



**BÜKÜMLÜ DÜĞÜMLERİN GRAFLARININ
GRAF PARAMETRELERİ**

Tülay YEŞİLDAĞ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN

AĞRI-2022

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tülay YEŞİLDAĞ

BÜKÜMLÜ DÜĞÜMLERİN GRAFLARININ GRAF
PARAMETRELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN

AĞRI-2022

25/05/2022

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Bükümlü Düzümlerin Graflarının Graf Parametreleri**” adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- ☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- ☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- ☐ Tezimin yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

25/05/2022

Tülay YEŞİLDAĞ

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

.....danışmanlığında, tarafından
hazırlanan bu çalışma/...../..... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından.
..... Anabilim Dalı'nda
.....tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **İmza:**

Jüri Üyesi : **İmza:**

Jüri Üyesi : **İmza:**

Yukarıdaki imzalar adı geçen öğretim üyelerine ait olup;

Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../202.. tarih ve / nolu kararı ile
onaylanmıştır.

.... /...../.....

Prof. Dr. İbrahim HAN

Enstitü Müdürü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜKÜMLÜ DÜĞÜMLERİN GRAFLARININ GRAF PARAMETRELERİ

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN

2022, 43 sayfa

Jüri: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT

Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN

Bu tez çalışması, graf teori ile düğüm teorisi alanlarını birleştiren bir çalışmayı ele almaktadır. Burada önemli bir düğüm ailesi olan bükümlü düğümlere ait grafların, graf parametreleri incelenmiştir. Öncelikle renklendirme yöntemiyle bükümlü düğümlerin grafları elde edilmiş ve daha sonra elde edilen bu graflar için bilinen temel graf parametreleri incelenmiştir. Bu hesaplamalara bağlı olarak genelleştirmeler yapılmıştır. Çalışma sürecinde graf teorisindeki yöntem ve tekniklerden önemli ölçüde yararlanılmıştır.

Tezin giriş bölümünde; düğüm teorisi ile graf teori arasındaki ilişkinin köklerinden ve düğüm grafi fikrinin ilk ortaya çıkışından itibaren bugünkü geldiği noktadan bahsedilmiştir. Ayrıca çalışılan problemin, literatür açısından önemi de yine bu bölümde irdelenmiştir. İkinci bölümde yapılan çalışmalara kılavuzluk yapan temel kavram ve notasyonlar tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde çalışmanın materyali ve elde edilme yöntemi verilmiştir. Dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar verilmiş ve bükümlü düğümlerin graflarına ait graf parametrelerinin genelleştirilmeleri ispatlarıyla birlikte sunulmuştur. Son bölümde ise sunulan bu sonuç ve genelleştirmelerin üzerinde durulmuş, etkileri ve önemi tartışılmıştır.

2022, 43 sayfa

Anahtar sözcükler: Düğüm, halka, bükümlü düğümler, graf, düğüm grafi, graf parametreleri

ABSTRACT

MASTER THESIS

THE GRAPH PARAMETERS FOR GRAPHS OF TWIST KNOTS

Advisor: Assist. Prof. Dr. Abdulgani ŞAHİN

2022, Page: 43

**Jury: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU
Assist. Prof. Dr. Kadirhan POLAT
Assist. Prof. Dr. Abdulgani ŞAHİN**

This thesis study deals with a study that combines the fields of graph theory and knot theory. Here, the graph parameters of the twist knots, which is an important knot family, are examined. First of all, graphs of twist knots were obtained by coloring method and then the basic graph parameters known for these graphs were examined. Generalizations have been made based on these calculations. In the study process, the methods and techniques in graph theory were utilized to a great extent.

In the introduction part of the thesis; the roots of the relationship between knot theory and graph theory and the point where the idea of knot graph has reached today since its first emergence are mentioned. In addition, the importance of the studied problem in terms of literature is also discussed in this section. In the second part, the basic concepts and notations that guide the studies are defined. In the third chapter, the material of the study and the method of obtaining it are given. In the fourth chapter, the obtained results are given and generalizations of the graph parameters of the graphs of twist knots are presented with their proofs. In the last section, these results and generalizations are emphasized and their effects and importance are discussed.

2022, 43 pages

Keywords: Knot, link, twist knots, graph, knot graph, graph parameters

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, öğrencisi olduğum ilk andan itibaren, gerek akademik bilgisi gerek tecrübesiyle bana sabırlı bir şekilde yol gösteren, desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen, değerli düşüncelerini benimle paylaşan, çalışmalarımı sabırla izleyen, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Abdulgani ŞAHİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Yaşamım boyunca yanımda olan ve en büyük destekçilerim olan, başarılarıma benden çok sevenen canım aileme ve hayatımda olduğundan bu yana her şeyin daha güzel olduğuna inandığım, hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen eşim Kazım YEŞİLDAĞ'a çok teşekkür ediyorum.

16/05/2022

Tülay YEŞİLDAĞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. Düğüm	7
2.2. Halka	8
2.3. Regüler Diyagramlar	9
2.4. Reidemeister Hareketleri	10
2.5. Graf.....	11
2.6. Graf Parametreleri	17
2.6.1. Çap	17
2.6.2. Baskınlık sayısı	17
2.6.3. Renklendirme sayısı.....	18
2.6.4. Bağımsızlık sayısı	18
2.6.5. Klik sayısı	18
2.6.6. Tepe bağlantılılık sayısı	18
2.6.7. Örtü sayısı	19
2.6.8. Klik örtü sayısı.....	19
2.6.9. Eşleşme sayısı	19
2.6.10. Wiener indeksi	19
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	20
3.1. Düğüm Grafları	20
3.2. Bükümlü Dğümler	25
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	27
4.1. Bükümlü Dğümlerin Grafları	27
4.2. Bükümlü Dğümlerin Graflarının Graf Parametreleri	30
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	40

KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43



SİMGELER DİZİNİ

$C(G)$	G grafinın tepe bağlantılılık sayısı
C_n	n tepeli devir (çevre) graf
D	Bir düğüm için regüler diyagram
$d(v)$	v tepesinin derecesi
$d(u, v)$	u ve v tepeleri arasındaki mesafe
$E(G)$	G grafinın kenarlar kümesi
$E(S)$	S grafinın kenarlar kümesi
$ E(G) $	G grafinın boyutu
G	Bir graf
G_n	n -indisli graf
$G_1 \cong G_2$	İzomorfik graflar
K	Bir düğüm
$K(G)$	G grafinın klik örtü sayısı
K_n	n tepeli tam graf
$K_{p,t}$	İki parçalı tam graf
K'	K düğümünün düzlem üzerindeki izdüşümü
$\hat{K}$	K düğümünün izdüşümü
$M(G)$	G grafinın eşleşme sayısı
$\mathbb{N}^+$	Pozitif doğal sayılar
P	Yol graf
R_1, R_2, R_3	Reidemeister hareketleri
$\mathbb{R}^3$	Üç boyutlu uzay
S	Bir grafın bazı tepelerinin bir kümesi
S^1	1-küre
S^3	3-küre
$s(F)$	F kümesinin eleman sayısı
T_n	Bükümlü düğüm
$\overline{T_n}$	n tepeli ağaç graf
U	Bağlantılı evren
$V(G)$	G grafinın tepeleri kümesi

$V(S)$	S grafinın tepeleri kümesi
$ V(G) $	G grafinın mertebesi
W	Yürüme
$W(G)$	G grafinın Wiener indeksi
$w(G)$	G grafinın bileşenlerinin sayısı
$\alpha(G)$	G grafinın örtü sayısı
$\beta(G)$	G grafinın bağımsızlık sayısı
$\gamma(G)$	G grafinın baskınlık sayısı
$\theta(G)$	G grafinın klik sayısı
$\Delta(G)$	Maksimum dereceli tepenin derecesi
$\delta(G)$	Minimum dereceli tepenin derecesi
$\chi(G)$	G grafinın renklendirme sayısı
∞	Sonsuz
0_1	Aşıkâr düğüm
3_1	Yonca yaprağı düğümü
$\subset$	Alt küme
$\subseteq$	Alt kümesi veya eşit
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim (arakesit)
$\in$	Elemanıdır

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Kelebek düğümü (kapalı bir ilmek olmadığı için matematiksel bir düğüm olmayan).....	7
Şekil 2.2. Bazı matematiksel düğüm örnekleri	7
Şekil 2.3. Yönlendirilmiş düğüm örnekleri	8
Şekil 2.4. Bazı halka örnekleri.....	9
Şekil 2.5. Bir K düğümünün regüler izdüşümü.....	10
Şekil 2.6. Reidemeister hareketleri	10
Şekil 2.7. Sekiz-şekil düğümün Reidemeister hareketleri vasıtasıyla ayna görüntüsüne dönüştürülmesi	11
Şekil 2.8. Bir graf örneği.....	12
Şekil 2.9. Bir graf örneği.....	13
Şekil 2.10. Bir graf örneği	13
Şekil 2.11. Bir graf ve ona ait bir alt graf ile bir geren alt graf örneği	14
Şekil 2.12. Bir çift izomorf graf örneği.....	14
Şekil 2.13. Basit graf, çoklu graf ve pseudo graf örnekleri	15
Şekil 2.14. Bağlantılı ve bağlantısız graf örnekleri.....	15
Şekil 2.15. Bir yol graf örneği	15
Şekil 2.16. Çevre graf örnekleri	16
Şekil 2.17. Ağaç graf örnekleri	16
Şekil 2.18. Tam graf örnekleri	16
Şekil 2.19. İki parçalı graf örneği ve iki parçalı tam graf örneği.....	17
Şekil 3.1. Renklendirilmiş graflar.....	20
Şekil 3.2. Düzlem graflar	20
Şekil 3.3. Bir düğüme karşılık oluşan düzlemsel grafın kenarlarına işaret tayin etme kuralları	21
Şekil 3.4. İşaretlendirilmiş düzlemsel graflar	21
Şekil 3.5. İşaretlendirilmiş bir düzlemsel graf için oluşturulmuş düğümün regüler diyagramı.....	22
Şekil 3.6. Bağlantılı düzlemsel graflar ile onlara karşılık gelen düğümlerin (halkaların) regüler izdüşümleri	23
Şekil 3.7. Medial grafın elde edilmesi	23

Şekil 3.8. Bir evrenden bir grafin elde edilmesi	24
Şekil 3.9. Bir alterne halkanın taranmış diyagramında geçitlerin durumu	25
Şekil 3.10. İşaretlendirilmiş grafların elde edilmesi	25
Şekil 3.11. Bir bükümlü düğüm örneği.....	26
Şekil 3.12. T_0 bükümlü düğümünün 0_1 aşıkâr düğümüne denkliği.....	26
Şekil 3.13. T_2 bükümlü düğümünün 3_1 trefoil düğümüne denkliği	26
Şekil 4.1. Bazı bükümlü düğüm örnekleri	27
Şekil 4.2. Bükümlü düğümlerin izdüşümleri	28
Şekil 4.3. Bükümlü düğümlerin dama desenli izdüşümleri	28
Şekil 4.4. Bükümlü düğümlerin graflarının elde edilmesi.....	28
Şekil 4.5. Bükümlü düğümlerin grafları	29

1. GİRİŞ

Bu çalışma, graf teorisi ve düğüm teorisi alanlarını birleştiren bir çalışma alanını ele almaktadır. Düğüm teorisi ile graf teorisi arasında derin bir ilişki mevcuttur. Bu iki disiplini birbirine bağlayan ortak çalışma alanları ve uygulamaları bulabilmek mümkündür. Öyle ki; graflar için tanımlanan bazı kavram ve sabitler, düğümler (halkalar) için kullanılabildiği gibi düğümler (halkalar) için tanımlanan bazı kavram ve sabitler de graflar için kullanılabilmektedir. Tarihsel süreç içerisinde matematikçiler, hangi grafların düzleme gömülebileceğini (diğer bir ifadeyle, kenarları birbirini kesmeyecek şekilde çizilebileceğini) sınıflandırmak ve düzlemsel olmayan graflar için düzlemsel bir çizimdeki en az kesişme sayısı bulmak gibi çeşitli graf problemlerini incelediler. Bu durum, graflar ile düğümlerin regüler diyagramlarının ortak bir çalışma alanı içerisinde buluşmalarına yol açtı. Aslında bir graf, sadece görsel görünümü açısından değil aynı zamanda çeşitli araştırma alanlarında birçok rol oynaması açısından da bir düğümden (halkadan) çok farklı değildir. Yıllar geçtikçe graf teorisi ve düğüm teorisi birçok durumda karşılıklı olarak faydalı sonuçlar üretmek için iç içe geçmiş durumdadır. Matematiğin alt dallarının birbiri ile ilişkisi genellikle verim sağlamıştır. Bugün düğüm (halka) ve graf ortak kullanılmak suretiyle özellikle kimya ve fizik olmak üzere biyoloji, sağlık bilimleri ve bazı mühendislik bilimleri gibi bilim dallarında önemli çalışmalar yürütülmektedir. Düğüm teorisi büyüdükçe ve geliştikçe onun sınırları da değişmeye devam etmektedir. Ayrıca günümüzde düğüm teorisi, matematiksel biyoloji ve kimyanın belirli alanlarıyla da örtüşmektedir. Hatta düğümler birçok farklı sanat dallarında dahi geniş bir kullanım alanı bulmaktadır.

