |L_{mn}(\Delta_{s,t} f(x, y); x, y)| \\
&\leq L_{mn}(|\Delta_{s,t} f(x, y)|; x, y) \\
&\leq L_{mn} \left(\left(1 + \frac{\pi}{\delta_1} \left| \sin \frac{x-s}{2} \right| \right) \left(1 + \frac{\pi}{\delta_2} \left| \sin \frac{y-t}{2} \right| \right) \omega_{mixed} (f, \delta_1, \delta_2); x, y \right) \\
&\leq L_{mn} \left(1 + \frac{\pi}{\delta_1} \left| \sin \frac{x-s}{2} \right| + \frac{\pi}{\delta_2} \left| \sin \frac{y-t}{2} \right| + \frac{\pi^2}{\delta_1 \delta_2} \left| \sin \frac{x-s}{2} \right| \left| \sin \frac{y-t}{2} \right|; x, y \right) \\
&\quad \times \omega_{mixed} (f, \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ L_{mn}(1; x, y) + \frac{\pi}{\delta_1} L_{mn} \left(\left| \sin \frac{x-s}{2} \right|; x, y \right) + \frac{\pi}{\delta_2} L_{mn} \left(\left| \sin \frac{y-t}{2} \right|; x, y \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi^2}{\delta_1 \delta_2} L_{mn} \left(\left| \sin \frac{x-s}{2} \right| \left| \sin \frac{y-t}{2} \right|; x, y \right) \right\} \omega_{mixed}(f, \delta_1, \delta_2) \\
&\leq \left\{ 1 + \frac{\pi}{\delta_1} L_{mn} \left(\sqrt{\sin^2 \frac{x-s}{2}}; x, y \right) + \frac{\pi}{\delta_2} L_{mn} \left(\sqrt{\sin^2 \frac{y-t}{2}}; x, y \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi^2}{\delta_1 \delta_2} L_{mn} \left(\sqrt{\sin^2 \frac{x-s}{2} \sin^2 \frac{y-t}{2}}; x, y \right) \right\} \omega_{mixed}(f, \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
|f(x, y) - U_{mn} f(x, y)| &\leq \left\{ 1 + \frac{\pi}{\delta_1} \sqrt{L_{mn} \left(\sin^2 \frac{x-s}{2}; x, y \right)} + \frac{\pi}{\delta_2} \sqrt{L_{mn} \left(\sin^2 \frac{y-t}{2}; x, y \right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi^2}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{L_{mn} \left(\sin^2 \frac{x-s}{2} \sin^2 \frac{y-t}{2}; x, y \right)} \right\} \omega_{mixed}(f, \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.3. n - Değişkenli Bölge Sürekli Fonksiyonlar İçin Korovkin Teoremi

D. Bărbosu 2001 yılında n -değişkenli B -sürekli fonksiyonlar için Korovkin tipi teorem ispatlamıştır. Bunun için önce bize gerekli olan bir lemma verelim.

Lemma 4.3.1: Bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu verilsin. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$A_i = A_i(\varepsilon) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\forall (s_1, s_2, \dots, s_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ için

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n A_i(\varepsilon) (s_i - x_i)^2$$

olur (Bărbosu, 2001).

İspat: $f \in C_b(D)$ olduğundan f aynı zamanda düzgün B -süreklidir. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki $|x_1 - s_1| \leq \delta(\varepsilon), |x_2 - s_2| \leq \delta(\varepsilon), \dots, |x_n - s_n| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \quad (5.1)$$

olur.

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in D$ verilsin. $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $|x_i - s_i| \leq \delta(\varepsilon)$ eşitsizlikleri tüm i ' ler için, i ' nin $(n-1)$ değeri için, i ' nin $(n-2)$ değeri için, ... , i ' nin hiçbir değeri için sağlansın.

