

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BULANIK ALEXANDROFF TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

MÜGE ÇERÇİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

BULANIK ALEXANDROFF TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

MÜGE ÇERÇİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK ALEXANDROFF TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

MÜGE ÇERÇİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ... / ... / 2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından () not takdir edilerek
Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ (Damsman).....

Prof. Dr. Murat DİKER.....

Yrd. Doç. Dr. Sadık BAYHAN.....

ÖZET

BULANIK ALEXANDROFF TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

MÜGE ÇERÇİ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Ocak 2012, 35 Sayfa

Bu tezde ilk olarak klasik anlamda Alexandroff topolojiler, iç operatörleri ve kapanış operatörleri tanıtılmıştır. Daha sonra ayırt edilmezlik operatörleri yardımıyla bulanık Alexandroff topolojiler, bulanık iç operatörleri ve bulanık kapanış operatörleri tanımlanarak aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Alexandroff topolojiler, bulanık Alexandroff topolojiler,
*-ayırt edilmezlik operatörleri,
bulanık iç operatörleri, bulanık kapanış operatörleri

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Prof. Dr. Murat DİKER

Yrd. Doç. Dr. Sadık BAYHAN

ABSTRACT

FUZZY ALEXANDROFF TOPOLOGICAL SPACE

MÜGE ÇERÇİ

M. Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

January 2012, 35 Pages

In this thesis, first, classical Alexandroff topologies, interior operators and closure operators are introduced. Later, fuzzy Alexandroff topologies, fuzzy interior operators and fuzzy closure operators by defining the relationships between them were investigated with the help of $*$ -indistinguishability operators.

KEY WORDS: Alexandroff topologies, fuzzy Alexandroff topologies,
 $*$ - indistinguishability operators,
fuzzy interior operators, fuzzy closure operators

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Prof. Dr. Murat DİKER
Asst. Prof. Dr. Sadık BAYHAN

ÖNSÖZ

Alexandroff topolojik uzaylar, topoloji alanında yapılan çalışmalarda keyfi keşimler altında kapalı olma özelliğinden dolayı daha özgür bir çalışma ortamı sağlaması açısından önemli bir rol oynamaktadır. Bu düşünceden hareketle bu tezde, klasik anlamdaki Alexandroff topolojilerin ve bulanık Alexandroff topolojilerin inşası ve aralarındaki bağlantılar üzerinde durarak bu konudaki Türkçe kaynak açığını gidermesi konusunda katkıda bulunmasını umuyorum.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ' ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Kapsamı	1
2. ALEXANDROFF TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE	2
3. MATERYAL VE METOT	8
3.1. Standart Üçgensel Normlar ve Özellikleri	8
3.2. Kabul Edilebilir Bulanık Denklik Bağlılıkları	10
4. BULANIK ALEXANDROFF TOPOLOJİLER	18
5. BULGULAR	22
5.1. Ayırt Edilemezlik Operatörleriyle Bulanık İç ve Bulanık Kapanış Operatörlerinin Tanımlanması	22
5.2. H_E ile Φ_E Arasındaki İlişki	23
5.3. H_E ile Ψ_E Arasındaki İlişki	26
6. SONUÇ	34
7. KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Bulanık ön sıralama ve bulanık denklik bağıntıları bulanık küme teorisinde temel kavramlar olup bulanık küme teorisinin birçok dalında önemli bir rol oynar. Bulanık topoloji kavramı ilk olarak 1968 yılında C.L.Chang tarafından tanıtıldı ve daha sonra bu kavram çeşitli görüşler altında birçok tartışmaya konu oldu. Yakın zamanda bazı araştırmacılar kısmi sıralama, topolojiler ve bulanık topolojiler arasındaki ilişki üzerine çalıştı.

Şimdi bazı tanımları hatırlatalım. X boştan farklı bir küme olmak üzere X kümesi üzerinde bir $\leq$ ikili işlemi; yansılmalı ve geçişmeli ise bu ikili işleme ön sıralama denir. Eğer $\leq$ ön sıralaması simetri özelliğine sahipse bu ikili işleme denklik bağıntısı denir. Eğer $\leq$ ön sıralaması ters simetri özelliğine sahipse bu ikili işleme kısmi sıralama denir. $\leq$ kısmi sıralamasıyla donatılmış bir X kümesi, $(X, \leq)$ ile gösterilir ve kısmi sıralı küme adını alır. Farz edelim ki, X kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. $\{y \in X \mid x \leq y, x \in A\}$ alt kümesine yukarı küme denir. Keyfi kesişimler altında kapalı olan topolojiye Alexandroff topoloji denir.

Bu tez boyunca bulanık ön sıralamalar, Alexandroff topolojik uzaylar ve bulanık Alexandroff topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi.

2. ALEXANDROFF TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

X herhangi bir T_0 -uzayı olmak üzere X üzerinde aşağıdaki gibi bir kısmi sıralama tanımlayabiliriz:

$x \leq y \iff \overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$, dir. Bu bağıntıya özelleştirme (specialization) sıralaması denir. Açıktır ki $\leq$ bağıntısı yansılmalı ve geçişmelidir. Ters simetrisi ise X ' in T_0 -uzayı olmasından dolayı vardır.

Tersine farz edelim ki, $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu durumda $\leq$ özelleştirme sıralaması olacak şekilde X üzerinde bir T_0 -uzayı bulabilir miyiz sorusuna cevap bulmaya çalışalım.

$\leq$, X üzerinde bir ön sıralama bağıntısı ve $A \subseteq X$ olmak üzere A bir yukarı kümedir $\iff x \in A$ ve $x \leq y$ ise $y \in A$ dır. Burada $\{x \in X \mid x \leq y\}$ kümesi $\uparrow y$ ile gösterilir.

Benzer şekilde $A \subseteq X$ olmak üzere A bir aşağı kümedir $\iff x \in A$ ve $z \leq x$ ise $z \in A$ dır. Burada $\{z \in X \mid z \leq x\}$ kümesi $\downarrow x$ ile gösterilir. $(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde X içindeki bütün yukarı kümelerin kümesi $\tau_{\leq}^{\uparrow}$ ile gösterilir. Benzer şekilde X içindeki bütün aşağı kümelerin kümesi de $\tau_{\leq}^{\downarrow}$ ile gösterilir. $\downarrow x$ formundaki bütün kümelerin kapalı olduğu en küçük topolojiye de yukarı aralık topolojisi (upper interval topology) denir ve $\Gamma(X, \leq)$ ile gösterilir. Yani; $\Gamma(X, \leq)$, $X - (\downarrow x_1 \cup \downarrow x_2 \cup \dots \cup \downarrow x_n)$ formundaki kümeleri taban kabul eden topolojidir. Eğer bir topoloji keyfi kesişimler altında kapalı ise bu topolojiye Alexandroff topoloji denir (Arenas 1999).

Önerme 2.1 $(X, \leq)$ ön sıralı bir küme olmak üzere $\tau_{\leq}^{\uparrow}$, X içindeki bütün yukarı kümelerin kümesi olsun. Bu durumda $\tau_{\leq}^{\uparrow}$, X üzerinde bir Alexandroff topolojidir (Johnstone 1982).

İspat. $\tau_{\leq}^{\uparrow} = \{A \subseteq X \mid x \in A \text{ ve } x \leq y \implies y \in A\}$

$\tau_{\leq}^{\uparrow}$, 'ın bir Alexandroff topoloji olduğunu görmek için öncelikle keyfi kesişimler altında kapalı olduğunu görelim. Yani; $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \tau_{\leq}^{\uparrow}$ ise $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ olduğunu

görelim. $\{A_i \mid i \in I\} = \emptyset$ ise $\bigcap_{i \in I} A_i = X$ ve X bir yukarı küme olduğundan $\bigcap_{i \in I} A_i = X \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ ' dir. Farz edelim ki, $\{A_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$ ve $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \tau_{\leq}^{\uparrow}$ olsun. $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ve $x \leq y$ olsun. Her $i \in I$ için; $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i$ ve $x \leq y$ olduğundan $y \in A_i$ ' dir. Buradan $y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ' dir. Böylece $\tau_{\leq}^{\uparrow}$ ' in tanımlanışından $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ ' dir.

Şimdi ise $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \tau_{\leq}^{\uparrow}$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ olduğunu görelim. Yani; $\forall i \in I$ için; $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq X$, $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $x \leq y$ ise $y \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olduğunu görelim.

$\{A_i \mid i \in I\} = \emptyset$ durumunda $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ ve $\emptyset$ bir yukarı küme olduğundan $\emptyset \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ olduğu açıktır.

Farz edelim ki, $\{A_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$ ve $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \tau_{\leq}^{\uparrow}$ olsun. $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $x \leq y$ olsun. Bu durumda $x \in A_{i_0}$ olacak şekilde en az bir tane $i_0 \in I$ vardır. $A_{i_0} \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ ve $x \leq y$ olduğundan $y \in A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \implies y \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olur. Böylece $\tau_{\leq}^{\uparrow}$ ' in tanımlanışından $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ ' dir. ■

Teorem 2.2 (X, τ) bir T_0 - uzay olsun. Aşağıdakiler denktir:

- i) τ' 'nin ürettiği $\leq_{\tau}$ özelleştirmesi için $\tau = \tau_{\leq_{\tau}}^{\uparrow}$ ' dir.
- ii) τ , Alexandroff topolojidir.
- iii) X ' in her noktası bir en küçük açık komşuluğa sahiptir (Johnstone 1982).

İspat. (i) $\implies$ (ii) gerektirmesi Önerme 2.1' den açıktır.

(ii) $\implies$ (i): τ' 'nin bir Alexandroff topoloji olduğunu varsayalım. $\tau = \tau_{\leq_{\tau}}^{\uparrow}$ olduğunu görelim.

Bu eşitliği görmek için eşitliği çift yönlü kapsama ile inceleyelim:

Öncelikle $\tau \subseteq \tau_{\leq_{\tau}}^{\uparrow}$ olduğunu görelim. $G \in \tau$ olsun. $x \in G$ ve $x \leq_{\tau} y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in G$ ve $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ ' dir. O halde $x \in G \in \tau$ ve $x \in \overline{\{y\}}$ ' dir. Buradan $G \cap \{y\} \neq \emptyset$ ' dir. Yani; $y \in G$ ' dir. Dolayısıyla, $G, \leq_{\tau}$ bağıntısına göre bir yukarı küme olur. Yani; $G \in \tau_{\leq_{\tau}}^{\uparrow}$ ' dir.

Şimdi de $\tau_{\leq_{\tau}}^{\uparrow} \subseteq \tau$ olduğunu görelim.

$G \in \tau_{\leq_{\tau}}^{\uparrow}$ alalım. Yani; $G, \leq_{\tau}$ bağıntısına göre bir yukarı küme olsun. Eğer $G = X$ ise o zaman $G = X \in \tau$ olduğu açıktır.

Farz edelim ki, $G \neq X$ olsun. Yani; $\exists x \in X$ vardır ki $x \notin G$ dir. $G = \bigcap_{x \in X \setminus G} X \setminus \downarrow x$ seçelim. Öncelikle $G = \bigcap_{x \in X \setminus G} X \setminus \downarrow x$ olduğunu görelim. Her $x \in X \setminus G$ için; $G \subseteq X \setminus \downarrow x$ dir. Bunu kanıtlamak için olmayana ergi yöntemini kullanalım ve varsayalım ki, bu ifade doğru olmasın. Yani; $\exists x_0 \in X \setminus G$, $G \not\subseteq X \setminus \downarrow x_0$ olsun. Bu durumda $\exists z \in G$, $z \notin X \setminus \downarrow x_0$ dir. O zaman $z \in \downarrow x_0$ dir. Buradan $z \leq_\tau x_0$ olur. $z \in G$, $z \leq_\tau x_0$ ve $G, \leq_\tau$ bağıntısına göre bir yukarı küme olduğundan $x_0 \in G$ dir. Ancak bu $x_0 \in X \setminus G$ olması ile çelişir. Böylece her $x \in X \setminus G$ için; $G \subseteq X \setminus \downarrow x$ dir. Yani; $G \subseteq \bigcap_{x \in X \setminus G} X \setminus \downarrow x$ dir.