Her şeyden önce “düğüm nedir ya da ne değildir?” sorusu doğal bir soru olarak karşımıza çıkar. Günlük yaşamda düğümleri, insanların bir dağa tırmanırken, ayakkabısını giyerken, iki parçayı birleştirirken, bir kutu ya da koliyi paketlerken, balık tutarken veya bir liyakat rozeti kazanmak gibi bazı görevleri yerine getirirken ip veya iple bağladıkları şeyler olarak düşünme eğilimindeyiz. Aslında hemen hemen herkes hayatının bir noktasında şu veya bu şekilde düğüm atmayı öğrenir. Ancak tabiki de düğüm bu kadar kolay tanımlanamaz ve matematiksel anlamda düğüm bu değildir. Düğümün fiziksel görünümü bu olsa da düğüm, üzerine matematiksel

anlamda koca bir teori inşa edilen derin bir kavramdır. Düğüm teorisi, öncelikle matematiksel düğümleri sınıflandırma problemi ile ilgilenen cebirsel topolojinin alt alanıdır. Birçok yazar, düğüm teorisinin oluşumunu 1800'lerin başında Gauss'a atfederken konu bilim camiasında 1800'lerin ortalarına kadar bilim adamlarının çabalarına rağmen pek destek bulamamıştı. O yıllarda Lord Kelvin, bilinen farklı elementlerin varlığının, o zamanlar evrene nüfuz ettiğine inanılan eterdeki matematiksel düğümler olarak modellenerek açıklanabileceğini  ne sürdü. O, atomların aslında eterin farklı düğümlü biçimlerinden oluşan farklı kimyasal elementlere sahip girdap döngüleri olduğunu öne sürdü. Böylece elementleri sınıflandırmanın bir yolu, tüm olası düğümleri tanımlayarak içe başlamak olacaktı. Bu hipotezi sürdürmek için, İskoç fizikçi P. G. Tait ve Amerikalı matematikçi C. N. Little gibi bilim adamları, tamamen deneme yanılma yoluyla yürüttükleri zor bir problem olan düğümleri sınıflandırma üzerinde çalıştılar. Bu çalışmaların neticesinde birkaç eksiğe rağmen on bir geçitli düğümlere kadar olan bir düğüm tablosu sundular. Bununla birlikte 1887'deki Michelson Morley deneyi ile birlikte Kelvin'in teorisinin çökmesine rağmen Little gibi matematikçiler, topoloji olarak bilinen, yeni ortaya çıkmış matematik dalının bir parçası olarak düğümleri incelemeye devam ettiler (Lankham 2002).

Topoloji, genellikle belirli içsel özellikler paylaşsalar da nesnelerin aynı olarak görülmeleri gerektiği üzerinde durur. Bir topo un gözünden eğer koparma, kesme ve yapıştırma gibi bir işlem olmaksızın biri sürekli olarak diğerine değiştirilebiliyorsa iki nesne aynı olarak görülür. Tarihsel olarak topoloji, analiz ve geometri disiplinlerinin bir kombinasyonu olarak başladı. Onun bir alt dalı olan cebirsel topoloji ise temel olarak cebirdeki fikirleri topolojiye uygulama girişimidir. Homolojik cebir ve homotopi grupları gibi güçlü cebirsel araçların uygulanmasına rağmen düğümleri sınıflandırma problemi halen tam çözülememiştir. Buna bağlı olarak düğüm teorisyenleri, bu arayış için kendi gereçlerini geliştirdiler. En kullanışlı olanlardan biri, düğümün görünümü (topolojik olarak değiştirmeden) değiştirildiğinde kendisi hala aynı kalan düğüm sabiti kavramıdır. Bazıları topolojinin çeşitli alt alanlarından ödünç olarak alınan çok sayıda düğüm sabiti  rneği vardır. İdeal olarak herhangi bir düğüm sabitinin iki özelliği sağlaması istenir: Birçok farklı düğümü birbirinden ayırabilmeli ve hesaplanması kolay olmalıdır.

Düğüm teorisi, bu güçlü motivasyonla bugüne kadar gelmiş ve bilim insanlarının dikkatlerini çekmiştir.

Modern düğüm teorisinin temeli, 19. yüzyılın sonlarında İskoçya'daki fizikçiler tarafından atıldı. 20. yüzyılın ilk yarısı boyunca düğüm teorisi, topolojinin matematiği içinde köklerini oluşturdu. Amerikalı matematikçi Alexander, 3-boyutlu topoloji çalışmalarında düğüm teorisinin son derece önemli olduğunu gösteren ilk kişiydi. Bu durum, diğerlerinin yanı sıra, 1920'lerin sonundan 1930'lara kadar Alman matematikçi Seifert'in çalışmalarıyla daha da vurgulandı. Ayrıca o tarihlerde Almanya'da cebirsel geometri ve düğüm teorisi arasındaki ilişkinin araştırılmasında zaten önemli bir faaliyet vardı. Cebirsel geometrinin göz önüne aldığı temel nesneler; doğrular, çemberler, parabol ve çeşitli eğriler idi ve bu iki disiplin arasındaki ilişki buraya dayanıyordu. İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra, 1950'lerde ABD'de düğüm teorisi üzerine araştırmalar büyük bir hızla ilerledi. Bu araştırmanın etkisi altında, Japonya'da bugüne kadar devam eden düğüm teorisi üzerine büyük bir araştırma patlaması yaşandı. 1970'lerde düğüm teorisinin, Smith'in periyodik dönüşümlerle ilgili varsayımının çözümü sayesinde cebirsel sayı teorisiyle bağlantılı olduğu gösterildi. 1980'lerin başında, Jones'un çığır açan düğüm sabiti olan Jones polinomunun keşfi ile birlikte düğüm teorisi, topoloji alanından matematiksel fiziğe geçti. Bu durum, düğüm teorisinin çözülebilir istatistiksel mekanik modelleriyle yakından ilişkili olduğu gösterildiğinde daha da güçlendi. 1980'lerde ve 1990'larda düğüm teorisi yeni gelişmelerin girdabına kapıldı (Adams 1994; Kawauchi 1996). Bu gelişmeler düğüm teorisyenleri için yeni araştırma alanları açmakla kalmadı, aynı zamanda fizikçilerin, kimyagerlerin ve biyologların dikkatini çekti (Dye 2016; Manturov 2018). Bu gelişmelere paralel olarak düğüm sabitleri tanımlandı. Bu sabitler yardımıyla düğümlerin sınıflandırması yapıldı. Sonuçta ortaya bazı önemli düğüm çeşitleri ve düğüm aileleri çıktı (Johnson and Henrich 2017).

Her ne kadar düğüm grafi fikrini ilk kullanan 1877 yılında İskoç fizikçi Peter Tait olsa da düğüm grafi terimini literatüre ilk kazandıran kişi 1930 yılında Bankwitz olmuştur (Kurpita and Murasugi 1998). 2-boyutlu bir düzlemde bir düğümün veya halkanın izdüşümü, düzlemi birkaç bölgeye böler. Düğüm teorisi çalışmalarında bu bölgeleri beyaz bölgeler ve siyah bölgeler olmak üzere iki sınıfa ayırmak sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemi basitleştiren Bankwitz, alterne düğümler

konusundaki çalışmasında düğüm grafi kavramını tanıttı (Yajima and Kinoshita 1957). Daha sonra Aumann 1956 yılında alterne düğümler üzerine yaptığı çalışmasında bu kavrama yer vermiştir (Aumann 1956). Yajima ve Kinoshita bu kavramın grafsal davranışlarını incelemişlerdir (Yajima and Kinoshita 1957). İlerleyen dönemlerde de bu çalışmalar sürmüştür. Murasugi, 1989 yılında graf sabitleri ve bunların düğüm teorisine olan uygulamaları üzerine yaptığı çalışmasını yayımladı (Murasugi 1989). Ayrıca 1998 yılında Kurpita ve Murasugi, graf teorisindeki grafların ve tekniklerin düğüm teorisine nasıl transfer edilebileceği üzerine yaptıkları çalışmalarını yayımladılar (Kurpita and Murasugi 1998). 2002 yılında Uğur, düğüm graflarının; grafsal davranışları, Jones polinomları ve matrisleri gibi konuları inceleyen kapsamlı bir içeriğe sahip doktora tez çalışmasını sundu (Uğur 2002). Günümüzde üç boyutlu uzayda bir graf ile bir düğüm veya halka arasındaki yakın bağlantıların yakın zamanda keşfedilmiş olması graflara ait birçok sabitin klasik düğüm teorisinde çok önemli roller oynadığını ortaya koymaktadır.

Düğüm, 3-boyutlu uzay $\mathbb{R}^3$ de kendi arakesit noktaları olmaksızın herhangi bir basit kapalı eğridir ve halka, kesişmeyen basit kapalı eğrilerin herhangi bir birleşimidir. Bir graf, noktalardan ve doğru parçalarından oluşan bir şekil olarak düşünülebilir (topolojik olarak buna 1-kompleks denir) (Bollobas 1998). Her bir düğüme (halkaya) karşılık gelen bir graf tayin edilebilir ve böyle bir grafa bir düğüm (halka) grafi denir. Düğüm diyagramlarının bir uygun temsili 1877’de Peter Tait tarafından tanıtıldı. Herhangi bir düğüm diyagramı; köşeleri, kesişme noktaları olan ve kenarları birbirini takip eden kesişmeler arasındaki yollar olan bir düzlem grafını tanımlar. Bu düzlemsel grafın tam olarak bir yüzü sınırsızdır; diğerlerinin her biri 2-boyutlu bir diske homeomorfiktir. Sınırsız yüz siyah olacak ve bir sınır kenarını paylaşan herhangi iki yüz zıt renklere sahip olacak şekilde bu yüzler siyah veya beyaza boyanır. Sonuç olarak köşeleri beyaz yüzler olan ve kenarları kesişimlere karşılık gelen yeni bir düzlem graf bu şekilde oluşturulabilir. Bu grafın her bir kenarı, kenarın uç noktalarından birinden karşılık gelen geçişi görüntülerken hangi ipliğin diğerinin üzerinden geçtiğine bağlı olarak bir sol kenar veya sağ kenar olarak etiketlenebilir. Sol ve sağ kenarlar için alışılmış olarak; sol kenarlar (+) ile ve sağ kenarlar (-) ile etiketlenerek veya sol kenarlar düz çizgilerle ve sağ kenarlar kesik çizgilerle çizilerek gösterilir. Orijinal düğüm diyagramı, bu yeni düzlem grafının

medial grafidır ve her geçitin türü, karşılık gelen kenarın işaretiyle belirlenir. Her kenarın işaretini değiştirmek, düğümü bir aynada yansıtmaya karşılık gelir.

Graf teorisiyle ilişkili herhangi bir çalışma için, düzlemsel graflar ele alınır ve graf sabitleri için gereken formüller, onların üzerinde hesaplanır veya ispatlanır. Düğüm teorisi de yalnızca düzlemsel graflarla ilgilendiğinden bu durum, düğüm teorisindeki bazı karmaşık cebirsel topolojik ispatların yerine graf teorik ispatlarının alınabileceğini göstermektedir (Murasugi 1989).

1980'lerin başından itibaren graf teori, erişilebilirliği ve uygulama genişliği nedeniyle lisansüstü araştırmaları için çok tercih edilen bir alan olmuştur. Benzer şekilde, düğüm teorisi de 1990'ların başından itibaren oldukça dikkat çeken bir alan olarak öne çıkmıştır.

Kombinatoryal düğüm teorisinin; üç boyutlu uzayda düğümlerin, halkaların teorisine ve onların topolojisine yaklaşımın bir graf teorik yolu olduğu iyi bilinmektedir. Bu teorinin düğüm diyagramları vasıtasıyla yerleşik formülasyonu, diyagramların ve grafların bir karışımı olan biçimsel bir sistemle çalışır. Düğüm diyagramlarının graf teorik kavramlara bu çevirisi, kombinatoryal düğüm teorisi, graf teorisi ve matematiğin temelleri arasında doğrudan bir bağlantı sağlaması açısından önemlidir. Harary and Kauffman, bu diyagramatik biçimsel sisteme basit ve etkili bir küme-teorik destek vermek için graf teorisinin nasıl kullanılacağını gösterdi (Harary and Kauffman 1999). Onlar bu çalışmalarında, herhangi bir düğüm veya halka diyagramıyla doğal bir şekilde ilişkili olan bir düzlemsel graf tanıtıyorlar ve bu grafların, düğümlerin cebirsel sabitlerini incelemede nasıl kullanılabileceğini gösteriyorlar.

Dolayısıyla bir düğüme karşılık gelen grafin kombinatoryal açıdan özelliklerinin incelenmesi, bunların karakterizasyonunun yapılması ve bunun düğüm teorisine katkısı araştırılmaya değer bir problemidir. Bu çalışma boyunca, graf teorisindeki graflardan ve tekniklerden önemli ölçüde yararlanarak, önemli bir düğüm ailesi olan, bükümlü düğümlerin graflarının graf parametreleri incelenmiştir.

Bükümlü düğümler, önceki yıllarda üzerinde derinlemesine çalışmalar yürütülen bir düğüm ailesidir. 2001 yılında Hoste and Shanahan, bükümlü düğümlerin topolojik özelliklerini araştırdı (Hoste and Shanahan, 2001). Ayrıca bükümlü düğümlerin çeşitli polinom sabitleri incelendi ve hesaplandı (Nawata *et al.*

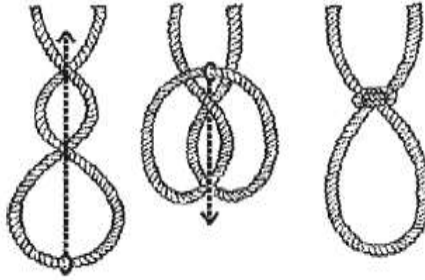
2012; Ham and Lee 2016; Taşköprü ve Sinan 2021). Şahin ve Şahin, 2018-2019 yılları arasında yaptıkları çalışmalarında bükümlü düğümlerin graflarının; Hosoya, Tutte ve Jones polinomlarını karakterize ettiler (Şahin and Şahin 2018a, 2018b, 2019). 2020 yılında A. Şahin, bükümlü düğümlerin graflarının, bazı farklı graf renklendirme türleri için graf renklendirme sayılarını gösteren çalışmasını sundu (Şahin 2020). 2021 yılında bükümlü düğümlerin grafları için bazı dominasyon türü sabitleri karakterize edildi (Şahin 2021). Sonuç olarak bükümlü düğümler ailesinin ve bunlara karşılık gelen grafların özellikleri, incelenmeye değer bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde; düğüm teorisinin tarihsel gelişiminden, düğüm teorisi ile graf teorisi arasındaki ilişkinin köklerinden ve bugünkü durumundan, düğüm grafi fikrinin ortaya çıkışından ve bu konular üzerine literatürde bulunan çalışmalardan bahsedilmiştir. Ayrıca çalışılan problemin, literatür açısından önemi de bu bölümde irdelenmiştir. İkinci bölümde yapılan çalışmalara kılavuzluk yapan temel kavram ve notasyonlar tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde çalışmanın materyali ve elde edilme yöntemi verilmiştir. Dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar verilmiş ve bükümlü düğümlerin graflarına ait graf parametrelerinin genelleştirilmeleri ispatlarıyla birlikte sunulmuştur. Son bölümde ise sunulan bu sonuç ve genelleştirmelerin üzerinde durulmuş, etkileri ve önemi tartışılmıştır.