Her i için $|x_i - s_i| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğundan (5.1)' den

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \quad (5.2)$$

elde edilir. Ayrıca f B -sınırlı olduğundan $\exists K > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq K \quad (5.3)$$

olur. Bir tek $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ değeri için $|x_i - s_i| > \delta(\varepsilon)$ olsun. $j=1$ ise $|x_i - s_i| > \delta(\varepsilon), |x_2 - s_2| \leq \delta(\varepsilon), \dots, |x_n - s_n| \leq \delta(\varepsilon)$ olup $(x_1 - s_1)^2 [\delta(\varepsilon)]^{-2} \geq 1$ olduğundan

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq K [\delta(\varepsilon)]^{-2} (x_1 - s_1)^2 \quad (5.4)$$

olur. Bu yolla sadece bir $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $|x_i - s_i| > \delta(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq K [\delta(\varepsilon)]^{-2} \sum_{i=1}^n (x_i - s_i)^2 \quad (5.5)$$

elde edilir. Yine aynı şekilde $i \neq j$ olmak üzere $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $|x_i - s_i| > \delta(\varepsilon), |x_j - s_j| > \delta(\varepsilon)$ olduğundan

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq K [\delta(\varepsilon)]^{-2^2} \sum_{i=1}^n (x_i - s_i)^2 (x_j - s_j)^2 \quad (5.6)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $|x_j - s_j| > \delta(\varepsilon)$ olduğundan

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq K [\delta(\varepsilon)]^{-2^n} (x_1 - s_1)^2 (x_2 - s_2)^2 \dots (x_n - s_n)^2 \quad (5.7)$$

elde edilir.

(5.2), (5.5), (5.6), (5.7) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{n+1} + K [\delta(\varepsilon)]^{-2} \sum_{i=1}^n (x_i - s_i)^2 \\ &\quad + K [\delta(\varepsilon)]^{-2^2} \sum_{i=1}^n (x_i - s_i)^2 (x_j - s_j)^2 \\ &\quad + \dots + K [\delta(\varepsilon)]^{-2^n} (x_1 - s_1)^2 (x_2 - s_2)^2 \dots (x_n - s_n)^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $s_k, x_k \in [0, 1]$ olup $(x_k - s_k)^2 \leq 1$ olduğundan (5.8) düzenlenirse

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{n+1} + K [\delta(\varepsilon)]^{-2} \left\{ 1 + [\delta(\varepsilon)]^{-2} + \dots + [\delta(\varepsilon)]^{-2^n+2} \right\} (x_1 - s_1)^2 \\ &\quad + K [\delta(\varepsilon)]^{-2} \left\{ 1 + [\delta(\varepsilon)]^{-2} + \dots + [\delta(\varepsilon)]^{-2^n+2} \right\} (x_2 - s_2)^2 \\ &\quad + \dots + K [\delta(\varepsilon)]^{-2} (x_n - s_n)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

D üzerinde $e_0(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $e_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = s_i$ fonksiyonları tanımlansın.

Teorem 4.3.2: $L_{m_1 m_2 \dots m_n} : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör ve $U_{m_1 m_2 \dots m_n}(f(s_1, s_2, \dots, s_n); x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$= L_{m_1 m_2 \dots m_n} \left(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \right)$$

olsun.

$$(i) \quad L_{m_1 m_2 \dots m_n} (e_0(s_1, s_2, \dots, s_n); x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

$$(ii) \quad L_{m_1 m_2 \dots m_n} (e_i(s_1, s_2, \dots, s_n); x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i + \alpha_{m_1 m_2 \dots m_n}^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(iii) \quad L_{m_1 m_2 \dots m_n} \left(\sum_{i=1}^n e_i^2(s_1, s_2, \dots, s_n); x_1, x_2, \dots, x_n \right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \delta_{m_1 m_2 \dots m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

koşulları sağlansın. Eğer $m_1, m_2, \dots, m_n \rightarrow \infty$ için D üzerinde $\{\alpha_{m_1 m_2 \dots m_n}^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ve $\{\delta_{m_1 m_2 \dots m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ dizileri 0'a düzgün yakınsak ise herhangi bir $f \in C_b(D)$ için D üzerinde $\{U_{m_1 m_2 \dots m_n}(f)\} \Rightarrow f$ olur (Barbosu, 2001).

