

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

BULANIK ALTÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Enes ÇEÇ

Danışman: Doç. Dr. Üyesi Selim ÇETİN

II. Danışman: Doç. Dr. Utku GÜRDAL

BURDUR, 2025

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Bulanık Altçaprazlanmış Modüller**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

11/08/2025

(İmza)

ENES ÇEÇ

ÖNSÖZ

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Doç. Dr. Selim ÇETİN'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca araştırmalarımnda hiçbir yardımı esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Utku GÜRDAL'a teşekkür ederim.

Ağustos, 2025

Enes ÇEÇ



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM	12
3.1. Bulanık Altçaprazlanmış Modüller.....	12
3.2. Bulanık Altçaprazlanmış Modüllerin Normallliği	22
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	27
4.1. Normal Bulanık Altçaprazlanmış Modül Modunda Bölümler	27
4.2. Normal Altçaprazlanmış Modül Modunda Bulanık Bölümler	29
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	30
KAYNAKLAR	31

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2. 1. $\theta(g \triangleright t) = \sigma(g) \triangleright \theta(t)$ diyagramı	10
Şekil 3. 1. $\partial: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{H}_8$ grup homomorfizması	14
Şekil 3. 2. $\mathbb{H}_8$ 'in $\mathbb{Z}_4$ 'e etkisi	14
Şekil 3. 3. $\mu \subseteq \mathbb{H}_8$ ve $\tau \subseteq \mathbb{Z}_4$	14
Şekil 3. 4. $v \subseteq \mathbb{Z}_4$	23



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq$	: Alt cebir, alt çaprazlanmış modül, alt 2-çaprazlanmış modül
$\subseteq$	: Alt küme
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$\cup$	: Birleşim kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$/$	: Bölüm kümesi
$\geq$	: Büyük veya eşit
$>$	: Büyüktür
çek	: Çekirdek
inc	: Dahil etme fonksiyonu
$\notin$	: Elemanı değildir
$\in$	: Elemanıdır
ε	: Epsilon
$\neq$	: Eşit değildir
$=$	: Eşittir
$\setminus$	: Fark kümesi
$\rightarrow$	: Fonksiyon
γ	: Gama
$(\Rightarrow)$	: Gerek şart
$\hookrightarrow$	: İçerme dönüşümü
$\trianglelefteq$	: İdeal
İng.	: İngilizce
$\Rightarrow$	: İse
■	: İspat tamamlanmıştır
$\cong$	: İzomorftur
$\times$	: Kartezyen çarpım
$\cap$	: Kesişim kümesi
∂	: Kısmi türev
$<$	: Küçüktür
[.]	: Leibniz cebri işlemi
$\wedge$	: Mantıksal ve

$\vee$	: N'lik mantıksal veya
$\triangleright$	: Normal alt grup olarak kapsar
:	: Öyle ki
φ	: Phi
ψ	: Psi
1_R	: R halkasının (veya cebirinin) birimi
0_R	: R halkasının (veya cebirinin) sıfırı
σ	: Sigma
$:=$	: Tanım olarak eşittir
τ	: Tau
$\exists$	: Vardır
x^{-1}	: x'in çarpımsal tersi
$(\Leftarrow)$	: Yeter şart
ζ	: Zeta

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bulanık Altçaprazlanmış Modüller

Enes ÇEÇ

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Selim ÇETİN
II. Danışman: Doç. Dr. Utku GÜRDAL**

Ağustos, 2025

Bu çalışmada grupların önemli bir genellemesini oluşturan çaprazlanmış modülleri, bulanık altçaprazlanmış modülleri tanımlanarak bulanık ortamda ilk kez ele alınmıştır. Bu bağlamda, bulanık altçaprazlanmış modüllerin çaprazlanmış modüller ve bulanık altçaprazlanmış modüller ile ilişkisini incelenmiş, bu yapılar için normallik kriterlerini açıklıyor ve ilgili bölüm nesnelere odaklanılmıştır.

Birinci bölümde tez konusunun anlaşılabilmesi için konu derleme taraması ve kaynak geçmişine yer verilmiştir.

İkinci bölümde konu hakkında bazı cebirsel yapı, teoremlere ve ifadelere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde bulanık altçaprazlanmış modül hakkında cebirsel yapı, teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde bulanık altçaprazlanmış modüllerin normalliği hakkında yapı inşa edilmiştir ve konu hakkında bilgi verilip teoremler ispatlanılmıştır.

Beşinci bölümde normal bulanık altçaprazlanmış modül modunda bölümler hakkında tanım yapılarak yapının özellikleri açıklanılmıştır. Bazı teoremler ispatlanılmıştır.

Altıncı bölümde normal bulanık altçaprazlanmış modül modunda bulanık bölümlerin özellikleri incelenerek yapının özellikleri açıklanılmıştır. Bazı teoremler ispatlanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık altgrup, çaprazlanmış modül, normallik, bölüm çaprazlanmış modülü.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Fuzzy Subcrossed Module

Enes ÇEÇ

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic**

**Supervisor: Assoc. Prof. Selim ÇETİN
Co-Supervisor: Assoc. Prof. Utku GÜRDAL**

August, 2025

In this study, the concept of crossed modules that forms a significant generalization of groups, as well as fuzzy sub-crossed modules, is introduced for the first time in a fuzzy environment. In this context, the relationship between crossed modules and fuzzy sub-crossed modules is examined, the normality criteria for these structures are explained, and the focus is placed on the objects related to the section.

In the first chapter, a review of the literature and the history of sources is provided to ensure the clarity of the thesis topic.

The second chapter presents some algebraic structures, theorems, and expressions related to the subject.

The third chapter introduces the algebraic structure of fuzzy sub-crossed modules, along with relevant theorems.

The fourth chapter constructs the normality of fuzzy sub-crossed modules and provides information on the subject, followed by the proof of several theorems.

The fifth chapter defines the properties of normal fuzzy sub-crossed modules in the module context, explaining the characteristics of the structure. Some theorems are also proven in this section.

In the sixth chapter, the properties of fuzzy sections within the normal fuzzy sub-crossed module are examined, and the characteristics of the structure are explained. Several theorems are proven.

Keywords: Fuzzy subgroup, crossed module, normality, quotient crossed module.

1. GİRİŞ

Gruplar hem kullanım kolaylığı hem de kapsayıcılık açısından güçlü bir denge sunarak, modern cebirin en temel ve merkezi kavramlarından biri hâline gelmiştir. Günümüzde pek çok matematiksel yapı, bu yapıları tanımlayan otomorfizm grupları gibi grup kavramlarına dayanmakta; birçok cebirsel yapı ise ya doğrudan bir grup yapısı taşımakta ya da bir grup kavramının genişletilmiş bir biçimiyle ilişkilendirilmektedir.

Bu kavramların matematiksel açıdan kritik rolü göz önüne alındığında, klasik grup teorisinde yer alan alt nesnelere (yani altgruplar) son derece önemli matematiksel araçlar olarak karşımıza çıkar. Bulanık mantığın keşfi ve bu yaklaşımın cebirsel yapılara yansması, altgrup kavramının yeni bir uzantısının ortaya çıkmasına neden olmuş ve grup teorisine önemli bir derinlik kazandırmıştır. Bu çerçevede geliştirilen yapılar bulanık altgruplar olarak adlandırılır. Literatürde yer alan çeşitli bulanık altgrup türleri; birim elemanın üyelik derecesinin 1 olup olmaması, $[0,1]$ aralığında minimum işlem ya da genel bir üçgensel norm kullanılıp kullanılmayacağı gibi bazı temel varsayımlara dayanarak birbirinden ayrılmaktadır (Mishref, 1995; Abdullah vd., 2013; Ardanza-Trevijano vd., 2019; Boixader ve Recasens, 2019; Gayen vd., 2019; Kim vd., 2019; Kamali Ardekani ve Davvaz, 2020; Bejines vd., 2021; Allen vd., 2022; Almutairi vd., 2023).

Bulanık altgruplara ilişkin bu tür genellemeler yalnızca bulanık küme kuramıyla sınırlı kalmamış; sezgisel, L – bulanık, yumuşak, kaba, Pisagor, Fermat gibi pek çok farklı yaklaşımla da geliştirilmiştir (Ovchinnikov, 1998; Polat vd., 2018; Yaylalı vd., 2018; Alolaiyan vd., 2019; Gulzar vd., 2020; Shuaib vd., 2020; Bhunia vd., 2021; Silambarasan, 2021; Adi Nugraha vd., 2022; Alsarahead ve Al-Husban, 2022; Diker ve Uğur, 2022; Kousar vd., 2022; Razaq vd., 2022; Diker, 2023; Sangodapo ve Onasanya, 2023).