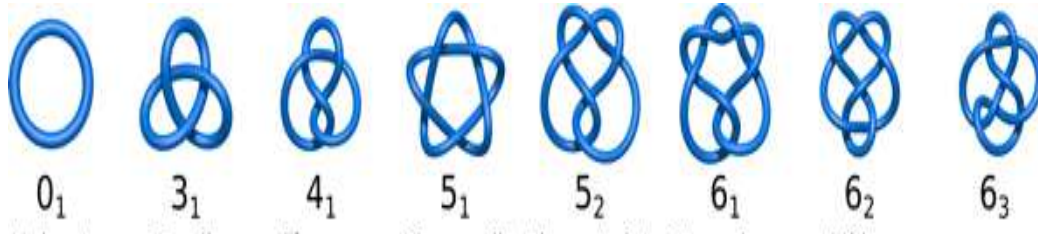
2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Düğüm

Matematiksel olarak düğümler; kapalı döngüler, yani başlangıcı veya sonu olmayan döngüler olarak modellenir. Bir parça ip veya sicim düğümlenerek açık bir ilmek (iki ucu gevşek kalacak şekilde) elde etmek suretiyle bu durum oluşturulur. Ayrıca bir düğümün kendi kendisiyle kesişmemesi de gerekir. Birçok kişinin düğüm olarak kabul edeceği şeye bir örnek, aşağıdaki Şekil 2.1 de verilmiştir (Lankham 2002). Ancak bunu matematiksel bir düğüme dönüştürmek için şeklin üst kısmındaki iki ucu birleştirmek gerekir. Bu tür kapalı döngüleri kullanarak düğümleri incelemek için varlığı bilinen güçlü araçlar kullanılır. Spesifik olarak bu modelle, topoloji ve cebir öğeleri kullanılarak düğümler ayırt edilebilir. Şekil 2.2 de bazı matematiksel düğüm örnekleri görülmektedir.



Şekil 2.1. Kelebek düğümü (kapalı bir ilmek olmadığı için matematiksel bir düğüm olmayan)



Şekil 2.2. Bazı matematiksel düğüm örnekleri (Dabrowski-Tumanski 2019)

Tanım 2.1.1: X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. X topolojik uzayından Y deki $f(X)$ alt uzayına bir homeomorfizm mevcut ise

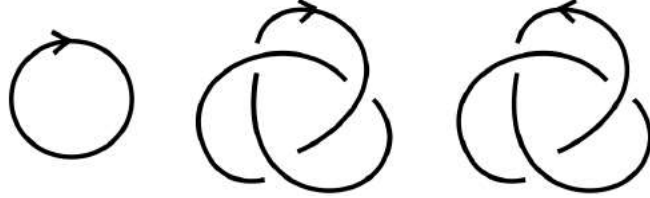
X uzayı Y uzayı içine gömülür denir (Mucuk 2010). Bir K düğümü, 1-küre S^1 in 3-küre S^3 e bir sürekli gömülmesidir (Manturov 2018). Diğer bir ifadeyle; bir düğüm, bir $K: S^1 \rightarrow S^3$ birebir sürekli dönüşümüdür.

Şekil 2.2 de görülen ilk düğüm örneği 0_1 düğümü, aşıkâr düğüm ya da düğümlenmemiş düğüm olarak adlandırılır.

Şekil 2.2 de görülen ikinci düğüm örneği 3_1 düğümü, sol-el trefoil düğüm ya da yonca yaprağı düğümü olarak adlandırılır.

$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ olduğuna dikkat edilsin. Sözde sonsuzluk noktasından kaçınmak için bir düğüm her zaman bir kuşatan (ambient) izotopisi ile yeniden düzenlenebileceğinden özellikle bir düğümü, dört boyutlu uzayda hayal edip zorlanmak yerine onun $\mathbb{R}^3$ de olduğunu düşünmek daha uygundur (Lankham 2002). Bununla birlikte S^3 ün olduğu gibi ortam uzayının kompakt olması da çok uygundur ve düğüm teorisindeki birçok sonuç S^3 durumuna özgüdür. Kuşatan izotopisi basitçe düğüm yayının, içinde bulunduğu 3-boyutlu uzayda kendisini kesmeyecek şekilde yaptığı hareketlerdir.

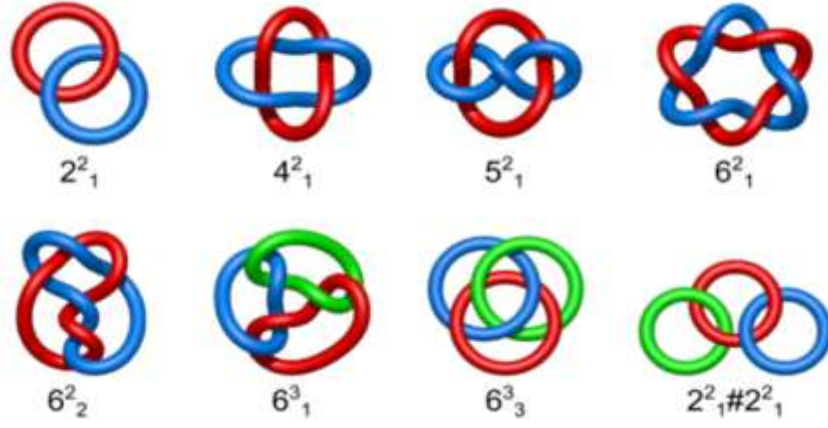
Şekil 2.3 de görüldüğü gibi bir düğüme bir yön tayin etmek beklenen bir durumdur.



Şekil 2.3. Yönlendirilmiş düğüm örnekleri

2.2. Halka

Tanım 2.2.1: (Johnson and Henrich 2017) Birbiri ile kesişmeyen düğümlerin, sıralı sonlu bir bileşimine halka denir. Halkayı oluşturan her bir düğüme, halkanın bir bileşeni denir (bakınız Şekil 2.4).



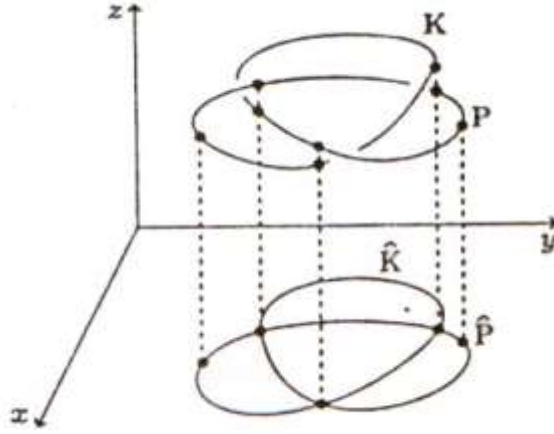
Şekil 2.4. Bazı halka örnekleri (Dabrowski-Tumanski 2019)

Aksi belirtilmedikçe düğümler için geçerli olan durumların halkalar için de geçerli olacağı kabul edilecektir.

2.3. Regüler Diyagramlar

Aslında buraya kadar düğüm olarak verilen şekiller, S^3 de gömülü olarak bulunan düğümlerin iki boyutlu uzaydaki regüler diyagramlarıdır. Düğümlere ait çalışmaların tamamına yakını düğümün tam bir temsilcisi olarak kabul edilen bu regüler diyagramlar üzerinden yürütülür. Bu regüler diyagramlar aşağıda açıklandığı şekliyle elde edilirler.

Şekil 2.5 de görüldüğü gibi üç boyutlu uzaydaki bir K düğümünün iki boyutlu uzaydaki $\widehat{K}$ izdüşümü alındığında sonlu sayıda katlı noktalar oluşacağı açıktır. Düzlemde basit kapalı bir eğri oluşamayacağından bu katlı noktaların oluşumu için izin verilmez. Bir katlı noktada yapılacak birkaç operasyonla düğüm bir miktar değiştirilebilir. Diğer bir ifadeyle, bu katlı noktada düğümün orijinaline sadık kalınarak düğümün yay parçasına alttan ya da üstten geçiyormuş görüntüsü verilebilir. Böyle değiştirilmiş izdüşümlere, regüler diyagramlar denir ve bunun düğümün tam bir temsilcisi olduğu kabul edilir. Düzlem üzerinde sanki düğümün üç boyutlu haliyle çalışılıyormuş gibi bir hal oluşur. Bir regüler diyagram üzerindeki düğümün yayının alttan ya da üstten geçtiğini gösteren dar bölgeye düğümün geçit noktası ya da kısaca geçiti denir. Ayrıca düğümler geçit sayılarına göre adlandırılırlar.

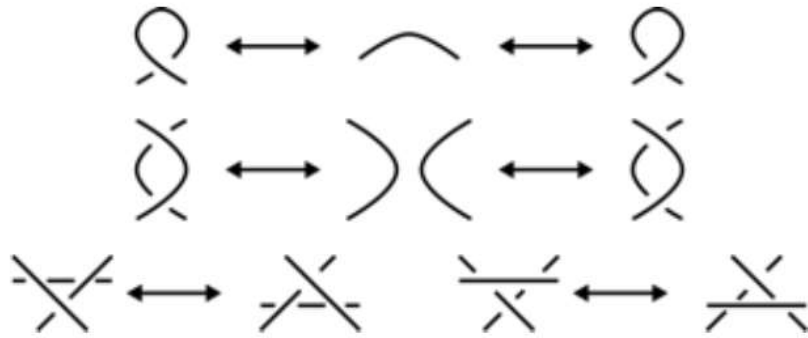


Şekil 2.5. Bir K düğümünün regüler izdüşümü

Tanım 2.3.1: Bir düğümüne ait regüler diyagram; eğer geçitleri ardışık olarak *üst geçit-alt geçit-üst geçit-alt geçit-...* veya *alt geçit-üst geçit-alt geçit-üst geçit-...* biçiminde ilerliyorsa bir alterne diyagram olarak adlandırılır. Bir alterne regüler diyagrama sahip olan düğümüne, alterne düğüm denir (Kauffman 1988).

2.4. Reidemeister Hareketleri

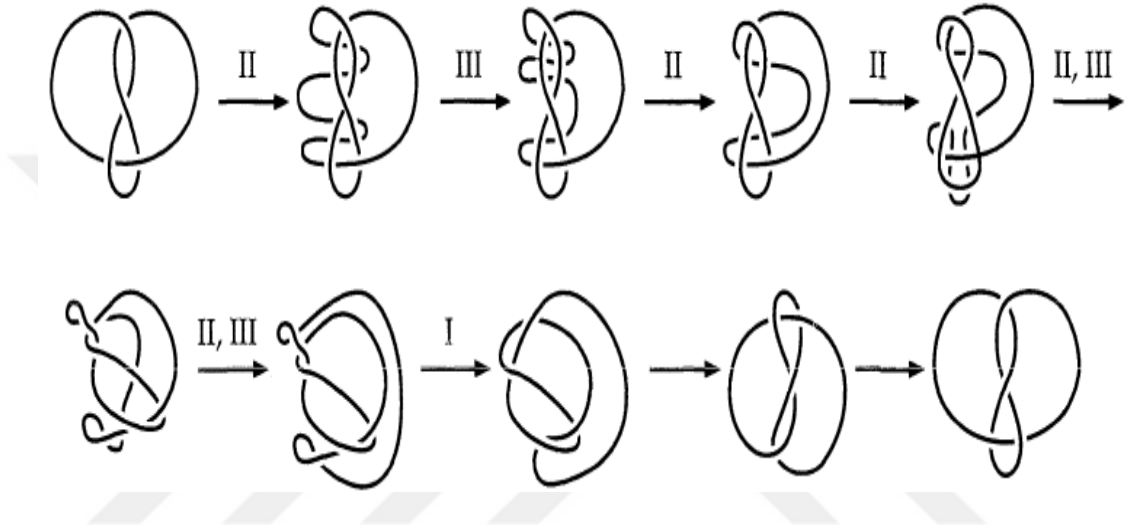
Tanım 2.4.1: Aşağıdaki Şekil 2.6 da tersleriyle birlikte tanımlanan üç adet R_1 , R_2 , R_3 hareketlerine Reidemeister hareketleri denir (Adams 1994).



Şekil 2.6. Reidemeister hareketleri

Reidemeister hareketleri, düğüm teorisinin en temel ve vazgeçilmez öğelerinden birisidir. Çünkü iki düğümün denkliği, bir niceliğin veya niteliğin

düğüm sabiti olarak tanımlanabilmesi bu hareketler vasıtasıyla mümkündür. Bir K düğümü; R_1, R_2, R_3 hareketleri ve/veya onların tersleri sonlu kez uygulanarak başka bir K' düğümüne dönüştürülebilirse bu düğümlerin denk düğümler olduğu söylenir (bakınız Şekil 2.7). R_1, R_2, R_3 Reidemeister hareketleri kuşatan izotopi olarak tanımlanır. Bir düğümün (halkanın) ayna görüntüsü, düğümün tüm geçitlerinin tersine çevrilmesi (alt geçit-üst geçit veya üst geçit-alt geçit değişimi) ile elde edilir.



Şekil 2.7. Sekiz-şekil düğümünün Reidemeister hareketleri vasıtasıyla ayna görüntüsüne dönüştürülmesi (Adams 1994)

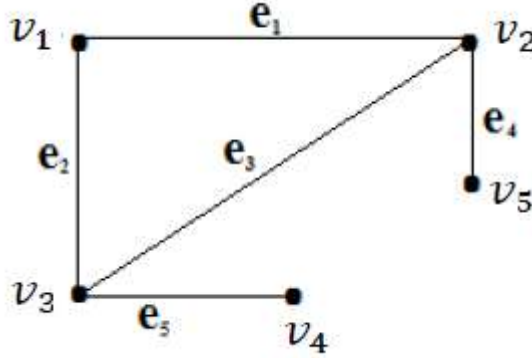
Bir niceliğin veya niteliğin düğüm sabiti olarak tanımlanabilmesi için Reidemeister hareketleri altında değişmeden kalması gerekir.

2.5. Graf

Tanım 2.5.1: V ; sonlu, boş olmayan, elemanları tepe (köşe) noktası (ya da sadece tepe) olarak adlandırılan $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ şeklinde bir küme olmak üzere bu noktaları veya noktanın kendisini birleştiren sonlu $E = \{e = v_i v_j : v_i, v_j \in V\}$ şeklinde kenarlar kümesinden oluşan (geometrik veya konumsal bir bilgi vermeyip sadece noktalar arasındaki ilişkiyi gösteren) (V, E) ikili yapısına graf denir (Büyükköse ve Gök 2019). Bir graf, $G = (V, E)$ ya da kısaca G ile gösterilir.