Ters kapsamayı doğrulamak için farz edelim ki, $\bigcap_{x \in X \setminus G} X \setminus \downarrow x \not\subseteq G$ olsun. Yani; $\exists w \in \bigcap_{x \in X \setminus G} X \setminus \downarrow x$ ve $w \notin G$ olsun. O zaman $w \in X \setminus G$ ve $w \leq_\tau w$ dir. Yani; $w \in \downarrow w$ dir. Buradan $w \notin X \setminus \downarrow w$ dir. O halde $w \notin \bigcap_{x \in X \setminus G} X \setminus \downarrow x$ dir. Bu ise çelişkidir. Böylece $G = \bigcap_{x \in X \setminus G} X \setminus \downarrow x$ dir.

Diğer taraftan $\downarrow x = \{y \in X \mid y \leq_\tau x\} = \{y \in X \mid y \in \overline{\{x\}}\} = \overline{\{x\}}$ dir. Yani; $X \setminus \downarrow x = X \setminus \overline{\{x\}} \in \tau'$ dir. Son olarak τ keyfi kesişimler altında kapalı olduğundan $G = \left(\bigcap_{x \in X \setminus G} X \setminus \downarrow x \right) \in \tau'$ dir.

(ii) $\implies$ (iii): $O(x) = \{U \subset X \mid U, x' \text{ in bir açık komşuluğudur.}\}$

$S(x) = \cap O(x) = \bigcap_{U \in O(x)} U$ alalım. O halde (ii)' den dolayı $S(x)$, x' in bir açık komşuluğudur. $S(x)$ ' in tanımlanışından dolayı $S(x)$, x' in en küçük açık komşuluğudur.

(iii) $\implies$ (ii): Her $x \in X$ için; $S(x)$, x' in en küçük açık komşuluğu olsun. Açık kümelerin keyfi bir kesişimini düşünelim. Her $\alpha \in A$ için; U_α , X içinde bir açık olmak üzere $V = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ alalım. $V \neq \emptyset$ olsun. $x \in V$ seçelim. Her $\alpha \in A$ için; $x \in U_\alpha$ dir. Buradan her $\alpha \in A$ için; $S(x) \subset U_\alpha$ dir. Çünkü $S(x)$, x' in en küçük açık komşuluğudur. O zaman $S(x) \subset V$ dir. O halde V açıktır. Çünkü V , her noktasında bir açık küme içerir. ■

Önerme 2.3 $(X, \leq)$ ön sıralı bir küme olmak üzere $\psi_\leq : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ dönüşümü $\psi_\leq(A) = \{x \in X \mid \uparrow x \subseteq A\}$ şeklinde tanımlansın. O halde $\psi_\leq$ bir iç operatördür.

İspat. $I_a) \psi_\leq(A) \subseteq A$ olduğunu görelim. Yani; $y \in \psi_\leq(A)$ iken $y \in A$ olduğunu

görelim.

$y \in \psi_{\leq}(A)$ ise $\uparrow y \subseteq A'$ dir. $y \in \uparrow y \subseteq A$ olduğundan $y \in A$ olduğu açıktır.

$I_b)$ $\psi_{\leq}(\psi_{\leq}(A)) = \psi_{\leq}(A)$ olduğunu görmeliyiz. Bu eşitliği görmek için eşitliği çift yönlü kapsama ile inceleyelim:

Öncelikle $\psi_{\leq}(A) \subseteq \psi_{\leq}(\psi_{\leq}(A))$ olduğunu görelim. $\uparrow x = \{z \in X \mid x \leq z\} \subseteq A$ olmak üzere $z \in \uparrow x$ alalım. Bu durumda $z \in \psi_{\leq}(A)$ olduğunu görürsek $\psi_{\leq}(A) \subseteq \psi_{\leq}(\psi_{\leq}(A))$ olduğunu göstermiş oluruz. $z \in \psi_{\leq}(A)$ olması demek $\psi_{\leq}(A)$ 'nın tanımından $\uparrow z \subseteq A$ olması ile denktir. O halde $z \in \uparrow x$ iken $\uparrow z \subseteq A$ olduğunu görmek yeterlidir. $\uparrow z = \{u \in X \mid z \leq u\}$ olsun. Bu durumda $u \in \uparrow z$ ise $z \leq u$ ve $z \in \uparrow x$ olduğundan $x \leq z'$ dir. Buradan $x \leq u$ olur. O halde $u \in \uparrow x'$ dir. Yani; $\uparrow z \subseteq \uparrow x$ olur. Böylece $\uparrow z \subseteq \uparrow x \subseteq A$ olduğundan $\uparrow z \subseteq A'$ dir.

Şimdi de $\psi_{\leq}(\psi_{\leq}(A)) \subseteq \psi_{\leq}(A)$ olduğunu görelim. (I_a) koşulunda A yerine $\psi_{\leq}(A)$ seçersek $\psi_{\leq}(\psi_{\leq}(A)) \subseteq \psi_{\leq}(A)$ olduğu açıktır.

$I_c)$ $\psi_{\leq}(A \cap B) = \psi_{\leq}(A) \cap \psi_{\leq}(B)$ olduğunu görmeliyiz.

Bu eşitliği görmek için eşitliği çift yönlü kapsama ile inceleyelim:

Öncelikle $\psi_{\leq}(A \cap B) \subseteq \psi_{\leq}(A) \cap \psi_{\leq}(B)$ olduğunu görelim. Yani; $x \in \psi_{\leq}(A \cap B)$ ise $x \in \psi_{\leq}(A) \cap \psi_{\leq}(B)$ olduğunu görelim. $x \in \psi_{\leq}(A \cap B) \iff \forall y \in X, x \leq y \implies y \in A \cap B$ dir. O halde $\forall y \in X, x \leq y \implies y \in A$ ve $y \in B$ dir. Buradan $x \in \psi_{\leq}(A)$ ve $x \in \psi_{\leq}(B)$ dir. Yani; $x \in \psi_{\leq}(A) \cap \psi_{\leq}(B)$ dir.

Şimdi $\psi_{\leq}(A) \cap \psi_{\leq}(B) \subseteq \psi_{\leq}(A \cap B)$ olduğunu görelim. Yani; $x \in \psi_{\leq}(A) \cap \psi_{\leq}(B)$ ise $x \in \psi_{\leq}(A \cap B)$ olduğunu görelim. $x \in \psi_{\leq}(A) \cap \psi_{\leq}(B) \iff x \in \psi_{\leq}(A)$ ve $x \in \psi_{\leq}(B)$ dir. O halde $\forall y \in X, x \leq y \implies y \in A$ ve $\forall y \in X, x \leq y \implies y \in B$ dir. Buradan $\forall y \in X, x \leq y \implies y \in A$ ve $y \in B$ dir. Yani; $\forall y \in X, x \leq y \implies y \in A \cap B$ dir. Böylece $x \in \psi_{\leq}(A \cap B)$ dir.

$I_d)$ $\psi_{\leq}(X) = X$ olduğunu görmeliyiz. Bu eşitliği görmek için eşitliği çift yönlü kapsama ile gösterelim:

Öncelikle $X \subseteq \psi_{\leq}(X)$ olduğunu görmeliyiz. Her $x \in X$ için $(\forall y \in X)(x \leq y \implies y \in X)$ gerektirmesi doğru olduğundan istenen açıktır.

Ayrıca $(I_a)'$ dan $\psi_{\leq}(X) \subseteq X$ olduğu açıktır. ■

Önerme 2.4 $\equiv$, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $x \in X$ için; $[x]$, x ' in bu denklik bağıntısına göre denklik sınıfını gösterebilir. $\Phi_{\equiv} : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ dönüşümü $\Phi_{\equiv}(A) = \{x \in X \mid [x] \cap A \neq \emptyset\}$ şeklinde tanımlansın. O halde $\Phi_{\equiv}$ bir kapanış operatörüdür.

İspat. $K_a)$ $A \subseteq \Phi_{\equiv}(A)$ olduğunu görelim.

$x \equiv y$ ve $y \in A$ olmak üzere $[x]$, x ' in denklik sınıfını gösterebilir. $x \equiv y$ ve $y \in A$ olmak üzere $x \in \bigcup_{y \in A} [y]$ ' dir. $\Phi_{\equiv}(A) = \left\{x \mid x \in \bigcup_{y \in A} [y] \iff [x] \subseteq [y]\right\}$ ' dir. $x \in A$ ise $x \in \Phi_{\equiv}(A)$ olduğunu görmeliyiz. $x \in A$ ise $x \in [x]$ ' dir. Buradan $x \in \bigcup_{y \in A} [y]$ ' dir. Öyleyse $x \in \Phi_{\equiv}(A)$ ' dir.

$K_b)$ $\Phi_{\equiv}(\Phi_{\equiv}(A)) = \Phi_{\equiv}(A)$ olduğunu görmeliyiz. Bu eşitliği görmek için eşitliği çift yönlü kapsama ile inceleyelim:

Öncelikle $\Phi_{\equiv}(A) \subseteq \Phi_{\equiv}(\Phi_{\equiv}(A))$ olduğunu görelim. $(K_a)'$ da A yerine $\Phi_{\equiv}(A)$ değişken dönüşümünü yapalım. O halde $\Phi_{\equiv}(A) \subseteq \Phi_{\equiv}(\Phi_{\equiv}(A))$ olduğu açıktır.

Şimdi de $\Phi_{\equiv}(\Phi_{\equiv}(A)) \subseteq \Phi_{\equiv}(A)$ olduğunu görmeliyiz. Yani; $x \in \Phi_{\equiv}(\Phi_{\equiv}(A))$ iken $x \in \Phi_{\equiv}(A)$ olduğunu görmeliyiz.

$$\begin{aligned} x \in \Phi_{\equiv}(\Phi_{\equiv}(A)) &\iff \exists y \in X, x \equiv y \text{ ve } y \in \Phi_{\equiv}(A) \\ &\iff (\exists y \in X, x \equiv y) \text{ ve } (\exists z \in X, y \equiv z \text{ ve } z \in A) \\ &\iff \exists y, z \in X \text{ vardır ki } x \equiv y \text{ ve } y \equiv z \text{ ve } z \in A \\ &\iff (\equiv \text{ geçişmeli olduğundan}) \exists z \in X \text{ vardır ki } x \equiv z \\ &\iff x \in \Phi_{\equiv}(A)' \text{ dir.} \end{aligned}$$

$K_c)$ $\Phi_{\equiv}(A \cup B) = \Phi_{\equiv}(A) \cup \Phi_{\equiv}(B)$ olduğunu görmeliyiz.

$$\begin{aligned} x \in \Phi_{\equiv}(A \cup B) &\iff \exists y \in X, x \equiv y \text{ ve } y \in A \cup B \\ &\iff (\exists y \in X, x \equiv y) \text{ ve } (y \in A \text{ veya } y \in B) \\ &\iff (\exists y \in X, x \equiv y \text{ ve } y \in A) \text{ veya } (\exists y \in X, x \equiv y \text{ ve } y \in B) \\ &\iff x \in \Phi_{\equiv}(A) \text{ veya } x \in \Phi_{\equiv}(B) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x \in \Phi_{\equiv}(A) \cup \Phi_{\equiv}(B)$$

$K_d)$ $\Phi_{\equiv}(\emptyset) = \emptyset$ olduğunu görmeliyiz.

(K_a) ' da A yerine $\emptyset$ değişken dönüşümtü yaparak $\emptyset \subseteq \Phi_{\equiv}(\emptyset)$ diyebiliriz. Ayrıca $\emptyset \subseteq \emptyset$ ve $\emptyset$ kapalı olduğundan $\Phi_{\equiv}(\emptyset) \subseteq \emptyset$ dir. Böylece $\Phi_{\equiv}(\emptyset) = \emptyset$ dir. ■

Önerme 2.5 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve (X, τ) bir T_0 uzayı olsun. O zaman $\leq = \leq_{\tau} \Longleftrightarrow \Gamma(X, \leq) \subseteq \tau \subseteq \tau_{\leq}^{\uparrow}$ dir (Johnstone 1982).

İspat. ($\implies$.) Farz edelim ki, $\leq = \leq_{\tau}$ olsun. O zaman her τ_{-} açık küme bir üst küme olmak zorundadır.

$G \in \tau$ alalım. O zaman $G \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ olduğunu görmeliyiz. Yani; $x \in G$, $x \leq_{\tau} y$ ise $y \in G$ olduğunu görmeliyiz.