Diğer taraftan, daha az yaygın bir bakış açısıyla, çaprazlanmış modüller gruplara yeni alt nesneler sağlayan yapılar olarak da değerlendirilebilir. Özellikle, bir G grubunun her N normal altgrubu, bir (N, G, inc) çaprazlanmış modülü ile temsil edilebilir. Burada inc içirme fonksiyonudur ve grup, normal altgrubuna konjugasyonla etki eder. Bu bakış açısı, (T, G, ∂) biçimindeki tüm çaprazlanmış modüllerin, G 'nin normal altgruplarının uzantıları olarak yorumlanabileceğini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla, bir (T, G, ∂) çaprazlanmış modülünün altçaprazlanmış modülleri, G 'nin yeni ve ilginç alt nesneleri olarak kabul edilebilir.

Bu bakış açısını bir kenara koyarsak, çaprazlanmış modüller, 1940'lar boyunca, John Henry Constantine Whitehead tarafından, temel grup ile ikinci relatif homotopi grubunun uyumunu modellemek amacıyla tanıtılmıştır. Bu uyum, grup etkisi ve sınır dönüşümlerinin etkileşimi nedeniyle ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda, çaprazlanmış modüller aslında cebirsel topolojik araçlar olarak değerlendirilir ve homotopi teorisi çerçevesinde ele alınmaktadır. Çaprazlanmış modüllerin incelenmesi, yalnızca grup teorisiyle sınırlı kalmamış, aynı zamanda asosyatif cebirler, monoidler, grupoidler, Lie cebirleri, grup halkaları, raklar ve Leibniz cebirleri gibi farklı cebirsel yapılar üzerinde de araştırmalar yapılmıştır. Buna ek olarak, çaprazlanmış kareler, çaprazlanmış n – küpler, n – çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış kompleksler, simpleksel gruplar, genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller, kareli kompleksler, çaprazlanmış köşeler ve önçaprazlanmış modüller gibi birçok farklı genelleme de literatürde yer almaktadır. Bu kadar geniş bir literatür içinde her örneği burada ele almak mümkün değildir, ancak bu konuda bazı bilgiler (Mutlu, 2000; Alp vd., 2001; Casas vd., 2009; Mutlu ve Mutlu, 2012; Öztunç vd., 2013; Casas vd., 2020; Akay ve Akça, 2022; Akça ve Arslan, 2023; Çetin, 2024; Çetin ve Can, 2025; Çetin ve Gürdal, 2024; Koçak ve Çetin, 2024) gibi kaynaklarda bulunmaktadır.

Çaprazlanmış modüller ilk bakışta karmaşık yapılar gibi görünebilir, ancak Norrie, (1987) 'e grup teorisindeki birçok kavram ve özelliğin çaprazlanmış modül teorisine oldukça iyi bir şekilde uyarlanabileceği ifade edilmiştir. Bu gözlem, bulanık altçaprazlanmış modüllerin de benzer şekilde iyi özellikler sergilemesi ve çaprazlanmış modüller teorisine önemli katkılar sağlaması beklentisini doğurmaktadır.

Bu çalışma, tamamen cebirsel bir bakış açısıyla ve motivasyonla, bulanık altçaprazlanmış modül kavramını tanıtmakta, bunların çaprazlanmış modüller ve bulanık altgruplarla olan ilişkilerini incelemekte ve bazı temel özelliklerini ortaya koymaktadır. Ayrıca, normal bulanık altçaprazlanmış modüller için normallik kriterlerine özel bir vurgu yapılmakta ve çaprazlanmış modüllerle ilgili bu kavramın derinlemesine incelenmesine yer verilmektedir. Böylece, geniş bir şekilde incelenmiş ancak bulanık ortamda henüz tam anlamıyla ele alınmamış bir alanın yeni bir yorumu sunulmakta ve bu alanın gelecekteki araştırmalara temel oluşturabilecek geniş bir çerçeve ortaya konmaktadır.

Bu tür bir yaklaşım, yalnızca teorik anlamda değil, aynı zamanda pratikte de çaprazlanmış modüllerin ve bulanık yapıların nasıl daha derinlemesine incelenebileceği ve bu iki

teorinin birleşiminden doğacak potansiyel yeniliklerin neler olabileceği hakkında da önemli ipuçları sunmaktadır.



2. GENEL BİLGİLER

Burada amacımız, grup teorisindeki bulanık altgruplar ve çaprazlanmış modüller hakkında bazı temel bilgileri sunmak, ayrıca terminoloji ve gösterimleri netleştirmektir. Burada verilen birçok tanım ve sonuç, daha kapsamlı ve genel bir çerçevede Norrie, (1987) veya Mordeson vd., (2005) gibi kaynaklarda bulunabilir. Bir G üzerindeki bir ψ bulanık altkümesi bir $\psi: G \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanır ve $\psi \subseteq G$ olarak yazılır. Özellikle, G 'nin bir H altkümesi için, H 'ye karşılık gelen karakteristik fonksiyon χ_H ile gösterilir. Yaygın olarak, $[0,1]^G$ ifadesi G 'nin tüm bulanık altkümelerinin kümesini ifade eder. Ayrıca, bulanık altkümeler için de, içermeye ve kesişim için standart notasyonlar olan $\subset$ ve $\cap$ kullanılır. $\wedge$ sembolü, $[0,1]$ aralığındaki iki sayının minimumunu veren ikili işlemi gösterirken, $\vee$ ve $\wedge$ sırasıyla $[0,1]$ kümesinin alt kümelerinin supremum ve infimum değerlerini ifade eder. $a \in [0,1]$ için, seviye kümeleri şu şekilde tanımlanır:

$$\psi_a := \{g \in G : \psi(g) \geq a\}$$

Ayrıca, ψ_* ifadesini kullanarak $\psi_* := \{g \in G : \psi(g) = 1\}$ gösterimini tanımlarız. Bu durumda, $\psi_* = \psi_1$ olarak yazılabilir. Diğer taraftan, ψ^* , ψ 'nin destek kümesini, yani $\psi^* = \{g \in G : \psi(g) > 0\}$ ifadesini belirtir.

Eğer $\varphi : T \rightarrow G$ bir fonksiyon ve $\zeta \subseteq T$, $\psi \subseteq G$ ise, $\psi^{-1}\zeta \subseteq T$ bulanık altkümesi elde edilir. Bu altküme, ψ 'nin ters görüntüsü olarak adlandırılır ve $[\varphi^{-1}\psi](t) = \psi(\varphi(t))$ şeklinde tanımlanır. $\varphi\zeta \subseteq G$ görüntüsü ise şu şekilde tanımlanır:

$$[\varphi\zeta](g) = \bigvee \{\zeta(t) : t \in T, \varphi(t) = g\}$$

Burada, $\bigvee \emptyset = 0$ olduğu için, eğer T kümesinde $\varphi(t) = g$ olacak şekilde bir eleman yoksa $[\varphi\zeta](g) = 0$ olur.

Özel örnekler dışında, herhangi bir G grubunun işlemini elemanları yan yana yazma ile temsil ederiz ve grup birimini 1_G ile gösteririz.

2.1. İkili İşlem

Tanım 2.1.1. G boş olmayan bir küme olmak üzere $*$: $G \times G \rightarrow G$ şeklindeki bir fonksiyona G üzerinde bir ikili işlem denir. $g, h \in G$ olmak üzere $*(g, h)$ elemanını, yani (g, h) ikilisinin bu fonksiyon altındaki değerini göstermek için $g * h$ gösterimi, ya da kısaca gh gösterimi kullanılır.

2.2. Grup

Tanım 2.2.1. Bir G kümesi ve bu küme üzerinde bir $*$ ikili işlemi verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G,*)$ ikilisine bir grup denir.

- i) Her $g, h \in G$ için $g + h \in G$
- ii) Her $g, h, k \in G$ için $g + (h + k) = (g + h) + k$
- iii) Her $g \in G$ için $g + 0 = 0 + g$ olacak şekilde bir $0 \in G$ varsa
- iv) G 'nin birim elemanı e olmak üzere G 'deki her g için,
 $g + (-g) = (-g) + g = 0$ olacak şekilde bir $-g \in G$ var ise
- v) Her $g, h \in G$ için $g + h = h + g$ oluyorsa

$(G,*)$ cebirsel yapıya değişmeli (komutatif ya da Abelyan) grup denir.

2.3 (Halka)

Tanım 2.3.1 H boş olmayan bir küme ve bu küme üzerine her $g, h \in H$ olmak üzere $+: H \times H \rightarrow H, (g, h) = g + h$ ve $\cdot: H \times H \rightarrow H, (g, h) = gh$ iki ikili işlem tanımlanırsa aşağıda verilen şartlar için;

- i) $(H, +)$ değişmeli grup
- ii) Her $g, h, k \in H$ için $g(hk) = (gh)k$
- iii) Her $g, h, k \in H$ olmak üzere $g(h + k) = gh + gk$,
 $(g + h)k = gk + hk$

Bu üç özellik sağlanıyorsa, H kümesine bir halka denir ve $(H, +, \cdot)$ ile gösterilir.

iv) Her $g \in H$ için $g1_H = 1_Hg = g$ olacak şekilde $1_H \in H$ elemanı varsa H halkasına birimli halka denir, buradaki 1_H elemanına H halkasının birim elemanı denir. Bundan sonraki bölümde karışıklık olmaması için halkadaki ilk işlemin birimine etkisiz eleman denip 0_H veya 0 ile gösterilecek, halkanın birim elemanı da 1_H veya 1 ile göstereceğiz.

