

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BRONZ RIEMANN MANİFOLDLARIN SLANT
ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEZENAY ÜNAL UYANIK

DANIŞMAN
DOÇ. DR. BİLAL EFTAL ACET

ADİYAMAN, 2025

ÖZET

BRONZ RIEMANN MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

Sezenay ÜNAL UYANIK
Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 06/2025, Sayfa: 39
Danışman: Doç. Dr. Bilal Eftal ACET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, Riemann manifoldları ve altmanifoldları ile ilgili temel tanım ve ön bilgiler verildikten sonra, manifoldlar üzerinde tanımlanan polinom yapılar ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, bir Riemann manifoldu üstünde bronz yapı ve özellikleri incelenip bu yapı ile ilgili örnekler elde edilmiştir.

Son bölümde ise bronz Riemann manifoldlarının altmanifoldları ele alındıktan sonra, slant, hemi-slant, quasi-hemi-slant ve quasi-bi-slant altmanifoldları tanımlanmış ve bunlar üstünde tanımlanan distribüsyonların integrallenebilirliği ile ilgili geometrik sonuçlar verilmiştir. Ayrıca çalışılan her bir slant altmanifold türü ile ilgili örnekler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann manifold; Polinom yapı; Bronz yapı.

ABSTRACT

ON SLANT SUBMANIFOLDS OF BRONZE RIEMANNIAN MANIFOLDS

Sezenay ÜNAL UYANIK
Department of Mathematics

Adıyaman University, Graduate Education Institute, 06/2025, Page: 39

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET

This study, prepared as a master's thesis, consists of four parts.

The first section is devoted to the introduction.

In the second part, after giving basic definitions and preliminary information about Riemannian manifolds and submanifolds, polynomial structures defined on manifolds are discussed.

In the third chapter, the bronze structure and its properties on a Riemannian manifold were examined and examples related to this structure were obtained.

In the last section, after considering the submanifolds of bronze Riemannian manifolds, slant, hemi-slant, quasi-hemi-slant and quasi-bi-slant submanifolds are defined and geometric results related to the integrability of distributions defined on them are given. Additionally, examples for each type of slant submanifold studied were obtained.

Keywords: Riemannian manifold; Polynomial structure; Bronze structure.

TEŞEKKÜR

Lisans ve lisansüstü öğrenimim süresince tecrübesi ve birikimi ile yolumu aydınlatan karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanını ayıran tez konumu belirleyerek beni bu konuda çalışmaya teşvik eden, bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, sabır ve ilgisini hiçbir zaman eksik etmeyen ve bu çalışmanın ortaya çıkmasında çok büyük emeği olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Bilal Eftal ACET'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

.....
Sezenay ÜNAL UYANIK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK (İÇ KAPAK) SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Riemann Metriği	3
2.2. Riemann Manifoldların Altmanifoldları	5
2.3. Manifold Üzerinde Polinom Yapılar	7
3. RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BRONZ YAPILAR.....	9
3.1. Riemann Manifoldları Üzerinde Bronz Yapı	9
3.2. Bronz Riemann Manifoldların Altmanifoldları	13
4. BRONZ RIEMANN MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI	14
4.1. Bronz Riemann Manifoldların Slant Altmanifoldları	14
4.2. Bronz Riemann Manifoldların Hemi-Slant Altmanifoldları	16
4.3. Bronz Riemann Manifoldların Quasi-Hemi-Slant Altmanifoldları	21
4.4. Bronz Riemann Manifoldların Quasi-Bi-Slant Altmanifoldları	29
KAYNAKÇA	38
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
I	: Reel sayılar kümesinde bir aralık
$\tilde{G}$	: Manifold
$C^\infty(\tilde{G})$	: $\tilde{G}$ üzerinde diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi
$\tilde{g}$	: Metrik tensör
$\Gamma(T\tilde{G})$	: $\tilde{G}$ nin tanjant demetinin diferensiyellenebilir kesitlerinin vektör uzayı
$\tilde{\#}$	: Afın lineer konneksiyon
A	: Şekil operatörü
$\chi(\tilde{G})$	: $\tilde{G}$ manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi
h	: $\tilde{G}$ manifoldunun ikinci temel formu
$T_P\tilde{G}$	: $\tilde{G}$ nin P noktasındaki tanjant uzay
$T_P^\perp\tilde{G}$	: $\tilde{G}$ manifoldunun P noktasındaki normal uzayı
φ	: Hemen hemen polinom yapı
J	: Hemen hemen kompleks yapı
P	: Hemen hemen çarpım yapı
$\tilde{P}$	: Hemen hemen altın yapı
$\tilde{J}$	: Hemen hemen metalik yapı
$\tilde{\Phi}$	: Hemen hemen bronz yapı

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri alanında çalışan araştırmacılar, hemen hemen kompleks yapı, hemen hemen çarpım yapı, hemen hemen değme yapı gibi çeşitli geometrik yapılarla donatılmış manifoldlar konusunda geniş çaplı araştırmalar yapmışlardır. Son yıllarda bu yapılara ek olarak manifoldlar üzerinde farklı polinom yapıları tanımlanmıştır.

Altın oran olarak bilinen $\sigma_{1,1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180\dots$ sayısı $Q(X) = X^2 - X - 1 = 0$ denkleminin bir çözümü olup sanatta, mimaride ve matematikte mükemmel bir sistemi ortaya çıkaran bir sayısal oran bağıntısıdır.

De Spinadel [1], altın oranın bir genelleştirmesini tanıtmıştır ve bu genelleştirmeyi metalik oran ailesi olarak adlandırmıştır. $x^2 - px - q = 0$ denkleminin pozitif kökü metalik oranı verir ve bu oran

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad (1.1)$$

eşitliği ile tanımlanır. (1.1) eşitliğinde p ve q nun pozitif tamsayı değerleri ;

- $p = q = 1$ için, $\sigma_{1,1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran,
- $p = 2, q = 1$ için, $\sigma_{2,1} = 1 + \sqrt{2}$ gümüş oran,
- $p = 3, q = 1$ için, $\sigma_{3,1} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ bronz oran,
- $p = 1, q = 2$ için, $\sigma_{1,2} = 2$ bakır oran,
- $p = 1, q = 3$ için, $\sigma_{1,3} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ nikel oran elde edilir [2].

Altın oran ve metalik orandan faydalanarak metalik Riemann manifoldları [2] ve altın Riemann manifoldları [3] te tanıtıldı. Daha sonra altın (semi) - Riemann manifoldlarının ve metalik (semi) - Riemann manifoldlarının farklı altmanifoldları bir çok geometri yazarı tarafından çalışılmaya devam edildi [3-16, 4-15].

Son zamanlarda diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde bronz yapı ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır. [17] de bronz Riemann manifoldları ve bu yapının integrallenebilirlik şartları incelenmiştir. Daha sonra [18] de bronz Riemann manifoldların farklı tipteki slant alt manifoldları incelenmiştir.

Bu çalışmada önce Riemann manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremleri verildikten sonra polinom yapılarla ilgili bazı bilgiler verilmiştir. Daha sonra bronz Riemann manifoldlarının altmanifoldlarını ele alınarak, slant, hemi-slant ve quasi-bi-slant altmanifoldları tanımlanmış ve bunlar üstünde tanımlanan distribsyonların integrallenebilirliği ile ilgili geometrik sonuçlar verilmiştir. Ayrıca çalışılan her bir slant altmanifold türü ile ilgili örnekler elde edilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için Riemann manifoldları ve altmanifoldları ile ilgili temel tanımlar verilecektir.

2.1. Riemann Metriği

Tanım 2.1.1. $\tilde{G}$ bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(\tilde{G})$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{g} : \chi(\tilde{G}) \times \chi(\tilde{G}) \rightarrow C^\infty(\tilde{G})$$

ile tanımlı $\tilde{g}$ bilinear formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani her $\partial_1, \partial_2 \in \chi(\tilde{G})$ için

- i) $\tilde{g}(\partial_1, \partial_2) = \tilde{g}(\partial_2, \partial_1)$,
- ii) $\tilde{g}(\partial_1, \partial_1) \geq 0$ ve her ∂_1 için $\tilde{g}(\partial_1, \partial_1) = 0 \Leftrightarrow \partial_1 = 0$

şartları sağlanıyorsa $\tilde{g}$ bilinear formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir.

Bu durumda $(\tilde{G}, \tilde{g})$ ikilisine Riemann manifoldu denir [16].

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayını ve bu uzay üzerinde

$$\langle \partial_1, \partial_2 \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

iç çarpımını göz önüne alalım. Bu durumda kolayca görülür ki $\langle , \rangle$ bilinear, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla $\langle , \rangle$ bir Riemann metrik ve $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ ikilisi bir Riemann manifoldudur [19].

Tanım 2.1.3. $\tilde{G}$ diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{\#} : \chi(\tilde{G}) \times \chi(\tilde{G}) &\rightarrow \chi(\tilde{G}) \\ (\partial_1, \partial_2) &\rightarrow \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2 \end{aligned}$$

dönüşümü, her $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(\tilde{G})$ ve her $\partial_1, \partial_2, \partial_3 \in \chi(\tilde{G})$ için

- i) $\tilde{\#}_{\tilde{f}\partial_1 + \tilde{g}\partial_2} \partial_3 = \tilde{f}\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_3 + \tilde{g}\tilde{\#}_{\partial_2} \partial_3$
- ii) $\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{f}\partial_2 = \tilde{f}\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2 + (\partial_1 \tilde{f})\partial_2$
- iii) $\tilde{\#}_{\partial_1} (\partial_2 + \partial_3) = \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2 + \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_3$

özelliklerini sağlıyorsa, $\tilde{\#}$ dönüşümüne $\tilde{G}$ üzerinde bir **lineer konneksiyon** denir [19].

Teorem 2.1.4. $(\tilde{G}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\tilde{G}$ üzerinde torsiyonsuz ve $\tilde{g}$ metriği ile uyumlu ($\tilde{\#}\tilde{g} = 0$) bir tek $\tilde{\#}$ lineer konneksiyon vardır [19].