$x \in \overline{\{y\}} = \downarrow y$ dir. $x \in G$ olduğu için $G \cap \{y\} \neq \emptyset \implies y \in G$ dir. Dolayısıyla, $G \in \tau_{\leq}^{\uparrow}$ dir. $\zeta = \{X - \downarrow x \mid x \in X\}$ kümesi $\Gamma(X, \leq)$ ' nin bir alt tabanı olduğundan, $\Gamma(X, \leq) \subseteq \tau$ olduğunu göstermek için: $\zeta \subseteq \tau$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $x \in X$ için $\downarrow x = \overline{\{x\}}$ ve $\downarrow x$, τ -kapalı olduğundan $X - \downarrow x \in \tau$ olur ki bu da $\zeta \subseteq \tau$ kapsamasını verir. Böylece $\Gamma(X, \leq) \subseteq \tau \subseteq \tau_{\leq}^{\uparrow}$ elde edilmiş olur.

($\Longleftarrow$.) $\Gamma(X, \leq) \subseteq \tau \subseteq \tau_{\leq}^{\uparrow}$ olsun. $X - \downarrow y \in \Gamma \subseteq \tau \implies X - \downarrow y \in \tau$ dir. O halde $\downarrow y$, τ -kapalıdır. $x \leq y \Longleftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$ olduğunu biliyoruz. O halde $\leq = \leq_{\tau}$ olduğunu göstermek için $x \leq_{\tau} y \Longleftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$ olduğunu görmeliyiz. $x \leq_{\tau} y$ ise $x \in \downarrow y$ ve $\downarrow y$, τ -kapalıdır. $\downarrow y$ ' nin y ' yi içeren en küçük kapalı küme olduğunu gösterirsek $x \leq_{\tau} y \Longleftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$ diyebiliriz. $y \in K$ olacak şekilde herhangi bir K kapalı kümesini alalım. Bu durumda $\downarrow y \subseteq K$ olduğunu görürsek $\downarrow y$ ' nin en küçük kapalı küme olduğunu göstermiş oluruz. K kapalı ise $X \setminus K$ açıktır. O halde $X \setminus K \in \tau$ dur. Ayrıca $\tau \subseteq \tau_{\leq}^{\uparrow}$ olduğundan $X \setminus K$ bir yukarı kümedir. Farz edelim ki, $\downarrow y \not\subseteq K$ olsun. O halde $X \setminus K \not\subseteq X \setminus \downarrow y$ olur. $z \in X \setminus K$ ve $z \notin X \setminus \downarrow y$ alalım. Bu durumda $z \in \downarrow y$ olur. Bu ise $z \leq y$ olmasını gerektirir. $z \in X \setminus K$ ve $z \leq y$ ise $X \setminus K$ yukarı küme olduğundan $y \in X \setminus K$ dir. Yani; $y \notin K$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü başlangıçta $y \in K$ almıştık. O halde $\downarrow y \subseteq K$ dir. Bu durumda $\downarrow y$, y ' yi içeren en küçük kapalıdır. Böylece $x \leq_{\tau} y \Longleftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$ dir. ■

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Standart Üçgensel Normlar ve Özellikleri

Bu bölümde standart üçgensel normların (t-norm) tanım ve özellikleri üzerinde duracağız.

Tanım 3.6 *Bir üçgensel norm (t-norm) $[0, 1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir:*

$$T_1) x * y = y * x,$$

$$T_2) x * (y * z) = (x * y) * z,$$

$$T_3) y \leq z \text{ iken } x * y \leq x * z,$$

$$T_4) x * 1 = x \text{ (Klement, Mesiar ve Pap 2000).}$$

Bir $*$ t-normunun sürekliliği, iki değişkenli reel değerli bir fonksiyon olarak $*$: $[0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun sürekliliği ile aynı anlamdadır. Aksi belirtilmedikçe $*$ işlemi sürekli bir t-normu gösterecektir.

Şimdi bazı temel sürekli t-norm örnekleri verelim:

$x * y = \min(x, y)$ olarak tanımlanan ve M ile gösterilen $*$ ikili işlemine minimum t-normu denir.

$x * y = \max(x + y - 1, 0)$ olarak tanımlanan ve L ile gösterilen $*$ ikili işlemine Lukasiewicz t-normu denir.

$x * y = x \cdot y$ olarak tanımlanan ve Π ile gösterilen $*$ ikili işlemine çarpım t-normu denir.

Tanım 3.7 *Her $(x, y) \in [0, 1]^2$ için $x_T^{(n)} = x * \dots * x < y$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa $*$ t-normuna Archimedean t-norm denir (Belohlavek 2002).*

Tanım 3.8 *$f : [0, 1] \longrightarrow [0, \infty]$ kesin azalan f dönüşümü $Rng(f)$ ile toplama altında kapalıdır. Yani; $((\forall u, v) \in Rng(f)^2)(u + v \in Rng(f) \text{ veya } u + v > f(0))$ öyle*

ki $f(1) = 0$ 'dır. Bu durumda f 'ye bir toplamsal üretici denir (De Baets ve Mesiar 1999).

Tanım 3.9 Bir $f : [0, 1] \longrightarrow [0, \infty]$ dönüşümünü alalım. $f^{(-1)} : [0, \infty] \longrightarrow [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan $f^{(-1)}$ dönüşümüne f 'in "tersimsi (pseudo-inverse)" si denir:

$$f^{(-1)}(x) = \text{Inf} \{t \in [0, 1] \mid f(t) \leq x\}$$

(De Baets ve Mesiar 1999).

Örnek 3.10 $f(x) = 1 - x$ ile tanımlı dönüşüm Lukasiewicz t -normunun bir toplamsal üreticidir. Bu durumda

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & x \in [0, f(0)] \text{ ise;} \\ 0, & x \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

Burada $f(0) = 1$ 'dir. O halde

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1] \text{ ise;} \\ 0, & x \geq 1 \text{ ise;} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (De Baets ve Mesiar 1999).

Teorem 3.11 $*$: $[0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ bir sürekli Archimedean t -normdur $\iff$ Bir f sürekli toplamsal üretici vardır öyle ki, $x * y = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$ 'dir (De Baets ve Mesiar 1999).

Tanım 3.12 Verilen bir sürekli $*$ t -normunun kalan işlemi (residuum operator), $\longrightarrow : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ bir ikili işlem olmak üzere

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad x \longrightarrow y = \vee \{ \alpha \in [0, 1] \mid x * \alpha \leq y \}$$

şeklinde tanımlanır (Klawoon ve Castro 1995).

Önerme 3.13 Her sürekli $*$ t -normu için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$i) x \leq y \longrightarrow z \iff x * y \leq z$$

$$ii) x * \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x * y_i)$$

$$iii) x * \bigwedge_{i \in I} y_i \leq \bigwedge_{i \in I} (x * y_i)$$

$$iv) x * (x \longrightarrow y) \leq y$$

$$v) x * y \leq x$$

$$vi) (x \longrightarrow y) * (y \longrightarrow z) \leq (x \longrightarrow z) \text{ (Belohlavek 2002).}$$

Tanım 3.14 Verilen bir sürekli $*$ t -normunun çift yönlü gerektirmesi, (biresiduum işlemi) $\longleftrightarrow: [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ bir ikili işlem olmak üzere

$$x \longleftrightarrow y = (x \longrightarrow y) \wedge (y \longrightarrow x)$$

şeklinde tanımlanır (Klawoon ve Castro 1995).

Önteorem 3.15 Bir $*$ sürekli t -normu verilsin. Her $x, y \in [0, 1]^2$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$i) x \longleftrightarrow y = \max(x, y) \longrightarrow \min(x, y),$$

$$ii) (x \longrightarrow z) \longrightarrow (y \longrightarrow z) \geq y \longrightarrow x,$$

$$iii) x \longrightarrow y = \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid \alpha \longrightarrow y \geq x \},$$

$$iv) x \longleftrightarrow x = 1,$$

$$v) x \longleftrightarrow y = y \longleftrightarrow x,$$

$$vi) (x \longleftrightarrow y) * (y \longleftrightarrow z) \leq (x \longleftrightarrow z),$$

$$vii) 1 \longleftrightarrow x = x \text{ (Belohlavek 2002).}$$

3.2. Kabul Edilebilir Bulanık Denklik Bağlantıları

Bu bölümde $*$ -ayrıt edilmezlik operatörleri ve bulanık sayılar üzerinde duracağız.

Tanım 3.16 $E : X \times X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki üç aksiyomu sağlıyorsa E ' ye X üzerinde bir $*$ -ayrıt edilmezlik operatörü ($*$ -indistinguishability operator) denir:

$$i) E(x, x) = 1, \forall x \in X,$$

$$ii) E(x, y) = E(y, x), \forall x, y \in X,$$

$$iii) E(x, y) * E(y, z) \leq E(x, z), \forall x, y, z \in X \text{ (De Baets ve Mesiar 1999)}.$$

Şimdi bazı basit $*$ -ayrıt edilmezlik operatörü örnekleri verelim:

$*$ t-normunu minimum t-normu seçersek, E operatörüne "benzerlik bağıntısı (similarity)" denir.

$*$ t-normunu Lukasiewicz t-normu seçersek, E operatörüne "benzeşme bağıntısı (likeness)" denir.

$*$ t-normunu çarpım t-normu seçersek, E operatörüne "olasılıksal bağıntı (probabilistic relation)" denir.

$E(x, y)$, x ile y arasındaki benzerliğin derecesi olarak yorumlanır.

Tanım 3.17 Bir X kümesi üzerinde bir E $*$ -ayrıt edilemezlik operatörü ve X ' in bir x_0 elemanı verilsin. x_0 tarafından üretilen tek elemanlı küme; $f_{x_0}(x) = E(x_0, x)$ şeklinde tanımlansın. $f_{x_0} : X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna x_0 noktasının E ' ye göre bulanık denklik sınıfı denir (Jacas ve Recasens 1993).

Tanım 3.18 $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna bir bulanık sayı denir:

$$i) f_a(a) = 1,$$

ii) $f_a, (-\infty, a)$ üzerinde azalmayandır. (Yani; her $x, y \in (-\infty, a)$ olmak üzere $x \leq y$ için $f_a(x) \leq f_a(y)$ ' dir.),

iii) $f_a, (a, +\infty)$ üzerinde artmayandır (Yani; her $x, y \in (a, +\infty)$ olmak üzere $x \leq y$ için $f_a(y) \leq f_a(x)$ ' dir.) (Jacas ve Recasens 1993).

Tanım 3.19 $\mathbb{R}$ üzerinde bir E *-ayrıt edilmezlik operatörü "kabul edilebilir (admissible)" adını alır ancak ve ancak her $a \in \mathbb{R}$ reel sayısının E ' ye göre bulanık denklik sınıfı f_a şeklinde bir bulanık sayıdır (Jacas ve Recasens 1993).

Tanım 3.20 Bir X kümesi üzerinde bir $\lesssim$ sıralaması ve bir $E : X^2 \rightarrow [0, 1]$ *-ayrıt edilmezlik operatörü "uyumlu (compatible)" adını alır ancak ve ancak her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellik geçerlidir:

$$x \lesssim y \lesssim z \text{ iken } E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$$

(Bodenhofer 1999).

Önerme 3.21 $(\mathbb{R}, \leq)$ üzerinde kabul edilebilirlik ve uyumluluk kavramları birbirine denktir (Demirci 2005).

İspat. Öncelikle kabul edilebilirliğin uyumluluğu gerektirdiğini görelim.

E kabul edilebilir olsun. $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $x \leq y \leq z$ olsun. O zaman

$$E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$$

olduğunu görelim.

E kabul edilebilir olduğundan $f_x = E(x, \cdot)$ bir bulanık sayıdır.

Bu nedenle $E(x, \cdot); (x, +\infty)$ aralığında artmayan bir dönüşümdür. O halde

$$E(x, y) \geq E(x, z) \tag{3.1}$$

elde edilir. Benzer şekilde $f_z = E(z, \cdot)$ bir bulanık sayıdır ve $(-\infty, z)$ ' de azalmayan bir dönüşümdür. O halde

$$E(z, x) \leq E(z, y) \tag{3.2}$$

elde edilir.

(3.1) ve (3.2)' den

$E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$ ' dir. Bu ise uyumluluk koşulunu verdiğinden aradığımız eşitsizliktir.

Şimdi uyumluluğun kabul edilebilirliği gerektirdiğini görelim.

E' nin $\leq$ ile uyumlu olduğunu varsayalım. Her $a \in \mathbb{R}$ reel sayısının E' ye göre bulanık denklik sınıfının f_a şeklinde bir bulanık sayı olduğunu görmeye çalışalım.