- v) Her $g, h \in H$ için $gh = hg$ ise

H 'ya değişmeli halka denir.

2.4 (Cisim)

Tanım 2.4.1 H birimli ve değişmeli bir halka olsun. Her $g \in H; g \neq 0$ için, $\exists h \in H; gh = hg = 1$ ise yani değişmeli H halkasının sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre bir tersi varsa H 'ya bir cisim denir.

2.5 (Vektör Uzayı)

Tanım 2.5.1 (Vektör Uzayı) $(R, +)$ değişmeli grup ve $\mathbb{K}$ cisim olmak üzere her $\mathbb{k} \in \mathbb{K}$,

Her $g \in R$ için $\cdot: \mathbb{K} \times R \rightarrow R$ aşağıdaki şartları sağlarsa;

- i) Her $\mathbb{k} \in \mathbb{K}$ ve her $g \in R$ için $\mathbb{k} \cdot g \in R$
- ii) Her $\mathbb{k} \in \mathbb{K}$ ve her $g, h \in R$ için $\mathbb{k} \cdot (g + h) = \mathbb{k} \cdot g + \mathbb{k} \cdot h$
- iii) Her $\mathbb{k}, \mathbb{m} \in \mathbb{K}$ ve her $g \in R$ için $(\mathbb{k} + \mathbb{m}) \cdot g = \mathbb{k} \cdot g + \mathbb{m} \cdot g$
- iv) $\forall \mathbb{k}, \mathbb{m} \in \mathbb{K}$ ve $\forall x \in R$ için $\mathbb{k} \cdot (\mathbb{m} \cdot x) = (\mathbb{k}\mathbb{m}) \cdot x$
- v) Her $g \in R$ için $1 \cdot g = g$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{K}$ vardır.

R 'ye $\mathbb{K}$ cismi üzerinde vektör uzayı denir.

2.6 (Modül)

Tanım 2.6.1 (Modül) $(R, +)$ değişmeli grup ve H halka olmak üzere her $g \in H$, her $h \in R$ için

$\cdot: H \times R \rightarrow R$ aşağıdaki şartları sağlarsa;

- i) Her $\alpha \in H$ ve $\forall x \in R$ için $\alpha \cdot x \in R$
- ii) Her $g \in H$, her $h, k \in R$ için $g \cdot (h + k) = g \cdot h + g \cdot k$
- iii) Her $g_1, g_2 \in H$, her $h \in R$ için $(g_1 + g_2) \cdot h = g_1 \cdot h + g_2 \cdot h$
- iv) Her $g_1, g_2 \in H$, her $h \in R$ için $g_1 \cdot (g_2 \cdot h) = (g_1 g_2) \cdot h$
- v) Her $h \in R$ için $1_H \cdot h = h$ olacak şekilde $1_H \in H$

oluşan yapıya H – modül (H – sol modül) denir.

Her $g \in H$, her $h \in R$ için $\cdot: R \times H \rightarrow R$ aşağıdaki şartları sağlarsa;

- i) Her $g \in H$ ve her $h \in R$ için $h \cdot g \in R$
- ii) Her $g \in H$, her $h, k \in R$ için $(h + k) \cdot g = h \cdot g + k \cdot g$
- iii) Her $g_1, g_2 \in H$, her $h \in R$ için $h \cdot (g_1 + g_2) = h \cdot g_1 + h \cdot g_2$
- iv) Her $g_1, g_2 \in H$, her $h \in R$ için $(h \cdot g_2) \cdot g_1 = h \cdot (g_2 g_1)$
- v) Her $h \in R$ için $h \cdot 1_H = h$ olacak şekilde $1_H \in H$

oluşan yapıya H – modül (H – sağ modül) denir.

Uyarı 2.7 $(R, +)$ değişmeli grup olmak üzere H halkası yerine $\mathbb{K}$ cismi alınırsa oluşan yapıya $\mathbb{K}$ – vektör uzayı denir.

Tanım 2.8. (Mishref, 1995; Asaad ve Abou-Zaid, 1996; Murali ve Makamba, 2001) $\psi \subseteq G$ olmak üzere, her $g, h \in G_g$ için

1. $\psi(1_G) = 1$
2. $\psi(g) \wedge \psi(h) \leq \psi(gh)$
3. $\psi(g^{-1}) = \psi(g)$

ifadeleri sağlanıyorsa ψ 'ye G 'nin bir bulanık altgrubu denir ve bu durum $\psi \leq H$ ile gösterilir.

Açıklama 2.9. Esasen, literatürde bulanık altgrupların tanımlanması için iki farklı yaklaşım bulunmaktadır. Bunlardan biri, birim elemanın üyelik derecesinin 1 olması şartını koyarken, diğeri birim elemanın üyelik derecesinin 1'den küçük olabileceğini kabul etmektedir. İkinci yaklaşım benimsendiğinde, Abel çaprazlanmış modüllerinin normal olmayan bulanık altmodülleri ortaya çıkmakta ve bu durum cebirsel bir bakış açısında doğal olarak değerlendirilememektedir. Bu durumu engellemek için, çaprazlanmış modülü oluşturan her iki grubun da birim elemanlarının üyelik derecelerinin eşit olmasını, bu değer 1'den küçük olabileceği bir şartla sağlamak gibi daha zayıf bir koşul bile getirilse, bir grubun normal bulanık altgrubu bir çaprazlanmış modüle karşılık gelmeyebilir. Bu da teorik açıdan doğal bir sonuç değildir. Bu nedenle, kategorik olarak daha tutarlı bir teori için, çaprazlanmış modüllerin yapısıyla daha uyumlu olduğu görülen ilk yaklaşımı benimsenmiştir.

Önerme 2.10. (Mordeson vd., 2005) $\psi \leq G$ olsun. O halde:

- (i) $\psi^* \leq G$
 - (ii) $\psi_* \leq G$
 - (iii) Eğer $H \leq G_H$ ise, $\psi|_H \leq H$
- dir.

Teorem 2.11. (Mordeson vd., 2005) Bir G grubu ve $\psi \leq G$ için $g, h \in G$ olmak üzere aşağıdaki koşullar birbirine eşdeğerdir:

- (1) $\psi(gh) = \psi(hg)$
- (2) $\psi(ghg^{-1}) = \psi(h)$
- (3) $\psi(ghg^{-1}) \geq \psi(h)$
- (4) $\psi(ghg^{-1}) \leq \psi(h)$

Eğer ψ Teorem 2.4'teki koşullardan birini sağlıyorsa, o zaman buna abelyen bulanık altküme denir. Ayrıca, eğer $\psi \leq G$ ise, normal bulanık altgrup olarak adlandırılır. Bu durumda, $\psi \trianglelefteq G$ yazılır.

Önerme 2.13. (Öztunç, 2013) $\psi \trianglelefteq G$ olsun. O halde,

$$(i) \psi^* \trianglelefteq G$$

$$(ii) \psi_* \trianglelefteq G$$

$$(iii) H \leq G \text{ ise } \psi|_H \trianglelefteq H.$$

dir.

G bir grup $\psi, \nu \subseteq G$ için, $\psi \bullet \nu$ ve $\bar{\psi}$ bulanık altkümeleri şu şekilde tanımlanır:

$$[\psi \bullet \nu](g) := \bigvee \{ \psi(h) \wedge \nu(k) : h, k \in G, hk = g \}$$

ayrıca $\psi(g) := \psi(g^{-1})$ ifadesi sağlanır.

Teorem 2.14. (Mordeson vd., 2005) $\psi \subseteq G$ olsun. O halde, $\psi \leq G$ olması için gerek ve yeter şart $\psi \bullet \psi \subseteq \psi$ ve $\bar{\psi} = \psi$ olmasıdır.

Eğer $\psi \subseteq G$ ve $g \in G$ ise, o zaman karşılık gelen $g\psi$ sol koseti aşağıdaki gibi tanımlanan bulanık altküme ile verilir.

$$[g\psi](h) := \psi(g^{-1}h)$$

ψg sağ koseti ise

$$[\psi g](h) := \psi(hg^{-1})$$

şeklinde tanımlanır (Mordeson vd., 2005).