İspat : $L_{m_1 m_2 \dots m_n}$ operatörünün tanımından $U_{m_1 m_2 \dots m_n}$ operatörü iyi tanımlıdır.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - U_{m_1 m_2 \dots m_n}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) = L_{m_1 m_2 \dots m_n}(\Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n)$$

olur. Ayrıca $\forall g \in C_b(D)$ için

$$|L_{m_1 m_2 \dots m_n}(g; x_1, x_2, \dots, x_n)| = \max \{L_{m_1 m_2 \dots m_n}(g; x_1, x_2, \dots, x_n), L_{m_1 m_2 \dots m_n}(-g; x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - U_{m_1 m_2 \dots m_n}(f; x_1, x_2, \dots, x_n)| &= |L_{m_1 m_2 \dots m_n}(\Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n)| \\ &\leq L_{m_1 m_2 \dots m_n}(|\Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)|; x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

olup Lemma 3.3.1 kullanılarak

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - U_{m_1 m_2 \dots m_n}(f; x_1, x_2, \dots, x_n)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq L_{m_1 m_2 \dots m_n} \left(\frac{\varepsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n A_i(\varepsilon) (s_i - x_i)^2; x_1, x_2, \dots, x_n \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{n+1} + A(\varepsilon) L_{m_1 m_2 \dots m_n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i s_i + s_i^2); x_1, x_2, \dots, x_n \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{n+1} + A(\varepsilon) L_{m_1 m_2 \dots m_n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2; x_1, x_2, \dots, x_n \right) \\
&\quad - 2A(\varepsilon) L_{m_1 m_2 \dots m_n} \left(\sum_{i=1}^n x_i s_i; x_1, x_2, \dots, x_n \right) \\
&\quad + A(\varepsilon) L_{m_1 m_2 \dots m_n} \left(\sum_{i=1}^n s_i^2; x_1, x_2, \dots, x_n \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{n+1} + A(\varepsilon) \left\{ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) L_{m_1 m_2 \dots m_n} (e_0; x_1, x_2, \dots, x_n) \right. \\
&\quad - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) L_{m_1 m_2 \dots m_n} (e_i; x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\quad \left. + L_{m_1 m_2 \dots m_n} \left(\sum_{i=1}^n e_i^2; x_1, x_2, \dots, x_n \right) \right\}
\end{aligned}$$

olur. (i), (ii), (iii)' den

$$\begin{aligned}
\left| f(x_1, x_2, \dots, x_n) - U_{m_1 m_2 \dots m_n} (f; x_1, x_2, \dots, x_n) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{n+1} + A(\varepsilon) \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right. \\
&\quad - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(x_i + \alpha_{m_1 m_2 \dots m_n}^{(i)} (x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n x_i^2 + \delta_{m_1 m_2 \dots m_n} (x_1, x_2, \dots, x_n) \right\} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{n+1} A(\varepsilon) \left\{ \delta_{m_1 m_2 \dots m_n} (x_1, x_2, \dots, x_n) \right\}
\end{aligned}$$

$$-2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \alpha_{m_1 m_2 \dots m_n}^{(i)} (x_1, x_2, \dots, x_n) \Big\}$$

elde edilir. $m_1, m_2, \dots, m_n \rightarrow \infty$ için D üzerinde $\left\{ \alpha_{m_1 m_2 \dots m_n}^{(i)} (x_1, x_2, \dots, x_n) \right\} \Rightarrow 0$ ve

$\left\{ \delta_{m_1 m_2 \dots m_n} (x_1, x_2, \dots, x_n) \right\} \Rightarrow 0$ olduğundan

$$\left| f(x_1, x_2, \dots, x_n) - U_{m_1 m_2 \dots m_n} (f; x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$$

olup

$\{U_{m_1 m_2 \dots m_n} (f)\} \Rightarrow f$ elde edilir.

Şimdi teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verelim.

Örnek 4.3.3: $I^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere $f \in C_b(I^3)$ için

$$\omega_{m_1, i} (x, \alpha) = \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i, -\alpha]} (1-x)^{[m_1-i, -\alpha]}}{1^{[m_1, -\alpha]}}$$

$$\omega_{m_2, j} (y, \beta) = \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j, -\beta]} (1-y)^{[m_2-j, -\beta]}}{1^{[m_2, -\beta]}}$$

$$\omega_{m_3, k} (z, \gamma) = \binom{m_3}{k} \frac{z^{[k, -\gamma]} (1-z)^{[m_3-k, -\gamma]}}{1^{[m_3, -\gamma]}}$$

$$x^{[i, -\alpha]} = x(x+\alpha) \cdots (x+(i-1)\alpha)$$

olmak üzere

$$L_{m_1, m_2, m_3} (f; x, y, z) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} f \left(\frac{i}{m_1}, \frac{j}{m_2}, \frac{k}{m_3} \right) \omega_{m_1, i} (x, \alpha) \omega_{m_2, j} (y, \beta) \omega_{m_3, k} (z, \gamma)$$