$x, y, z \in \mathbb{R}$ ve $x \leq y \leq z$ olsun. $E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$ olduğundan $E(x, z) \leq E(x, y)$ ' dir. Buradan E birinci argümana göre artmayandır. Yani; $E(x, \cdot); (x, +\infty)$ aralığında artmayandır.

Benzer şekilde E ikinci argümana göre azalmayandır. Yani; $E(z, \cdot); (-\infty, z)$ aralığında azalmayandır. O halde E kabul edilebilirdir. ■

Önerme 3.22 *X kümesi üzerinde bir d pseudo-metriği ve f toplamsal üreteciyle bir $*$ sürekli Archimedean t -normunu düşünelim. X ' teki bir ikili bulanık bağıntısı $E(x, y) = f^{(-1)}(d(x, y))$, X üzerinde bir $*$ -ayrıt edilmezlik operatörüdür (De Baets ve Mesiar 1999).*

Bu Önerme aşağıdaki Teoremin ispatı için kullanılacaktır.

Teorem 3.23 *Her monoton $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki biçimde tanımlanan bir uyumlu benzeşme bağıntısı E_g üretir:*

$$E_g(x, y) = \max(1 - |g(x) - g(y)|, 0)$$

İspat. $*$ = L olsun. L , bir sürekli Archimedean t -normdur. $f(x) = 1 - x$ toplamsal üretecini ve $d(x, y) = |g(x) - g(y)|$ pseudo-metriğini alalım. Bu durumda $f^{(-1)}(x)$ dönüşümü Örnek 3.10 ve Teorem 3.11' den aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad x \in [0, 1] \text{ ise;} \\ 0, & x \geq 1 \text{ ise;} \end{cases}$$

$E_d(x, y) = f^{(-1)}(d(x, y)) = f^{(-1)}(|g(x) - g(y)|) = \max(1 - |g(x) - g(y)|, 0) = E_g(x, y)$ ' dir. O halde Önerme 3.22' den dolayı teoremden geçen E_g , L -ayrıt edilmezlik operatörüdür, yani bir benzeşme bağıntısıdır diyebiliriz.

Şimdi $x \leq y \leq z$ iken $E_g(x, z) \leq \min(E_g(x, y), E_g(y, z))$ olduğunu göstereceğiz.

1.durum: g monoton bir dönüşüm olduğundan farz edelim ki, g azalmayan olsun. O halde $x \leq y \leq z$ iken $g(x) \leq g(y) \leq g(z)$ ' dir.

$E_g(x, z) \leq \min(E_g(x, y), E_g(y, z))$ olduğunu görelim. Yani;

$$\begin{aligned} & \max(1 - |g(x) - g(z)|, 0) \\ & \leq \min(\max(1 - |g(x) - g(y)|, 0), \max(1 - |g(y) - g(z)|, 0)) \end{aligned}$$

olduğunu görelim. $1 - |g(x) - g(z)| \geq 0$ olsun. g azalmayan olduğundan

$$|g(x) - g(z)| \geq |g(x) - g(y)|$$

elde edilir. O halde

$$0 \leq 1 - |g(x) - g(z)| \leq 1 - |g(x) - g(y)| \quad (3.3)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$E_g(x, z) = \max(1 - |g(x) - g(z)|, 0) \stackrel{3.3}{=} 1 - |g(x) - g(z)|$$

ve

$$E_g(x, y) = \max(1 - |g(x) - g(y)|, 0) = 1 - |g(x) - g(y)|$$

olur. Ayrıca (3.3)' ten $E_g(x, z) \leq E_g(x, y)$ olur.

$1 - |g(x) - g(z)| \leq 0$ olsun. Bu durumda $E_g(x, z) = 0$ ' dir.

2.durum: g artmayan olsun.

Bu durumda $x \leq y \leq z$ iken $g(x) \geq g(y) \geq g(z)$ ' dir. $|g(x) - g(z)| \geq |g(x) - g(y)|$ ve $|g(x) - g(z)| \geq |g(y) - g(z)|$ olduğundan $1 - |g(x) - g(z)| \leq 1 - |g(x) - g(y)|$, dolayısıyla $E_g(x, z) \leq E_g(x, y)$ ' dir.

Benzer şekilde $E_g(x, z) \leq E_g(y, z)$ ise $E_g(x, z) \leq \min(E_g(x, y), E_g(y, z))$ ' dir.

■

Teorem 3.24 (Gösterim Teoremi) Bir $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde $F = \{h_i \mid i \in J\} \subseteq I^X$ bulanık kümeler ailesi verilsin. Bu durumda $E_{h_i}(x, y) = h_i(x) \longleftrightarrow h_i(y), \forall i \in J$,

$\forall x, y \in X$ olmak üzere $E(x, y) = \bigwedge_{i \in J} E_{h_i}(x, y)$ şeklinde tanımlansın. $E : X \times X \longrightarrow I$, E bulanık bağıntısı, bir $*$ -ayrıt edilemezlik operatörüdür. Tersine X üzerinde bir E $*$ -ayrıt edilemezlik operatörü verilsin. Bu durumda $E(x, y) = \bigwedge_{i \in J} (h_i(x) \longleftrightarrow h_i(y))$ olacak şekilde $F = \{h_i \mid i \in J\} \subseteq I^X$ vardır (Valverde 1985).

İspat. $E_h(x, y) = h(x) \longleftrightarrow h(y)$ olmak üzere E ' nin bir $*$ -ayrıt edilemezlik operatörü olduğunu görmeliyiz.

i) $E(x, x) = 1$ olduğunu görelim.

$$\bigwedge_{i \in J} E_{h_i}(x, x) = \bigwedge_{i \in J} (h_i(x) \longleftrightarrow h_i(x)) \stackrel{\text{Ön teorem 3.15 (iv)}}{=} 1, \text{ dir.}$$

ii) $E(x, y) = E(y, x)$ olduğunu görelim.

$$\bigwedge_{i \in J} E_{h_i}(x, y) = \bigwedge_{i \in J} (h_i(x) \longleftrightarrow h_i(y)) \stackrel{\text{Ön teorem 3.15 (v)}}{=} \bigwedge_{i \in J} (h_i(y) \longleftrightarrow h_i(x)), \text{ dir.}$$

Bu ise $\bigwedge_{i \in J} E_{h_i}(y, x)$ ' e eşittir. O halde $E(x, y) = E(y, x)$ ' dir.

iii) $E(x, y) * E(y, z) \leq E(x, z)$ olduğunu görelim.

$$E(x, y) * E(y, z) = \left(\bigwedge_{i \in I} (h_i(x) \longleftrightarrow h_i(y)) \right) * \left(\bigwedge_{j \in I} (h_j(y) \longleftrightarrow h_j(z)) \right)$$

$$\stackrel{\text{Önerme 3.22 (iii)}}{\leq} \bigwedge_{i, j \in I} ((h_i(x) \longleftrightarrow h_i(y)) * (h_j(y) \longleftrightarrow h_j(z)))$$

$$\leq \bigwedge_{i \in I} ((h_i(x) \longleftrightarrow h_i(y)) * (h_i(y) \longleftrightarrow h_i(z)))$$

$$\stackrel{\text{Ön teorem 3.15 (iv)}}{\leq} \bigwedge_{i \in I} (h_i(x) \longleftrightarrow h_i(z)) = E(x, z), \text{ dir. O halde } E \text{ bir } *$$

ayrıt edilemezlik operatörüdür.

Tersine $J = X$ olsun. Her $x \in X$ için, $h_x : X \longrightarrow I : h_x(y) = E(x, y)$ olarak tanımlayalım.

$$E(x, y) = \bigwedge_{z \in X} (h_z(x) \longleftrightarrow h_z(y)), \text{ yani } E(x, y) = \bigwedge_{z \in X} (E(z, x) \longleftrightarrow E(z, y)),$$

$\forall x, y \in X$ olduğunu görelim. $E(z, x) * E(x, y) \leq E(z, y)$ olduğundan Önerme 3.13 (i)' den $E(x, y) \leq E(z, x) \longrightarrow E(z, y)$ ' dir. Ayrıca $E(z, y) * E(y, x) \leq E(z, x)$ olduğundan Önerme 3.13 (i)' den $E(x, y) \leq E(z, y) \longrightarrow E(z, x)$ ' dir.

Böylece $E(x, y) \leq (E(z, x) \longrightarrow E(z, y)) \wedge (E(z, y) \longrightarrow E(z, x)) = (E(z, x) \longleftrightarrow E(z, y))$ ' dir. O halde $E(x, y) \leq \bigwedge_{z \in X} (E(z, x) \longleftrightarrow E(z, y))$ ' dir. Ayrıca $\bigwedge_{z \in X} (E(z, x) \longleftrightarrow E(z, y)) \leq E(x, x) \longleftrightarrow E(x, y)$ ' dir. Bu ise Önteorem 3.15 (vii)' den $E(x, y)$ ' ye eşit-

tir. ■

Teorem 3.25 Her monoton $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki yolla tanımlanan bir uyumlu olasılıksal bağıntı E_f üretir:

$$E_f(x, y) = \min \left(\frac{f(x)}{f(y)}, \frac{f(y)}{f(x)} \right)$$

İspat. $g : \mathbb{R} \rightarrow I$, $E_g(x, y) = g(x) \longleftrightarrow g(y)$ ve $*$ = Π alalım.

$g(x) \longleftrightarrow g(y) \stackrel{(t)}{=} (g(x) \vee g(y)) \rightarrow (g(x) \wedge g(y))$ ' dir.

$$x * y = x \cdot y \implies x * y = \min \left(1, \frac{y}{x} \right)$$

olduğundan

$$E_g(x, y) = \min \left(1, \frac{g(x) \wedge g(y)}{g(x) \vee g(y)} \right) = \min \left(\frac{g(x)}{g(y)}, \frac{g(y)}{g(x)} \right)$$

diyebiliriz. $g(x) = 1 \wedge f(x)$ alalım. O halde $E_g(x, y) = \min \left(\frac{1 \wedge f(x)}{1 \wedge f(y)}, \frac{1 \wedge f(y)}{1 \wedge f(x)} \right) = \min \left(\frac{f(x)}{f(y)}, \frac{f(y)}{f(x)} \right)$ ' dir. Bu ise $E_f(x, y)$ ' ye eşittir. Dolayısıyla Teorem 3.24 gereği $E_f(x, y)$, Π -ayırt edilmezlik operatörüdür.

O halde uyumluluk için, $x \leq y \leq z$ iken $E_f(x, z) \leq \min(E_f(x, y), E_f(y, z))$ olduğunu görmeliyiz.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton ise;

1.durum: f azalmayan olsun. $x \leq y \leq z$ ise $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$ ' dir.

$E_f(x, z) \leq \min(E_f(x, y), E_f(y, z))$ olduğunu görmeliyiz. Yani; $\frac{\min(f(x), f(z))}{\max(f(x), f(z))} \leq \min \left(\frac{\min(f(x), f(y))}{\max(f(x), f(y))}, \frac{\min(f(y), f(z))}{\max(f(y), f(z))} \right)$ olduğunu görmeliyiz. f azalmayan olduğundan $\frac{f(x)}{f(z)} \leq \min \left(\frac{f(x)}{f(y)}, \frac{f(y)}{f(z)} \right)$ olduğunu görmekle eşdeğerdir. Bu ise $\frac{f(x)}{f(z)} \leq \frac{f(x)}{f(y)}$ ve $\frac{f(x)}{f(z)} \leq \frac{f(y)}{f(z)}$ görmeyi gerektirir. f fonksiyonu azalmayan olduğundan $f(y) \leq f(z)$ ve buradan da $\frac{f(x)}{f(z)} \leq \frac{f(x)}{f(y)}$, dir.

Benzer şekilde $f(x) \leq f(y)$ ve buradan da $\frac{f(x)}{f(z)} \leq \frac{f(y)}{f(z)}$, dir. O halde f ' in azalmayan olduğu durum için ispat tamamlanır.