Önerme 2.15. (Mordeson vd., 2005) $\psi \trianglelefteq G$ olsun. O halde her $g, h \in G$ için

$$(i) g\psi = \psi g$$

$$(ii) g\psi = h\psi \text{ ise, } \psi(g) = \psi(h) \text{ eşitliği sağlanır.}$$

$$(iii) g\psi = h\psi g \text{ ve } g\psi * h\psi = h\psi g \text{ eşitliğini gerektirir.}$$

Teorem 2.16. (Mordeson vd., 2005) Tüm $g \in G$ için, $\psi \trianglelefteq G, G/\psi := \{g\psi : g \in G\}$

ve $\psi' \subseteq G/\psi, \psi'(g\psi) = \psi(g)$ tanımlansın. Bu takdirde her $g, h \in G$ için aşağıdakiler geçerlidir.

$$(1) (g\psi \bullet h\psi) = (gh)\psi$$

$$(2) (G/\psi, \bullet) \text{ bir gruptur}$$

$$(3) G/\psi \text{ ve } G/\psi * \text{ grupları birer izomorfiktir}$$

$$(4) \psi' \trianglelefteq G/\psi \text{ d\u00fcr}$$

Teorem 2.17. (Mordeson vd., 2005) $\psi \leq G$ ve $N \trianglelefteq G$ verilsin. O zaman $\ddot{\psi} \leq G/N$ i\u00e7in, $\ddot{\psi}(gN) := V\{\psi(h) : h \in gN\}$ dir. Bir G grubunun bir T grubu \u00fczerindeki grup etkisi $\Phi : G \rightarrow \text{Aut } T$ homomorfizması ile verilir, burada $\text{Aut } T, T$ 'nin otomorfizma grubudur. E\u011fer b\u00f6yle bir etki varsa G 'nin T 'ye otomorfizma yoluyla etki etti\u011fi s\u00f6ylenir. Her $g \in G$ i\u00e7in ve $t \in T$ ise, $[\Phi(g)](t) \in T, g \triangleright t$ ile g\u00f6sterilir. Benzer \u015fekilde, bir $\triangleright : G \times T \rightarrow T$ i\u015lemiyle

$$(1) 1_G \triangleright t = t$$

$$(2) (gh) \triangleright t = g \triangleright (h \triangleright t)$$

$$(3) g \triangleright (st) = (g \triangleright s)(g \triangleright t)$$

(1),(2),(3) maddeleri karakterize edilebilir.

Tanım 2.18. (Norrie, 1987) T ve G grupları, $\triangleright : G \times T \rightarrow T$ \u015feklinde bir grup etkisi ve $\partial : T \rightarrow G$ \u015feklinde bir homomorfizma (buna sınır homomorfizmi denilir) ile verilmi\u015f olsun. O zaman e\u011fer a\u015fa\u011fıdaki e\u015fitlikler sa\u011flanıyorsa

$$(CM1) \partial(g \triangleright t) = g\partial(t)g^{-1}$$

$$(CM2) \partial(s) \triangleright t = sts^{-1}$$

(T, G, ∂) \u00e7aprazlanmı\u015f mod\u00fcl (kısaca CM) olarak adlandırılır.

\u00c7aprazlanmı\u015f mod\u00fcller hem grup teorisini hem de grupların normal alt gruplarını zenginle\u015ftirir. Bir G grubu her zaman iki kanonik yolla \u00e7aprazlanmı\u015f mod\u00fcl olarak g\u00f6r\u00fclebilir: $(1, G, id)$ ve (G, G, inc) , burada $1, G$ 'nin \u00f6nemsiz alt grubunu temsil eder, inc dahil etme e\u015flemesidir ve id birim d\u00f6n\u00fc\u015f\u00fcm\u00fcd\u00fcr. İlk yakla\u015fımda $G, 1$ 'e \u00f6nemsiz bir \u015fekilde etki eder, ikincisinde ise G kendi \u00fczerinde konjugasyon yoluyla etki eder, yani $g \triangleright h = ghg^{-1}$ \u015eklinededir.

İlk yakla\u015fım kategorik olarak daha do\u011frudur, \u00e7\u00fcnk\u00fc $(1, G, id)$ ve G 'nin alt nesneleri arasında do\u011fal bir bijektif benze\u015fme varken, (G, G, inc) genellikle G 'den daha fazla alt nesneye sahiptir. Bu anlamda \u00e7aprazlanmı\u015f mod\u00fcller grupları genelle\u015ftirir. Di\u011fer taraftan, (N, G, inc) , her $N \trianglelefteq G$ i\u00e7in \u00e7aprazlanmı\u015f bir mod\u00fcl\u00fcd\u00fcr; burada G, N \u00fczerinde konjugasyon yoluyla etki eder. Dolayısıyla (T, G, ∂) formundaki her \u00e7aprazlanmı\u015f mod\u00fcl aynı zamanda G 'nin bir t\u00fcr genelle\u015ftirilmi\u015f normal alt grubu olarak da kabul edilebilir. İki

çaprazlanmış modül (T, G, ∂) ve (T', G', ∂') verilmiştir. Bir çaprazlanmış modül homomorfizması bir çifttir: (θ, σ) , burada $\theta : T \rightarrow T'$ ve $\sigma : G \rightarrow G'$ grup homomorfizmalarıdır, öyle ki $\theta(g \triangleright t) = \sigma(g) \triangleright \theta(t)$ ve diyagram aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\theta} & G \\ \theta \downarrow & & \downarrow \sigma \\ T' & \xrightarrow{\partial'} & G' \end{array}$$

Şekil 2. 1. $\theta(g \triangleright t) = \sigma(g) \triangleright \theta(t)$ diyagramı

Burada $\sigma \circ \partial = \partial' \circ \theta$ dır ve değişmelidir (Norrie, 1987).

Çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış modül homomorfizmaları ve bu homomorfizmaların çiftler hâlindeki kompozisyonları, literatürde genellikle **XMod** olarak adlandırılan bir kategori oluşturur. Bu kategorideki alt nesneler, aşağıda tanımlandığı şekilde altçaprazlanmış modüller ile ilişkilidir

Tanım 2.19. (Norrie, 1987) Bir çaprazlanmış modül (T, G, ∂) verilsin. $S \leq T$ ve $H \leq G$ özellikleri ve

Her $s \in S$ ve her $h \in H$ için

(1) $\partial(s) \in H$

(2) $h \triangleright s \in S$

sağlanırsa (S, H) , (T, G, ∂) 'nin bir altçaprazlanmış modülü olarak adlandırılır. Bu durum $(S, H) \leq (T, G, \partial)$ ile gösterilir.

Gruplarda olduğu gibi, çaprazlanmış modüller için de alt nesnelerin normalliğini tartışmak mümkündür. Açıklanacağı üzere, çaprazlanmış modüller, normal alt nesneler (normal altçaprazlanmış modüller) açısından bölümlemelere sahiptir. Bu yapılar, örneğin, grup teorisindeki iyi bilinen izomorfizma teoremlerinin çaprazlanmış modüller için elde edilmesini sağlayacak şekilde, oldukça düzgün bir şekilde işler (Norrie, 1987).

Tanım 2.20. (Norrie , 1987) (T, G, φ) çaprazlanmış modülünün bir altçaprazlanmış modülü (S, H) olmak üzere,

$$(1) H \trianglelefteq G$$

$$(2) \forall g \in G \text{ ve } \forall s \in S \text{ için } g \triangleright s \in S$$

$$(3) (h \triangleright t)t^{-1} \in S$$

sağlanırsa **normal altçaprazlanmış modül** olarak adlandırılır. Bu durumda $(S, H) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ yazılır.

Eğer $(S, H) \triangleleft (T, G, \varphi)$ ise, sadece $H \trianglelefteq G$ değil, aynı zamanda Tanım 2.10 (CM2) ve Tanım 2.12 (2)'nin gereği olarak $S \trianglelefteq T$ olduğu da zorunludur. Bölüm çaprazlanmış modül $\frac{(T, G, \partial)}{(S, H)}$, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$(T/S, G/H, \bar{\partial})$$

burada $G/H, (gH) \triangleright (tS) = (g \triangleright t)$ (kuralına göre T/S üzerinde etki eder) S ve $\bar{\partial}$ çaprazlanmış bölüm modülünün sınır homomorfizmi $\bar{\partial}(tS) = \partial(t)H$ ile verilir.

Son olarak, gruplar için abelyenlik kavramının çaprazlanmış modüllere nasıl genelleştirildiğini hatırlatalım. Bu konu hakkında daha ayrıntılı bilgiye, abelyenlik ile çaprazlanmış modülün merkezi, merkezi seriler, komütatör altçaprazlanmış modülleri gibi kavramlar arasındaki güçlü bağlantılar hakkında ilginç ayrıntılarla birlikte, (Norrie, 1987)'da ulaşılabilir.