şeklinde tanımlanan 3-indisli Bernstein-Stancu operatörünü göz önüne alalım.

$$(i) \quad L_{m_1, m_2, m_3} (e_0; x, y, z) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} e_0 \left(\frac{i}{m_1}, \frac{j}{m_2}, \frac{k}{m_3} \right) \omega_{m_1, i} (x, \alpha) \omega_{m_2, j} (y, \beta) \omega_{m_3, k} (z, \gamma)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_3}{k} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad L_{m_1, m_2, m_3}(e_1; x, y, z) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} e_1 \left(\frac{i}{m_1}, \frac{j}{m_2}, \frac{k}{m_3} \right) \omega_{m_1, i}(x, \alpha) \omega_{m_2, j}(y, \beta) \omega_{m_3, k}(z, \gamma) \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \frac{i}{m_1} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{i}{m_1} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_3}{k} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{i}{m_1} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{i}{m_1} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} = x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad L_{m_1, m_2, m_3}(e_2; x, y, z) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} e_2 \left(\frac{i}{m_1}, \frac{j}{m_2}, \frac{k}{m_3} \right) \omega_{m_1, i}(x, \alpha) \omega_{m_2, j}(y, \beta) \omega_{m_3, k}(z, \gamma) \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \frac{j}{m_2} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{j}{m_2} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_3}{k} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{j}{m_2} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} y = y \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} = y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad L_{m_1, m_2, m_3} (e_3; x, y, z) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} e_3 \left(\frac{i}{m_1}, \frac{j}{m_2}, \frac{k}{m_3} \right) \omega_{m_1, i} (x, \alpha) \omega_{m_2, j} (y, \beta) \omega_{m_3, k} (z, \gamma) \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \frac{k}{m_3} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_3}{k} \frac{k}{m_3} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
&= z \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \\
&= z \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} = z
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
L_{m_1, m_2, m_3} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2; x, y, z) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} e_3 \left(\frac{i}{m_1}, \frac{j}{m_2}, \frac{k}{m_3} \right) \omega_{m_1, i} (x, \alpha) \omega_{m_2, j} (y, \beta) \omega_{m_3, k} (z, \gamma) \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \left(\frac{i^2}{m_1^2} + \frac{j^2}{m_2^2} + \frac{k^2}{m_3^2} \right) \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
&= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \left\{ \frac{i^2}{m_1^2} \frac{x^{[i,-\alpha]} (1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]} (1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]} (1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{j^2}{m_2^2} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
& + \frac{k^2}{m_3^2} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \Bigg\} \\
& = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \frac{i^2}{m_1^2} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
& + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \frac{j^2}{m_2^2} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
& + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} \frac{k^2}{m_3^2} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
& = \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{i^2}{m_1^2} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_3}{k} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
& + \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{j^2}{m_2^2} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_3}{k} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
& + \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_3}{k} \frac{k^2}{m_3^2} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
& = \sum_{i=1}^{m_1} \binom{m_1}{i} \frac{i^2}{m_1^2} \frac{x^{[i,-\alpha]}(1-x)^{[m_1-i,-\alpha]}}{1^{[m_1,-\alpha]}} + \sum_{j=1}^{m_2} \binom{m_2}{j} \frac{j^2}{m_2^2} \frac{y^{[j,-\beta]}(1-y)^{[m_2-j,-\beta]}}{1^{[m_2,-\beta]}} \\
& + \sum_{k=1}^{m_3} \binom{m_3}{k} \frac{k^2}{m_3^2} \frac{z^{[k,-\gamma]}(1-z)^{[m_3-k,-\gamma]}}{1^{[m_3,-\gamma]}} \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{1+\alpha} \left(\frac{1}{m_1} + \alpha \right) + y^2 + \frac{y(1-y)}{1+\beta} \left(\frac{1}{m_2} + \beta \right) + z^2 + \frac{z(1-z)}{1+\gamma} \left(\frac{1}{m_3} + \gamma \right)
\end{aligned}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x(1-x)}{1+\alpha} \left(\frac{1}{m_1} + \alpha \right) + \frac{y(1-y)}{1+\beta} \left(\frac{1}{m_2} + \beta \right) + \frac{z(1-z)}{1+\gamma} \left(\frac{1}{m_3} + \gamma \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha_{m_1, m_2, m_3}^{(1)}(x, y, z) = \alpha_{m_1, m_2, m_3}^{(2)}(x, y, z) = \alpha_{m_1, m_2, m_3}^{(3)}(x, y, z) = 0$$