Tanım 2.5.2: $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, G nin herhangi v_1 ve v_2 tepeleri arasında en az bir kenar bulunuyorsa v_1 ve v_2 tepelerine komşudur denir

(Büyükköse ve Gök 2019). Benzer şekilde herhangi bir graftaki ortak bir tepeye sahip olan kenarlar, komşu kenarlar olarak adlandırılır (Büyükköse ve Gök 2019).



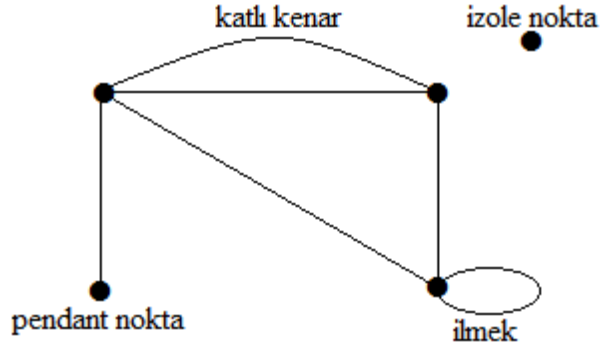
Şekil 2.8. Bir graf örneği

Şekil 2.8 de verilen grafa; v_1 ile v_2 , v_1 ile v_3 , v_2 ile v_3 , v_2 ile v_5 ve v_3 ile v_4 komşu tepelerdir. Benzer şekilde e_1 ile e_2 , e_1 ile e_3 , e_1 ile e_4 , e_2 ile e_3 , e_2 ile e_5 , e_3 ile e_4 ve e_3 ile e_5 komşu kenarlardır.

Tanım 2.5.3: Bir G grafında $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ tepeler kümesi olmak üzere V kümesinin eleman sayısına, G grafının mertebesi denir ve $|V(G)|$ ile gösterilir. Bir G grafında $E = \{e = v_1 v_2 : v_1, v_2 \in V\}$ kenar kümesi olmak üzere E kümesinin eleman sayısına, G grafının boyutu denir ve $|E(G)|$ ile gösterilir.

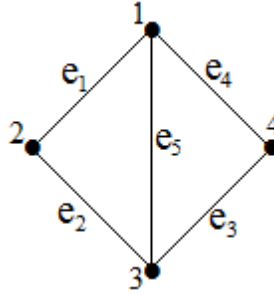
Tanım 2.5.4: v_1 ve v_2 , bir G grafında herhangi iki tepe olsun. v_1 ve v_2 tepelerini birleştiren birden fazla sayıda kenar varsa bu kenarlar, katlı kenar veya paralel kenar olarak adlandırılır. Bir graftaki başlangıç ve bitiş noktası aynı olan bir kenar, bir ilmek olarak adlandırılır (Büyükköse ve Gök 2019).

Tanım 2.5.5: v , bir G grafında herhangi bir tepe olsun. Buna göre v nin derecesi, v ye bağlı kenarların sayısıdır ve v nin derecesini göstermek için d_v sembolü kullanılır. Grafa; en küçük değerli dereceye sahip tepeye minimum dereceli tepe denir ve bu tepenin derecesini göstermek için $\delta(G)$ sembolü kullanılır, en büyük değerli dereceye sahip tepeye ise maksimum dereceli tepe denir ve bunu göstermek için $\Delta(G)$ sembolü kullanılır. Grafın ilmek içeren bir tepesinin derecesine bu durum iki (+2) olarak eklenir. Eğer $d_v = 0$ ise v ye izole tepe, $d_v = 1$ ise v ye ise pendant (uç tepe) adı verilir (Büyükköse ve Gök 2019).



Şekil 2.9. Bir graf örneği (Şener 2021)

Tanım 2.5.6: Bir graftaki komşu tepeler ve kenarlardan oluşan, sonlu sayıda elemana sahip diziye bir yürüme denir ve yürümeyi ifade etmek için W sembolü kullanılır. $W = 1e_12e_23 \dots ke_k(k+1)$ biçimindeki dizi, bir yürümeyi ifade eder ve bu yürümenin uzunluğu, dizide yer alan kenar sayısı ile belirlenir. Eğer bir yürümedeki her bir kenar ve her bir tepe, bir kez yer alıyorsa bu yürümeye yol adı verilir ve bir yolu göstermek için P sembolü kullanılır. Eğer bir yol, aynı tepeden başlayıp yine aynı tepede sonlanıyorsa devir adını alır. n sayıda tepeye sahip olan bir deviri göstermek için C_n sembolü kullanılır (Büyükköse ve Gök 2019).

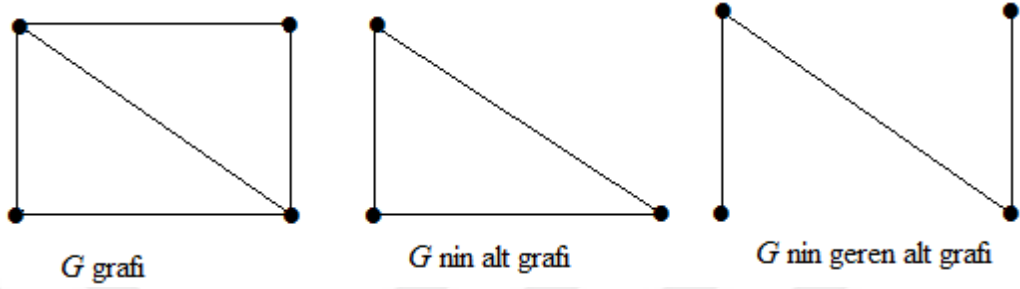


Şekil 2.10. Bir graf örneği (Şener 2021)

Şekil 2.10 da verilen grafta; $1e_12e_23e_34e_41e_53e_22$ bir yürüme, $1e_12e_23e_34$ bir yol ve $1e_12e_23e_51$ bir devirdir (Şener 2021).

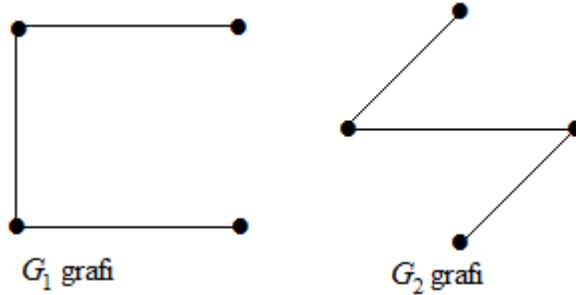
Tanım 2.5.7: Bir G grafinin bazı tepe ya da kenarlarının silinmesiyle oluşan grafa, bu G grafinin alt grafi denir. Yani, S ve G herhangi iki graf olmak üzere $V(S) \subseteq V(G)$ ve $E(S) \subseteq E(G)$ oluyorsa S ye G nin bir alt grafi denir.

G herhangi bir graf olmak üzere, bu grafın tepelerinin tamamını ve bazı kenarlarını kapsayan bir alt grafa, G grafının geren alt grafi (spanning subgraph) adı verilir (Büyükköse ve Gök 2019). Yani, S ve G herhangi iki graf olsun. Eğer $V(S) = V(G)$ ve $E(S) \subset E(G)$ oluyorsa S grafına G grafının bir geren alt grafi denir.



Şekil 2.11. Bir graf ve ona ait bir alt graf ile bir geren alt graf örneği (Şener 2021)

Tanım 2.5.8: $G_1 = (V, E)$ ve $G_2 = (V', E')$ iki graf olsun. Eğer $ab \in E$ biçimindeki her $a, b \in V$ tepe çifti için $f(a)f(b) \in E'$ olacak şekilde birebir ve örten bir $f: V_1 \rightarrow V_2$ dönüşümü mevcutsa bu graflara izomorfik graflar denir ve bu durumu belirtmek için $G_1 \cong G_2$ gösterimi kullanılır (Büyükköse ve Gök 2019).

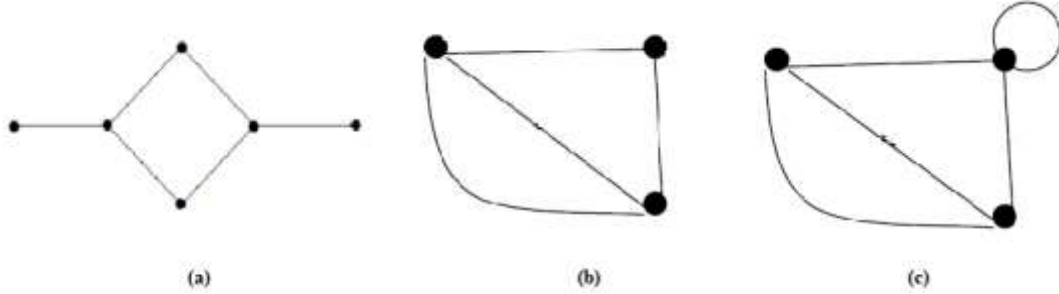


Şekil 2.12. Bir çift izomorf graf örneği (Şener 2021)

Tanım 2.5.9: Bir grafta yer alan herhangi iki tepe arasında bir ve yalnız bir adet kenar varsa ve hiçbir ilmek yoksa bu graf, basit graf adını alır (Şekil 2.13 (a)) (Büyükköse ve Gök 2019). Bir grafın kenarlarına bir yön tayin edilebilir.

Tanım 2.5.10: Bir grafta yer alan herhangi iki tepe arasında birden çok sayıda kenar varsa diğer bir ifadeyle paralel kenarlar mevcutsa bu graf, çoklu graf adını alır (Şekil 2.13 (b)) (Büyükköse ve Gök 2019).

Tanım 2.5.11: Bir grafta paralel kenarlar ve ilmekler mevcutsa bu graf, pseudo graf adını alır (Şekil 2.13 (c)) (Büyükköse ve Gök 2019).



Şekil 2.13. Basit graf, çoklu graf ve pseudo graf örnekleri

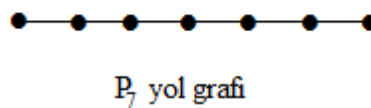
Tanım 2.5.12: Bir grafın keyfi olarak alınan herhangi iki tepesi arasında daima bir yol mevcutsa bu grafa bağlantılı graf adı verilir. Aksi durumda bu grafa bağlantısız graf denir (Büyükköse ve Gök, 2019).



Şekil 2.14. Bağlantılı ve bağlantısız graf örnekleri (Şener 2021)

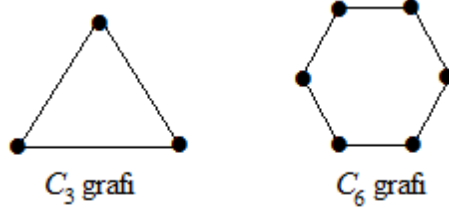
Tanım 2.5.13: Sadece izole tepe içeren grafa boş graf denir ve boş grafın kenarlar kümesi boş kümedir (Büyükköse ve Gök, 2019).

Tanım 2.5.14: Başlangıç ve bitiş tepelerinin derecesi 1, diğer tepelerinin derecesi 2 olan grafa yol graf denir. n noktalı bir yol graf, $n - 1$ sayıda tepeye sahiptir ve P_n ile gösterilir.



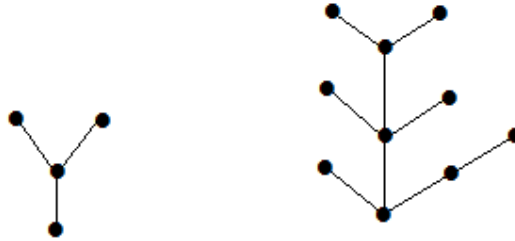
Şekil 2.15. Bir yol graf örneği (Şener 2021)

Tanım 2.5.15: Tepe sayısı üç ve daha fazla olan, tek bir döngüden oluşan grafa devir (çevre) grafi denir. Böyle bir grafa; herhangi bir tepeden, kendisine komşu olan iki tepeye giden birer kenar vardır ve böylece her bir tepenin derecesi 2 dir. n noktalı bir çevre graf, n kenara sahiptir ve C_n ile gösterilir.



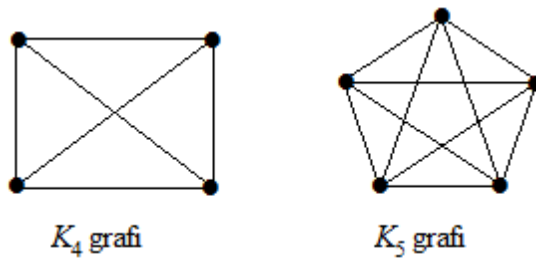
Şekil 2.16. Çevre graf örnekleri (Şener 2021)

Tanım 2.5.16: İçinde devir bulundurmayan ve kenar sayısı tepe sayısının bir eksiği olan bağlantılı graflara ağaç adı verilir ve n sayıda tepeye sahip bir ağaç grafi göstermek için T_n sembolü kullanılır (Büyükköse ve Gök 2019).



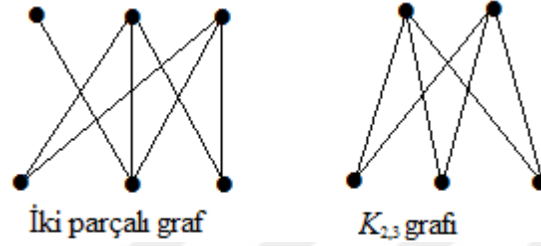
Şekil 2.17. Ağaç graf örnekleri (Şener 2021)

Tanım 2.5.17: Basit bir grafın her tepe çifti arasında bir kenar bulunuyorsa böyle graflara tam graf adı verilir ve n sayıda tepeye sahip bir tam grafı göstermek için K_n sembolü kullanılır (Büyükköse ve Gök 2019).



Şekil 2.18. Tam graf örnekleri (Şener 2021)

Tanım 2.5.18: Tepe kümesi iki ayrık alt kümeye ayrıştırılabilen ve kenarları, sadece bu alt kümelerin elemanları olan tepeler arasında oluşan graflara iki parçalı (bipartite) graf adı verilir. İki parçalı bir grafta; D ve F ayrık tepe kümeleri olmak üzere D nin her elemanı F nin her elemanı ile birleştiriliyorsa bu graf, iki parçalı tam graf adını alır ve $s(D) = p$ ve $s(F) = t$ olmak üzere iki parçalı tam grafi göstermek için $K_{p,t}$ sembolü kullanılır (Büyükköse ve Gök 2019).