İspat: (Teklik). Kabul edelim ki $T = 0$ ve $\tilde{\#}\tilde{g} = 0$ olacak şekilde bir $\tilde{\#}$ lineer konneksiyonu var olsun. Bu durumda $\partial_1, \partial_2 \in \chi(\tilde{G})$ için $T(\partial_1, \partial_2) = 0$ olduğundan

$$[\partial_1, \partial_2] = \tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2 - \tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, \quad (2.1)$$

dir. Diğer taraftan $\partial_3 \in \chi(\tilde{G})$ için $(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{g})(\partial_2, \partial_3) = 0$ olduğundan

$$\partial_1\tilde{g}(\partial_2, \partial_3) = \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\partial_2, \tilde{\#}_{\partial_1}\partial_3), \quad (2.2)$$

olur. (2.1) ve (2.2) denklemleri kullanılırsa

$$\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) = \partial_1\tilde{g}(\partial_2, \partial_3) - \tilde{g}(\partial_2, \tilde{\#}_{\partial_3}\partial_1) + \tilde{g}([\partial_3, \partial_1], \partial_2)$$

olur. Bu işlem devam ettirilirse

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) &= \partial_1\tilde{g}(\partial_2, \partial_3) + \partial_2\tilde{g}(\partial_3, \partial_1) - \partial_3\tilde{g}(\partial_1, \partial_2) + \tilde{g}(\partial_3, [\partial_1, \partial_2]) \\ &\quad + \tilde{g}(\partial_2, [\partial_3, \partial_1]) - \tilde{g}(\partial_1, [\partial_2, \partial_3]) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Koszul formülü adı verilen

$$\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\partial_1\tilde{g}(\partial_2, \partial_3) + \partial_2\tilde{g}(\partial_3, \partial_1) - \partial_3\tilde{g}(\partial_1, \partial_2) \\ &+ \tilde{g}(\partial_3, [\partial_1, \partial_2]) + \tilde{g}(\partial_2, [\partial_3, \partial_1]) - \tilde{g}(\partial_1, [\partial_2, \partial_3]) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

denklemini bulunur. Bu ifadede $\tilde{G}$ üzerinde ilk iki denklem şartlarını sağlayan her $\tilde{\#}$ konneksiyonu için sağlandığından ve $\tilde{g}$ Riemann metriği pozitif tanımlı olduğundan $\tilde{\#}$ tektir.

(Varlık). ∂_1 ve ∂_2 seçilmiş vektör alanları olmak üzere $\tilde{\#}$ konneksiyonunu (2.3) ile tanımlayalım. Bu durumda kolayca görülür ki $\tilde{\#}$ lineerdir. Buradan (2.1) ve (2.2) şartlarının sağlandığı da görülür.

Tanım 2.1.5. $\tilde{G}$ bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere $\tilde{G}$ nin her noktasına bir lineer altuzay karşılık getiren ve

$$\begin{aligned} D: \tilde{G} &\rightarrow T_p \tilde{G} \\ P &\rightarrow D_p \subset T_p \tilde{G} \end{aligned}$$

ile verilen dönüşüme $\tilde{G}$ üzerinde bir distribüsyon (dağılım) denir [20].

Tanım 2.1.6. D , $\tilde{G}$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir distribüsyon olsun. Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D)$ için $[\partial_1, \partial_2] \in \Gamma(D)$ oluyor ise distribüsyona involütivedir denir. Eğer distribüsyon involutive ise integrallenebilirdir [21].

2.2. Riemann Manifoldların Altmanifoldları

$(\tilde{G}, \tilde{g})$ ve G sırası ile m - boyutlu Riemann manifoldu ve n - boyutlu keyfi manifold olsun. Bu durumda $i: G \rightarrow \tilde{G}$ immersiyonunu gözönüne alalım. i immersiyonu G üzerine i^*g ile tanımlı simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı form, yani Riemann metriği indirger. Bu formu da g ile gösterelim. Bu durumda $(\tilde{G}, g)$ bir Riemann manifoldu ve i de izometrik immersiyon olur. $m-n$ sayısına G altmanifoldunun ek boyutu denir.

$P \in G$ noktasında altmanifoldun tanjant uzayı $T_p G$ olsun. Bu durumda $T_p G$, $T_p \tilde{G}$ tanjant uzayının altvektör uzayıdır. P noktasında $T_p G$ uzayına dik olan tamamlayan uzayı $T_p^\perp G$ ile gösterelim. $T_p^\perp G$ uzayına normal uzay ve bu uzayın meydana getirdiği $T_p^\perp G$ tanjant demete normal demet denir. Böylece $T_p \tilde{G}$ uzayı için

$$T_p \tilde{G} = T_p G \perp T_p^\perp G \quad (2.4)$$

veya

$$T \tilde{G} = T G \perp T^\perp G \quad (2.5)$$

ayrışımı geçerlidir. $N \in T_p^\perp G$ vektörüne normal vektör denir. Normal vektör alanlarının kümesi $\chi^\perp(G)$ ile gösterilir. Şimdi $\tilde{G}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\#}$, ve $\partial_1, \partial_2 \in \chi(G)$, $N \in \chi^\perp(G)$ için

$$(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2)^T = \#_{\partial_1} \partial_2, \quad (\tilde{\#}_{\partial_1} N)^\perp = \tilde{\#}_{\partial_1}^\perp N$$

tanımlayalım, burada T ve $\perp$ sırası ile altmanifoldun tanjant demeti ve normal demeti üzerindeki projeksiyonları göstermektedir. Diğer taraftan

$$(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2)^\perp = h(\partial_1, \partial_2) \quad (2.6)$$

ve

$$(\tilde{\#}_{\partial_1} N)^\perp = -A_N \partial_1 \quad (2.7)$$

tanımlayalım. Bu durumda kolayca görülür ki h simetrik ve bilineerdir. Böylece

$$\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2 = \#_{\partial_1} \partial_2 + h(\partial_1, \partial_2) \quad (2.8)$$

Gauss denklemi ve

$$\tilde{\#}_{\partial_1} N = -A_N \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp N \quad (2.9)$$

Weingarten denklemi elde edilir [16].

Lemma 2.2.1. $\#$, G üzerinde Levi-Civita konneksiyonudur [19].

$h: \chi(G) \times \chi(G) \rightarrow \chi^\perp(G)$ ile tanımlı simetrik h dönüşümüne ikinci temel form ve $\#$ Levi-Civita konneksiyonuna indirgenmiş konneksiyon denir. Ayrıca Lemma 2.2.1. de kine benzer olarak kolayca görülür ki $\#^\perp$, normal demet üzerinde metrik konneksiyondur, yani $(\#^\perp g) = 0$ dır. $\#^\perp$ konneksiyonuna normal konneksiyon ve $A_N: \chi(G) \rightarrow \chi(G)$ ile tanımlı operatöre de Weingarten temel tensörü denir [19].

Aşağıdaki lemma ikinci temel form ile Weingarten temel tensörü arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Lemma 2.2.2. $(\tilde{G}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve $G, \tilde{G}$ manifoldunun alt manifoldu olsun.

Bu durumda $\partial_1, \partial_2 \in \chi(G)$ ve $N \in \chi^\perp(G)$ için

$$g(A_N \partial_1, \partial_2) = g(h(\partial_1, \partial_2), N) \quad (2.10)$$

dur [16].

Tanım 2.2.3. $(\tilde{G}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve $G, \tilde{G}$ manifoldunun altmanifoldu olsun.

Eğer h ikinci temel form sıfır ise altmanifoldta tamamen jeodeziktir denir [19].

(2.8) Gauss formülü tamamen jeodeziklik kavramının geometrik olarak ne anlama geldiğini söylemektedir. Gerçekten Gauss formülünden, bir altmanifoldun tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart G altmanifoldundaki her jeodeziğin aynı zamanda $\tilde{G}$ manifoldunda da jeodezik olmasıdır. Tamamen jeodezik altmanifoldlar en basit altmanifoldlardır. Örneğin düzlem (doğru veya hiper düzlem) bir tamamen jeodezik altmanifolddur [19].

$N \in \chi^\perp(G)$ ve $\lambda \in C^\infty(G, \mathbb{R})$ olmak üzere $A_N = \lambda I$ ise G altmanifoldu N vektör alanına göre umbiliktir denir. Eğer G altmanifoldu her normal vektör alanına göre umbilik ise G altmanifolduna tamamen umbilik altmanifold denir. Tamamen umbilik altmanifoldlar tamamen jeodezik altmanifoldlarına en yakın altmanifoldlardır [19].

Aşağıdaki teorem tamamen umbilik altmanifoldlar için kullanışlı bir karakterizasyon sunmaktadır.

Teorem 2.2.4. $\tilde{G}$ bir Riemann manifoldu ve $G, \tilde{G}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda H altmanifoldun ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere G altmanifoldunun tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart $\partial_1, \partial_2 \in \chi(G)$ için

$$h(\partial_1, \partial_2) = g(\partial_1, \partial_2)H \quad (2.11)$$

olmasıdır [16].

Ayrıca görülmektedir ki bir G altmanifoldunun tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart $\partial_1 \in \chi(G)$ ve $N \in \chi(G)^\perp$ için

$$A_N \partial_1 = g(H, N) \partial_1$$

olmasıdır.

2.3. Manifold Üzerinde Polinom Yapılar

Bu kısımda manifoldlar üzerinde polinom yapının tanımını ve bu yapılara örnekler vereceğiz. Daha sonra metalik oranlardan ilham alınarak tanımlanmış polinom yapılara değineceğiz.

Tanım 2.3.1. φ bir diferensiyellenebilir $\tilde{G}$ manifoldu üzerinde $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer φ

$$Q(X) = X^k + a_k X^{k-1} + \dots + a_2 X + a_1 I = 0 \quad (2.12)$$

denklemini sağlıyorsa φ ye bir polinom yapı denir. Burada $q \in \tilde{G}$ için

$\varphi^k(q), \varphi^{k-1}(q), \varphi^{k-2}(q), \dots, \varphi(q), I$ lineer bağımsızdırlar [3]. Ayrıca $Q(X)$ polinomuna ise yapı polinomu denir.

Tanım 2.3.2. Bir diferensiyellenebilir $\tilde{G}$ manifold için J, G üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. Eğer J

$$Q(X) = X^2 + I = 0 \quad (2.13)$$

yapı polinomunu sağlıyorsa J ye hemen hemen kompleks yapı denir [3]. Buna göre

$J^2 = -I$ olur.

Tanım 2.3.3. Bir diferensiyellenebilir $\tilde{G}$ manifoldu için P , $\tilde{G}$ üzerinde $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer P

$$Q(X) = X^2 - I = 0 \quad (2.14)$$

yapı polinomunu sağlıyorsa P ye hemen hemen çarpım yapı denir [3]. Buna göre $P^2 = I$ dir.

Tanım 2.3.4. Bir diferensiyellenebilir $\tilde{G}$ manifoldu için $\tilde{P}$, $\tilde{G}$ üzerinde $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer $\tilde{P}$

$$Q(X) = X^2 - X - I = 0 \quad (2.15)$$

yapı polinomunu sağlıyorsa $\tilde{P}$ ye hemen hemen altın yapı denir [3]. Buna göre $\tilde{P}^2 = \tilde{P} + I$ dır.

Tanım 2.3.5. Bir diferensiyellenebilir $\tilde{G}$ manifoldu için $\tilde{J}$, $\tilde{G}$ üzerinde $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer $\tilde{J}$

$$Q(X) = X^2 - pX - qI = 0 \quad (2.16)$$

yapı polinomunu sağlıyorsa $\tilde{J}$ ya hemen hemen metalik yapı denir [2]. Buna göre $\tilde{J}^2 = p\tilde{J} + qI$ dır. Burada p ve q pozitif tamsayılardır.