2.durum: f artmayan olsun. $x \leq y \leq z \implies$ ise $f(z) \leq f(y) \leq f(x)$ ' dir. O halde $E_f(x, z) \leq \min(E_f(x, y), E_f(y, z))$ olduğunu görmeliyiz. Bu ise f artmayan

olduğundan $\frac{f(z)}{f(x)} \leq \min \left(\frac{f(y)}{f(x)}, \frac{f(z)}{f(y)} \right)$ olduğunu görmekle eşdeğerdir. $\frac{f(z)}{f(x)} \leq \frac{f(y)}{f(x)}$ ve $\frac{f(z)}{f(x)} \leq \frac{f(z)}{f(y)}$ olduğundan f in artmayan olduğu durum için ispat tamamlanır. O halde $E_f(x, y) = \min \left(\frac{f(x)}{f(y)}, \frac{f(y)}{f(x)} \right)$ *-ayrıt edilmezlik operatörü uyumludur. ■

Teorem 3.26 $\{E_i\}_{i \in I}$, $\mathbb{R}$ üzerinde uyumlu *-ayrıt edilmezlik operatörlerinin bir ailesi ise o zaman $E = \bigwedge_{i \in I} E_i$ de $\mathbb{R}$ üzerinde bir uyumlu *-ayrıt edilmezlik operatörüdür (Bodenhofer 1999).

İspat. $E = \bigwedge_{i \in I} E_i$ nin *-ayrıt edilmezlik operatörü olduğunu görelim.

i) $\forall i \in I$ için $E_i(x, x) = 1$ olduğundan $E(x, x) = \bigwedge_{i \in I} E_i(x, x) = \bigwedge_{i \in I} (1) = 1$ dir.

Yani; yansıma özelliği vardır.

ii) $\forall i \in I$ için $E_i(x, y) = E_i(y, x)$ eşitliği olduğundan $E(x, y) = \bigwedge_{i \in I} E_i(x, y) = \bigwedge_{i \in I} E_i(y, x)$ dir diyebiliriz. Bu ise $E(y, x)$ 'e eşit olduğundan simetri özelliği vardır.

iii) $\forall i \in I$ için $E_i(x, y) * E_i(y, z) \leq E_i(x, z)$ olduğunu biliyoruz.

$\forall i \in I$ için $\bigwedge_{i \in I} E_i(x, y) \leq E_i(x, y)$ ve $\bigwedge_{i \in I} E_i(y, z) \leq E_i(y, z)$ dir. O halde $\forall i \in I$ için $E(x, y) * E(y, z) = \bigwedge_{i \in I} E_i(x, y) * \bigwedge_{i \in I} E_i(y, z) \leq E_i(x, y) * E_i(y, z) \leq E_i(x, z)$ dir. $\forall i \in I$ için bu eşitsizlik geçerli olduğundan $E(x, y) * E(y, z) \leq \bigwedge_{i \in I} E_i(x, z) = E(x, z)$ olur. Yani; E , *-geçişlidir.

(i), (ii), (iii)' den dolayı E , *-ayrıt edilmezlik operatörüdür.

Şimdi $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \leq y \leq z$ iken $E(x, z) \leq \min(E(x, y), E(y, z))$ olduğunu görelim. E_i ' lerin uyumluluğundan $E_i(x, z) \leq \min(E_i(x, y), E_i(y, z))$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} E(x, z) &= \bigwedge_{i \in I} E_i(x, z) \leq \bigwedge_{i \in I} (E_i(x, y) \wedge E_i(y, z)) \\ &= \left(\bigwedge_{i \in I} E_i(x, y) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in I} E_i(y, z) \right) = E(x, y) \wedge E(y, z) \end{aligned}$$

buluruz. Yani E uyumludur. ■

4. BULANIK ALEXANDROFF TOPOLOJİLER

$X \neq \emptyset$ klasik anlamda bir küme olmak üzere X üzerindeki bir A bulanık kümesi $\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu ile karakterize edilir. Verilen herhangi bir $x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0, 1]$ reel sayısı x ' in A bulanık kümesine ait olma derecesini verir. X üzerindeki bir A bulanık alt kümesi; $A = \{(\mu_A, x) : x \in X\}$ şeklinde gösterilir. Bu bölümde bir X kümesi üzerinde tanımlı bir E *-ayrıt edilmezlik operatörünün bütün genişletilebilir bulanık alt kümelerinin kümesi H_E üzerinde çalışacağız. X üzerindeki bütün bulanık kümelerin kümesini $[0, 1]^X$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.27 E bir X kümesi üzerinde *-ayrıt edilmezlik operatörü olsun. X ' in bir μ bulanık alt kümesi E' ye göre genişletilebilirdir denir $\iff$ Her $x, y \in X$ için, $E(x, y) * \mu(x) \leq \mu(y)$ ' dir (Klawoon ve Castro 1995).

Önteorem 4.28 Bir X kümesinin bir μ bulanık alt kümesi verilsin. E_μ bulanık bağıntısı,

$$E_\mu(x, y) = \mu(x) \longleftrightarrow \mu(y)$$

ile tanımlansın. O halde E_μ , X üzerinde bir *-ayrıt edilmezlik operatörüdür (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).

İspat. Teorem 3.24' den açıktır. ■

Önteorem 4.29 E bir X kümesi üzerinde *-ayrıt edilemez operatör olmak üzere H_E , E' ye göre bütün genişletilebilir bulanık alt kümelerin kümesini gösterebilir. μ , X ' in bir bulanık alt kümesi olmak üzere μ ' nün ürettiği $E_\mu(x, y) = \mu(x) \longleftrightarrow \mu(y)$ *-ayrıt edilemez operatörünü göz önüne alalım. O halde $\mu \in H_E \iff E_\mu \geq E'$ dir (Recasens 2010).

İspat. ($\implies$): $\mu \in H_E$ iken $E_\mu \geq E$ olduğunu görelim.

$\mu \in H_E$ ise μ , E' ye göre genişletilebilirdir. O halde $\mu(x) * E(x, y) \leq \mu(y)$ ' dir.

Önerme 3.13 (i)' den $E(x, y) \leq \mu(x) \longrightarrow \mu(y)$ ' dir.

Ayrıca $E(x, y) = E(x, y) \wedge E(y, x)$ eşitliği daima vardır. Böylece $E(x, y) \leq (\mu(x) \longrightarrow \mu(y)) \wedge (\mu(y) \longrightarrow \mu(x)) = \mu(x) \longleftrightarrow \mu(y) = E_\mu(x, y)$ olur.

($\Longleftarrow$): Farz edelim ki, $E_\mu \geq E$ olsun. O halde $E(x, y) \leq \mu(x) \longleftrightarrow \mu(y) \leq \mu(x) \longrightarrow \mu(y)$ ' dir. Önerme 3.13 (i)' den $\mu(x) * E(x, y) \leq \mu(y)$ ' dir. Böylece $\mu \in H_E$ ' dir. ■

Önteorem 4.30 *Bir X kümesi üzerinde bir E *-ayrıt edilemez operatörü verilsin. Bir $x \in X$ alalım. $\forall y \in X$ olmak üzere X ' in $h_x(y) = E(x, y)$, ile tanımlanan bulanık alt kümesi E' ye göre genişletilebilirdir (Valverde 1985).*

İspat. $y, z \in X$ alalım.

$E_{h_x}(y, z) = h_x(y) \longleftrightarrow h_x(z) = E(x, y) \longleftrightarrow E(x, z) \geq E(y, z)$ ' dir. O halde $E_{h_x} \geq E'$ dir. Yani; Önteorem 4.29' dan h_x, E' ye göre genişletilebilirdir. ■

Tanım 4.31 $[0, 1]^X$ ' in bir τ alt kümesi X üzerinde bir bulanık topolojidir $\Longleftrightarrow \tau$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$i) A \subseteq \tau \implies \sup \{h \mid h \in A\} \in \tau,$$

$$ii) h, h' \in \tau \implies h \wedge h' \in \tau,$$

iii) $h_k \in [0, 1]^X$ bir sabit bulanık küme ise (Yani, $h_k(x) = k, \forall x \in X$) o zaman $h_k \in \tau$ ' dur (Lowen 1976).

τ bulanık topolojisinin elemanlarına bulanık açık kümeler denir.

Eğer τ , özel olarak,

$$iv) A \subseteq \tau \implies \inf \{h \mid h \in A\} \in \tau$$

özellliğini sağlıyorsa τ ' ya bulanık Alexandroff topoloji denir.

Diğer taraftan verilen bir φ güçlü değıllemesi (Yani; bir süreklı, azalan, $\varphi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ bire bir ve örten olmak üzere $\forall x \in [0, 1]$ için $\varphi(\varphi(x)) = x$ ' dir.) $h \in [0, 1]^X$ bulanık kümesine τ ' ya göre kapalıdır denir $\Longleftrightarrow \varphi \circ h \in \tau$ ' dur.

Tanım 4.32 $\Psi : [0, 1]^X \longrightarrow [0, 1]^X$ dönüşümünü alalım. Ψ dönüşümü bir bulanık iç operatörüdür $\iff h, h' \in [0, 1]^X$ için Ψ aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$i) h \geq \Psi(h),$$

$$ii) \Psi(h \wedge h') = \Psi(h) \wedge \Psi(h'),$$

$$iii) \Psi^2(h) = \Psi(h),$$

$$iv) \text{ Her } h_k \text{ sabit bulanık kümesi için, } \Psi(h_k) = h_k \text{ (Lowen 1976).}$$

Tanım 4.33 $\Phi : [0, 1]^X \longrightarrow [0, 1]^X$ dönüşümünü alalım. Φ dönüşümü bir bulanık kapanış operatörüdür. $\iff h, h' \in [0, 1]^X$ için Φ aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$i) h \leq \Phi(h),$$

$$ii) \Phi(h \vee h') = \Phi(h) \vee \Phi(h'),$$

$$iii) \Phi^2(h) = \Phi(h),$$

$$iv) \text{ Her } h_k \text{ sabit bulanık kümesi için, } \Phi(h_k) = h_k \text{ (Lowen 1976).}$$

Önerme 4.34 Bir Ψ bulanık iç operatörü, $\tau_\Psi = \{h \in [0, 1]^X \mid \Psi(h) = h\}$ bulanık topolojisini tanımlar (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).

İspat. i) $\forall i \in I$ için $h_i \in \tau_\Psi$ olsun. $\bigvee_{i \in I} h_i \in \tau_\Psi$ olduğunu görmeliyiz. Yani, $\Psi\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right) = \bigvee_{i \in I} h_i$ olduğunu görmeliyiz. Tanım 4.32 (i)' den $\bigvee_{i \in I} h_i \geq \Psi\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)$ ' dir.

Şimdi ise $\bigvee_{i \in I} h_i \leq \Psi\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)$ olduğunu görelim. $\forall i \in I$ için $h_i \leq \bigvee_{i \in I} h_i$ her zaman vardır. O zaman $h_i = h_i \wedge \left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)$ yazabiliriz. Bu durumda

$$\Psi(h_i) = \Psi\left(h_i \wedge \left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)\right) \stackrel{\text{Tanım 4.32 (ii)}}{=} \Psi(h_i) \wedge \Psi\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)$$

olduğundan $\Psi(h_i) \leq \Psi\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)$ ' dir. $h_i \in \tau_\Psi$ olduğundan $\Psi(h_i) = h_i$ ' dir. O halde $h_i = \Psi(h_i) \leq \Psi\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)$ ' dir. Buradan $\bigvee_{i \in I} h_i \leq \Psi\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)$ ' dir.

$$ii) h, h' \in \tau_\Psi \text{ olsun. } h \wedge h' \in \tau_\Psi \text{ olduğunu görmeliyiz.}$$

$h \in \tau_\Psi \iff h = \Psi(h)$ ve $h' \in \tau_\Psi \iff h' = \Psi(h')$ dir. O halde $h \wedge h' = \Psi(h) \wedge \Psi(h') \stackrel{\text{Tanım 4.32(ii)}}{=} \Psi(h \wedge h')$ dir. Buradan $h \wedge h' = \Psi(h \wedge h')$ dir. Böylece $h \wedge h' \in \tau_\Psi$ olur.

iii) $h_k \in [0, 1]^X$ sabit bir bulanık küme ise $h_k \in \tau_\Psi$ olduğunu görmeliyiz.