Tanım 2.21. (Norrie, 1987) Çaprazlanmış bir modüle (T, G, ∂) değişmeli denir, eğer G bir değişmeli grupsa ve G, T 'ye aşıkâr bir şekilde etki ediyorsa, yani tüm $t \in T$ için $g \triangleright t = t$ olur. G 'nin yanı sıra bir değişmeli çaprazlanmış modül (T, G, ∂) verildiğinde, bundan T 'nin de bir değişmeli grup olduğu ve (T, G, ∂) 'nin her altçaprazlanmış modülünün normal olduğu sonucu çıkar.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Bulanık Altçaprazlanmış Modüller

Bulanık altgrupların incelenmesi, yalnızca grup teorisine katkıda bulunmakla kalmaz, aynı zamanda kodlama teorisi ve Sylow teorisi gibi bağlamlarda elde edilen sonuçlarla teorik bir genişleme sağlar, aynı zamanda veri madenciliği, makine öğrenimi, karar destek sistemleri, tedarik zinciri yönetimi ve çok kriterli karar verme gibi çok çeşitli alanlarda gerçek yaşam uygulamaları da bulur. Bu alanlar saymakla bitmeyecek kadar geniştir. Saf matematiksel bir bakış açısıyla, her klasik alt grubun bir bulanık alt gruba karşılık geldiği göz önünde bulundurulduğunda, bir grubun bulanık alt grupları, o grup için alt grup kavramını genelleyerek daha zengin bir araç seti sunar. Öte yandan, Bölüm 2'de belirtildiği gibi, çaprazlanmış modüller de verilen bir grubun normal alt gruplarıyla ilgili benzer bir işlevi yerine getirir. Bu nedenle, bu iki yaklaşımın rolleri arasında dikkat çekici bir benzerlik bulunmaktadır ve bu benzerlik, potansiyel uygulamalarıyla birlikte, bulanık altçaprazlanmış modüllerinin incelenmesi için güçlü bir teorik motivasyon sağlamaktadır. Bu bölümde, bulanık altçaprazlanmış modül kavramı, yeni terminoloji, örnekler ve sonuçlarla tanıtılmakta ve bulanık alt gruplar ile çaprazlanmış modüller teorileri arasındaki bağlantıları veya ortak zeminleri oluşturma amacı güdülmektedir.

Tanım 3.1 Bir çaprazlanmış modül (T, G, φ) verilsin ve $\zeta \leq T, \psi \leq G$ olsun. O zaman (ζ, ψ) çifti, (T, G, ∂) çaprazlanmış bir modül ve $\tau \leq T, \psi \leq G$ olsun. Bu durumda tüm $g \in G, t \in T$ için

$$(FSM1) \tau(t) \leq \psi(\partial t)$$

$$(FSM2) \psi(g) \wedge \tau(t) \leq \tau(g \triangleright t)$$

sağlanırsa (τ, ψ) çiftine (T, G, φ) 'nin **bulanık altçaprazlanmış modülü** olarak adlandırılır. Bu durumda $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ yazılır.

Çaprazlanmış modüller ve bulanık alt grupların gruplarla olan ilişkileri, aynı şekilde bulanık altçaprazlanmış modüllere de yansımaktadır. Örneğin, aşağıdaki örnekler dizisinde, ilk örnek her altçaprazlanmış modülün bir bulanık altçaprazlanmış modül olarak görülebileceğini gösterirken, ikinci örnek ise $\psi = \chi_G$ olduğunda, her normal bulanık alt grubun bir bulanık altçaprazlanmış modüle karşılık geldiğini belirtmektedir.

Örnek 3.2. 1) (T, G, ∂) 'nin her bir altçaprazlanmış modülü (S, H) bir bulanık altçaprazlanmış modülü, eğer S ve H kümelerini karakteristik fonksiyonları ile aynı tutulursa, gerçekten de, $\partial(S) \subseteq H$ olduğu için, $t \in S, \partial t \in H$ anlamına gelir, yani $\chi_S(t) = 1, \chi_H(\partial t) = 1$ dir. Ve χ_H ve χ_S sadece 0 ve 1 değerlerini alabildiğinden, $\chi_S(t) \leq \chi_H(\partial t)$ sonucuna varırız. Öte yandan, S, H 'nin etkisi altında kapalı olduğundan, $g \in H$ ve $t \in S$, $g \triangleright t \in S$ anlamına gelir. Başka bir deyişle, $\chi_H(g) = 1$ ve $\chi_S(t) = 1$, $\chi_S(g \triangleright t) = 1$ veya eşdeğer olarak $\chi_H(g) \wedge \chi_S(t) = 1 \Rightarrow \chi_S(g \triangleright t) = 1$ verir, böylece $\chi_H(g) \wedge \chi_S(t) \leq \chi_S(g \triangleright t)$ elde edilir.

2) $\psi \leq G, \nu \leq G$ olsun, öyle ki $\nu \subset \psi$ olsun. O halde $(\nu, \psi) \leq (G, G, id)$, burada $id: G \rightarrow G$ birim fonksiyonudur ve G , konjugasyon yoluyla kendi kendine etki eder. $\nu(g) \leq \psi(g) = \psi(id(g))$ ve $\psi(g_1) \wedge \nu(g_2) \leq \nu(g_2) = \nu(g_1 g_2 g_1^{-1}) = 1$ olduğu kolaylıkla görülmektedir, ν olarak normaldir.

3) $(\theta, \sigma): (T, G, \partial) \rightarrow (T', G', \partial')$ bir çaprazlanmış modül homomorfizması olsun ve $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ olsun. Sonra, $(\theta(\tau), \sigma(\psi)) \leq (T', G', \partial')$ olmak üzere bunu görmek için, belirli bir $t' \in T'$ için, $A := \{\tau(t): \theta(t) = t'\}$ ve $B := \{\psi(g): \sigma(g) = \partial'(t')\}$ kümelerini tanımlarız. Varsayalım ki $\alpha \in A$ olmak üzere $\tau(t) = \alpha$ ve $\theta(t) = t'$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. Diyelim ki $\beta := \psi(\partial t)$ ve $(\tau, \psi), (T, G, \partial)$ 'nin bulanık altçaprazlanmış modülü olduğundan, $\tau(t) \leq \psi(\partial t)$ dir. Yani $\alpha \leq \beta$ 'dir. Ayrıca, $g := \partial(t)$ için, $\sigma(g) = \sigma(\partial t) = \partial'(\theta t) = \partial'(t')$ ve $\psi(g) = \psi(\partial t) = \beta$, yani $\beta \in B$ 'dir. Dolayısıyla, her $\alpha \in A$ için, $\alpha \leq \beta$ olan bazı $\beta \in B$ vardır. Bu, $\bigvee A \leq \bigvee B$, yani $[\theta(\tau)](t') \leq [\sigma(\mu)](\partial'(t'))$ anlamına gelir.

Şimdi, tüm $g' \in G'$ ve $t' \in T'$ için $[\sigma(\psi)](g') \wedge [\theta(\tau)](t') \leq [\theta(\tau)](g' \triangleright t')$ olduğunu gözlemlemek için, $C := \{\psi(g): \sigma(g) = g'\}$, $D := \{\tau(t): \theta(t) = t'\}$ ve $E := \{\tau(t): \theta(t) = g' \triangleright t'\}$ kümelerini göz önüne alıyoruz. $\gamma \in C$ ve $\delta \in D$ olduğunu varsayalım. O zaman $g_0 \in G$ ve $t_0 \in T$ vardır, öyle ki $\gamma = \mu(g_0), \sigma(g_0) = g'$ ve $\delta = \tau(t_0), \theta(t_0) = t'$ olsun. Diyelim ki $t := g_0 \triangleright t_0$ ve $\varepsilon := \tau(t)$ olmak üzere, $\theta(t) = \theta(g_0 \triangleright t_0) = \sigma(g_0) \triangleright \theta(t_0) = g' \triangleright t'$ dir ve böylece $\varepsilon = \tau(t) \in E$. (τ, ψ) bir bulanık altçaprazlanmış modül olduğundan, $\gamma \wedge \delta = \psi(g_0) \wedge \tau(t_0) \leq \tau(g_0 \triangleright t_0) = \varepsilon$ olur.

Bu durumda, her $\gamma \in C$ ve $\delta \in D$ için, $\gamma \wedge \delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon \in E$ vardır. Bunun $\forall C \wedge \forall D \leq \forall E$ anlamına geldiğini belirterek, $[\sigma(\psi)](g') \wedge [\theta(\tau)](t') \leq [\theta(\tau)](g' \triangleright t')$ elde ederiz.

4) Eğer (T, G, ∂) çaprazlanmış bir modülse ve $\tau \leq T$ ise $(\tau, \partial(\tau)) \leq (T, G, \partial)$ olur. Bunu görmek için $t_0 \in T$ olsun. O zaman $\tau(t_0) \leq [\partial(\tau)](\partial t_0) = \vee\{\tau(t) : \partial t = \partial t_0\}$, çünkü $\tau(t_0) \in \{\tau(t) : \partial t = \partial t_0\}$. Aksine, $g_0 \in G$ ve $t_0 \in T$ için, $g_0 \notin \partial(T)$, o zaman $[\partial(\tau)](g_0) \wedge \tau(t_0) = 0 \wedge \tau(t_0) = 0 \leq \tau(g_0 \triangleright t_0)$. Aksi takdirde, $\partial(t) = g_0$ olacak şekilde her $t \in T$ için $\tau(t) \wedge \tau(t_0) = \tau(t) \wedge \tau(t_0) \wedge \tau(t^{-1}) \leq \tau(tt_0t^{-1}) = \tau(\partial(t) \triangleright t_0) = \tau(g_0 \triangleright t_0)$ eşitliği $\tau(t^{-1}) = \tau(t)$ olduğundan meydana gelir. Bu nedenle, $\vee\{\tau(t) : \partial(t) = g_0\} \wedge \tau(t_0) \leq \tau(g_0 \triangleright t_0)$, yani $[\partial(t)](g_0) \wedge \tau(t_0) \leq \tau(g_0 \triangleright t_0)$ dir.