Tanım 2.3.6. Bir diferensiyellenebilir $\tilde{G}$ manifoldu için $\tilde{\Phi}$, $\tilde{G}$ üzerinde $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer $\tilde{\Phi}$

$$Q(X) = X^2 - 3X - I = 0 \quad (2.17)$$

yapı polinomunu sağlıyorsa $\tilde{\Phi}$ ya hemen hemen bronz yapı denir [2]. Buna göre $\tilde{\Phi}^2 = 3\tilde{\Phi} + I$ dır.

3. RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BRONZ YAPILAR

Bu bölümde $Q(X) = X^2 - 3X - I = 0$ yapı polinomuna sahip $(1,1)$ – tipinde tensör alanı $\tilde{\Phi}$ yardımıyla bir Riemann manifold üzerinde bronz yapı tanımlanıp bu yapının geometrik özellikleri incelenecektir.

3.1. Riemann Manifoldları Üzerinde Bronz Yapı

Tanım 3.1.1. Bir diferensiyellenebilir $\tilde{G}$ manifold üzerinde tanımlı $(1,1)$ - tipli tensör alanı $\tilde{\Phi}$ olsun, $\tilde{G}$ üzerinde

$$\tilde{\Phi}^2 = 3\tilde{\Phi} + I \quad (3.1)$$

eşitliğini gerçekleyen $\tilde{\Phi}$ tensör alanına bir bronz yapı denir. Bu durumda $(\tilde{G}, \tilde{\Phi})$ ikilisine hemen hemen bronz manifold denir [17].

Örnek 3.1.2. [18] $\mathbb{R}^4$ reel uzayı üzerinde

$$\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, w_3, w_4) = (\eta_{br} w_1, \bar{\eta}_{br} w_2, \eta_{br} w_3, \bar{\eta}_{br} w_4)$$

dönüşümü tanımlayalım. Burada

$$\eta_{br} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad \bar{\eta}_{br} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

dir. $\tilde{\Phi}$ nin (3.1) eşitliğini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^2(\partial_1) &= (3\tilde{\Phi} + I)\partial_1, \\ \tilde{\Phi}^2(\partial_1) &= \tilde{\Phi}^2(w_1, w_2, w_3, w_4) = \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}(w_1, w_2, w_3, w_4)) \\ &= \tilde{\Phi}(\eta_{br} w_1, \bar{\eta}_{br} w_2, \eta_{br} w_3, \bar{\eta}_{br} w_4) \\ &= (\eta_{br}^2 w_1, \bar{\eta}_{br}^2 w_2, \eta_{br}^2 w_3, \bar{\eta}_{br}^2 w_4) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (3\tilde{\Phi} - I)(\partial_1) &= 3\tilde{\Phi}(\partial_1) + I(\partial_1) \\ &= 3\tilde{\Phi}(\partial_1) + \partial_1 \\ &= 3(\eta_{br}^2 w_1, \bar{\eta}_{br}^2 w_2, \eta_{br}^2 w_3, \bar{\eta}_{br}^2 w_4) + (w_1, w_2, w_3, w_4) \\ &= ((3\eta_{br}^2 + 1)w_1, (3\bar{\eta}_{br}^2 + 1)w_2, (3\eta_{br}^2 + 1)w_3, (3\bar{\eta}_{br}^2 + 1)w_4) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\eta_{br} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{ve} \quad \bar{\eta}_{br} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

dır. O halde

$$\eta_{br}^2 = \frac{22+6\sqrt{13}}{4} \text{ ve } \bar{\eta}_{br}^2 = \frac{22-6\sqrt{13}}{4}$$

olur. Buradan

$$\eta_{br}^2 = 3\eta_{br} + 1 \quad \text{ve} \quad \bar{\eta}_{br}^2 = 3\bar{\eta}_{br} + 1$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\Phi}^2 = 3\tilde{\Phi} + I$ olduğu kolayca görülür ve $(\mathbb{R}^4, \tilde{\Phi})$ ikilisi bronz yapıya bir örnektir.

Tanım 3.1.3. $(\tilde{G}, \tilde{\Phi})$ bir hemen hemen bronz manifold $\tilde{g}, \tilde{G}$ üzerinde bir Riemann metrik olmak üzere her $\partial_1, \partial_2 \in \chi(\tilde{G})$ için

$$\tilde{g}(\tilde{\Phi}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_2) = 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\partial_1, \partial_2) + \tilde{g}(\partial_1, \partial_2) \quad (3.2)$$

ise $\tilde{g}$ ye $\tilde{\Phi}$ bronz yapısıyla uyumlu Riemann metriktir denir [18].

(3.2) denkleminde

$$\tilde{g}(\tilde{\Phi}\partial_1, \partial_2) = \tilde{g}(\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_2) \quad (3.3)$$

olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.1.4. $(\tilde{G}, \tilde{g})$ Rieman manifoldu $\tilde{\Phi}$ bronz yapısı ile verilsin. $\tilde{g}$ Riemann metriği bronz yapı $\tilde{\Phi}$ ile uyumlu ise $(\tilde{g}, \tilde{\Phi})$ ikilisine $\tilde{G}$ üzerinde hemen hemen bronz Riemann yapı denir. Böylece $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ bir hemen hemen bronz Riemann manifold olur [18].

Önerme 3.1.5. Bir hemen hemen bronz yapı $\tilde{\Phi}$ nin özdeğerleri $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ve $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ dir [17].

İspat: Her $\partial_1 \in \chi(\tilde{G})$ için $\tilde{\Phi}\partial_1 = \lambda\partial_1$ ise

$$\tilde{\Phi}^2\partial_1 = \lambda\tilde{\Phi}(\partial_1)$$

$$3\tilde{\Phi}(\partial_1) + (\partial_1) = \lambda\tilde{\Phi}(\partial_1)$$

$$3\lambda\partial_1 + \partial_1 = \lambda^2\partial_1$$

$$\lambda^2\partial_1 - 3\lambda\partial_1 - \partial_1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 3\lambda - 1)\partial_1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{13}}{2}$$

elde edilir.

Önerme 3.1.6. Bir Riemann manifold üzerindeki her çarpım yapısı

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{3}{2}I + \frac{\sqrt{13}}{2}P$$

ve

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{3}{2}I - \frac{\sqrt{13}}{2}P$$

ile verilen iki bronz yapı indirger [17].

İspat: Her $\partial_1 \in \mathcal{H}(\tilde{G})$ için $\tilde{\Phi}_1^2 = 3\tilde{\Phi}_1 + I$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1^2 &= \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}_1(\partial_1)) = \tilde{\Phi}_1 \left(\frac{3}{2}I(\partial_1) + \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \right) \\ &= \frac{3}{2}I(\partial_1) \left(\frac{3}{2}I(\partial_1) + \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \right) + \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \left(\frac{3}{2}I(\partial_1) + \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \right) \\ &= \frac{9}{4}I^2(\partial_1) + \frac{3\sqrt{13}}{4}P(\partial_1)I(\partial_1) + \frac{3\sqrt{13}}{4}I(\partial_1)P(\partial_1) + \frac{13}{4}P^2(\partial_1) \\ &= \frac{22}{4} + \frac{3\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 3\tilde{\Phi}_1 + I &= 3 \left(\frac{3}{2}I(\partial_1) + \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \right) + I(\partial_1) \\ &= \frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\tilde{\Phi}_1^2 = 3\tilde{\Phi}_1 + I$ olduğu görülür.

Şimdi de $\tilde{\Phi}_2^2 = 3\tilde{\Phi}_2 + I$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2^2 &= \tilde{\Phi}(\tilde{\Phi}_2(\partial_1)) = \tilde{\Phi}_2 \left(\frac{3}{2}I(\partial_1) - \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \right) \\ &= \frac{3}{2}I(\partial_1) \left(\frac{3}{2}I(\partial_1) - \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \right) + \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \left(\frac{3}{2}I(\partial_1) - \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \right) \\ &= \frac{9}{4}I^2(\partial_1) - \frac{3\sqrt{13}}{4}P(\partial_1)I(\partial_1) + \frac{3\sqrt{13}}{4}I(\partial_1)P(\partial_1) - \frac{13}{4}P^2(\partial_1) \\ &= \frac{22}{4} - \frac{3\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 3\tilde{\Phi}_2 + I &= 3\left(\frac{3}{2}I(\partial_1) - \frac{\sqrt{13}}{2}P(\partial_1)\right) + I(\partial_1) \\ &= \frac{11}{2} - \frac{3\sqrt{13}}{2}P(\partial_1) \end{aligned}$$

dir. Buradan $\tilde{\Phi}_2^2 = 3\tilde{\Phi}_2 + I$ elde edilir.

Önerme 3.1.7. Bir Riemann manifold üzerindeki her hemen hemen bronz yapı

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi} - \frac{3}{\sqrt{13}}I, \quad P_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi} + \frac{3}{\sqrt{13}}I$$

ile verilen iki hemen hemen çarpım yapıyı oluşturur [17].

İspat: $P_1^2 = I$ olduğunu göstereceğiz

$$\begin{aligned} P_1^2(\partial_1) &= P_1\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi}(\partial_1) - \frac{3}{\sqrt{13}}I(\partial_1)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi}(\partial_1)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi}(\partial_1) - \frac{3}{\sqrt{13}}I(\partial_1)\right) - \frac{3}{\sqrt{13}}I(\partial_1)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi}(\partial_1) - \frac{3}{\sqrt{13}}I(\partial_1)\right) \\ &= \frac{4}{13}\tilde{\Phi}^2(\partial_1) - \frac{6}{13}\tilde{\Phi}(\partial_1)I(\partial_1) - \frac{6}{13}I(\partial_1)\tilde{\Phi}(\partial_1) + \frac{9}{13}I^2(\partial_1) \\ &= \frac{4}{13}(3\tilde{\Phi}(\partial_1) + I(\partial_1)) - \frac{12}{13}\tilde{\Phi}(\partial_1) + \frac{9}{13} \\ &= I \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer olarak $P_2^2 = I$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} P_2^2(\partial_1) &= P_2\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi}(\partial_1) + \frac{3}{\sqrt{13}}I(\partial_1)\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi}(\partial_1)\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi}(\partial_1) + \frac{3}{\sqrt{13}}I(\partial_1)\right) + \frac{3}{\sqrt{13}}I(\partial_1)\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{\Phi}(\partial_1) + \frac{3}{\sqrt{13}}I(\partial_1)\right) \\ &= \frac{4}{13}\tilde{\Phi}^2(\partial_1) - \frac{6}{13}\tilde{\Phi}(\partial_1)I(\partial_1) - \frac{6}{13}\tilde{\Phi}(\partial_1)I(\partial_1) + \frac{9}{13}I^2(\partial_1) \\ &= \frac{4}{13}(3\tilde{\Phi}(\partial_1) + I(\partial_1)) - \frac{12}{13}\tilde{\Phi}(\partial_1) + \frac{9}{13} \\ &= I \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.8. $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ bir hemen hemen bronz Riemann manifold olsun. Eğer $\tilde{\Phi}$ hemen hemen bronz yapısı, $\tilde{G}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel yani

$$\tilde{\#}\tilde{\Phi}=0 \quad (3.4)$$

ise $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ üçlüsüne bir bronz Riemann manifold denir [18].