Şekil 2.19. İki parçalı graf örneği ve iki parçalı tam graf örneği (Şener 2021)

2.6. Graf Parametreleri

2.6.1. Çap

Tanım 2.6.1: (Bollobas 1998) $G = (V, E)$ bağlantılı ve uzaklık tabanlı bir graf olsun. Herhangi iki u ve v tepesi arasındaki mesafe, u ve v tepeleri arasındaki yolların içindeki minimum sayıda olanıdır ve bu mesafe $d(u, v)$ ile gösterilir. Bir G grafının topolojik çapı (diameter) $d(G)$, (yani G deki en uzun topolojik mesafe)

$$d(G) = \max_{u,v \in V(G)} \{d(u, v)\}$$

olarak tanımlanır.

2.6.2. Baskınlık sayısı

Tanım 2.6.2: (Haynes *et al.* 1998) Bir G grafi verilsin. $V(G)$ bu grafın tepeler kümesi olmak üzere $S \subseteq V(G)$ ve $S \neq \emptyset$ olarak alınsın. Eğer G grafının her bir tepesi; S ye ait veya S nin bir tepesine komşu ise S ye bir baskın küme adı verilir. Bir graf birden çok sayıda baskın kümeye sahip olabilir. Bir grafın tüm baskın kümeleri arasındaki en az sayıda elemana sahip olanın eleman sayısına, bu grafın baskınlık

sayısı (domination number) adı verilir ve bir G grafinin baskınlık sayısı, $\gamma(G)$ sembolü ile belirtilir.

2.6.3. Renklendirme sayısı

Tanım 2.6.3: (Bollobas 1998) Bir G grafi verilsin. G grafinin birbirine komşu olan tepelerini farklı renkte boyamak için gerekli olan en az renk sayısı, renklendirme sayısı (chromatic number) olarak adlandırılır ve $\chi(G)$ ile gösterilir.

2.6.4. Bağımsızlık sayısı

Tanım 2.6.4: (Vasudev 2006) Bir G grafi verilsin. $V(G)$ bu grafin tepeler kümesi olmak üzere $S \subseteq V(G)$ ve $S \neq \emptyset$ olarak alınsın. S kümesindeki tepeler çiftler çiftler alındığında bu tepeler arasında G ye ait bir kenar yoksa S ye bir bağımsız küme adı verilir. Bir graf birden çok sayıda bağımsız kümeye sahip olabilir. Bir grafin tüm bağımsız kümeleri arasında en fazla sayıda elemana sahip olanın eleman sayısına, bu grafin bağımsızlık sayısı (independence number) adı verilir ve bir G grafinin bağımsızlık sayısı, $\beta(G)$ sembolü ile belirtilir.

2.6.5. Klik sayısı

Tanım 2.6.5: (Bondy and Murty 2008) Bir G grafi verilsin. G nin karşılıklı olarak birbirine komşu olan tepelerinin kümesine klik kümesi denir. Bir G grafinin klik kümelerindeki maksimum eleman sayısı, grafin klik sayısı olarak adlandırılır. Bu değer $K(G)$ ile gösterilir ve matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$K(G) = \max\{ |V_i| : V_i \text{ klik küme} \}.$$

2.6.6. Tepe bağlantılılık sayısı

Tanım 2.6.6: (Vasudev 2006) Bir G grafi verilsin. Bu G grafini bağlantısız veya sadece izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına, grafin tepe bağlantılılık sayısı (connectivity, bağlantı nokta sayısı, vertex connectivity) denir ve $C(G)$ ile gösterilir. Bir G grafinin bileşenlerinin sayısı $w(G)$ olmak üzere tepe bağlantılılık sayısı;

$$C(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| : w(G - S) \geq 2\}$$

şeklindedir.

2.6.7. Örtü sayısı

Tanım 2.6.7: (Vasudev 2006) Bir G grafi verilsin. $V(G)$ bu grafin tepeler kümesi olmak üzere $S \subseteq V(G)$ ve $S \neq \emptyset$ olarak alınsın. Eğer G grafindeki her bir kenarın en az bir tepesi S nin bir elemanı ise S ye bir örtü kümesi adı verilir. Bir graf birden fazla sayıda örtü kümesine sahip olabilir. Bir grafin tüm örtü kümeleri arasında en az sayıda elemana sahip olanın eleman sayısına, bu grafin örtü sayısı (covering number) adı verilir ve bir G grafinin örtü sayısı, $\alpha(G)$ sembolü ile belirtilir.

2.6.8. Klik örtü sayısı

Tanım 2.6.8: (Vasudev 2006) Bir G grafi verilsin. $V(G)$ tepe kümesinin maksimum klik kümeleri ile parçalanmasına G grafinin klik örtüsü denir. Bu parçalanmanın minimum sayısı ise klik örtü sayısı olarak adlandırılır ve $\theta(G)$ ile gösterilir.

2.6.9. Eşleşme sayısı

Tanım 2.6.9: (Bondy and Murty 2008) Bir G grafi verilsin. Bu G grafindeki bir eşleşme (matching), herhangi ikisinin hiçbir ortak bir tepe noktasına sahip olmadığı (yani, bağımsız kenarların oluşturduğu) bir kenarlar kümesidir. Maksimum eşleşme, mümkün olan maksimum kenar sayısı ile oluşturulan eşleşmedir. G grafinin maksimum eşleşmesinde var olan kenar sayısı, G nin eşleşme sayısı olarak adlandırılır ve $M(G)$ ile gösterilir.

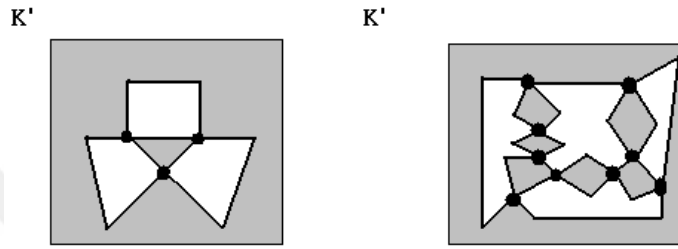
2.6.10. Wiener indeksi

Tanım 2.6.10: (Mohar and Pisanski 1988) Bir G grafi verilsin ve bu grafin tepe noktaları kümesi $V(G)$ olsun. $\sum_{u,v \in V(G)} d(u,v)$ toplamı, G grafinin Wiener indeksi olarak adlandırılır ve $W(G)$ ile gösterilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

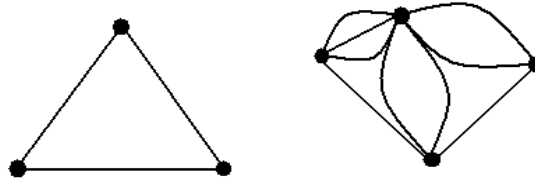
3.1. Düğüm Grafları

Tanım 3.1.1: D , K düğümü için bir regüler diyagram olsun. K' , K düğümünün D regüler diyagramından elde edilen izdüşüm olmak üzere K' , düzlem üzerinde bir graf olarak ele alınabilir. K' grafının köşe noktaları, K düğümünün geçitleri ile eşleşir (Şekil 3.1) (Şahin 2015).



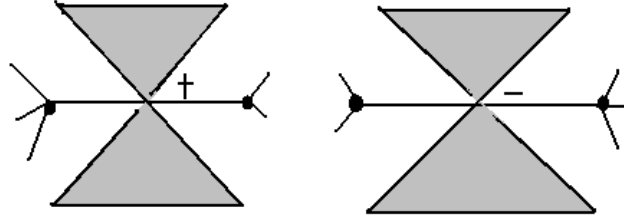
Şekil 3.1. Renklendirilmiş graflar

Elde edilen bu graflar aşağıdaki şekilde renklendirilebilir: K' izdüşümü, bulunduğu düzlemi farklı bölgelere ayırır. En dışta bulunan bölgeden başlanarak bölgeler, ya siyah ya da beyaz ile renklendirilir. En dıştaki (sınırsız) bölge siyah (ya da beyaz) ile renklendirilecektir. Burada dikkat edilecek en temel husus, komşu bölgeler hiçbir zaman aynı renk olmayacak şekilde, yani bir kenarın iki tarafındaki renkler farklı olacak şekilde renklendirilme yapılmasıdır. Sonra her bir beyaz (ya da siyah) bölgenin merkezinde bir nokta seçilir. Eğer iki beyaz (ya da siyah) bölge ortak geçit noktasına sahipse o zaman bu beyaz (ya da siyah) bölgelerin iki merkezi kenarlar vasıtasıyla birleştirilir. Her bir kenar sırasıyla bir ortak geçitle eşleşir. Bu şekilde K' den G düzlem grafi elde edilir (Şahin 2015). Şekil 3.2 de, Şekil 3.1 deki izdüşümlere karşılık oluşan düzlem graflar görülmektedir.



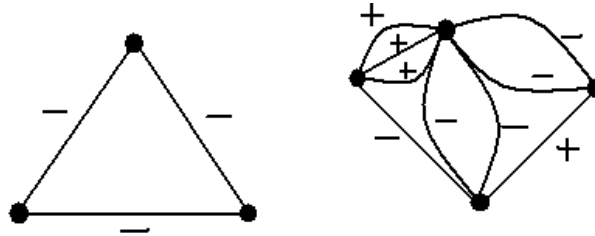
Şekil 3.2. Düzlem graflar

Bu şekildeki bir düzlem graf göz önüne alındığında düğüme ait temel özelliklerin belirlenmesinde genelde izdüşüm yerine regüler diyagram kullanılır. Bunu gerçekleştirmek için düğümün geçitleri dikkate alınır. Her bir geçitin durumuna göre kenarlar üzerinde + veya - işareti tayin edilir. Bu işaret tayin etme işlemi Şekil 3.3 de gösterilen kurallar doğrultusunda yapılır (Şahin 2015):



Şekil 3.3. Bir düğüme karşılık oluşan düzlemsel grafın kenarlarına işaret tayin etme kuralları

Görüleceği üzere Şekil 3.3 deki figürlerdeki yatay çizgiler, Şekil 3.2 deki gibi geçitlerden geçen kenarlardır. Graflardaki + veya - işaretleri tayin edildikten sonra Şekil 3.2 deki düzlem graflara karşılık gelen işaretlendirilmiş düzlem graflar elde edilir (Şekil 3.4).

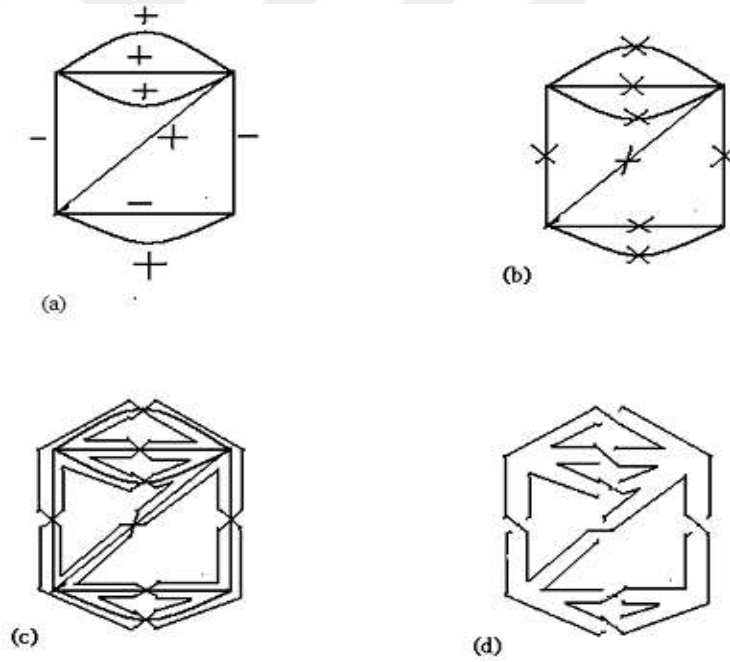


Şekil 3.4. İşaretlendirilmiş düzlemsel graflar

Yukarıdaki işlemin tersi de mümkündür, yani işaretlendirilmiş bir düzlemsel grafa karşılık bir düğüm diyagramı bulunabilir (Şahin 2015): Düğümü elde etmek için ilk önce düzlemsel grafın her bir kenarının ortasına “x” işareti konulur (Şekil 3.5.(b)). Bu çarpım işaretlerinin keyfi olarak seçilen birinin uç noktalarından başlanarak diğer bir komşu çarpım işaretlerinin uç noktalarına ulaşıncaya kadar grafın kenarlarına paralel olacak şekilde dört çizgi çizilir. Her çarpım işareti için bu işlem tamamlandığında elde edilecek şey, bir düğüme ait izdüşüm olacaktır. Fakat bu

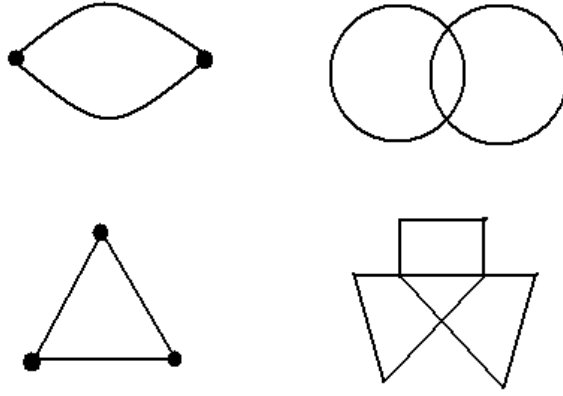
izdüşüm, geçitlerin durumu hakkında bilgi vermeyecektir (Şekil 3.5.(c)). Bu temel bilgiyi elde etmek için graf üzerindeki düzlemsel bölgeler, yukarıda bahsedildiği gibi siyah veya beyaz olacak şekilde renklendirilir. Bu takdirde yine yukarıda bahsedilen işaretlendirme kuralları uygulanarak orijinal grafın işaretlerinden geçitin karakteri bilgisine ulaşılabilir. Geçitlerin karakterleri hakkındaki bilgiler, grafa eklendikten sonra bölgelerin renklenme durumu kaldırılır ve böylelikle hedeflenen düğüm diyagramı oluşturulur (Şekil 3.5.(d)).

Sonuç olarak her işaretlendirilmiş düzlemsel grafa karşılık gelen bir regüler düğüm diyagramı vardır (Şekil 3.5.(a)-(d)). Ancak iki farklı düzlem grafın, yukarıdaki işlem yardımıyla elde edilen iki denk olmayan düğüm oluşturacağı sonucu her zaman için doğru değildir. Bu durum halen daha düğüm teorisindeki açık problemlerden birisidir.