5) Z_4 eklemeli grubunu ve H_8 kuaterniyon sekiz grubunu göz önüne alınız. $\partial: Z_4 \rightarrow H_8$ tarafından verilen grup homomorfizmasını göz önünde bulundurulması.

t	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\partial(t)$	1	$-j$	-1	j

Şekil 3. 1. $\partial: Z_4 \rightarrow H_8$ grup homomorfizması

ve H_8 'in Z_4 'e etkisinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$\triangleright$	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

Şekil 3. 2. H_8 'in Z_4 'e etkisi

Bu durumda (Z_4, H_8, ∂) bir çaprazlanmış modül olur. Şimdi $\psi \subseteq H_8$ ve $\tau \subseteq Z_4$ aşağıdaki tabloda verildiği gibidir.

t	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\tau(t)$	1	0.1	0.4	0.1

g	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
$\mu(g)$	1	0.3	0.3	0.3	0.5	0.3	0.3	0.3

Şekil 3. 3. $\psi \subseteq H_8$ ve $\tau \subseteq Z_4$

O zaman $(\tau, \psi) \leq (Z_4, H_8, \partial)$ olduğunu kontrol etmek rutin bir işlemdir.

Önerme 3.3. Bir (T, G, φ) çaprazlanmış modülünün altçaprazlanmış modülleri ve bulanık altçaprazlanmış modülleri arasında aşağıdaki ilişkiler geçerlidir, burada $(\zeta, \psi) \leq (T, G, \varphi)$ dir.

1. $(\zeta^*, \psi^*) \leq (T, G, \varphi)$
2. $(\zeta^*, \psi^*) \leq (T, G, \varphi)$
3. $(S, H) \leq (T, G, \varphi)(S, H)$ ise, $(\zeta \mid S, \psi \mid H) \leq (S, H)$

Kanıt. 1) $\tau^* \leq T$ ve $\psi^* \leq G$ olduğu Önerme 2.3 (i) ile bilinmektedir. Bu yüzden

$\partial(\tau^*) \subseteq \psi^*$ ve τ^* olduğunu göstermek yeterlidir. G 'den miras(kalıtsal) alınan ψ^* 'nin etkisi altında kapalıdır. Eğer $t \in \tau^*$ ise $\tau(t) > 0$ ve $\psi(\partial t) \geq \tau(t) > 0$ olur bu da

$\partial(t) \in \psi^*$ olduğunu doğrular. İkinci olarak, eğer $g \in \psi^*$ ve $t \in \tau^*$ ise $\psi(g) > 0$, $\tau(t) > 0$ ve $\tau(g \triangleright t) \geq \psi(g) \wedge \tau(t) > 0$ olur, böylece $g \triangleright t \in \tau^*$ dir.

2) Önerme 2.3 (ii) ile $\tau^* \leq T$ ve $\psi^* \leq G$. $t \in \tau^*$ olsun. O halde $\psi(\partial t) \geq \tau(t) = 1$, yani $\partial t \in \psi^*$. Son olarak, $g \in \psi^*$ ve $t \in \tau^*$ için, $\tau(g \triangleright t) \geq \psi(g) \wedge \tau(t) = 1 \wedge 1 = 1$, $g \triangleright t \in \tau^*$ sonucunu verir.

3) (Açıktır)

$\psi \leq G$ için $\psi(g \neq \psi(h))$ 'nin $\psi(gh) = \psi(g) \wedge \psi(h)$ eşitliğini ifade ettiği bilinmektedir. Dolayısıyla, bulanık altçaprazlanmış modüllerde $\psi(g) \neq \tau(t)$ için $\tau(g \triangleright t) = \psi(g) \wedge \tau(t)$ olup olmadığını sormak doğaldır. Devamında bir karşı örnek verilmiştir.

Örnek 3.4. Örnek 3.2 (5)'teki $(\tau, \psi) \leq (Z_4, H_8, \partial)$ 'yi göz önünde bulunduralım. $\psi(k) = 0.3$, $\tau(\bar{2}) = 0.4$ ve $\tau(k \triangleright \bar{2}) = \tau(\bar{2}) = 0.4$ olduğu görülür. Yani, $\psi(k) \neq \tau(\bar{2})$ iken, $\tau(k \triangleright \bar{2})\psi(k) \wedge \tau(\bar{2})$ 'ye eşit değildir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi eşitlik genel olarak sağlanmasa da bulanık alt-çaprazlanmış modüllerdeki eylemler için aşağıdaki benzer kısmi sonuç mevcuttur.

Yardımcı Teorem 3.5. $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ olsun. Eğer $\psi(g) > \tau(t)$ ise, $\tau(g \triangleright t) = \psi(g) \wedge \tau(t)$ olur, Yani $\tau(g \triangleright t) = \tau(t)$ dir.

Kanıt. Eğer $\psi(g) > \tau(t)$ ise, $\tau(g \triangleright t) \geq \psi(g) \wedge \tau(t) = \tau(t)$ olur. Diğer taraftan, $\tau(t) = \tau(1_G \triangleright t) = \tau(g^{-1}g) \triangleright t = \tau(g^{-1} \triangleright (g \triangleright t)) \geq \psi(g^{-1}) \wedge \tau(g \triangleright t) = \psi(g) \wedge \tau(g \triangleright t)$ dir.

Ancak $\psi(g) > \tau(t)$ olduğunu bildiğimizden, $\psi(g) \wedge \tau(g \triangleright t) = \tau(g \triangleright t)$ olmalıdır, böylece $\tau(t) \geq \tau(g \triangleright t)$ olur. Dolayısıyla $\tau(g \triangleright t) = \mu(g) \wedge \tau(t) = \tau(t)$.

Yardımcı Teorem 3.6. Çaprazlanmış bir modül (T, G, ∂) verildiğinde ve $\tau \subseteq T, \psi \subseteq G$ olsun. O halde tüm $a \in [0, 1]$ için $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ olması için gerek ve yeter koşul $(\tau_a, \psi_a) \leq (T, G, \partial)$ olmasıdır.

Kanıt. $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ olduğunu varsayalım. Tanım gereği $\psi \leq G$ ve $\tau \leq T$ olduğundan, her $a \in [0, 1]$ için $\psi_a \leq G$ ve $\tau_a \leq T$ olur. Üstelik $t \in \tau_a$ için $\psi(\partial t) \geq \tau(t) \geq a$, $\partial t \in \psi_a$ 'yı verir, yani $\partial(\tau_a) \subseteq \psi_a$ dir.

Son olarak, $t \in \tau_a$ ve $g \in \psi_a$ için, $\tau(g \triangleright t) \geq \psi(g) \wedge \tau(t) \geq a \wedge a = a$, böylece $g \triangleright t \in \tau_a$ ve τ_a, ψ_a etki altında kapalıdır. Bunlar (τ_a, ψ_a) 'yı (T, G, ∂) 'nin altçaprazlanmış modülü yapar.

Tersine, tüm $a \in [0, 1]$ için $(\tau_a, \psi_a) \leq (T, G, \partial)$ olduğunu varsayalım. O halde $\psi \leq G$ ve $\tau \leq T$ $t \in T$ olsun ve $b := \tau(t)$ diyelim. O halde $(\tau_b, \psi_b) \leq (T, G, \partial)$ dir. Özellikle, $t \in \tau_b$ ve dolayısıyla $\partial t \in \psi_b$. Bu $\psi(\partial t) \geq b = \tau(t)$ sonucunu verir. Son olarak, $t \in T$ ve $g \in G$ verildiğinde $c := \tau(t), d := \psi(g), e := d \wedge c$ diyelim. Bu durumda $(\tau_e, \psi_e) \leq (T, G, \partial)$ ve $\tau(t) = c \geq e, \psi(g) = d \geq e$ $t \in \tau_e$ ve $g \in \psi_e$ 'yi verir, böylece $g \triangleright t$ olur, yani $\tau(g \triangleright t) \geq e = d \wedge c = \mu(g) \wedge \tau(t)$ 'dir. Bu nedenle $(\tau, \mu), (T, G, \partial)$ 'nin bulanık altçaprazlanmış modülüdür.

Bir (T, G, ∂) çaprazlanmış modülü verildiğinde ve $\psi \subseteq G, \tau \subseteq T$ olsun. Daha sonra $\psi \blacktriangleright \tau \subseteq T$ ifadesi

$$[\psi \blacktriangleright \tau](t) := \bigvee \{\psi(g) \wedge \tau(s) : g \in G, s \in T, g \triangleright s = t\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.7. Verilen bir çaprazlanmış modül (T, G, ∂) için $\psi \subseteq G, \tau \subseteq T$ olsun. O halde $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ olması için gerek ve yeter koşul

- (i) $\psi \bullet \psi \subset \psi, \tau \bullet \tau \subset \tau$
- (ii) $\psi = \psi, \tau = \tau$
- (iii) $\psi \blacktriangleright \tau = \tau$
- (iv) $\partial\tau \subset \psi$

özelliklerinin sağlanmasıdır.