Her h_k sabit bulanık kümesi için Tanım 4.32 (iv)' den $\Psi(h_k) = h_k$ dır. O halde $h_k \in \tau_\Psi$ dir. ■

Herhangi Φ bulanık kapanış operatörü ve herhangi φ güçlü değillemesi için Φ ' nin sabit noktaları aşağıdaki şekilde tanımlanan bir τ_Φ bulanık topolojisinin kapalı bulanık kümeleridir:

$$\tau_\Phi = \left\{ h \in [0, 1]^X \mid \Phi(\varphi \circ h) = \varphi \circ h \right\}$$

5. BULGULAR

5.1. Ayırt Edilemezlik Operatörleriyle Bulanık İç ve Bulanık Kapanış Operatörlerinin Tanımlanması

Bu bölümde Φ_E ve Ψ_E dönüşümleri üzerinde çalışacağız. Bu dönüşümler H_E 'nin oluşturulmasında temel araçlardır. Çünkü bu dönüşümler sabit noktalarının kümesi olarak H_E 'yi karakterize ederler. X 'in verilen bir μ bulanık alt kümesi için en küçük genişletilmiş bulanık alt kümesi Φ_E, μ 'den büyük veya eşittir ve en büyük genişletilmiş bulanık alt kümesi Ψ_E, μ 'den küçük veya eşittir. Böylece bu dönüşümler H_E 'nin bir üst ve alt yaklaşımlarıdır. Daha sonra göreceğiz ki Φ_E ve Ψ_E sırasıyla bir kapanış ve iç operatördür. Böylece H_E, X 'in bir bulanık topolojisi olarak görülebilir. Dahası H_E bir bulanık Alexandroff topolojidir.

Tanım 5.35 $\equiv$, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. X 'in bir A alt kümesi $A = \bigcup_{x \in A} [x]$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda A 'ya $\equiv$ denklik bağıntısı altında bir gözlemlenebilir (observable) alt küme denir (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).

Tanım 5.36 E bir X kümesi üzerinde bir $*$ -ayırt edilmezlik operatörü olsun. $\Phi_E : [0, 1]^X \longrightarrow [0, 1]^X$ dönüşümü,

$$\Phi_E(h)(x) = \sup_{y \in X} \{E(x, y) * h(y)\}$$

ile tanımlanır (Jacas ve Recasens 1994).

Tanım 5.37 E , bir X kümesi üzerinde bir $*$ -ayırt edilmezlik operatörü olsun.

$$\Psi_E : [0, 1]^X \longrightarrow [0, 1]^X \text{ dönüşümü,}$$

$$\Psi_E(h)(x) = \inf_{y \in X} \{E(x, y) \longrightarrow h(y)\}$$

ile tanımlanır (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).

Tanım 5.38 $h \in [0, 1]^X$, E 'ye göre gözlemlenebilirdir $\iff \Phi_E(h) = h$ dır. Böylece $h \in [0, 1]^X$, E 'ye göre gözlemlenebilirdir $\iff h, \Phi_E$ 'nin sabit noktasıdır (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).

X bir küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere $\equiv$, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $\equiv$ denklik bağıntısının ürettiği *-ayrıt edilmezlik operatörü,

$$E_{\equiv}(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \equiv y \text{ ise;} \\ 0, & \text{aksi halde;} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. A 'nın karakteristik fonksiyonu ise,

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \text{ ise;} \\ 0, & \text{aksi halde;} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda X_A , $E_{\equiv}$ 'ye göre gözlemlenebilirdir $\iff A$, $\equiv$ 'ye göre gözlemlenebilirdir. Bir başka ifade ile klasik bir kümenin gözlemlenebilirliğini *-ayrıt edilmezlik operatörleri yardımıyla bulanık anlamda ifade ederek genelleştirmiş oluruz.

Önerme 5.39 $\forall x \in X, \Phi_E(\{x\}) = h_x$ 'dir ($h_x(y) = E(x, y), \forall x, y \in X$) (Jacas ve Recasens 1995).

İspat. $\Phi_E(\{x\})(y) = \sup_{y \in X} \{E(x, y) * \{x\}(y)\} = E(x, y)$. ■

Sonuç 5.40 A , X 'in klasik alt kümesi ise, $\forall A \subset X, \Phi_E(A) = \bigvee_{x \in A} h_x$ 'dir (Jacas ve Recasens 1995).

İspat. $\forall x \in A$ için $A = \bigvee \{x\}$ 'dir. Ayrıca, $\Phi_E(\{x\})(y) = E(x, y)$ 'dir.

O halde $\Phi_E(A) = \bigvee_{x \in A} E(x, y) = \bigvee_{x \in A} h_x$ 'dir. ■

5.2. H_E ile Φ_E Arasındaki İlişki

Bu ve bir sonraki alt bölümde H_E 'nin oluşturulması için iki önemli dönüşüm olan Φ_E, Ψ_E 'den bahsedeceğiz.

Teorem 5.41 $h \in H_E \iff \Phi_E(h) = h$ 'dir (Jacas ve Recasens 1995).

İspat. $h \in H_E \iff E(x, y) * h(y) \leq h(x), \forall x, y \in X$

$$\iff \Phi_E(h)(x) = \sup_{y \in X} \{E(x, y) * h(y)\} \leq h(x)$$

$$\iff \Phi_E(h) \leq h \text{ dır.}$$

Diğer taraftan Tanım 4.33 (i)' den $h \leq \Phi_E(h)$ ' dır. O halde $\Phi_E(h) = h$ ' dır. ■

Sonuç 5.42 $h \in [0, 1]^X$, E ' ye göre genişletilebilirdir $\iff h$ gözlemlenebilirdir (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

İspat. h , E ' ye göre genişletilebilirdir $\iff h \in H_E \xrightarrow{\text{Teorem 5.41}} \Phi_E(h) = h \xrightarrow{\text{Tanım 5.38}} h$ gözlemlenebilirdir. ■

Önerme 5.43 Φ_E bir bulanık kapanış operatörüdür (Jacas ve Recasens 1995).

İspat. i) $h \leq \Phi_E$ olduğunu görmeliyiz.

$$\Phi_E(h)(x) = \sup_{y \in X} \{E(x, y) * h(y)\} \geq (E(x, x) * h(x)) = h(x)$$

ii) $\Phi_E(h \vee h')(x) = \Phi_E(h)(x) \vee \Phi_E(h')(x)$ olduğunu görmeliyiz.

$$\begin{aligned} \Phi_E(h \vee h')(x) &= \sup_{y \in X} \{E(x, y) * (h \vee h')(y)\} = \sup_{y \in X} \{E(x, y) * (h(y) \vee h'(y))\} \\ &= \sup_{y \in X} \{E(x, y) * h(y)\} \vee \sup_{y \in X} \{E(x, y) * h'(y)\} \\ &= \Phi_E(h)(x) \vee \Phi_E(h')(x) \end{aligned}$$

iii) $\Phi_E(\Phi_E(h))(x) = \Phi_E(h)(x)$ olduğunu görmeliyiz.

$$\begin{aligned} \Phi_E(\Phi_E(h))(x) &= \sup_{y \in X} \{E(x, y) * \Phi_E(h)(y)\} \\ &= \sup_{y \in X} \sup_{z \in X} \{E(x, y) * E(y, z) * h(z)\} \\ &\leq \sup_{z \in X} \{E(x, z) * h(z)\} = \Phi_E(h)(x) \end{aligned}$$

O halde $\Phi_E(\Phi_E(h)) \leq \Phi_E(h)$ ' dır.

Diğer taraftan (ii)' de h yerine $\Phi_E(h)$ alırsak $\Phi_E(h) \leq \Phi_E(\Phi_E(h))$ olur. Böylece $\Phi_E(\Phi_E(h)) = \Phi_E(h)$ ' dır.

iv) Her h_k sabit bulanık kümesi için $\Phi_E(h_k) = h_k$ olduğunu görmeliyiz.

Sabit bulanık kümelerin genişletilebilirliğinden $h_k \in H_E$ ’ dir. O halde Teorem 5.41 gereği $\Phi_E(h_k) = h_k$ ’ dir. ■

Burada $E : X \times X \longrightarrow \{0, 1\}$, $E(X \times X) \subseteq \{0, 1\}$ olmak üzere E ’ nin ürettiği denklik bağıntısı $x \equiv_E y \iff E(x, y) = 1$ şeklinde tanımlansın. O zaman $\Phi_E \mid_{\wp(X)} : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ ile $\Phi_{\equiv_E}$ çakışır.

Sonuç 5.44 H_E bir bulanık topolojinin kapalı bulanık kümelerinin kümesidir (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

İspat. Teorem 5.41’ den $h \in H_E \iff \Phi_E(h) = h$ olduğunu biliyoruz. O halde H_E , Φ_E ’ nin sabit noktalarının kümesidir. Φ_E , kapamış operatörü olduğundan H_E , kapalı bulanık kümelerin kümesidir. ■

Önerme 5.45 $\forall h, h' \in [0, 1]^X$ olmak üzere $h \leq h'$ ise $\Phi_E(h) \leq \Phi_E(h')$ ’ dir (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

İspat. $h \leq h'$ ise $h \vee h' = h'$ ’ dir. Buradan $\Phi_E(h \vee h') = \Phi_E(h')$ ’ dir. Tanım 4.33 (ii)’ den, $\Phi_E(h \vee h') = \Phi_E(h) \vee \Phi_E(h') = \Phi_E(h')$ ’ dir. O halde $\Phi_E(h) \leq \Phi_E(h')$ ’ dir. ■

Önerme 5.46 Herhangi bir $h \in [0, 1]^X$ için, $\Phi_E(h) = \bigwedge \{h' \in H_E \mid h \leq h'\}$ ’ dir (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

İspat.

$$\begin{aligned} \bigwedge \{h' \in H_E \mid h \leq h'\} &= \bigwedge \{\Phi_E(h') \in H_E \mid h \leq \Phi_E(h')\} \\ &= \bigwedge \left\{ \Phi_E(h') \in H_E \mid \Phi_E(h) \stackrel{\text{Önerme 5.45}}{\leq} \Phi_E(h') \right\} = \Phi_E(h) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Böylece $\Phi_E(h)$ en özel gözlemlenebilir bulanık alt kümedir. h için bir üst sınırdır. Yani; $h \leq \Phi_E(h)$ ’ dir.

5.3. H_E ile Ψ_E Arasındaki İlişki

Önerme 5.47 $\forall h \in [0, 1]^X$ olmak üzere $\Psi_E(h) \leq h$ ' dir (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).

İspat. $h(x) = E(x, x) \longrightarrow h(x)$ olduğundan $\Psi_E(h)(x) = \inf_{y \in X} \{E(x, y) \longrightarrow h(y)\} \leq h(x)$ ' dir. ■

Önerme 5.48 $\forall h, h' \in [0, 1]^X$ olmak üzere $h \leq h'$ ise $\Psi_E(h) \leq \Psi_E(h')$ ' dir (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).

İspat. $\longrightarrow$, ikinci argümana göre azalmayan olduğundan $h \leq h' \implies \Psi_E(h) \leq \Psi_E(h')$ ' dir. ■

Teorem 5.49 $\forall h \in [0, 1]^X$ olmak üzere $\Psi_E(h) \in H_E$ ' dir (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

$$\begin{aligned}
& \textbf{İspat.} \quad (\Psi_E(h)(x_1)) \longrightarrow (\Psi_E(h)(x_2)) \\
&= (\inf_{y \in X} \{E(x_1, y) \longrightarrow h(y)\}) \longrightarrow (\inf_{y \in X} \{E(x_2, y) \longrightarrow h(y)\}) \\
&\stackrel{*}{=} (\inf_{y \in X} (\inf_{z \in X} \{E(x_1, z) \longrightarrow h(z)\} \longrightarrow E(x_2, z) \longrightarrow h(y)) \\
&\stackrel{**}{\geq} \inf_{y \in X} \{E(x_1, y) \longrightarrow h(y)\} \longrightarrow (E(x_2, y) \longrightarrow h(y)) \\
&\stackrel{***}{\geq} \inf_{y \in X} (E(x_2, y) \longrightarrow E(x_1, y)) \stackrel{****}{\geq} \inf_{y \in X} E(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) \text{ ' dir.}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $\Psi_E(h)(x_2) \longrightarrow \Psi_E(h)(x_1) \geq E(x_1, x_2)$ ' dir. Önteorem 3.15 (i) ' den $E_{\Psi_E(h)}(x_1, x_2) \geq E(x_1, x_2)$ ' dir. Yani; $\Psi_E(h) \in H_E$ ' dir.

Burada $*$: $\longrightarrow$, ikinci argümana göre sağ sürekli,

$**$: $\longrightarrow$, birinci argümana göre azalmayan,

$***$: Önteorem 3.15 (ii) ' den,

$****$: $E(\cdot, y)$ bulanık alt kümesi E ' ye göre genişletilebilirdir. ■

Teorem 5.50 $\Psi_E(h) = h \iff h \in H_E$ ' dir (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

İspat. ($\implies$): $\Psi_E(h) = h$ ise $h \in H_E$ olduğunu görmeliyiz.