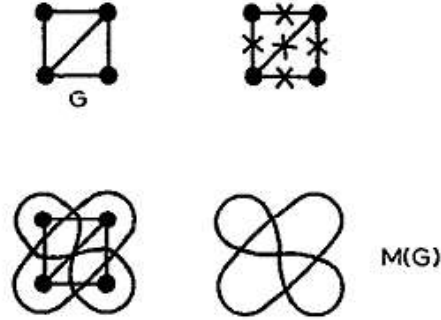
Şekil 3.5. İşaretlendirilmiş bir düzlemsel graf için oluşturulmuş düğümün regüler diyagramı

Kolaylıkla görüleceği üzere bir grafın kenarlarının sayısı, düğümün regüler diyagramının geçitlerinin sayısına eşittir (Şekil 3.6).



Şekil 3.6. Bağlantılı düzlemsel graflar ile onlara karşılık gelen düğümlerin (halkaların) regüler izdüşümleri

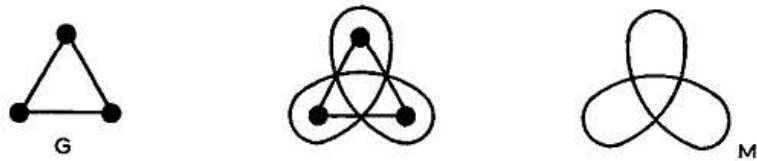
Tanım 3.1.2: G düzlemsel bir graf olsun. Medial graf $M(G)$, şu şekilde elde edilir (bakınız Şekil 3.7) (Kauffman 1989): G nin her bir kenarı “ $\times$ ” sembolüyle işaretlenir. Bu semboller; herhangi birinden başlanılmak suretiyle G nin kenarına paralel olacak, G nin karşılaşılan köşe noktası atlanılacak ve bir sonraki mevcut sembole birleştirilecek şekilde birbirlerine bağlanırlar. Burada her bir sembole medial grafın bir tepesi karşılık gelir.



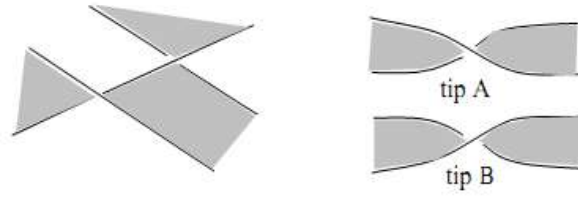
Şekil 3.7. Medial grafın elde edilmesi (Kauffman 1989)

Oluşan medial graf, her bir tepesinde lokal olarak işlenmiş dört kenara sahiptir. Diğer bir ifadeyle, medial graf 4-birleşme değerlidir. Medial grafın kenarlarının bazıları ilmekler olabilir. Düzlemde gömülen bu şekildeki bir grafa, bir evren denir (Kauffman 1989).

Örnek 3.1.1: Aşağıda görüldüğü gibi bir üçgen grafinin mediali trefoil ir.

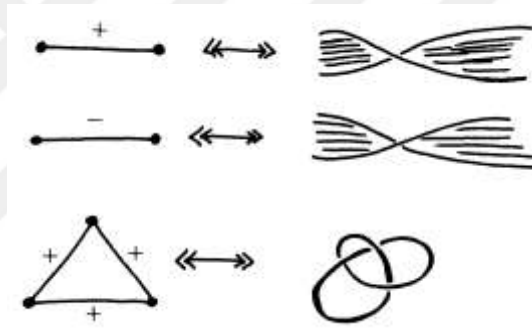


24



Şekil 3.9. Bir alterne halkanın taranmış diyagramında geçitlerin durumu (Kauffman 1988)

Düğümelerin ve halkaların regüler diyagramlarının işaretli düzlemsel graflara birebir karşılık geldiğine dikkat edilirse burada (+) işareti bir A kanalına, (−) işareti de bir B kanalına karşılık gelecek şekilde işaretler grafin kenarları üzerine yerleştirilir (Şekil 3.10) (Kauffman 1988).

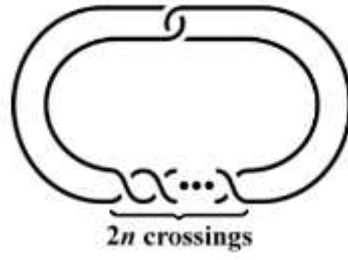


Şekil 3.10. İşaretlendirilmiş grafların elde edilmesi (Kauffman 1988)

3.2. Bükümlü Düğümler

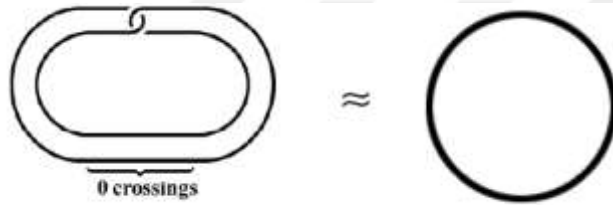
Bu kısımda bükümlü düğümlerin tanımı verilmekte ve ardından birkaç bilinen örnek sunulmaktadır. Bükümlü düğümler, düğüm teorisinde önemli bir yer teşkil eden belirgin bir düğüm ailesidir.

Tanım 3.2.1: (Lankham 2002) n bir doğal sayı olmak üzere bir T_n bükümlü düğümü, aşağıdaki Şekil 3.11 de verilen formda çizilebilen düğüm olarak tanımlanır. Burada n doğal sayısı, T_n bükümlü düğümünün tangle sayısı olarak adlandırılır.

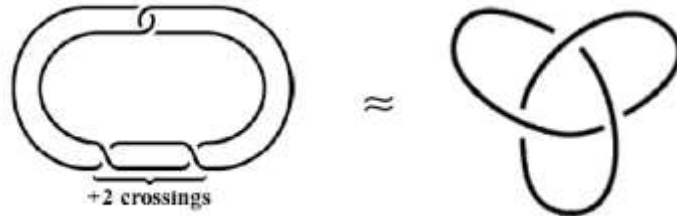


Şekil 3.11. Bir bükümlü düğüm örneği

Şekil 3.12 ve Şekil 3.13 de iyi bilinen iki bükümlü düğüm örneği görülmektedir (Lankham 2002).



Şekil 3.12. T_0 bükümlü düğümünün 0_1 aşıkâr düğümüne denkliği



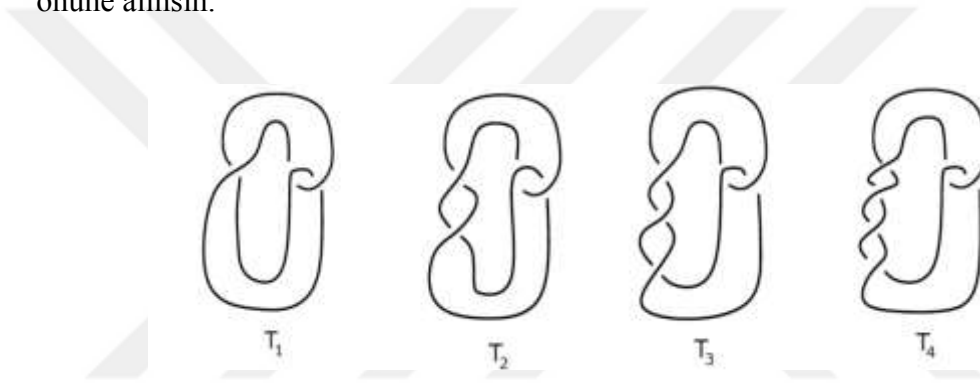
Şekil 3.13. T_2 bükümlü düğümünün 3_1 trefoil düğümüne denkliği

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde; bir önceki bölümde tanımı verilen bükümlü düğümlerin, yine aynı bölümde tanımlanan yöntemle grafları oluşturulmuş ve bu grafların ikinci bölümde tanımlanan graf parametreleri incelenmiş, ardından bunların genelleştirilmesi yapılmış ve bazı örnekler sunulmuştur.

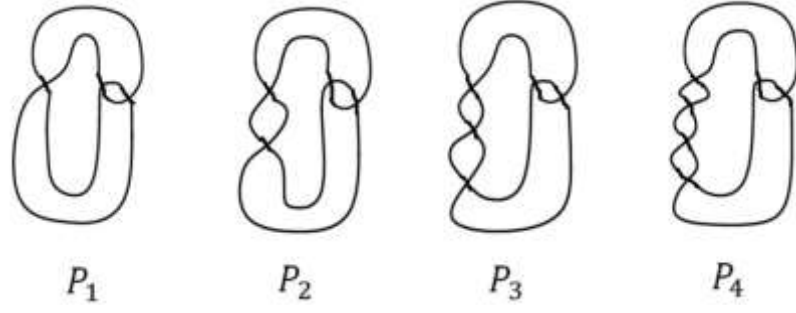
4.1. Bükümlü Düğümlerin Grafları

Öncelikle Şekil 4.1 de de bazı örnekleri görülen bükümlü düğümler ailesi göz önüne alınsın.

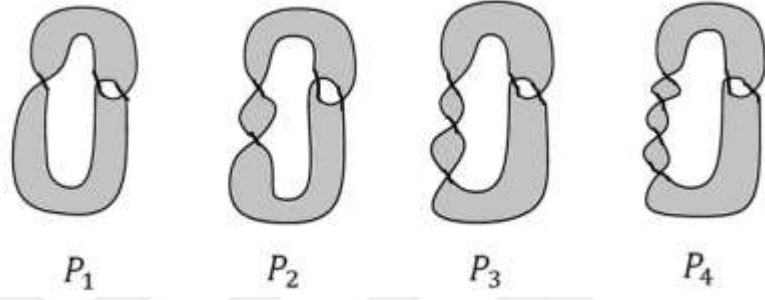


Şekil 4.1. Bazı bükümlü düğüm örnekleri

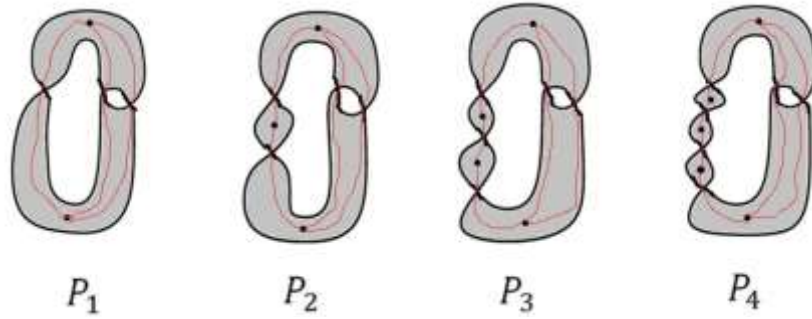
Bu düğümlerin graflarını elde etmek için şu şekilde bir yol takip edilecektir: İlk olarak bükümlü düğümlerin regüler diyagramlarından onların regüler izdüşümleri elde edilir (bakınız Şekil 4.2). Sonra bu izdüşümler, bir yayın iki yanı farklı renkte olacak şekilde dama desenli olarak gölgelendirilir (bakınız Şekil 4.3). Daha sonra her bir siyah bölgenin merkezinde bir nokta alınır ve ardından bu noktalar, siyah bölgelerin geçitlerinden geçecek şekilde çizilen kenarlar ile birleştirilir (bakınız Şekil 4.4 ve Şekil 4.5).



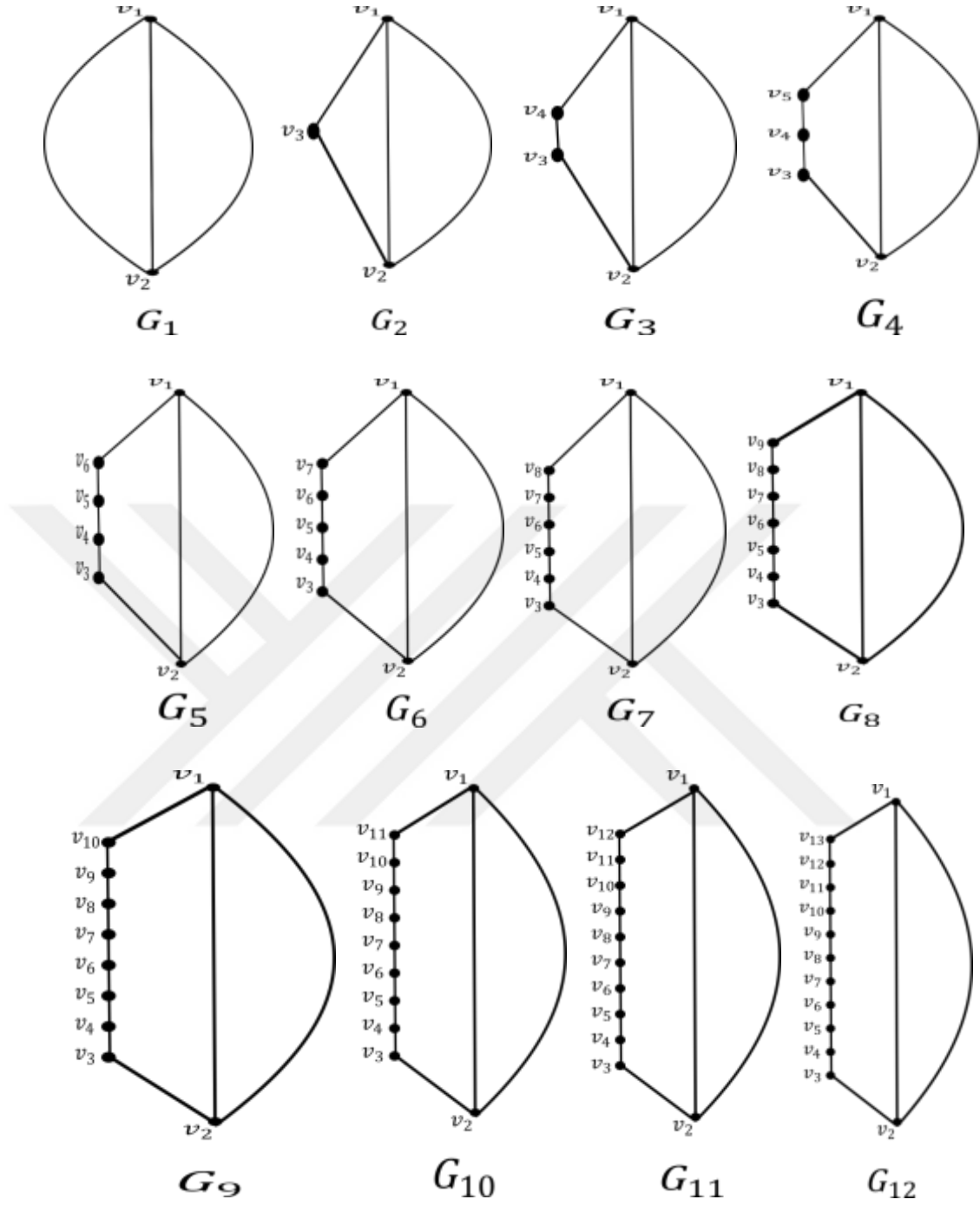
Şekil 4.2. Bükümlü düğümlerin izdüşümleri



Şekil 4.3. Bükümlü düğümlerin dama desenli izdüşümleri



Şekil 4.4. Bükümlü düğümlerin graflarının elde edilmesi



Şekil 4.5. Bükümlü düğümlerin grafları

4.2. Bükümlü Dügümlerin Graflarının Graf Parametreleri

Teorem 4.2.1: Bükümlü düğümlerin graflarının çapı,

$$d(G_{2n-1}) = d(G_{2n}) = n$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki verilen eşitlikte n yerine sırasıyla 1,2,3,4, ... doğal sayıları yazılmalıdır.