Kanıt. $(\tau, \mu) \leq (T, G, \partial)$ olduğunu kabul edelim. O zaman tanım gereği $\tau \leq T$ ve $\psi \leq G$ olur ve (i) ve (ii) koşulları Teorem 2.6 tarafından otomatik olarak sağlanır. Şimdi, (iii)'yi göstermek için, $t \in T$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} [\psi \blacktriangleright \tau](t) &= \bigvee \{\psi(g) \wedge \tau(s) : g \in G, s \in T, g \triangleright s = t\} \\ &\leq \bigvee \{\tau(g \triangleright s) : g \in G, s \in T, g \triangleright s = t\} \\ &= \bigvee \{\tau(t) : g \in G, s \in T, g \triangleright s = t\} \\ &= \tau(t) \end{aligned}$$

Çünkü sondan bir önceki satırdaki küme $1G \triangleright t = t$ kadar boş değildir. Ek olarak, $\tau(t) = 1 \wedge \tau(t) = \mu(1_G) \wedge \tau(t) \in \{\mu(g) \wedge \tau(s) : g \in G, s \in T, g \triangleright s = t\}$ sonucunu verir.

$$\tau(t) \leq \bigvee \{\psi(g) \wedge \tau(s) : g \in G, s \in T, g \triangleright s = t\} = [\psi \blacktriangleright \tau](t)$$

(iv)'ü görmek için $g \in G$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} [\partial\tau](g) &= \bigvee \{\tau(t) : t \in T, \partial t = g\} \\ &\leq \bigvee \{\psi(\partial t) : t \in T, \partial t = g\} \\ &= \bigvee \{\psi(g) : t \in T, \partial t = g\} \\ &\leq \psi(g) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine, (i)-(iv) varsayalım. $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ olduğunu göstereceğiz. Öncelikle, $\tau \leq T$ ve $\psi \leq G$ Teorem 2.6'dan kaynaklanmaktadır.

(FSM1) $t \in T$ olsun. O halde, $\tau(t) \in \{\tau(s): s \in T, \partial s = \partial t\}$ olduğundan, (iv) ile şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}\tau(t) &\leq V\{\tau(s): s \in T, \partial s = \partial t\} \\ &= [\partial \tau](\partial t) \\ &\leq \psi(\partial t)\end{aligned}$$

(FSM2) $t \in T, g \in G$ 'yi alalım. $\psi(g) \wedge \tau(t) \in \{\psi(h) \wedge \tau(s) \text{ olarak } : h \in G, s \in T, h \triangleright s = g \triangleright t\}$,

$$\begin{aligned}\psi(g) \wedge \tau(t) &\leq V\{\psi(h) \wedge \tau(s): h \in G, s \in T, h \triangleright s = g \triangleright t\} = [\psi \blacktriangleright \tau](g \triangleright t) \\ &= \tau(g \triangleright t)\end{aligned}$$

(iii) koşuluna göre oluşur.

Bir grup homomorfizmasının görüntüsü ve daha genel olarak, herhangi bir alt grubun bu tür bir homomorfizma altındaki görüntüsü, karşı tarafta bir alt grup olarak tasvir edilir. Benzer sonuçların, altçaprazlanmış modüller ve bulanık alt gruplar için de geçerli olduğu bilinmektedir. Tüm bu sonuçlar, aşağıda sunulduğu gibi birleştirilebilir.

Teorem 3.8. Bir $(\theta, \sigma) : (T, G, \partial) \rightarrow (T', G', \partial')$ çaprazlanmış modül homomorfizmi verilsin ve $(\tau, \mu) \leq (T, G, \partial)$ olsun. O halde $(\theta\tau, \sigma\mu) \leq (T', G', \partial')$ dür.

Kanıt. $\theta: T \rightarrow T'$ ve $\sigma: G \rightarrow G'$ grup homomorfizmleri olduğundan ve $\tau \leq T, \psi \leq G$ olduğundan, $\theta\tau \leq T'$ ve $\sigma\psi \leq G'$ elde ederiz.

(FSM1) Her $t \in T'$ için

$$\begin{aligned}[\theta\tau](t') &= V\{\tau(t): t \in T, \theta(t) = t'\} \\ &\leq V\{\psi(\partial t): t \in T, \theta(t) = t'\} \\ &\leq V\{\psi(\partial t): t \in T, \partial'\theta(t) = \partial't'\} \\ &= V\{\psi(\partial t): t \in T, \sigma\partial(t) = \partial't'\} \\ &\leq V\{\psi(g): g \in G, \sigma(g) = \partial't'\} \\ &= [\sigma\psi](\partial't')\end{aligned}$$

bulunur.

(FSM2) $g' \in G'$ ve $t' \in T'$ olarak inceleyecek olursak

$$[\sigma\psi](g') \wedge [\theta\tau](t') = V\{\psi(g): g \in G, \sigma(g) = g'\} \wedge V\{\tau(t): t \in T, \theta(t) = t'\}$$

$$\begin{aligned}
&= V\{\psi(g) \wedge \tau(t): g \in G, t \in T, \sigma(g) = g', \theta(t) = t'\} \\
&\leq V\{\tau(g \triangleright t): g \in G, t \in T, \sigma(g) = g', \theta(t) = t'\} \\
&\leq V\{\tau(g \triangleright t): g \in G, t \in T, \sigma(g) \triangleright \theta(t) = g' \triangleright t'\} \\
&= V\{\tau(g \triangleright t): g \in G, t \in T, \theta(g \triangleright t) = g' \triangleright t'\} \\
&= V\{\tau(t): t \in T, \theta(t) = g' \triangleright t'\} \\
&= [\theta\tau](g' \triangleright \tau') \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Burada sondan bir önceki eşitlik mevcuttur, çünkü G, T üzerinde otomorfizmalarla hareket eder.

Yukarıda belirtilen sonuca benzer bir sonuç, homomorfizmaların ön görüntüleri için de geçerlidir. Özellikle, bulanık alt kümelerde ön görüntülerin, homomorfizma görüntüsüne kıyasla daha düzenli ve yapısal açıdan daha avantajlı özellikler taşıdığı gözlemlenmiştir. Bu durum, bulanık alt kümeler üzerinde yapılan homomorfizmaların, ön görüntülerinin genellikle daha iyi davranışlar sergilemesi anlamına gelir. Bu nedenle, ilgili sonucun kanıtı, standart alt kümelerle çalışılan klasik durumlarla kıyaslandığında, çok daha özlü ve kompakt bir biçimde sunulabilir. Aşağıda, bu kanıtın nasıl ifade edilebileceğine dair ayrıntılı bir açıklama sunulacaktır.

Burada, homomorfizmalara ilişkin yapılan ön ve görüntü analizlerinin, alt grup yapılarıyla olan ilişkisi ve bulanık kümelerle çalışmanın sağladığı teorik kolaylıklar üzerinde durulacaktır. Bu bağlamda, bulanık kümeler altında yapılan çalışmalarda, ön görüntülerin daha iyi bir yapı gösterdiği ve bunun sonucunda daha kısa ve doğrudan bir kanıtın elde edilebileceği ifade edilmektedir.

Teorem 3.9. $(\theta, \sigma): (T, G, \partial) \longrightarrow (T', G', \partial')$ bir çaprazlanmış modül homomorfizması ve $(v, v) \leq (T', G', \partial')$ olsun. O zaman $(\theta^{-1}v, \sigma^{-1}v) \leq (T, G, \partial)$ dir.

Kanıt. $v \leq T'$ ve $v \leq G'$ ile aynı zamanda $\theta^{-1}v \leq T$ ve $\sigma^{-1}v \leq G$ bulunur.

(FSM1) $[\theta^{-1}v](t) = v(\theta t) \leq v(\partial' \theta t) = v(\sigma \partial t) = [\sigma^{-1}v](\partial t)$ dir.

(FSM2) $[\sigma^{-1}v](g) \wedge [\theta^{-1}v](t) = v(\sigma(g)) \wedge v(\theta(t)) \leq v(\sigma(g) \triangleright \theta(t)) = v(\sigma(g) \triangleright \theta(t)) = v(\theta(g \triangleright t)) = [\theta^{-1}v](g \triangleright t)$ dir.

Beklenildiği gibi, sabit bir çaprazlanmış modül altında bir bulanık altçaprazlanmış modüller ailesinin kesişimi, yine bir bulanık altçaprazlanmış modül olmaya devam etmektedir. Bu sonuç, yalnızca söz konusu aile için bir infimum (alt sınır) sağlamakla kalmaz, aynı zamanda bazı yapılarının inşasını da kolaylaştırır. Bu özellik, bulanık

altçaprazlanmış modüller arasındaki ilişkilerin ve yapıların analizi için önemli bir araç sunar ve bu tür modüllerin oluşturulmasında kullanılan yöntemlerin etkinliğini artırır. Dolayısıyla, bu tür bir kesişim, sadece teorik bir önem taşımakla kalmayıp, aynı zamanda pratikte de belirli yapıları inşa etmek için faydalı bir temel sağlar.