Bir önceki teoreme göre, $h = \Psi_E(h) \in H_E$ dir.

($\impliedby$): $h \in H_E$ ise $\Psi_E(h) = h$ olduğunu görmeliyiz.

Önerme 5.47' e göre $\forall h \in [0, 1]^X$ için $\Psi_E(h) \leq h$ olduğundan $h \in H_E$ ise $\Psi_E(h) \geq h$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$h \in H_E \iff \forall x, y \in X, E(x, y) * h(x) \leq h(y)$$

$$\iff \forall x, y \in X, E(x, y) \longrightarrow h(y) \geq h(x)$$

$$\iff \inf_{y \in X} \{E(x, y) \longrightarrow h(y)\} \geq h(x) \text{ dir. Yani; } \Psi_E(h)(x) \geq h(x) \text{ dir. } \blacksquare$$

Önerme 5.51 $\forall h \in [0, 1]^X$ olmak üzere $\Psi_E(h) = \vee \{h' \in H_E \mid h' \leq h\}$ dir (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

İspat. Bir önceki teoremden,

$$\begin{aligned} \vee \{h' \in H_E \mid h' \leq h\} &= \vee \{\Psi_E(h') \in H_E \mid \Psi_E(h') \leq h\} \\ &= \vee \left\{ h' \in H_E \mid \Psi_E(h') \stackrel{5.48}{\leq} \Psi_E(h) \right\} = \Psi_E(h) \end{aligned}$$

elde edilir. $\blacksquare$

Önerme 5.52 Herhangi $h_1, h_2 \in [0, 1]^X$ için Ψ_E ' nin aşağıdaki özellikleri geçerlidir:

$$i) \Psi_E(h_1) \wedge \Psi_E(h_2) = \Psi_E(h_1 \wedge h_2),$$

$$ii) \Psi_E^2 = \Psi_E,$$

$$iii) \text{ Her } h_k \text{ bulanık sabit kümesi için } \Psi_E(h_k) = h_k \text{ (Recasens 2010).}$$

$$\textbf{İspat. i)} (\Psi_E(h_1) \wedge \Psi_E(h_2))(x) = \inf_{y \in X} (E(x, y) \longrightarrow (h_1(y) \wedge h_2(y)))$$

$$= \inf_{y \in X} (E(x, y) \longrightarrow h_1(y), E(x, y) \longrightarrow h_2(y)) = (\Psi_E(h_1)(x)) \wedge (\Psi_E(h_2)(x))$$

$$ii) \Psi_E(\Psi_E(h))(x) = \inf_{y \in X} (E(x, y) \longrightarrow \Psi_E(h)(y))$$

$$= \inf_{y \in X} (E(x, y) \longrightarrow (\inf_{z \in X} (E(y, z) \longrightarrow h(z))))$$

$$= \inf_{y, z \in X} (E(x, y) \longrightarrow \inf_{z \in X} (E(y, z) \longrightarrow h(z)))$$

$$= \inf_{y, z \in X} ((E(x, y) * E(y, z)) \longrightarrow h(z)) \geq \inf_{z \in X} (E(x, z) \longrightarrow h(z)) = \Psi_E(h)(x)$$
 olur. O halde $\Psi_E(\Psi_E(h)) \geq \Psi_E(h)$ ' dir.

Diğer taraftan Önerme 5.47' de h yerine $\Psi_E(h)$ alınır, $\Psi_E(\Psi_E(h)) \leq \Psi_E(h)$ elde edilir.

iii) Sabit bulanık kümelerin genişletilebilirliğinden, her h_k bulanık sabit kümesi için $\Psi_E(h_k) = h_k$ ' dir. ■

Sonuç 5.53 Ψ_E bir bulanık iç operatörüdür (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

İspat. Önerme 5.47 ve Önerme 5.52' den açıktır. ■

$\wp(X) \subseteq I^X, E : X \times X \longrightarrow \{0, 1\}, E(X \times X) \subseteq \{0, 1\}$ ve E ' nin ürettiği denklik bağıntısı $x \equiv_E y \iff E(x, y) = 1$ iken $\Psi_E|_{\wp(X)}: \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ ile $\Psi_{\equiv_E}$ kavramları çakışır. Ayrıca $\uparrow x = \downarrow x = [x]$ eşitliği vardır.

Bir bulanık iç operatörün sabit noktaları bir bulanık topolojinin açık bulanık kümeleri olduğundan aşağıdaki sonuç vardır:

Sonuç 5.54 H_E bir bulanık Alexandroff topolojidir (Boixader, Jacas ve Recasens1999).

İspat. $H_E = \{h \in I^X \mid h(x) * E(x, y) \leq h(y), \forall x, y \in X\}$ olmak üzere $\beta = \{h_i \mid i \in J\} \subseteq H_E$ alalım.

i) $\left(\bigvee_{i \in J} h_i(x) * E(x, y)\right) \leq \left(\bigvee_{i \in J} h_i\right)(y)$ olduğunu görmeliyiz.

$h_i(x) * E(x, y) \leq h_i(y)$ olduğunu biliyoruz. $i \in J$ ler üzerinden ifadenin supremumuna geçerse $\bigvee_{i \in J} (h_i(x) * E(x, y)) \leq \bigvee_{i \in J} h_i(y)$ ' dir. Buradan $\bigvee_{i \in J} h_i(x) * E(x, y) \leq \bigvee_{i \in J} h_i(y)$ ' dir. Yani; $\bigvee_{i \in J} h_i \in H_E$ ' dir.

ii) $\bigwedge_{i \in J} h_i \in H_E$ olduğunu görmeliyiz. Yani; $h_i \in H_E$ olmak üzere $\left(\bigwedge_{i \in J} h_i\right)(x) * E(x, y) \leq \left(\bigwedge_{i \in J} h_i\right)(y)$ olduğunu görmeliyiz. $h_i \in H_E$ olduğundan $h_i(x) * E(x, y) \leq h_i(y)$ ' dir. Buradan $\bigwedge_{i \in J} (h_i(x) * E(x, y)) \leq \bigwedge_{i \in J} h_i(y)$ ' dir. Ayrıca $\forall i \in J$ için $\bigwedge_{i \in J} h_i \leq h_i$ ve $*$ işleminin monotonluğundan $E(x, y) * \bigwedge_{i \in J} h_i \leq E(x, y) * h_i$ ' dir. O halde $\bigwedge_{i \in J} h_i(x) * E(x, y) \leq \bigwedge_{i \in J} (h_i(x) * E(x, y))$ ' dir. Bu durumda $h_i(x) * E(x, y) \leq \bigwedge_{i \in J} h_i(y)$ ' dir. Böylece $\bigwedge_{i \in J} h_i \in H_E$ ' dir.

iii) $h_k \in [0, 1]^X$ bir sabit bulanık küme ise $h_k \in H_E$ olduğunu görmeliyiz.

Teorem 5.50' den $h \in H_E \iff \Psi_E(h) = h$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, Önerme 5.52 (iii)' den her h_k sabit bulanık kümesi için $\Psi_E(h_k) = h_k$ olduğunu biliyoruz. O halde $\Psi_E(h_k) = h_k \iff h_k \in H_E$ ' dir. ■

Teorem 5.55 *E , bir X kümesi üzerinde bir $*$ -ayırt edilmezlik operatörü olsun. H_E , E ' ye göre genişletilebilir bulanık alt kümelerin kümesini gösterebilir. Her $h \in H_E$, $\beta \subseteq H_E$, $\alpha \in [0, 1]$ için aşağıdaki durumlar geçerlidir:*

- a) $(\vee \beta) \in H_E$,
- b) $(\wedge \beta) \in H_E$,
- c) $(\alpha * h) \in H_E$,
- d) $(h \longrightarrow \alpha) \in H_E$,
- e) $(\alpha \longrightarrow h) \in H_E$ (Klawoon ve Castro 1995).

İspat. a) Sonuç 5.54' den açıktır.

b) Sonuç 5.54' den açıktır.

c) H_E ' nin tanımlanışından açıktır.

d) $E(x, y) * (h(x) \longrightarrow \alpha) \leq h(y) \longrightarrow \alpha$, $\forall x, y \in X$ olduğunu görmeliyiz.

Önerme (3.13) (i)' den bu ifade $h(y) * (E(x, y) * (h(x) \longrightarrow \alpha)) \leq \alpha$ ' ya denktir. h ' ın genişletilebilirliğinden bu eşitsizliğin sol tarafı $h(x) * (h(x) \longrightarrow \alpha)$ ' dan daha küçük veya eşittir. $\alpha \wedge \beta = \alpha * (\alpha \longrightarrow \beta)$ eşitliğinden dolayı $h(x) * (h(x) \longrightarrow \alpha) = \alpha \wedge h(x)$ ' e eşittir. Böylece $h(y) * (E(x, y) * (h(x) \longrightarrow \alpha)) \leq \alpha$ ' dır.

e) Önerme 3.13 (i)' ye göre $E(x, y) * \alpha * (\alpha \longrightarrow h(x)) \leq h(y)$ $\forall x, y \in X$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$\alpha \wedge \beta = \alpha * (\alpha \longrightarrow \beta)$ eşitliğinden dolayı $\alpha * (\alpha \longrightarrow h(x)) \leq h(x)$ ve h ' ın genişletilebilirliğinden dolayı bu eşitsizlik geçerlidir. ■

Teorem 5.56 $\mathcal{H} \subseteq I^X$, bir önceki teoremdaki (a)...(e) koşullarına sağlasın. O zaman, genişletilebilir bulanık kümelerin kümesine karşılık gelen küme için X üzerinde

bir E bulanık denklik bağıntısı vardır. Yani, $H_E = \mathcal{H}'$ dır. Üstelik E' nin tekliği, $E_{\mathcal{F}}(x, y) = \bigwedge_{\mu \in \mathcal{F}} (\mu(x) \longleftrightarrow \mu(y))$ formülü ile belirlenir. ($\mathcal{F} = \mathcal{H}$) (Klawoon ve Castro 1995).

İspat. Öncelikle $E(x, y) = \bigwedge_{\mu \in \mathcal{H}} (\mu(x) \longleftrightarrow \mu(y))$ bulanık denklik bağıntısı için $\mathcal{H} = H_E$ olduğunu görelim.

E' nin tanımlanışından $\mathcal{H}'$ daki bütün bulanık kümeler E' ye göre genişletilebilirdir. Yani; $\mathcal{H} \subseteq H_E$ dir.

Diğer kapsamayı göstermek yerine $\mu \in H_E$ alalım. $z \in X$ ve herhangi bir $x \in X$ için μ_z bulanık kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\mu_z(x) = \mu_z * E(x, z) = \bigwedge_{v \in \mathcal{H}} (\alpha * ((v(x) \longrightarrow \beta_z(v)) \wedge (\beta_z(v) \longrightarrow v(x))))$$

$\alpha = \mu(z)$ ve $\beta_z(v) = v(z)$ olsun. $\mathcal{H}'$ ın (b), (c), (d), (e) özelliklerinden dolayı $\mu_z \in \mathcal{H}'$ dır. μ , E' ye göre genişletilebilir olduğundan $\mu_z(x) = \mu(z) * E(x, z) \leq \mu(x)$ dir. Bu, $\mu_z(z) = \mu(z) * E(z, z) = \mu(z)$ ile birlikte $\mu = \bigvee_{z \in X} \mu_z$, (a) özelliğiyle yine $\mathcal{H}'$ ın bir elemanı olduğunu söyler. Böylece $\mathcal{H} = H_E$ ispatlanır.

E' nin tekliğini görelim:

$\check{E}$, bir bulanık denklik bağıntısı olsun öyle ki $\mathcal{H} = H_{\check{E}}$ olsun.

$$E_{\mathcal{F}}(x, y) = \bigwedge_{\mu \in \mathcal{F}} (\mu(x) \longleftrightarrow \mu(y))$$

X üzerindeki en büyük bulanık denklik bağıntısıdır öyle ki $\mathcal{F}$ içindeki bütün bulanık kümeler $E_{\mathcal{F}}$ ye göre genişletilebilirdir. O halde $\check{E} \leq E$ olduğunu biliyoruz.