İspat: Bükümlü düğümlerin her bir grafinda; ilk iki tepe noktası arasında paralel iki yol, geriye kalan tepe noktaları arasında bir yol olmak üzere tepe noktasından bir fazla sayıda kenar bulunmaktadır. Bükümlü düğümlerin graflarının tepe noktaları, en üst tepeden başlamak şartıyla saat yönünde ardışık indisli noktalarla adlandırılın.

$n = 1,2$ için G_1 ve G_2 graflarının çaplarının 1 olacağı açıktır. $n \geq 3$ için ispat iki adımda tamamlanacaktır. İlk olarak n tek olsun. Bu durumda G_n grafinin ilk tepe noktası v_1 üzerinden saat yönünde ilerlendiği zaman v_1 ile arasındaki uzaklık maksimum olan tepe noktası $\frac{n+3}{2}$ indisli tepe noktası olmaktadır. $n = 3,5,7,9, \dots$ için bu tepe noktalarının indislerinin farkı olan $\frac{n+3}{2} - 1$, G_n grafinin çapını verir.

Şimdi n nin çift olması durumu gösterilsin. Bu durumda G_n grafinin ilk tepe noktası v_1 üzerinden saat yönünde ilerlendiği zaman v_1 ile arasındaki uzaklık maksimum olan tepe noktası $\frac{n+2}{2}$ indisli tepe noktası olmaktadır. $n = 2,4,6,8, \dots$ için bu tepe noktalarının indislerinin farkı olan $\frac{n+2}{2} - 1$, G_n grafinin çapını verir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.2.1: G_7 grafinin çapı aşağıdaki şekilde bulunur.

İlk olarak grafin tepeleri arasındaki mesafeler belirlenir. Bu mesafeler,

$$d(v_1, v_2) = 1, \quad d(v_1, v_3) = 2, \quad d(v_1, v_4) = 3, \quad d(v_1, v_5) = 4, \quad d(v_1, v_6) = 3, \\ d(v_1, v_7) = 2, \quad d(v_1, v_8) = 1$$

$$d(v_2, v_3) = 1, \quad d(v_2, v_4) = 2, \quad d(v_2, v_5) = 3, \quad d(v_2, v_6) = 4, \quad d(v_2, v_7) = 3, \\ d(v_2, v_8) = 2$$

$$d(v_3, v_4) = 1, \quad d(v_3, v_5) = 2, \quad d(v_3, v_6) = 3, \quad d(v_3, v_7) = 4, \quad d(v_3, v_8) = 3$$

$$d(v_4, v_5) = 1, d(v_4, v_6) = 2, d(v_4, v_7) = 3, d(v_4, v_8) = 4$$

$$d(v_5, v_6) = 1, d(v_5, v_7) = 2, d(v_5, v_8) = 3$$

$$d(v_6, v_7) = 1, d(v_6, v_8) = 2$$

$$d(v_7, v_8) = 1$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu mesafeler arasındaki maksimum değer 4 birim olduğundan G_7 grafinin çapı $d(G_7) = 4$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.2: Bükümlü düğümlerin graflarının baskınlık sayısı,

$$\gamma(G_n) = \gamma(G_{n+1}) = \gamma(G_{n+2}) = k + 1$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki yukarıdaki eşitlikte sırasıyla $n = 3k$ ve $1, 2, 3, 4, \dots$ doğal sayıları k yerine yazılmalıdır. Ayrıca $\gamma(G_1) = \gamma(G_2) = 1$ dir.

İspat: Teoremin ispatı için $\gamma(G_1) = \gamma(G_2) = 1$ olduğu açıktır. Çünkü G_1 ve G_2 graflarında tek bir tepe noktasının seçilmesi ile geriye kalan tüm tepeler domine edilir. Böylece G_1 ve G_2 grafları için dominasyon sayısı 1 dir.

Şimdi, $n \geq 3$ için oluşan grafların dominasyon sayılarının ispatı gösterilsin. Bükümlü düğümlerin graflarında ilk iki tepe hariç diğer tüm tepeler iki derecelidir. Bu grafları minimum sayıda tepe ile domine etmek için ilk tepe noktası, yani v_1 , tüm graflara ait baskın kümenin bir elemanı olarak alınabilir. Bu ilk tepe noktası, grafin ikinci ve sonuncu tepesini domine eder. Bundan sonraki tüm tepe noktaları için seçilecek bir tepe en fazla iki tepelyi domine edecektir. Dolayısıyla, geriye kalan bu tepe noktaları içinde eleman sayısı en fazla üç olan gruplar oluşacaktır. Diğer grupların aksine son grupta 1 ya da 2 tepe kalabilir. Bu kalan tepelerin de domine edilebilmesi için her üçlü gruptan alınacak bir tepe ile birlikte tek bir tepenin daha baskın kümeye alınması gerekir. Böylece $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $n = 3k$ indisli her grafin minimum sayılı baskın kümesinde farklı bir tepe dahil olacaktır. Yani, $k \in \mathbb{N}^+$ için $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ indisli grafların minimum sayılı baskın kümelerinin kardinalitesi eşit olacaktır. Sonuç olarak bu şekilde indislenmiş graflara ait baskınlık sayıları eşit olacaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.2.2: G_7 ve G_8 graflarının baskınlık sayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

Bunun için ilk olarak bu graflara ait en az sayıda elemana sahip baskın kümeler belirlenir.

G_7 grafi için en az sayıda elemana sahip bir baskın küme $D = \{v_1, v_4, v_6\}$ dir ve $\gamma(G_7) = 3$ olarak bulunur.

G_8 grafi için en az sayıda elemana sahip bir baskın küme $D = \{v_1, v_4, v_7\}$ dir ve $\gamma(G_8) = 3$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.3: Bükümlü düğümlerin graflarının renklendirme sayısı,

$$\chi(G_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ tek ise} \\ 3, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Şahin 2020).

İspat: : Teoremin ispatı n üzerinden tümevarım yöntemiyle yapılsın. Herhangi bir G grafi bir tane kenara sahipse o zaman bu grafin renklendirme sayısı $\chi(G)$ nin en az 2 olduğuna dikkat edilsin. Bükümlü düğümlerin graflarında belirli iki tepe arasında her zaman iki kenar vardır. Ayrıca $n \in \mathbb{N}^+$ için bükümlü düğümlerin grafları $n + 1$ tepeye sahiptir. İlk olarak G_1 ve G_2 temel durumu dikkate alınsın. G_1 grafinin yalnızca belirli iki tepesi ve üç kenarı olduğu için iki farklı renkle renklendirilebilir. G_2 grafinin ikisi belirli iki tepe olan bitişik üç tepesi olduğu için üç farklı renkle renklendirilmelidir. $n \geq 3$ için G_{n-2} grafinin renklendirmesi elde edilebilir ve grafa iki bitişik tepe ve iki kenar eklenebilir. Daha sonra bu şekilde elde edilen G_n grafi uygun bir şekilde renklendirilirse $\chi(G_n)$ değerinin $\chi(G_{n-2})$ değerinden daha büyük olmadığı görülür. n çift olsun. Eğer $\chi(G_n)$ değeri 2 olsaydı, $\chi(G_{n-2})$ değerinin 2 olması için sonradan eklenen bitişik tepeler ve kenarlar silinebilirdi. Bu durumda eğer n çift ise $n - 2$ nin de çift olması gerektiğinden tümevarım metodu gereğince bir çelişki oluşacaktır. Bu taktirde ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.3: G_7 ve G_8 graflarının renklendirme sayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

Bunun için bu grafların tepelerine en az sayıda renk içeren uygun bir renklendirme kümesi tayin edilmelidir.

G_7 grafi için uygun bir renklendirme $\{v_1 = mavi, v_2 = kırmızı, v_3 = mavi, v_4 = kırmızı, v_5 = mavi, v_6 = kırmızı, v_7 = mavi, v_8 = kırmızı\}$ şeklinde olup renklendirme sayısı $\chi(G_7) = 2$ olarak bulunur.

G_8 grafi için uygun bir renklendirme $\{v_1 = mavi, v_2 = kırmızı, v_3 = mavi, v_4 = kırmızı, v_5 = mavi, v_6 = sarı, v_7 = kırmızı, v_8 = mavi, v_9 = kırmızı\}$ şeklinde olup renklendirme sayısı $\chi(G_8) = 3$ olarak bulunur.

Sonuç 4.2.1: Eğer $\chi(G_n)$ iki ise G grafına iki parçalı graf denir bu durumda tek n ler için bükümlü düğümlerin G_n grafları iki parçalı graflardır.

Teorem 4.2.4: Bükümlü düğümlerin graflarının bağımsızlık sayısı,

$$\beta(G_n) = \beta(G_{n+1}) = k$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki $k \in \mathbb{N}^+$ için $n = 2k - 1$ alınmalıdır.

İspat: G bir graf olmak üzere $S \subseteq V(G)$, bu G grafının tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun. S kümesinden seçilen tepeler, ardışık tepeler olursa bu tepeler G grafında bir kenar teşkil ederler. Bu nedenle S kümesinden seçilecek tepenin, her seferinde iki ardışığı olan tepeler gruplanırsa bu tepeler arasında herhangi bir kenar ilişkisi söz konusu olmayacaktır. $k \in \mathbb{N}^+$ için G_n grafının maksimum elemanlı bağımsız kümesi $\{v_1, v_3, \dots, v_{2k-1}\}$ olacak şekilde k elemanlı küme olacaktır.

$k \in \mathbb{N}^+$ ve $n = 2k - 1$ için G_{n+1} grafının maksimum elemanlı bağımsız kümesinde; v_1 tepesi ile v_{n+2} tepesi arasında kenar olacağı için v_{n+2} tepesi eleman olarak yer almaz, v_{n+1} tepesi de çift indisli olacağından bağımsız kümenin elemanı olmayacaktır. G_{n+1} grafının maksimum elemanlı bağımsız kümesi $\{v_1, v_3, \dots, v_{2k-1}\}$ olacak şekilde k elemanlı küme olacaktır. Böylece $k \in \mathbb{N}^+$ için $n = 2k - 1$ olmak üzere grafların bağımsızlık sayıları $\beta(G_n) = \beta(G_{n+1}) = k$ olacaktır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.4: G_7 ve G_8 graflarının bağımsızlık sayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

Bunun için ilk olarak bu graflara ait en çok sayıda elemana sahip olan bağımsız kümeler belirlenir.

G_7 grafi için en çok sayıda elemana sahip bir bağımsız küme $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ dir ve $\beta(G_7) = 4$ olarak bulunur.

G_8 grafi için en çok sayıda elemana sahip bir bağımsız küme $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ dir ve $\beta(G_8) = 4$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.5: Bükümlü düğümlerin graflarının klik sayısı,

$$K(G_n) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ için} \\ 2, & \text{diğer durumlar için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: G bir graf olmak üzere $S \subseteq V(G)$, bu G grafinin tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun. Bükümlü düğümlerin graflarında ilk iki tepe hariç diğer tüm tepeler iki derecelidir. S kümesinden seçilen sadece ardışık ikişerli tepe noktalarından oluşan kümeler, G grafinin karşılıklı olarak birbirine komşu olan tepelerinin kümesi olacaktır. Bu nedenle $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere G_n grafinin klik kümelerindeki maksimum eleman sayısı 2 olacaktır. Özel olarak G_2 grafinin klik kümelerindeki maksimum eleman sayısı $\{v_1, v_2, v_3\}$ olacak şekilde 3 tür. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.5: G_7 ve G_8 graflarının klik sayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

G_7 grafi için $V_1 = \{v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_2, v_3\}$ en çok sayıda elemana sahip birer klik kümeleridir ve $K(G_7) = 2$ olarak bulunur.

G_8 grafi için $V_1 = \{v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_2, v_3\}$ en çok sayıda elemana sahip birer klik kümeleridir ve $K(G_8) = 2$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.6: Bükümlü düğümlerin graflarının tepe bağlantılılık sayısı,

$$C(G_n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ için} \\ 2, & \text{diğer durumlar için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: G bir graf olmak üzere $S \subseteq V(G)$, bu G grafinin tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun. S kümesinden bir tane üç dereceli tepe ve bu tepenin iki ardışığı olan bir tane iki dereceli tepe çıkarıldığında en az sayıda tepe çıkarılarak

G grafi bağlantısız veya izole tepelerden oluşan graf haline getirilebilir. Bu nedenle $n = 2, 3, 4, \dots$ olmak üzere G_n grafinin tepe bağlantılılık sayısı 2 olacaktır. Özel olarak $n = 1$ için G_1 grafinin tepe bağlantılılık sayısı 1 dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.2.6: G_7 ve G_8 graflarının tepe bağlantılılık sayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

G_7 grafini bağlantısız yapmak için çıkarılması gereken en az tepe sayılı küme $V_1 = \{v_1, v_3\}$ dir ve $C(G_7) = 2$ olarak bulunur.

G_8 grafini bağlantısız yapmak için çıkarılması gereken en az tepe sayılı küme $V_1 = \{v_1, v_3\}$ dir ve $C(G_8) = 2$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.7: Bükümlü düğümlerin graflarının örtü sayısı,

$$\alpha(G_n) = \alpha(G_{n+1}) = \frac{n+2}{2}, \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha(G_1) = 1$ dir.