3.2. Altmanifoldları Bronz Riemann Manifoldları

Bir $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ bronz Riemann manifoldunun bir alt manifoldu G olsun. Her $\partial_1, \partial_2 \in \chi(G)$ ve $N \in \chi^\perp(G)$ için Gauss ve Weingarten formülleri

$$\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2 = \#_{\partial_1} \partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), \quad (3.5)$$

$$\tilde{\#}_{\partial_1} N = A_N \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp N \quad (3.6)$$

ile verilir. Burada $\tilde{\#}$, $\#$ ve $\#^\perp$ sırasıyla $\tilde{G}$ üstünde Levi-Civita konneksiyonu, G üzerinde indirgenmiş konneksiyon ve G nin $T^\perp G$ normal demet üstündeki konneksiyonudur.

Herhangi $\partial_1 \in \chi(G)$ için

$$\tilde{\Phi} \partial_1 = f_{br} \partial_1 + t_{br} \partial_1 \quad (3.7)$$

yazılabilir. Burada $f_{br} : \chi(G) \rightarrow \chi(G)$ teğet bileşen, $t_{br} : \chi(G) \rightarrow \chi^\perp(G)$ normal bileşendir.

Aynı şekilde $N \in \chi^\perp(G)$ için

$$\tilde{\Phi} N = B_{br} N + C_{br} N \quad (3.8)$$

dir. Burada $B_{br} : \chi^\perp(G) \rightarrow \chi(G)$ teğet bileşen, $C_{br} : \chi^\perp(G) \rightarrow \chi^\perp(G)$ normal bileşendir.

4. BRONZ RIEMANN MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI

4.1. Bronz Riemann Manifolddların Slant Altmanifolddları

Tanım 4.1.1. Her $v \in G$ ve sıfırdan farklı tanjant vektörü $\partial_v \in \Gamma(TG)$ için $\tilde{\Phi}\partial_v$ ve $f_{br}\partial_v$ arasındaki $\theta(\partial_v)$ açısına ∂ nın Wirtinger açısı denir ve

$$\cos \theta(\partial_v) = \frac{\tilde{g}(\tilde{\Phi}\partial_v, f_{br}\partial_v)}{\|\tilde{\Phi}\partial_v\| \|f_{br}\partial_v\|} \quad (4.1)$$

dir.

Tanım 4.1.2. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın bir altmanifolddu G olsun. Her $v \in G$ için $\tilde{\Phi}\partial_v$ ve $f_{br}\partial_v$ arasındaki $\theta(\partial_v)$ açısı sabitse altmanifolddda slant altmanifoldd denir ve

$$\cos \theta(\partial_v) = \frac{\tilde{g}(\tilde{\Phi}\partial, f_{br}\partial)}{\|\tilde{\Phi}\partial\| \|f_{br}\partial\|} = \frac{\|f_{br}\partial\|}{\|\tilde{\Phi}\partial\|} \quad (4.2)$$

eşitliğini gerçektler.

Bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın slant açısı $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant

altmanifolddları sırası ile invaryant ve anti-invaryant altmanifolddlardır, ne invaryant ne de anti-invaryant altmanifoldd olmayan bir slant altmanifoldd proper (öz, has) slant altmanifoldd olarak isimlendirilir.

Önerme 4.1.3. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın bir altmanifolddu G olsun. Eğer G slant açısı θ olan bir slant altmanifoldd ise her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(TG)$ için

$$\tilde{g}(f_{br}\partial_1, f_{br}\partial_2) = \cos^2 \theta (3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\partial_1, \partial_2) + \tilde{g}(\partial_1, \partial_2)), \quad (4.3)$$

$$\tilde{g}(t_{br}\partial_1, t_{br}\partial_2) = \sin^2 \theta (3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\partial_1, \partial_2) + \tilde{g}(\partial_1, \partial_2)) \quad (4.4)$$

dür.

Teorem 4.1.4. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın bir altmanifolddu G nin slant olması için gerek ve yeter şart

$$f_{br}^2 = \lambda(3f_{br} + I) \quad (4.5)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $G, (\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın bir slant altmanifoldu olsun. Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(TG)$ için (3.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{g}(f_{br}^2 \partial_1, \partial_2) &= \tilde{g}(f_{br} \partial_1, f_{br} \partial_2) \\ &= \cos^2 \theta \tilde{g}(\tilde{\Phi} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_2) \\ &= \cos^2 \theta (\tilde{g}(\tilde{\Phi} \partial_1, \partial_2) + \tilde{g}(\partial_1, \partial_2)) \\ &= \cos^2 \theta (\tilde{g}(3\tilde{\Phi} \partial_1 + \partial_1, \partial_2)) \\ &= \cos^2 \theta \tilde{g}(3f_{br} \partial_1 + \partial_1, \partial_2) \end{aligned}$$

olduğundan

$$f_{br}^2 \partial_1 = \cos^2 \theta (3f_{br} \partial_1 + \partial_1)$$

elde edilir. Burada $\lambda = \cos^2 \theta$ dir.

Diğer taraftan, $f_{br}^2 = \lambda(3f_{br} + I)$ olacak şekilde $\lambda \in [0,1]$ sayısı var ise her $\partial_1 \in \Gamma(TG)$ için

$$\begin{aligned} \cos \theta (\partial_1) &= \frac{\tilde{g}(\tilde{\Phi} \partial_1, f_{br} \partial_1)}{\|\tilde{\Phi} \partial_1\| \|f_{br} \partial_1\|} \\ &= \frac{\tilde{g}(\partial_1, \tilde{\Phi}(f_{br} \partial_1))}{\|\tilde{\Phi} \partial_1\| \|f_{br} \partial_1\|} \\ &= \frac{\tilde{g}(\partial_1, f_{br}^2 \partial_1)}{\|\tilde{\Phi} \partial_1\| \|f_{br} \partial_1\|} \\ &= \frac{\tilde{g}(\partial_1, \lambda(3f_{br} \partial_1 + \partial_1))}{\|\tilde{\Phi} \partial_1\| \|f_{br} \partial_1\|} \\ &= \lambda \frac{3\tilde{g}(\partial_1, \tilde{\Phi} \partial_1) + \tilde{g}(\partial_1, \partial_1)}{\|\tilde{\Phi} \partial_1\| \|f_{br} \partial_1\|} \\ &= \lambda \frac{\tilde{g}(\tilde{\Phi} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_1)}{\|\tilde{\Phi} \partial_1\| \|f_{br} \partial_1\|} \\ &= \lambda \frac{\|\tilde{\Phi} \partial_1\|^2}{\|\tilde{\Phi} \partial_1\| \|f_{br} \partial_1\|} \\ &= \lambda \frac{\|\tilde{\Phi} \partial_1\|}{\|f_{br} \partial_1\|} \end{aligned}$$

olup $\cos \theta = \frac{\|f_{br} \partial_1\|}{\|\tilde{\Phi} \partial_1\|}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\cos \theta = \lambda \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \lambda = \cos^2 \theta$$

elde edilir. Sonuç olarak λ sabit olduğundan θ sabit olup G slant alt manifold olur.

Tanım 4.1.5. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin bir altmanifoldu G olmak üzere her bir $x \in G$ ve sıfırdan farklı her bir $\partial_1 \in D_x$ için $\tilde{\Phi}\partial_1$ ve D_x vektör uzayı arasındaki açı sabit ise D distribüsyonuna slant distribüsyon denir.

4.2. Bronz Riemann Manifoldların Hemi-Slant Altmanifoldları

Tanım 4.2.1. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin bir altmanifodu G olsun. G üstünde iki ortogonal D_α ve D_β distribüsyonları aşağıdaki koşulları gerçekler ise G ye hemi-slant altmanifold denir [18].

- i) $TG = D_\alpha \perp D_\beta$
- ii) D_α distribüsyonu θ_α açısıyla slanttır,
- iii) D_β distribüsyonu anti invaryanttır. Yani $\tilde{\Phi}D_\beta \subseteq \Gamma(T^\perp G)$ dir.

D_α ve D_β distribüsyonlarının boyutları sırasıyla $boyD_\alpha$ ve $boyD_\beta$ ile gösterilirse

- $boyD_\alpha = 0$ ise G anti-invaryant altmanifolddur.
- $boyD_\beta = 0$ ve $\theta_\alpha = 0$ ise G invaryant altmanifolddur.
- $boyD_\beta = 0$ ve $\theta_\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise G , θ_α açılı bir proper (has) hemi-slant altmanifolddur.

Örnek 4.2.2. $\mathbb{R}^4$ te (w_1, w_2, w_3, w_4) koordinat sistemini göz önüne alırsak

$$\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, w_3, w_4) = (\eta_{br}w_1, \bar{\eta}_{br}w_2, 3w_3 - w_4, -w_3)$$

denirse $(\mathbb{R}^4, \tilde{\Phi})$ ikilisinin bir hemen hemen bronz manifold tanımladığı görülür. $\mathbb{R}^4$

üzerinde ki alışılmış metrik ile birlikte $(\mathbb{R}^4, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ bir hemen hemen bronz Riemann

manifold olur. Burada $\eta_{br} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\bar{\eta}_{br} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ dir.

$(\mathbb{R}^4, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ üzerinde

$$w_1 = u \cos s, \quad w_2 = u \sin s, \quad w_3 = 2v, \quad w_4 = 3v$$

ile tanımlanan G altmanifoldu göz önüne alınırsa

$$\tau_1 = \cos s \partial w_1 + \sin s \partial w_2, \quad \tau_2 = 2\partial w_3 + 3\partial w_4$$

için $TG = \text{Span}\{\tau_1, \tau_2\}$ olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}\tau_1 &= \eta_{br} \cos s \partial w_1 + \bar{\eta}_{br} \sin s \partial w_2, \\ \tilde{\Phi}\tau_2 &= 3\partial w_1 - 2\partial w_4\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Buradan $\tilde{\Phi}(\tau_2) \perp \text{Span}\{\tau_1, \tau_2\}$ olup $D_\beta = \text{Span}\{\tau_2\}$ dir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}\cos \theta_\alpha &= \frac{g(\tilde{\Phi}\tau_1, \tau_1)}{\|\tilde{\Phi}\tau_1\| \|\tau_1\|} \\ &= \frac{\eta_{br} \cos^2 s + \bar{\eta}_{br} \sin^2 s}{\sqrt{\eta_{br} \cos^2 s + \bar{\eta}_{br} \sin^2 s}}\end{aligned}$$

olup $D_\alpha = \text{Span}\{\tau_1\}$ olduğundan G bir hemi-slant altmanifold olur.

Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin bir hemi-slant altmanifoldu G olsun.

D_α ve D_β üzerindeki projeksiyonlar Q_α ve Q_β ile gösterilmek üzere herhangi bir

$\partial_1 \in \Gamma(TG)$ için

$$\partial_1 = Q_\alpha \partial_1 + Q_\beta \partial_1 \quad (4.6)$$

yazılabilir. (4.6) ile (3.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}\partial_1 &= \tilde{\Phi}(Q_\alpha \partial_1) + \tilde{\Phi}(Q_\beta \partial_1) \\ &= f_{br} Q_\alpha \partial_1 + t_{br} Q_\alpha \partial_1 + f_{br} Q_\beta \partial_1 + t_{br} Q_\beta \partial_1\end{aligned}$$

elde edilir. Burada G nin hemi-slant altmanifold olduğu göz önüne alınırsa

$$\tilde{\Phi}\partial_1 = f_{br} Q_\alpha \partial_1 + t_{br} \partial_1 \quad (4.7)$$

bulunur.

Teorem 4.2.3. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_α distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\beta)$

için

$$g(h(\partial_1, f_{br} \partial_2) - h(\partial_2, f_{br} \partial_1), t_{br} \partial_3) = g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1 - \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} \partial_3)$$

ve

$$g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br}\partial_3) = g(h(\partial_2, \partial_1), t_{br}\partial_3)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki G , $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın hemi-slant altmanifoldu olsun. Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\beta)$ için (3.2), (3.4) ve (3.5) ten

$$\begin{aligned} \tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}\tilde{\Phi}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}f_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &= g(\tilde{\#}_{\partial_1}f_{br}\partial_2 + h(\partial_1, f_{br}\partial_2), t_{br}\partial_3) - g(\tilde{\#}_{\partial_2}f_{br}\partial_1 + h(\partial_2, f_{br}\partial_1), t_{br}\partial_3) \\ &\quad + g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 + \tilde{\#}_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, t_{br}\partial_3) - g(-A_{t_{br}\partial_1}\partial_2 + \tilde{\#}_{\partial_2}^\perp t_{br}\partial_1, t_{br}\partial_3) \\ &\quad - 3g(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), t_{br}\partial_3) + 3g(\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1 + h(\partial_2, \partial_1), t_{br}\partial_3) \\ &= g(h(\partial_1, f_{br}\partial_2), t_{br}\partial_3) + g(\tilde{\#}_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, t_{br}\partial_3) \\ &\quad - g(h(\partial_2, f_{br}\partial_1), t_{br}\partial_3) - g(\tilde{\#}_{\partial_2}^\perp t_{br}\partial_1, t_{br}\partial_3) \\ &\quad - 3g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br}\partial_3) + 3g(h(\partial_2, \partial_1), t_{br}\partial_3) \end{aligned}$$

olup buradan istenen eşitlikler elde edilir.

Teorem 4.2.4. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın hemi-slant altmanifoldu G olsun.

D_β distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\alpha)$ için

$$g(A_{t_{br}\partial_1}\partial_2 - A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, f_{br}\partial_3) = g(\tilde{\#}_{\partial_2}^\perp t_{br}\partial_1 - \tilde{\#}_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, t_{br}\partial_3)$$

ve

$$g(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2 - \tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, f_{br}\partial_3) = g(h(\partial_2, \partial_1) - h(\partial_1, \partial_2), t_{br}\partial_3)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki G , $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın hemi-slant altmanifoldu olsun. Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$

ve $\partial_3 \in \Gamma(D_\alpha)$ için (3.2), (3.4) ve (3.6) dan

$$\tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) = \tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \partial_3)$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}\tilde{\Phi}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}t_{br}\partial_1, f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2}\partial_1, f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) \\
&= g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) \\
&\quad - g(-A_{t_{br}\partial_1}\partial_2 + \#_{\partial_2}^\perp t_{br}\partial_1, f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1}\partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) \\
&\quad + 3g(\#_{\partial_2}\partial_1 + h(\partial_2, \partial_1), f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) \\
&= -g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, f_{br}\partial_3) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, t_{br}\partial_3) \\
&\quad + g(A_{t_{br}\partial_1}\partial_2, f_{br}\partial_3) - g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br}\partial_1, t_{br}\partial_3) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1}\partial_2, f_{br}\partial_3) - 3g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br}\partial_3) \\
&\quad + 3g(\#_{\partial_2}\partial_1, f_{br}\partial_3) + 3g(h(\partial_2, \partial_1), t_{br}\partial_3)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan istenen eşitlikler elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.5. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_α distribüsyonu altmanifoldu üzerinde tamamen jeodeziktir ancak ve ancak

$\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\beta)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için

$$g(A_{t_{br}f_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}f_{br}\partial_2, t_{br}\partial_3), \quad g(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \partial_3) = g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3)$$

ve

$$g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, B_{br}N) - g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}f_{br}\partial_2, N) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, C_{br}N),$$

$$g(\#_{\partial_1}\partial_2, B_{br}N) = -g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br}N)$$

olmasıdır.

İspat: Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $\partial_3 \in \Gamma(D_\beta)$ için (3.2), (3.4) ve (3.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}f_{br}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}f_{br}^2\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}f_{br}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \partial_3) \\
& = \cos^2 \theta_\alpha \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) + g(-A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} f_{br} \partial_2, \partial_3) \\
& - 3g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, \partial_3)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
(1 - \cos^2 \theta_\alpha) \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) & = -g(A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} \partial_3) \\
& - 3g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) + 3g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde her $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için (3.8) den

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) & = \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, N) \\
& = \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
& = \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
& = \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} f_{br} \partial_2, N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
& = \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br}^2 \partial_2, N) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} f_{br} \partial_2, N) \\
& + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
& = \cos^2 \theta_\alpha \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) + g(-A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} f_{br} \partial_2, N) \\
& + g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, B_{br} N + C_{br} N) \\
& - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), B_{br} N + C_{br} N)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
(1 - \cos^2 \theta_\alpha) \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) & = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} f_{br} \partial_2, N) - g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 + B_{br} N) \\
& + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, C_{br} N) - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N) \\
& - 3g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br} N)
\end{aligned}$$

olur ki böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.6. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_β distribüsyonu altmanifoldu üzerinde tamamen jeodeziktir ancak ve ancak her

$\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\alpha)$ için

$$g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} \partial_3) - 3g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} \partial_3)$$

ve

$$g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, B_{br} N) + 3g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, N) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, C_{br} N)$$

olmasıdır.

İspat: Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$ ve $\partial_1 \in \Gamma(D_\alpha)$ için (3.2), (3.4) ve (3.7) den

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \partial_3) \\ &= g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, f_{br}\partial_3 + t_{br}\partial_3) \\ &\quad - 3g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, \partial_3)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) = -g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, f_{br}\partial_3) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, t_{br}\partial_3) + 3g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3)$$

bulunur.

Diğer taraftan her $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için (3.7) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, N) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, N) \\ &= -g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, B_{br}N) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, C_{br}N) - 3g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, N)\end{aligned}$$

yazılır. Bu da ispatı tamamlar.

4.3. Bronz Riemann Manifoldların Quasi-Hemi-Slant Altmanifoldları

Teorem 4.3.1. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın bir altmanifoldu G olsun. G üzerinde üç ortogonal D_γ , D_α ve D_β distribüsyonu aşağıdaki koşulları gerçekler ise G ye quasi-hemi-slant altmanifold denir [18].

- i) $TG = D_\gamma \perp D_\alpha \perp D_\beta$.
- ii) D_γ distribüsyonu invaryanttır, yani $\tilde{\Phi}(D_\gamma) = D_\gamma$.
- iii) D_α distribüsyonu θ_α açısıyla slanttır.
- iv) D_β distribüsyonu anti-invaryanttır, yani $\tilde{\Phi}(D_\beta) \subseteq \Gamma(T^\perp G)$ dir.

Bu tanım göz önüne alınırsa $\text{boy}(D_\gamma) \neq 0$, $\text{boy}(D_\alpha) \neq 0$, $\text{boy}(D_\beta) \neq 0$ ve $\theta_\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$

ise G , θ_α açılı bir proper (has) quasi-hemi-slant altmanifolddur.

Örnek 4.3.2. $\mathbb{R}^6$ da $(w_1, w_2, \dots, w_6)$ koordinat sistemini göz önüne alırsak

$$\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$$

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \dots, w_6) = (\eta_{br} w_1, \eta_{br} w_2, \bar{\eta}_{br} w_3, 3w_4 - w_5, -w_4, \bar{\eta}_{br} w_6)$$

denirse $(\mathbb{R}^6, \tilde{\Phi})$ ikilisi bir hemen hemen bronz manifold olur. $\mathbb{R}^6$ üzerindeki alıılmış metrik ile birlikte $(\mathbb{R}^6, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ bir hemen hemen bronz Riemann manifold olur.

$$\text{Burada } \eta_{br} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \bar{\eta}_{br} = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ dir.}$$

$(\mathbb{R}^6, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ üzerinde

$$w_1 = u \cos s + v \sin s, w_2 = u \sin s + v \cos s, w_3 = u, w_4 = t, w_5 = \frac{3}{2}t, w_6 = k$$

ile tanımlanan G altmanifoldu göz önüne alınırsa

$$\tau_1 = \cos s \partial w_1 + \sin s \partial w_2 + \partial w_3,$$

$$\tau_2 = \sin s \partial w_1 + \cos s \partial w_2,$$

$$\tau_3 = \partial w_4 + \frac{3}{2} \partial w_5,$$

$$\tau_4 = \partial w_6$$

için $TG = \text{Span}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ olur. Diğer taraftan

$$\tilde{\Phi}(\tau_1) = \eta_{br} \cos s \partial w_1 + \eta_{br} \sin s \partial w_2 + \bar{\eta}_{br} \partial w_3,$$

$$\tilde{\Phi}(\tau_2) = \eta_{br} \sin s \partial w_1 + \eta_{br} \cos s \partial w_2,$$

$$\tilde{\Phi}(\tau_3) = \frac{3}{2} \partial w_4 - \partial w_5,$$

$$\tilde{\Phi}(\tau_4) = \bar{\eta}_{br} \partial w_6$$

olduğu görülebilir. Buradan $\tilde{\Phi}(\tau_2) = \eta_{br} \tau_2$, $\tilde{\Phi}(\tau_4) = \bar{\eta}_{br} \tau_4$ olup $D_\gamma = \text{Span}\{\tau_2, \tau_4\}$,

$\tilde{\Phi}(\tau_3) \perp \text{Span}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ olduğundan $D_\beta = \text{Span}\{\tau_3\}$ ve

$$\begin{aligned} \cos \theta_\alpha &= \frac{\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tau_1, \tau_1)}{\|\tilde{\Phi}\tau_1\| \|\tau_1\|} \\ &= \frac{\eta_{br} + \bar{\eta}_{br}}{\sqrt{\eta_{br}^2 + \bar{\eta}_{br}^2} \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{22}} \end{aligned}$$

olup $D_\alpha = \text{Span}\{\tau_1\}$ olduğundan G bir quasi-hemi-slant altmanifold olur.

Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın bir quasi-hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_γ , D_α ve D_β üzerindeki projeksiyonlar Q_γ , Q_α ve Q_β ile gösterilmek üzere herhangi bir $\partial_1 \in \Gamma(TG)$ için

$$\partial_1 = Q_\gamma \partial_1 + Q_\alpha \partial_1 + Q_\beta \partial_1 \quad (4.8)$$

yazılabilir. (4.8) ile (3.7) birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} \partial_1 &= \tilde{\Phi}(Q_\gamma \partial_1) + \tilde{\Phi}(Q_\alpha \partial_1) + \tilde{\Phi}(Q_\beta \partial_1) \\ &= f_{br} Q_\gamma \partial_1 + t_{br} Q_\gamma \partial_1 + f_{br} Q_\alpha \partial_1 + t_{br} Q_\alpha \partial_1 + f_{br} Q_\beta \partial_1 + t_{br} Q_\beta \partial_1 \end{aligned}$$

bulunur. Burada G nin quasi-hemi-slant altmanifold olduğu göz önüne alınırsa

$$\tilde{\Phi} \partial_1 = f_{br} Q_\gamma \partial_1 + f_{br} Q_\alpha \partial_1 + t_{br} Q_\alpha \partial_1 + t_{br} Q_\beta \partial_1 \quad (4.9)$$

olur.

Teorem 4.3.3. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin quasi-hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_γ distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\gamma)$,

$\partial_3 \in \Gamma(D_\alpha \perp D_\beta)$ için

$$g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2 - \#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3) = g(h(\partial_2, f_{br} \partial_1) - h(\partial_1, f_{br} \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3)$$

ve

$$g(\#_{\partial_1} \partial_2 - \#_{\partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3) = g(h(\partial_2, \partial_1) - h(\partial_1, \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki G , $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin quasi-hemi-slant altmanifoldu olsun. D_γ distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\gamma)$,

$\partial_3 = Q_\alpha \partial_3 + Q_\beta \partial_3 \in \Gamma(D_\alpha \perp D_\beta)$ için (3.2), (3.4) ve (3.5) ten

$$\begin{aligned} \tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_2} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_2} \partial_1, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2 + h(\partial_1, f_{br} \partial_2), \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - g(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1 + h(\partial_2, f_{br} \partial_1), \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), \tilde{\Phi} \partial_3) + 3g(\#_{\partial_2} \partial_1 + h(\partial_2, \partial_1), \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, f_{br} Q_\alpha \partial_3) + g(h(\partial_1, f_{br} \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad - g(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3) - g(h(\partial_2, f_{br} \partial_1), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3g(\#_{\partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\alpha \partial_3) - 3g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \\
& + 3g(\#_{\partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3) + 3g(h(\partial_2, \partial_1), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3)
\end{aligned}$$

olup istenen eşitlik sağlanır.

Teorem 4.3.4. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_α distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$,

$\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\beta)$ için

$$g(A_{t_{br} f_{br} \partial_1} \partial_2 - A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) = g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 - A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\beta \partial_3) + g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1 - \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\beta \partial_3)$$

ve

$$g(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1 - \#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) = g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2 - A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki G , $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-hemi-slant altmanifoldu olsun. D_γ distribüsyonu integrallenebilirdir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\beta)$ için için (3.2), (3.4) ve (3.5) ten

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_2} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_2} \partial_1, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} \partial_1, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} \partial_1, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} f_{br} \partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} t_{br} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} f_{br} \partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} t_{br} \partial_2, \partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \partial_3) \\
&\quad + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br}^2 \partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2} f_{br}^2 \partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \partial_3) \\
&\quad + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \partial_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \theta_\alpha \tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) + g(-A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) \\
&+ g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\gamma \partial_3) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\beta \partial_3) \\
&- g(-A_{t_{br} f_{br} \partial_1} \partial_2, \partial_3) - g(-A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\beta \partial_3) \\
&- g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1, t_{br} Q_\beta \partial_3) \\
&- 3g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) - 3g(-A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, \partial_3) \\
&+ 3g(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, \partial_3) + 3g(-A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, \partial_3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.5. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_β distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$,

$\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\alpha)$ için

$$g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2 - A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\gamma \partial_3) = g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1 - \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\alpha \partial_3)$$

ve

$$g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) = g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, \partial_3)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki G , $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-hemi-slant altmanifoldu olsun. D_β distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$,

$\partial_3 = Q_\gamma \partial_3 + Q_\alpha \partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\alpha)$ için (3.2), (3.4) ve (3.5) ten

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_2} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&- 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_2} \partial_1, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&- 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} \partial_1, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&- 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \partial_3) \\
&= g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
&- g(-A_{t_{br} \partial_1} \partial_2 + \#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
&- 3g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, \partial_3) + 3g(-A_{t_{br} \partial_1} \partial_2 + \#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1, \partial_3) \\
&= -g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
&+ g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3) - g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1, t_{br} Q_\alpha \partial_3)
\end{aligned}$$

$$+3g(A_{t_{br}\partial_1}\partial_2, \partial_3) - 3g(A_{t_{br}\partial_1}\partial_2, \partial_3)$$

bulunur. Böylece istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 4.3.6. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_γ distribüsyonu altmanifold üzerinde tamamen jeodeziktir ancak ve ancak her ∂_1 ,

$\partial_2 \in \Gamma(D_\gamma)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\alpha \perp D_\beta)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için

$$g(\#_{\partial_1} f_{br}\partial_2, f_{br}Q_\alpha\partial_3) = -g(h(\partial_1, f_{br}\partial_2), t_{br}Q_\alpha\partial_3 + t_{br}Q_\beta\partial_3),$$

$$g(\#_{\partial_1}\partial_2, f_{br}Q_\alpha\partial_3) = -g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br}Q_\alpha\partial_3 + t_{br}Q_\beta\partial_3)$$

ve

$$g(\#_{\partial_1} f_{br}\partial_2, B_{br}N) = -g(h(\partial_1, f_{br}\partial_2), C_{br}N), \quad g(\#_{\partial_1}\partial_2, B_{br}N) = -g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br}N)$$

olmasıdır.

İspat: Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\gamma)$ ve $\partial_3 \in Q_\alpha\partial_3 + Q_\beta\partial_3 \in \Gamma(D_\alpha \perp D_\beta)$ için (3.2), (3.4) ve (3.7) den

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) \\ &= g(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2 + h(\partial_1, f_{br}\partial_2), f_{br}Q_\alpha\partial_3 + t_{br}Q_\alpha\partial_3 + t_{br}Q_\beta\partial_3) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1}\partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), f_{br}Q_\alpha\partial_3 + t_{br}Q_\alpha\partial_3 + t_{br}Q_\beta\partial_3) \\ &= g(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, f_{br}Q_\alpha\partial_3) + g(h(\partial_1, f_{br}\partial_2), t_{br}Q_\alpha\partial_3 + t_{br}Q_\beta\partial_3) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1}\partial_2, f_{br}Q_\alpha\partial_3) - 3g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br}Q_\alpha\partial_3 + t_{br}Q_\beta\partial_3) \end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan her $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için (3.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, N) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, N) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}N) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}N) \\ &= g(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2 + h(\partial_1, f_{br}\partial_2), B_{br}N + C_{br}N) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1}\partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), B_{br}N + C_{br}N) \\ &= g(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, B_{br}N) + g(h(\partial_1, f_{br}\partial_2), C_{br}N) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1}\partial_2, B_{br}N) - 3g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br}N) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.7. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin quasi-hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_α distribüsyonu altmanifoldu üzerinde tamamen jeodeziktir ancak ve ancak her

$\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\beta)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için

$$g(A_{t_{br}f_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, t_{br}Q_\alpha\partial_3) - g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, f_{br}Q_\alpha\partial_3),$$

$$g(\#_{\partial_1} f_{br}\partial_2, \partial_3) = g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, f_{br}Q_\alpha\partial_3)$$

ve

$$g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, B_{br}N) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, C_{br}N) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}f_{br}\partial_2, N),$$

$$g(\#_{\partial_1}\partial_2, B_{br}N) = g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br}N)$$

olmasıdır.

İspat: Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $\partial_3 = Q_\gamma\partial_3 + Q_\beta\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\beta)$ için (3.2), (3.4) ve (3.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}f_{br}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}^2\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}f_{br}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \partial_3) \\ &= \cos^2 \theta_\alpha \tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) + g(-A_{t_{br}f_{br}\partial_2}\partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br}f_{br}\partial_2, \partial_3) \\ &\quad + g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, f_{br}Q_\gamma\partial_3 + t_{br}Q_\beta\partial_3) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2 + h(\partial_1, f_{br}\partial_2), \partial_3) - 3g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, \partial_3) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta_\alpha) \tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) &= -g(A_{t_{br}f_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) - g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, f_{br}Q_\gamma\partial_3) \\ &\quad + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, t_{br}Q_\beta\partial_3) - 3g(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \partial_3) + 3g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde her $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için (3.8) den

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, N) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, N) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}N) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}N) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} f_{br} \partial_2, N) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br}^2 \partial_2, N) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} f_{br} \partial_2, N) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
&= \cos^2 \theta_\alpha \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) + g(-A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} f_{br} \partial_2, N) \\
&= g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, B_{br} N + C_{br} N) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), B_{br} N + C_{br} N)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
(1 - \cos^2 \theta_\alpha) \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) &= g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} f_{br} \partial_2, N) - g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, B_{br} N) \\
&\quad + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, C_{br} N) - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N) \\
&\quad - 3g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br} N)
\end{aligned}$$

olur ki böylece istenen eşitlikler elde edilir.

Teorem 4.3.8. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin quasi-hemi-slant altmanifoldu G olsun. D_β distribüsyonu altmanifoldu üzerinde tamamen jeodeziktir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\alpha)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için

$$g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3) - 3g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\alpha \partial_3)$$

ve

$$g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, B_{br} N) - 3g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, N) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, C_{br} N)$$

olmasıdır.

İspat: Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$ ve $\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\alpha)$ için (3.2), (3.4) ve (3.7) den

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \partial_3) \\
&\quad + g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
&\quad - 3g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, \partial_3)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) &= g(-A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
&\quad + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\alpha \partial_3) + 3g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde her $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için (3.7) den

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, N) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}t_{br}\partial_2, N) \\
&= g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, B_{br}N + C_{br}N) \\
&\quad - 3g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 + \#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, N)
\end{aligned}$$

olsun. O halde

$$\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1}\partial_2, N) = -g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, B_{br}N) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, C_{br}N) - 3g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, N)$$

olacağından ispat tamamlanmış olur.