ve

$$\delta_{m_1, m_2, m_3}(x, y, z) = \frac{x(1-x)}{1+\alpha} \left(\frac{1}{m_1} + \alpha \right) + \frac{y(1-y)}{1+\beta} \left(\frac{1}{m_2} + \beta \right) + \frac{z(1-z)}{1+\gamma} \left(\frac{1}{m_3} + \gamma \right)$$

olup $m_1, m_2, m_3 \rightarrow \infty$ için

$$\alpha_{m_1, m_2, m_3}^{(1)} \Rightarrow 0,$$

$$\alpha_{m_1, m_2, m_3}^{(2)} \Rightarrow 0,$$

$$\alpha_{m_1, m_2, m_3}^{(3)} \Rightarrow 0$$

ve

$$\delta_{m_1, m_2, m_3} \Rightarrow 0$$

olduğundan $\forall f \in C_b(D)$ için

$$f(x, y) - U_{m_1, m_2, m_3}(f; x, y, z) \Rightarrow 0$$

dır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada fonksiyonların double dizileri için alışılmış düzgün yakınsaklık kavramı kullanılmıştır.

Bu çalışmada incelenen sonuçlar n -boyutlu reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı Bögel sürekli ve $B-2\pi$ periyodik fonksiyonların uzayında da incelenebilir. Ayrıca Bögel sürekli fonksiyonlar için modüler uzayda Korovkin tipi teoremin gerçekleşip gerçekleşmediği araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Badea, C., Badea, I., Cottin, C. 1988. A Korovkin-type theorems for generalizations of Boolean sum operators and approximation by trigonometric pseudopolynomials. Anal. Numér. Théor. Approx., 17: 7-17.
- Badea, C., Badea, I., Gonska, H.H. 1986. A test function theorem and approximation by pseudopolynomials. Bull. Austral. Math. Soc., 34: 53-64.
- Bárbosu, D. 2001. A Korovkin-type theorem for the approximation of n -variate B-continuous functions. Studia Univ. "Babeş Bolyai", Math., 16: 15-24.
- Bernstein, S. 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Comm. Soc. Math. Kharkov., 13: 1-2.
- Bohman, H. 1951. On a approximation of continuous and analytic functions. Arkiv für Math., 2(3): 43-56.
- Bojanic, R. and Shisha, O. 1974. Approximation of continuous, periodic functions by discrete positive linear operators. J. Approx. Theory., 11: 231-235.
- Bögel, K. 1934. Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher. J. Reine Angew. Math., 170: 197-217.

- Bögel, K. 1935. Über mehrdimensionale differentiation, integration und beschränkte variation. J. Reine Angew. Math., 173: 5-29.
- Bögel, K. 1962. Über die mehrdimensionale differentiation, Jahresber. Deutsch. Mat.-Verein., 65: 45-71.
- Cottin, C. On the degree of approximation by periodic approximant of Boolean sum type, Lecture notes in pure and applied mathematics, Vol. 138, sayfa 263-274
- Korovkin, P.P. 1960. Linear Operators and Approximation Theory. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Patterson, R.F. 1999. Double sequence core theorem. International J. Math. and Math. Sci., 22(4): 785-793.
- Pringsheim, A. 1900. Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen. Math. Ann., 53: 289-321.
- Shishi, O. and Bond, B. 1968. The degree of approximation to periodik functions by linear positive operators. J. Approx. Theory, 1: 335-339.
- Volkov, V.I. 1957. On the convergence of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions of two variables. (Russian) , Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 115: 17-19.

ÖZGEÇMİŞ

Onur Çetinel 1989 yılında Sinop'ta doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sinop'ta tamamladı. 2007 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne başladı ve 2011 yılında mezun oldu. 2011 yılında Sinop Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.