$E \leq \check{E}$ olduğunu görelim:

$x, y \in X$ olsun. $V_y(z) = \check{E}(z, y)$ bulanık kümesini tanımlayalım. $V_y(z)$ ' nin $\check{E}'$ ye göre genişletilebilir olduğu açıktır. Buradan $V_y(z)$, $\mathcal{H}'$ ın bir elemanıdır. Böylece E' ye göre genişletilebilirdir. Sonuç olarak $V_y(y) = 1$ olduğundan $E(x, y) = E(x, y) * 1 = E(x, y) * V_y(y) \leq V_y(x) = \check{E}(x, y)$ dir. ■

Böylece gözlemlenebilir kümeler bir τ_{Ψ_E} ($\tau_{\Psi_E} = \{h \in [0, 1]^X \mid \Psi_E(h) = h\}$ $= H_E$) bulanık Alexandroff topolojisinin açık bulanık kümeleridir ve kapalı bulanık

kümeler de bir τ_{Φ_E} $\left(\tau_{\Phi_E} = \left\{h \in [0, 1]^X \mid \Phi_E(\varphi \circ h) = \varphi \circ h\right\}\right)$ bulanık Alexandroff topolojisiyle ilişkilidir.

Önerme 5.57 τ_{Φ_E} bir bulanık Alexandroff topolojidir (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).

İspat. i) $h_1 \leq h_2$ ise $\Phi_E(h_1) \leq \Phi_E(h_2)$ olduğunu Önerme 5.45' dan biliyoruz.

$h_1 \leq h_2$ olsun. O halde, $h_1 \vee h_2 = h_2$ ' dir. Buradan $\Phi_E(h_2) = \Phi_E(h_1 \vee h_2) \stackrel{\text{Tanım 4.33 (ii)}}{=} \Phi_E(h_1) \vee \Phi_E(h_2)$ ' dir. Yani; $\Phi_E(h_1) \subset \Phi_E(h_2)$ ' dir. $\forall i \in I$ için $h_i \in \tau_{\Phi_E}$ olsun. $\bigvee_{i \in I} h_i \in \tau_{\Phi_E}$ olduğunu görmeliyiz. Bu ise $\Phi_E\left(\varphi \circ \bigvee_{i \in I} h_i\right) = \varphi \circ \bigvee_{i \in I} h_i$ eşitliğini görmekle eşdeğerdir. $\forall i \in I$ için $h_i \leq \bigvee_{i \in I} h_i$ ise $\varphi \circ \bigvee_{i \in I} h_i \leq \varphi \circ h_i$ ' dir. O halde $\forall i \in I$ için $\Phi_E\left(\varphi \circ \bigvee_{i \in I} h_i\right) \leq \Phi_E(\varphi \circ h_i) = \varphi \circ h_i$ ' dir. Buradan $\Phi_E\left(\varphi \circ \bigvee_{i \in I} h_i\right) \leq \bigwedge_{i \in I} (\varphi \circ h_i) = \varphi \circ \bigvee_{i \in I} h_i$ ' dir.

Diğer taraftan Tanım 4.33' nin (i) şikkından $\varphi \circ \bigvee_{i \in I} h_i \leq \Phi_E\left(\varphi \circ \bigvee_{i \in I} h_i\right)$ ' dir. Öyleyse $\bigvee_{i \in I} h_i \in \tau_{\Phi_E}$ ' dir.

ii) $\forall i \in I$ için $h_i \in \tau_{\Phi_E}$ olsun. $\bigwedge_{i \in I} h_i \in \tau_{\Phi_E}$ olduğunu görmeliyiz. Bu ise $\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i = \Phi_E\left(\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i\right)$ eşitliğini görmekle eşdeğerdir.

Öncelikle $\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i \leq \Phi_E\left(\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i\right)$ olduğunu görmeliyiz.

Önerme 5.43'ün (i) şikkından $\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i \leq \Phi_E\left(\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i\right)$ olduğu açıktır.

Şimdi ise $\Phi_E\left(\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i\right) \leq \varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i$ olduğunu görmeliyiz.

$\forall i \in I$ için $\bigwedge_{i \in I} h_i \leq h_i$ her zaman vardır. φ güçlü değillesiyle bu eşitsizlik işleme sokulduğunda, $\varphi \circ h_i \leq \varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i$ olur. Φ_E ' nin tanımlanışından $\varphi \circ h_i = \Phi_E(\varphi \circ h_i)$ ' dir. O halde $\varphi \circ h_i = \Phi_E(\varphi \circ h_i) \leq \varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i$ ' dir. Ayrıca $\Phi_E\left(\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i\right) \leq \bigwedge_{i \in I} (\Phi_E(\varphi \circ h_i)) \leq \Phi_E(\varphi \circ h_i)$ ' dir. Buradan $\Phi_E\left(\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i\right) \leq \bigwedge_{i \in I} (\Phi_E(\varphi \circ h_i)) \leq \Phi_E(\varphi \circ h_i) \leq \varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i$ olur. Böylece $\Phi_E\left(\varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i\right) \leq \varphi \circ \bigwedge_{i \in I} h_i$ bulunur.

iii) $h_k \in [0, 1]^X$ bir sabit bulanık küme olmak üzere $h_k \in \tau_{\Phi_E}$ olduğunu görmeliyiz. Yani; $h_k \in [0, 1]^X$ için $\Phi_E(\varphi \circ h_k) = \varphi \circ h_k$ olduğunu görmeliyiz. Bu ise Tanım 4.33' nin (iv) şikkından açıktır. ■

Genelde $\tau_{\Phi_E} \neq \tau_{\Psi_E}$ ' dir. Bu iki topolojinin hangi koşullar altında denk geldiğine bakalım:

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \varphi \circ \Phi_E \circ \varphi \text{ bunun için yeterli bir koşuldur. Çünkü } H_E = \tau_{\Psi_E} = \\ &= \left\{ h \in [0, 1]^X \mid \Psi_E(h) = h \right\} \\ &= \left\{ h \in [0, 1]^X \mid \varphi \circ \Phi_E \circ \varphi(h) = h \right\} \\ &= \left\{ h \in [0, 1]^X \mid \Phi_E \circ \varphi(h) = \varphi(h) \right\} = \tau_{\Phi_E} \text{ ' dir.} \end{aligned}$$

Tersine $\tau_{\Psi_E} = \tau_{\Phi_E}$ ' den herhangi bir $h \in [0, 1]^X$ için $\Phi_E(\varphi \circ h) = \varphi \circ h$ ve $\Psi_E(h) = h$ denktir. Bu koşul bizi $\varphi \circ \Phi_E \circ \varphi = \Psi_E$ eşitliğine götürür. Böylece

$$\tau_{\Phi_E} = \tau_{\Psi_E} \iff \varphi \circ \Phi_E \circ \varphi = \Psi_E$$

elde ederiz.

h' ın alt sınırı φ' nin bir güçlü değillesmesi olması halinde $\varphi \circ \Phi_E \circ \varphi(h)$ ile tanımlanır. Yine de elde edilen bulanık alt küme genelde gözlemlenebilir değildir.

Teorem 5.58 *Bir $\varphi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dönüşümü bir güçlü değillemedir. $\iff t(1) = 0$ ile bir $t : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli ve azalan dönüşümü vardır öyle ki $\forall x \in [0, 1]$ için $\varphi(x) = t^{-1}(t(0) - t(x))$ ' dir. Burada t dönüşümü φ güçlü değillesmesinin bir üretici olarak adlandırılır (Trillas 1979).*

Sonuç 5.59 *φ bir güçlü değillemedir. $\iff t$ üretici ile bir $*$ non-strict Archimedean t -normu vardır öyle ki $\varphi(x) = x \longrightarrow 0$ ' dır (Ling 1965).*

İspat. $\forall x \in [0, 1]$ için $x \longrightarrow 0 = t^{-1}(t(0) - t(x))$ şeklinde tanımlanır. Bu ise bir önceki teoremden $\varphi(x)$ ' e eşittir. ■

Teorem 5.60 *X bir küme, $*$ bir sürekli t -norm, φ bir güçlü değilleme ve E, X üzerinde bir $*$ -ayırt edilemez operatör olsun. Eğer $*$, φ ile aynı üretece sahip bir non-strict Archimedean t -norm ise X' in her h bulanık alt kümesi için $\varphi \circ \Phi_E \circ \varphi(h) = \Psi_E(h)$ ' dır (Boixader, Jacas ve Recasens 1999).*

İspat. $\Psi_E(h)(x) = \inf_{y \in X} (E(x, y) \longrightarrow h(y))$

$h(y) = (h(y) \longrightarrow 0) \longrightarrow 0$ olduğundan $\inf_{y \in X} (E(x, y) \longrightarrow h(y)) = \inf_{y \in X} (E(x, y) \longrightarrow ((h(y) \longrightarrow 0) \longrightarrow 0))$ ' dir. Ayrıca $(x * y) \longrightarrow z = x \longrightarrow (y \longrightarrow z)$ olduğundan $\inf_{y \in X} (E(x, y) \longrightarrow ((h(y) \longrightarrow 0) \longrightarrow 0)) = \inf_{y \in X} ((E(x, y) * (h(y) \longrightarrow 0)) \longrightarrow 0) = \inf_{y \in X} \varphi(E(x, y) * \varphi(h(y))) = \varphi \left(\sup_{y \in X} (E(x, y) * \varphi(h(y))) \right) = \varphi(\Phi_E(\varphi(h)(x)))$ ' dir. ■

6. SONUÇ

Bu çalışmada Alexandroff topolojiler tanıtıldıktan sonra kısmi sıralama bağıntıları ile Alexandroff topolojiler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu ilişkilerin bulanık anlamda nasıl genelleştirilebileceği ve bulanık mantık çatısı altında bu ilişkilerin ne ölçüde korunacağı problemi üzerinde farklı kaynaklardan farklı yaklaşımlar bir araya getirilerek bir çalışma yapılmıştır. Bunun yanı sıra, bulanık denklik bağıntıları kullanılarak bulanık Alexandroff topolojilerin nasıl elde edilebileceği problemi üzerinde durulmuştur.

7. KAYNAKLAR

- ARENAS, F. G. 1999. Alexandroff Spaces, *Acta Math. Univ. Comenianae* Vol. LXVIII, pp. 17-25.
- BELOHLAVEK, R. 2002. Fuzzy Relational Systems, Foundations and Principles, IFSR International Series on Systems Science and Engineering, 20, 382.
- BOIXADER, D. , JACAS, J. and RECASENS, J. 1999. Upper and lower approximations of fuzzy sets, *J. General Systems* 29, 555–568.
- BODENHOFER, U. 1999. Representations and constructions of strongly linear fuzzy orderings, *Conference*, pp. 215-218, Palma de Mallorca.
- DE BAETS, B. and MESIAR, R. 2002. Metrics and T-Equalities, *J. Math. Anal. Appl.* 267, 531-547.
- DEMİRÇİ, M. 2005. A Teory of Vague Lattices Based on Many-valued Equivalence Relations-I:General Representation Results, *Fuzzy Sets and Systems*, 151, 437-472.
- JACAS, J. and RECASENS, J. 1993. Fuzzy numbers and equality relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 2, 1298 - 1301.
- JACAS, J. and RECASENS, J. 1994. Fixed points and generators of fuzzy relations, *J. Math. Anal. Appl.* 186, 21–29.
- JACAS, J. and RECASENS, J. 1995. Fuzzy T-transitive relations: eigenvectors and generators, *Fuzzy Sets and Systems* 72, 47–154.
- JOHNSTONE, P.T. 1982. *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge.
- KLAWOON, F. and CASTRO, J.L. 1995. Similarity in fuzzy reasoning, *Mathware Soft Comput.* 2, 197–228.
- KLEMENT, E.P. , MESIAR, R. and PAP E. 2000. *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

- LING, C.H. 1965. Representation of associative functions. Publ. Math. Debrecen 12, 182-212.
- LOWEN, R. 1976. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. J. Math. Anal. Appl. 56, 621-633.
- RECASENS, J. 2010. Indistinguishability Operators, Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations, Polish Academy of Sciences.
- TRILLAS, E. 1979. Sobre functions de negacion en la teoria de conjuntos difusos. Stochastica 3, 47-60.
- VALVERDE. 1985. On the structure of f-indistinguishability operators, Fuzzy Sets and Systems, 17, 313-328, North-Holland.

ÖZGEÇMİŞ

Müge Çerçi 1985 yılında Eskişehir’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir’ de tamamladı. Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’ nden 2008 yılında mezun oldu. 2009 yılı Ocak ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’ nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.