4.4. Bronz Riemann Manifoldların Quasi-Bi-Slant Altmanifoldları

Tanım 4.4.1. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın bir altmanifodu G olsun. G üstünde üç ortogonal D_γ , D_α ve D_β distribüsyonları aşağıdaki koşulları sağlarsa G ye quasi-bi-slant altmanifold denir.

- i) $TG = D_\gamma \perp D_\alpha \perp D_\beta$
- ii) D_γ distribüsyonu invaryanttır. Yani $\tilde{\Phi}(D_\gamma) = D_\gamma$ dir.
- iii) $\tilde{\Phi}(D_\alpha) \perp D_\beta$, $\tilde{\Phi}(D_\beta) \perp D_\alpha$
- iv) D_α ve D_β distribüsyonları θ_α ve θ_β açısıyla slanttır.

Bu tanım göz önüne alınırsa $boyD_\gamma \neq 0$, $boyD_\alpha \neq 0$, $boyD_\beta \neq 0$ ve $\theta_\alpha, \theta_\beta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise

G , bir proper (has) quasi-bi-slant altmanifolddur .

Örnek 4.4.2. $\mathbb{R}^6$ da $(w_1, w_2, \dots, w_6)$ koordinat sistemini göz önüne alırsak

$$\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$$

$$\tilde{\Phi}(w_1, w_2, \dots, w_6) = (\eta_{br}w_1, \eta_{br}w_2, \bar{\eta}_{br}w_3, \bar{\eta}_{br}w_4, \bar{\eta}_{br}w_5, \eta_{br}w_6)$$

denirse $(\mathbb{R}^6, \tilde{\Phi})$ ikilisi $\mathbb{R}^6$ üzerindeki alışılmış metrik $\tilde{g}$ ile birlikte $(\mathbb{R}^6, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ bir hemen

hemen bronz Riemann manifold olsun. Burada $\eta_{br} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\bar{\eta}_{br} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ dir.

$(\mathbb{R}^6, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ üzerinde

$$w_1 = \eta_{br}u + \bar{\eta}_{br}v, \quad w_2 = \bar{\eta}_{br}u + \eta_{br}v, \quad w_3 = t \cos s, \quad w_4 = t \sin s, \quad w_5 = k \sin s, \quad w_6 = k \cos s,$$

ile tanımlanan G altmanifoldu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \eta_{br}w_1 + \bar{\eta}_{br}w_2, \\ \tau_2 &= \bar{\eta}_{br}w_1 + \eta_{br}w_2, \\ \tau_3 &= \cos s \partial w_3 + \sin s \partial w_4, \\ \tau_4 &= \sin s \partial w_5 + \cos s \partial w_6\end{aligned}$$

için $TG = \text{Span}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\tau_1) &= \eta_{br}^2 \partial w_1 - \partial w_2, \\ \tilde{\Phi}(\tau_2) &= -\partial w_1 + \eta_{br}^2 \partial w_2, \\ \tilde{\Phi}(\tau_3) &= \bar{\eta}_{br} \cos s \partial w_3 + \eta_{br} \sin s \partial w_4, \\ \tilde{\Phi}(\tau_4) &= \bar{\eta}_{br} \sin s \partial w_5 + \eta_{br} \cos s \partial w_6\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Buradan $\tilde{\Phi}(\tau_1) = \eta_{br}\tau_1$, $\tilde{\Phi}(\tau_2) = \eta_{br}\tau_2$ olup $D_\gamma = \text{Span}\{\tau_1, \tau_2\}$,

$\tilde{\Phi}(\tau_3) \perp \tau_4$ ve $\tilde{\Phi}(\tau_4) = \tau_3$ dur.

Buradan $D_\alpha = \text{Span}\{\tau_3\}$ ve $D_\beta = \text{Span}\{\tau_4\}$ olup

$$\begin{aligned}\cos \theta_\alpha &= \frac{\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tau_1, \tau_1)}{\|\tilde{\Phi}\tau_1\| \|\tau_1\|} \\ &= \frac{\bar{\eta}_{br} \cos^2 s + \eta_{br} \sin^2 s}{\sqrt{\eta_{br}^2 \cos^2 s + \eta_{br}^2 \sin^2 s}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\cos \theta_\beta &= \frac{\tilde{g}(\tilde{\Phi}\tau_4, \tau_4)}{\|\tilde{\Phi}\tau_4\| \|\tau_4\|} \\ &= \frac{\bar{\eta}_{br} \sin^2 s + \eta_{br} \cos^2 s}{\sqrt{\eta_{br}^2 \sin^2 s + \eta_{br}^2 \cos^2 s}}\end{aligned}$$

olduğundan G , θ_α ve θ_β slant açılı bir quasi-bi-slant altmanifold olur.

Teorem 4.4.3. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-bi-slant altmanifoldu G

olsun. D_γ distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\gamma)$,

$\partial_3 \in \Gamma(D_\alpha \perp D_\beta)$ için

$$g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2 - \#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3) = g(h(\partial_2, f_{br} \partial_1) - h(\partial_1, f_{br} \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3)$$

ve

$$g(\#_{\partial_1} \partial_2 - \#_{\partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3) = g(h(\partial_2, \partial_1) - h(\partial_1, \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki G , $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin quasi-bi-slant altmanifoldu olsun. Her ∂_1 ,

$\partial_2 \in \Gamma(D_\gamma)$ ve $\partial_3 \in Q_\alpha \partial_3 + Q_\beta \partial_3 \in \Gamma(D_\alpha \perp D_\beta)$ için (3.2), (3.4) ve (3.7) den

$$\begin{aligned} \tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= g(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_2} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_2} \partial_1, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2} \tilde{\Phi} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} \partial_1, \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2 + h(\partial_1, f_{br} \partial_2), \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - g(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1 + h(\partial_2, f_{br} \partial_1), \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &\quad + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2} \partial_1 + h(\partial_2, \partial_1), \tilde{\Phi} \partial_3) \\ &= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad - g(h(\partial_1, f_{br} \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad - g(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad - g(h(\partial_2, f_{br} \partial_1), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3) - 3g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad + 3g(\#_{\partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3) + 3g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2 - \#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad + g(h(\partial_1, f_{br} \partial_2) - h(\partial_2, f_{br} \partial_1), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2 - \#_{\partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3) \\ &\quad - 3g(h(\partial_1, \partial_2) - h(\partial_2, \partial_1), t_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan istenen eşitlikler elde edilmiş olur.

Teorem 4.4.4. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin quasi-bi-slant altmanifoldu G

olsun. D_α distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$ ve

$\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\beta)$ için

$$g(A_{t_{br} f_{br} \partial_1} \partial_2 - A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) = g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1 - A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3)$$

$$+g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2 - \#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_1, t_{br}Q_\beta\partial_3)$$

ve

$$\#_{\partial_1} f_{br}\partial_2 - \#_{\partial_2} f_{br}\partial_1 \in \Gamma(D_\alpha), A_{t_{br}\partial_1}\partial_2 - A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 \in \Gamma(D_\alpha)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $G, (\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-bi-slant altmanifoldu olsun. Her

$$\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha), \partial_3 = Q_\gamma\partial_3 + Q_\beta\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\beta) \text{ için (3.2), (3.4) ve (3.7) den}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= g(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\Phi[\partial_1, \partial_2], \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_2}\partial_1, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}\tilde{\Phi}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}\tilde{\Phi}\partial_1, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2}f_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}\tilde{\Phi}\partial_1, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}f_{br}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2}\tilde{\Phi}f_{br}\partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \partial_3) \\ &\quad + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}f_{br}\partial_1, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}^2\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}f_{br}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2}f_{br}^2\partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}f_{br}\partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \partial_3) \\ &\quad + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}f_{br}\partial_1, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \partial_3) \\ &= \cos^2 \theta_\alpha g([\partial_1, \partial_2], \partial_3) + g(-A_{t_{br}f_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) \\ &\quad + g(-A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - g(-A_{t_{br}f_{br}\partial_1}\partial_2, \partial_3) \\ &\quad - g(-A_{t_{br}\partial_1}\partial_2 + \tilde{\Phi}\partial_3) - g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\ &\quad - 3g(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \partial_3) - 3g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) \\ &\quad + 3g(\#_{\partial_2}f_{br}\partial_1, \partial_3) + 3g(-A_{t_{br}\partial_1}\partial_2, \partial_3) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta_\alpha) \tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= -g(A_{t_{br}f_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) + g(A_{t_{br}\partial_1}\partial_2, \partial_3) \\ &\quad - g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, f_{br}Q_\gamma\partial_3 + f_{br}Q_\beta\partial_3) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2, t_{br}Q_\beta\partial_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g(A_{t_{br}\partial_1}\partial_2, f_{br}Q_\gamma\partial_3 + f_{br}Q_\beta\partial_3) - g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br}\partial_1, t_{br}Q_\beta\partial_3) \\
& -3g(\#_{\partial_1} f_{br}\partial_2, \partial_3) + 3g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) \\
& +3g(\#_{\partial_2} f_{br}\partial_1, \partial_3) - 3g(A_{t_{br}\partial_1}\partial_2, \partial_3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen eşitlikler elde edilir.

Teorem 4.4.5. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-bi-slant altmanifoldu G

olsun. D_β distribüsyonu integrallenebilir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$ ve

$\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\alpha)$ için

$$\begin{aligned}
g(A_{t_{br}f_{br}\partial_1}\partial_2 - A_{t_{br}f_{br}\partial_2}\partial_1, \partial_3) &= g(A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 - A_{t_{br}\partial_1}\partial_2, f_{br}Q_\gamma\partial_3 + f_{br}Q_\alpha\partial_3) \\
&+ g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br}\partial_2 - \#_{\partial_2}^\perp t_{br}\partial_1, t_{br}Q_\alpha\partial_3)
\end{aligned}$$

ve

$$\#_{\partial_1} f_{br}\partial_2 - \#_{\partial_2} f_{br}\partial_1 \in \Gamma(D_\beta), A_{t_{br}\partial_1}\partial_2 - A_{t_{br}\partial_2}\partial_1 \in \Gamma(D_\beta)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki G , $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-bi-slant altmanifoldu olsun. Her

$\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$, $\partial_3 = Q_\gamma\partial_3 + Q_\alpha\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\alpha)$ için (3.2), (3.4) ve (3.7) den

$$\begin{aligned}
\tilde{g}([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= g(\tilde{\Phi}[\partial_1, \partial_2], \tilde{\Phi}\partial_3) - 3\tilde{g}(\Phi[\partial_1, \partial_2], \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_1}\partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\Phi}\#_{\partial_2}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}\partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}\tilde{\Phi}\partial_1, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2}\tilde{\Phi}f_{br}\partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1}\tilde{\Phi}f_{br}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2}\tilde{\Phi}f_{br}\partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}\partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \partial_3) \\
&\quad + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}f_{br}\partial_1, \partial_3) + 3\tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1}f_{br}^2\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}f_{br}\partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1}t_{br}\partial_2, \tilde{\Phi}\partial_3) \\
&\quad - \tilde{g}(\#_{\partial_2}f_{br}^2\partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}f_{br}\partial_1, \partial_3) - \tilde{g}(\#_{\partial_2}t_{br}\partial_1, \tilde{\Phi}\partial_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \partial_3) \\
& + 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2} f_{br} \partial_1, \partial_3) + 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_2} t_{br} \partial_1, \partial_3)
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
(1 - \cos^2 \theta_\beta) g([\partial_1, \partial_2], \partial_3) &= -g(A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) + g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, \partial_3) \\
& - g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3) + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
& + g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3) + g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1, t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
& + g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3) - g(\#_{\partial_2}^\perp t_{br} \partial_1, t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
& - 3g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) + 3g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) \\
& + 3g(\#_{\partial_2} f_{br} \partial_1, \partial_3) - 3g(A_{t_{br} \partial_1} \partial_2, \partial_3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen eşitlikler bulunur.