İspat: G_1 grafi için $\{v_1\}$ örtü kümesi v_1 ve v_2 tepeleri arasındaki kenarın en az bir uç noktasını içerdiğinden G_1 grafinin en az elemana sahip örtü kümesinin eleman sayısı 1 olur. Böylece G_1 grafinin örtü sayısı 1 dir.

G_n grafinde v_1 tepesi, son tepe ile ikinci tepe arasındaki kenarın en az bir uç noktasına sahip olacağından G_n grafinin örtü kümesine v_1 tepesi dahil edilebilir. v_1 tepesinin iki ardışığı olan v_3 tepesi de iki kenara ait en az bir uç noktayı temsil edeceğinden örtü kümesinin elemanı olacaktır. Bu benzer durum v_3 den iki ardışık sonraki tepe ve aynı şartı sağlayan diğer tüm tepeler için geçerli olacaktır. Dolayısıyla $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ olmak şartıyla çift indisli G_n ve tek indisli G_{n+1} graflarının örtü kümeleri, $\{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2n-1}\}$ şeklindeki tek indisli ve $\frac{n+2}{2}$ tane tepe noktasından oluşan küme olacaktır. Dolayısıyla bükümlü düğümlerin graflarının örtü sayısı $\alpha(G_n) = \alpha(G_{n+1}) = \frac{n+2}{2}$, $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ olacaktır.

Örnek 4.2.7: G_7 ve G_8 graflarının örtü sayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

G_7 grafi için en az sayıda elemana sahip bir örtü kümesi $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ dir ve $\alpha(G_7) = 4$ olarak bulunur.

G_8 grafi için en az sayıda elemana sahip bir örtü kümesi $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9\}$ dir ve $\alpha(G_8) = 5$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.8: Bükümlü düğümlerin graflarının klik örtü sayısı, $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\theta(G_{2n-1}) = \theta(G_{2n}) = n$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: $n = 1, 2$ alındığında G_1 ve G_2 grafları için bir tek klik küme oluşacaktır. Dolayısıyla $\theta(G_1) = \theta(G_2) = 1$ olacaktır.

$n \geq 3$ için G_n graflarında ilk iki tepe hariç tüm tepe noktaları arasında sadece ardışık indisli iki tepe arasında bir yol vardır. Dolayısıyla G_n grafinin tepe kümesinin maksimum klik kümeleri ile parçalanması $\{v_1, v_{n+1}\}, \{v_2, v_n\}, \{v_3, v_{n-1}\}, \dots$ olacak şekilde n tek ise $\frac{n+1}{2}$ adette, n çift ise $\frac{n}{2}$ adette oluşur. Bu da $n \geq 3$ için $\theta(G_{2n-1}) = \theta(G_{2n}) = n$ olduğunu gösterir.

Örnek 4.2.8: G_7 ve G_8 graflarının klik örtü sayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

G_7 grafi için klik örtü kümeleri $V_1 = \{v_1, v_8\}, V_2 = \{v_2, v_3\}, V_3 = \{v_4, v_5\}, V_4 = \{v_6, v_7\}$ dir ve $\theta(G_7) = 4$ olarak bulunur.

G_8 grafi için klik örtü kümeleri $V_1 = \{v_1, v_8\}, V_2 = \{v_2, v_3\}, V_3 = \{v_4, v_5\}, V_4 = \{v_6, v_7\}$ dir ve $\theta(G_8) = 4$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.9: Bükümlü düğümlerin graflarının eşleşme sayısı,

$$M(G_{2n-1}) = M(G_{2n}) = n$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki sırasıyla n yerine $1, 2, 3, 4 \dots$ doğal sayıları yazılmalıdır.

İspat: Bükümlü düğümlerin graflarında, $n \in \mathbb{N}^+$ için $n + 2$ tane kenar olduğu ve bu kenarlardan iki tanesinin ilk iki tepe noktası arasında paralel olacak şekilde yer aldığı bilinmektedir. Buna göre bu grafların eşleşmelerinde – G_1 grafi hariç – maksimum elemanlı olanı, v_1 ve v_2 arasındaki kenarlar ihmal edilerek oluşturabilir.

$n \geq 2$ için G_n graflarının maksimum elemanlı eşleşmeleri; n tek ise

$$\{v_1 v_{n+1}, v_2 v_3, v_4 v_5, v_6 v_7, \dots, v_{n-1} v_n\}$$

olacak şekilde $\frac{n+1}{2}$ elemanlı, n çift ise

$$\{v_1v_{n+1}, v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7, \dots, v_{n-2}v_{n-1}\}$$

olacak şekilde $\frac{n}{2}$ elemanlı kenar kümeleri ile elde edilir. Bu takdirde $n \in \mathbb{N}^+$ için bükümlü düğümlerin graflarının eşleşme sayısı,

$$M(G_{2n-1}) = M(G_{2n}) = n$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2.9: G_7 ve G_8 graflarının eşleşme sayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

G_7 grafi için maksimum eleman sayılı bir kenarlar kümesi $V_1 = \{v_1v_8, v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7\}$ dir ve eşleşme sayısı $M(G_7) = 4$ olarak bulunur.

G_8 grafi için maksimum eleman sayılı bir kenarlar kümesi $V_1 = \{v_1v_9, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8\}$ dir ve eşleşme sayısı $M(G_8) = 4$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.10: Bükümlü düğümlerin graflarının Wiener indeksi, $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$W(G_n) = \begin{cases} n^3, & n \text{ tek ise} \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: “Bükümlü Düğümlere Ait Grafların Hosoya Polinomu” isimli çalışmada (Şahin 2018a) bükümlü düğümlerin graflarının Hosoya polinomu; $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ olmak üzere çift indisli graflar için

$$H(G_{2n}, y) = (2n+1)y^0 + (2n+1)y^1 + (2n+1)y^2 + \dots + (2n+1)y^{n-1} + (2n+1)y^n$$

ve tek indisli graflar için

$$H(G_{2n-1}, y) = 2ny^0 + 2ny^1 + 2ny^2 + \dots + 2ny^{n-1} + ny^n$$

şeklinde genelleştirilmiştir.

Herhangi bir grafin Hosoya polinomunun, bağımsız değişkene göre birinci türevi alınır ve türev polinomunda bağımsız değişken yerine 1 yazılırsa bu grafin Wiener indeksi değerinin elde edileceği bilinmektedir. Buna göre ispatı tamamlamak için yukarıdaki genelleştirmelerde bu türev alma işleminin uygulanması yeterlidir. n çift ise,

$$\begin{aligned}
 H(G_{2n}, y) &= (2n+1)y^0 + (2n+1)y^1 + (2n+1)y^2 + \dots + (2n+1)y^{n-1} \\
 &\quad + (2n+1)y^n \\
 [H(G_{2n}, y)]' &= 0 + (2n+1) + 2(2n+1)y^1 + \dots + (n-1)(2n+1)y^{n-2} \\
 &\quad + n(2n+1)y^{n-1} \\
 [H(G_{2n}, 1)]' &= (2n+1) + 2(2n+1)1 + \dots + (n-1)(2n+1)1^{n-2} \\
 &\quad + n(2n+1)1^{n-1} \\
 [H(G_{2n}, 1)]' &= (2n+1)(1+2+3+\dots+n) \\
 W(G_n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. n tek ise,

$$\begin{aligned}
 H(G_{2n-1}, y) &= 2ny^0 + 2ny^1 + 2ny^2 + \dots + 2ny^{n-1} + ny^n \\
 [H(G_{2n-1}, y)]' &= 0 + 2n + 4ny + \dots + 2n(n-1)y^{n-2} + n^2y^{n-1} \\
 [H(G_{2n-1}, 1)]' &= 2n + 4n1 + \dots + 2n(n-1)1^{n-2} + n^21^{n-1} \\
 [H(G_{2n-1}, 1)]' &= 2n(1+2+3+\dots+n-1) + n^2 \\
 W(G_n) &= 2n \frac{(n-1)n}{2} + n^2 \\
 W(G_n) &= n^3 - n^2 + n^2 \\
 W(G_n) &= n^3
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.2.10: G_7 ve G_8 graflarının Wiener indeksleri aşağıdaki şekilde bulunur.

G_7 grafi için Wiener indeksi $W(G_7) = 7^3 = 343$ olarak bulunur.

G_8 grafi için Wiener indeksi $W(G_8) = \frac{8 \cdot (8+1) \cdot (2 \cdot 8 + 1)}{2} = 4 \cdot 9 \cdot 17 = 612$ olarak bulunur.



5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının, özgün değeriyle birlikte düğüm teorisi ile graf teori arasındaki köklü ilişkiye anlamlı bir katkı sunacağı düşünülmektedir. Burada, önemli bir düğüm ailesi olan bükümlü düğümlerin grafları üzerine bir çalışma yürütülmüştür. Çalışmada, Şahin ve Şahin'in 2019 yılında yayımlanan "Bükümlü Düğümlerin Grafları İçin Jones Polinomu (Şahin and Şahin 2019)" isimli makalesinde açık problem olarak bırakılan bazı problemlere çözüm aranmıştır. Çalışmanın sonucunda dikkate değer bulgular elde edilmiştir. Bükümlü düğümlerin graflarının iyi bilinen, temel graf parametreleri hesaplanmıştır. Bu düğüm graflarının; çapı, baskınlık sayısı, renklendirme sayısı, bağımsızlık sayısı, klik sayısı, tepe bağlantılılık sayısı, örtü sayısı, klik örtü sayısı, eşleşme sayısı ve Wiener indeksi değerleri hesaplanmıştır. Bükümlü düğümlerin graflarının dikkate alınan bu parametrelere göre karakterizasyonları yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının, farklı düğüm türlerinin grafları için yapılacak benzer çalışmalara ön ayak olabileceği öngörülmektedir. Ayrıca bükümlü düğümlerin graflarının; komşuluk ve çakışım matrislerinin cebirsel özellikleri, graf çarpımlarının parametre değerleri gibi problemler gelecek yıllarda bu alana ilgi duyan araştırmacılar için çalışma konusu olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Adams, C.C., 1994. The Knot Book. W. H. Freeman and Company, New York.
- Aumann, R.J., 1956. Asphericity of Alternating Knots. *Annals of Mathematics*, 64, 374-392.
- Bollobas, B., 1998. Modern Graph Theory. Springer Science + Business Media, Inc, New York.
- Bondy, J.A. and Murty, U.S.R., 2008. Graph Theory, Springer, New York.
- Büyükköse, Ş. ve Kaya, G.K., 2019. Graf Teoriye Giriş. Nobel Yayınları, Ankara.
- Dabrowski-Tumanski, P., 2019. *Knots, lassos, and links*, Topological manifolds in biological objects. Phd Thesis, University of Warsaw, Warszawa.
- Dong, F. and Jin, X., 2015. Zeros of Jones polynomials of graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 22(3), Article Number: P3.23.
- Dye, H.A., 2016. An Invitation to Knot Theory: Virtual and Classical. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton.
- Johnson, I. and Henrich, A.K., 2017. A Interactive Introduction to Knot Theory. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- Ham, J. and Lee, J., 2016. Explicit formulae for Chern-Simons invariants of the twist knot orbifolds and edge polynomials of twist knots. arXiv:1411.2383v2, (Pre-print).
- Harary, F. and Kauffman, L.H., 1999. Knots and graphs I-arc graphs and colorings. *Advances in Applied Mathematics*, 22, 312-337.
- Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater P.J., 1998. Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, New York.
- Henle, M., 1994. A Combinatorial Introduction to Topology. Dover Publications, Inc., New York.
- Hoste, J and Shanahan, P.D., 2001. Trace fields of twist knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 10(4), 625–639.
- Kauffman, L.H., 1988. New Invariants in The Theory of Knots. *American Mathematical Monthly*, 95(3), 195-242.
- Kauffman, L.H., 1989. A Tutte Polynomial for Signed Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 25(1989), 105-127.
- Kawauchi, A., 1996. A Survey of Knot Theory. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin.
- Kurpita, B.I. and Murasugi, K., 1998. Knots and graphs. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(415), 623-643.

- Lankham, I., 2002. Finding a General Form for the A-Polynomial of Twist Knots. A thesis for the Degree of Bachelors of Science in Mathematics with Honors. Mathematics Department of the California State University, Chico.
- Manturov, V.O., 2018. Knot Theory: Second Edition. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton.
- Mohar, B. and Pisanski T., 1988. How to compute the Wiener index of a graph. Journal of Mathematical Chemistry, 2, 267–277.
- Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori, 2. basım. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- Murasugi, K., 1989. Invariants of Graphs and Their Applications to Knot Theory. Algebraic Topology Poznan, pp. 83–97 and (1991). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1474, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Nawata, S., Ramadevi, P., Zodinmawia and Sun, X., 2012. Super-A-polynomials for twist knots. J. High Energ. Phys., 2012, 157–192.
- Şahin, A., 2015. $(2, n)$ -Tor Düğümlerinin Tutte Polinomları. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Şahin, A. and Şahin, B., 2018a. Hosoya Polynomial of Graphs Belonging to Twist Knots. Turk. J. Math. Comput. Sci., 10, 38-42.
- Şahin, A. and Şahin, B., 2018b. Tutte Polynomial for Graphs of Twist Knots. Turk. J. Math. Comput. Sci., 10, 61-66.
- Şahin, A. and Şahin, B., 2019. Jones Polynomial for Graphs of Twist Knots. Applications and Applied Mathematics: An International Journal, 14(2), 1269–1278.
- Şahin, A., 2020. Coloring in graphs of twist knots. Numerical Methods for Partial Differential Equations, early view, 1– 8.
- Şahin, A., 2021. Domination type invariants for graphs of twist knots. 7th International IFS and Contemporary Mathematics Conference, 25-29 May, Mersin, Turkey.
- Şener, Ü.G., 2021. Düzenli Dendrimer Grafların Toplam Tip Baskınlık Sabitleri. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Taşköprü, K. ve Sinan, Z.Ş., 2021. Recurrence relations for knot polynomials of twist knots. Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 4(1), 59-66.
- Uğur, T., 2002. Düğüm Grafları. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Vasudev, C., 2006. Graph Theory with Application, New Age International (P) Limited, Publishers, New Delhi.
- Yajima, T. and Kinoshita, S., 1957. On the Graphs of Knots. Osaka Mathematics of Journal, 9, 155-163.

ÖZGEÇMİŞ