Teorem 4.4.6. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin quasi-bi-slant altmanifoldu G olsun. D_γ distribüsyonu altmanifold üzerinde tamamen jeodeziktir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\gamma)$ ve $\partial_3 \in \Gamma(D_\alpha \perp D_\beta)$ için

$$g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, f_{br} \partial_3) = -g(h(\partial_1, f_{br} \partial_2), t_{br} \partial_3), \quad g(\#_{\partial_1} \partial_2, f_{br} \partial_3) = -g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br} \partial_3)$$

ve

$$g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, B_{br} N) = -g(h(\partial_1, f_{br} \partial_2), C_{br} N), \quad g(\#_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N) = -g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br} N)$$

dir.

İspat: Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\gamma)$ ve $\partial_3 \in Q_\alpha \partial_3 + Q_\beta \partial_3 \in \Gamma(D_\alpha \perp D_\beta)$ için (3.2), (3.4) ve (3.7)

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, f_{br} \partial_3 + t_{br} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, f_{br} \partial_3 + t_{br} \partial_3) \\
&= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2 + h(\partial_1, f_{br} \partial_2), f_{br} \partial_3 + t_{br} \partial_3) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), f_{br} \partial_3 + t_{br} \partial_3) \\
&= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, f_{br} \partial_3) + g(h(\partial_1, f_{br} \partial_2), t_{br} \partial_3) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2, f_{br} \partial_3) - 3g(h(\partial_1, \partial_2), t_{br} \partial_3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için (3.8) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2, N) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, N) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, B_{br} N + C_{br} N) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N + C_{br} N) \\
&= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2 + h(\partial_1, f_{br} \partial_2), B_{br} N + C_{br} N) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2 + h(\partial_1, \partial_2), B_{br} N + C_{br} N) \\
&= g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, B_{br} N) + g(h(\partial_1, f_{br} \partial_2), C_{br} N) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N) - 3g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br} N)
\end{aligned}$$

olur ki bu da istenen sonucu verir.

Teorem 4.4.7. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nin quasi-bi-slant altmanifoldu G olsun. O halde D_α distribüsyonu altmanifoldu üzerinde tamamen jeodeziktir ancak $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\beta)$ için

$$g(A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) + g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} \partial_3) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\beta \partial_3), \quad g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) = g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3)$$

ve

$$g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, B_{br} N) - g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} f_{br} \partial_2, N) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, C_{br} N),$$

$$g(\#_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N) = -g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br} N)$$

dir.

İspat: Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $\partial_3 \in \Gamma(D_\beta)$, $\partial_3 = Q_\gamma \partial_3 + Q_\beta \partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\beta)$ için (3.2), (3.4)

ve (3.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\#_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \#_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} f_{br} \partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br}^2 \partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} f_{br} \partial_2, \partial_3) \\
&\quad + \tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\beta \partial_3 + t_{br} Q_\beta \partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\#_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \partial_3)
\end{aligned}$$

olur.

$$(1 - \cos^2 \theta_\alpha) \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) = -g(A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) - g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\gamma \partial_3) \\ + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\beta \partial_3) - 3g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) + 3g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3)$$

elde edilir.

Benzer şekilde her $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için (3.8) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2 + t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\ &\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br}^2 \partial_2, N) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} f_{br} \partial_2, N) \\ &\quad + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, B_{br} N + C_{br} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N + C_{br} N) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$(1 - \cos^2 \theta_\alpha) \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} f_{br} \partial_2, N) - g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, B_{br} N) \\ + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, C_{br} N) - 3g(\#_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N) \\ - 3g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br} N)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.8. Bir bronz Riemann manifold $(\tilde{G}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ nın quasi-bi-slant altmanifoldu G olsun. D_β distribüsyonu altmanifoldu üzerinde tamamen jeodeziktir ancak ve ancak her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$, $\partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\alpha)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için

$$g(A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) + g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} \partial_3) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\alpha \partial_3), \quad g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) = g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3)$$

ve

$$g(A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, N) + g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, B_{br} N) = g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, C_{br} N),$$

$$g(\#_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N) = -g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br} N)$$

dir.

İspat: Her $\partial_1, \partial_2 \in \Gamma(D_\beta)$ ve $\partial_3 = Q_\gamma \partial_3 + Q_\alpha \partial_3 \in \Gamma(D_\gamma \perp D_\alpha)$ için (3.2), (3.4) ve (3.7)

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1}^\perp \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} f_{br} \partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} \partial_3) - 3g(\#_{\partial_1}^\perp \tilde{\Phi} \partial_2, \partial_3) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br}^2 \partial_2, \partial_3) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} f_{br} \partial_2, \partial_3) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, f_{br} Q_\gamma \partial_3 + f_{br} Q_\alpha \partial_3 + t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
(1 - \cos^2 \theta_\beta) \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \partial_3) &= -g(A_{t_{br} f_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3) - g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, f_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
&\quad + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, t_{br} Q_\alpha \partial_3) \\
&\quad - 3g(\#_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \partial_3) + 3g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, \partial_3)
\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde her $N \in \Gamma(T^\perp G)$ için (3.8) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) &= \tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\Phi} \tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \tilde{\Phi} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2 + t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
&\quad - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, \tilde{\Phi} N) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} f_{br}^2 \partial_2, N) + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} f_{br} \partial_2, N) \\
&\quad + \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} t_{br} \partial_2, B_{br} N + C_{br} N) - 3\tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, B_{br} N + C_{br} N)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
(1 - \cos^2 \theta_\beta) \tilde{g}(\tilde{\#}_{\partial_1} \partial_2, N) &= g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} f_{br} \partial_2, N) - g(A_{t_{br} \partial_2} \partial_1, B_{br} N) \\
&\quad + g(\#_{\partial_1}^\perp t_{br} \partial_2, C_{br} N) - 3g(\#_{\partial_1}^\perp \partial_2, B_{br} N) \\
&\quad - 3g(h(\partial_1, \partial_2), C_{br} N)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKÇA

- [1] De Spinadel, V.W. (1999). “The metallic means family and multifractal spectra”, *Nonlinear Analysis*, 36, 721-745.
- [2] Hretcanu, C.E. ve Crasmareanu, M. (2013). “Metallic structures on Riemannian Manifolds”. *Revista de la Union Matematica*, 54(2), 15-27.
- [3] Crasmareanu, M. ve Hretcanu, C.E. (2008). “Golden differential geometry”. *Chaos, Solitons ve Fractals*, 38(5), 1229-1238.
- [4] Özkan, M. ve Yılmaz, F. (2018). “Metallic structures on differential manifolds”. *Journal of Science ve Arts*, 3(44), 645-660.
- [5] Erdoğan, F.E. & Yıldırım, C. (2017). “Semi-invariant submanifolds of golden Riemannian manifolds”. *2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences*, 3 Ekim, Antalya.
- [6] Hretcanu, C.E. ve Blaga, A.M. (2018). “Submanifolds in metallic Riemannian manifolds”. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 20, 83-97.
- [7] Erdoğan, F.E. (2018). “Transversal lightlike submanifolds of metallic semi-Riemannian Manifolds”. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(6), 3133-3148.
- [8] Acet, B.E. (2018). “Lightlike hypersurfaces of metallic semi-Riemannian manifolds”. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(12), 1850201.
- [9] Hretcanu, C.E. ve Blaga, A.M. (2018). “Slant and semi-slant submanifolds in metallic Riemannian manifolds”. *Journal of Function Spaces*, 2864263, 13.
- [10] Hretcanu, C.E. ve Crasmareanu, M. (2007). “On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure”. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Alexandru Ioan Cuza Iasi Mathematica (N.S.)*, 53(1), 199-211.
- [11] Blaga, A.M. ve Hretcanu, C.E. (2018). “Invariant, anti-invariant and slant submanifolds of a metallic Riemannian manifold”. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 48(2), 57-82.
- [12] Önen Poyraz, N. ve Yaşar, E. (2019). “Lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds”. *Journal of Geometry and Physics*, 141, 92-104.
- [13] Önen Poyraz, N. (2020). “Golden GCR-lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds”. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17, 1-16.

- [14] Yüksel Perktaş, S., Erdoğan, F.E. ve Acet B.E. (2020). “Lightlike submanifolds of metallic semi-Riemannian manifolds”. *Filomat*, 34(6), 1781-1794.
- [15] Acet, B.E., Erdoğan, F.E. ve Yüksel Perktaş, S. (2022). “ Half-lightlike submanifolds of metallic semi-Riemannian manifolds”. *International Electronic Journal of Geometry*, 15(2), 202-214.
- [16] Yano, K. ve Kon, M. “ *Structures on Manifolds* ”, World Sci. Publishing, pp. 508, 1984.
- [17] Çakan Akpınar, R. (2020). “On bronze Riemann structure”, *Tbilisi Mathematical Journal*, 13(3), 161-169.
- [18] Acet, B.E. ve Acet, T. (2022). “Some types of slant submanifolds of bronze Riemann manifold”, *Journal of Korean Society of Mathematical Education Series B*. 29(4), 277-29.
- [19] Şahin, B., (2012). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Ankara: Nobel Yayınları.
- [20] Gezer, A., Cengiz, N. ve Salimov, A. (2013). “On integrability of golden Riemannian structures”. *Turkish Journal of Mathematics*, 34, 693-703.
- [21] Hretcanu, C.E. ve Crasmareanu ve M. (2009). “Applications of the golden ratio on Riemannian manifolds”. *Turkish Journal of Mathematics*, 33,179-191.