Teorem 3.10. Eğer $(\tau_i, \mu_i)_{i \in I}$ (T, G, ∂) 'nin bulanık altçaprazlanmış modüllerinin bir ailesi ise o zaman ayrıca $(\bigcap_{i \in I} \tau_i, \bigcap_{i \in I} \mu_i) \leq (T, G, \partial)$ olur.

Kanıt. $\psi_i \leq T$ olduğundan, $\bigcap_{i \in I} \tau_i \leq T$ vardır. Benzer şekilde $\bigcap_{i \in I} \psi_i \leq G$,
(FSM1) her $t \in T$ için,

$$\left(\bigcap_{i \in I} \tau_i \right) (t) = \bigwedge_{i \in I} \tau_i(t) \leq \bigwedge_{i \in I} \psi_i(\partial t) = \bigcap_{i \in I} \mu_i(\partial t)$$

dir.

(FSM2) her $t \in T$ ve $g \in G$ için

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} \psi_i(g) \right) \wedge \left(\bigcap_{i \in I} \tau_i(t) \right) &= \left(\bigcap_{i \in I} \tau_i(g) \right) \wedge \left(\bigcap_{i \in I} \tau_i(t) \right) \\ &= \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i(g) \wedge \tau_i(t) \right) \\ &\leq \bigcap_{i \in I} \tau_i(g \triangleright \tau) \\ &= \bigcap_{i \in I} \tau_i(g \triangleright \tau) \end{aligned}$$

dur.

ve bu ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremden geçen

$$\left(\bigcap_{i \in I} \tau_i, \bigcap_{i \in I} \psi_i \right)$$

bulanık altçaprazlanmış modülü basitçe

$$\bigcap_{i \in I} (\tau_i, \psi_i)$$

gösterilir.

Şimdi, bir çaprazlanmış modül ve bu çaprazlanmış modülü oluşturan her iki grup için birer bulanık alt grup verildiğinde, bu çift tarafından oluşturulan bulanık altçaprazlanmış modülü tanımlamak için uygun bir konumdadır.

Tanım 3.11. (T, G, ∂) bir çaprazlanmış modül, $\alpha \subseteq T$ ve $\beta \subseteq G$ olsun. α ve β tarafından oluşturulan bulanık altçaprazlanmış modül şu şekilde verilir:

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \bigcap \{(\tau, \psi) : \alpha \subset \tau, \beta \subset \psi(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)\}$$

şeklinde ifade edilir.



3.2. Bulanık Altçaprazlanmış Modüllerin Normallığı

Bu bölümde, bulanık altçaprazlanmış modüllerin normallik koşulları tartışılmaktadır. Normal bir bulanık altçaprazlanmış modülün tanımını vermeden önce, aşağıdaki önermede verilen denkliklerin göz önüne alınması, bu bağlamda faydalı olacaktır.

Önerme 4.1. (T, G, ∂) çaprazlanmış bir modül olsun. O halde aşağıdakiler her $g \in G$ ve $\forall t \in T$ ve $\tau \subseteq T$ için eşdeğerdir.

$$(i) \tau(g \triangleright t) = \tau(t)$$

$$(ii) \tau(g \triangleright t) \leq \tau(t)$$

$$(iii) \tau(g \triangleright t) \geq \tau(t)$$

Kanıt. (i) açıkça (ii) ve (iii)'ü ima etmektedir.

(ii) olduğunu varsayalım. $g \in G$ ve $t \in T$ olsun. O halde $\tau(g \triangleright t) \leq \tau(t)$ olsun. Tam tersi, $g^{-1} \in G$ ve $g \triangleright t \in T$ için ayrıca $\tau(g^{-1} \triangleright (g \triangleright t)) \leq \tau(g \triangleright t)$ ve $g^{-1} \triangleright (g \triangleright t) = (g^{-1}g) \triangleright t = 1_G \triangleright t = t$ vardır. Böylece (i) elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) çıkarımı da benzer şekilde gösterilir.

Yukarıdaki (i), (ii) ve (iii) koşullarından biri geçerliyse, o zaman τ 'ya değişmeli çaprazlanmış bulanık alt küme adı verilir. Aşağıdaki önerme, değişmeli çaprazlanmış bulanık modülün değişmeli bulanık modülü anlamına geldiğini belirtir.

Önerme 4.2. (T, G, ∂) çaprazlanmış bir modül verildiğinde. Eğer τ , T 'nin değişmeli çaprazlanmış bulanık alt kümesi ise, o zaman aynı zamanda T 'nin değişmeli bulanık alt kümesidir.

Kanıt. τ , T 'nin değişmeli çaprazlanmış bulanık alt kümesi göz önünde bulundurularak, her $s, t \in T$ için $\tau(sts^{-1}) = \tau(\partial s \triangleright t) = \tau(t)$ ifadesi sağlanır.

Tanım 4.3. $(\tau, \psi) \subseteq (T, G, \partial)$ olsun. Bu durumda (τ, ψ) normal bulanık altçaprazlanmış modül olarak adlandırılır,

(i) ψ , G 'nin değişmeli bulanık alt kümesidir

(ii) τ değişmeli çaprazlanmış bulanık alt kümedir

(iii) $\psi(g) \leq \tau((g \triangleright t)t^{-1})$ tüm $g \in G$ ve $t \in T$ için.

Bu durumda $(\tau, \mu) \preceq (T, G, \partial)$ dır.

Aşağıda sunulan örnekler setinde, ilk örnek, klasik normal altçaprazlanmış modüllerinin kavramı ile normal bulanık altçaprazlanmış modüllerinin kavramı arasındaki uyumu göstermektedir. İkinci örnek, verilen bir normal bulanık altgruptan bir normal bulanık altçaprazlanmış modül elde etmenin yöntemlerinden birini sunmaktadır. Üçüncü örnek, bir normal bulanık altçaprazlanmış modülün somut bir örneğini sunarken, dördüncü örnek, normallik koşulunu sağlamayan bir bulanık altçaprazlanmış modülün bir örneğini açıklamakta ve göstermektedir.

Örnek 4.4. 1) $(S, H) \trianglelefteq (T, G, \partial)$, olması için gerek ve yeter koşul, $(\chi_S, \chi_H) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ olmasıdır. Aslında, Örnek 3.2 (1)'e göre, $(\chi_S, \chi_H) \leq (T, G, \partial)$. Tanım 4.3'teki (1) koşulu, $\chi_H \trianglelefteq G$, yani $H \trianglelefteq G$ anlamına gelir. (ii) koşulu, Önerme 4.1 ile $\chi_S(t) \leq \chi_S(g \triangleright t)$ ile eşdeğerdir. Bu, $\chi_S(t) = 1$ kuvvet anlamına gelir $\chi_S(g \triangleright t) = 1$, diğer bir deyişle, eğer $t \in S$ ise, tüm $g \in G$ için $g \triangleright t \in S$ olur ve bu Tanım 2.12'deki (3)'e karşılık gelir. Son olarak, Tanım 4.3'teki (iii) şunu söylemektedir $\chi_H(g) \leq \chi_S(g \triangleright t)t^{-1}$, yani $g \in H$ ise, tüm $t \in T$ için $(g \triangleright t)t^{-1} \in S$, ve bu Tanım 2.12'deki (3) koşuludur.

2) $\psi \trianglelefteq G$ olsun. Bu durumda $(\psi, \psi) \trianglelefteq (G, G, id)$ olur. Gerçekten de, Örnek 3.2 (2) ile, $(\psi, \psi) \leq (G, G, id)$ olduğunu biliyoruz. $\psi \trianglelefteq G$ olduğundan, Tanım 4.3'teki (i) sağlanır ve çaprazlanmış modüldeki (G, G, id) etki konjugasyon ile olduğundan, Teorem 2.4 ile $\psi(g \triangleright h) = \psi(ghg^{-1}) = \psi(h)$ olduğunu biliyoruz. Ve son olarak, $\psi(g) = \psi(g) \wedge \psi(g^{-1}v) = \psi(g) \wedge \psi(hg^{-1}h^{-1}) \leq \psi(ghg^{-1}h^{-1}) = \psi((g \triangleright h)h^{-1})$.

3) Örnek 3.2 (5)'te $(\tau, \psi) \trianglelefteq (Z_4, H_8, \partial)$ olduğunu kontrol etmek rutindir.

4) Örnek 3.2 (5) çerçevesinde, aşağıdaki şekilde verilen $v \subseteq Z_4$ 'ü düşünmeliyiz.

t	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$v(t)$	1	0.1	0.25	0.1

Şekil 3.4. $v \subseteq Z_4$

ve (v, ψ) 'nin (T, G, ∂) 'nin bulanık altçaprazlanmış modülü olduğunu gözlemleyin. Bununla birlikte, $i \in H_8$ ve $\bar{3} \in Z$ için $\psi(k) = 0,3$, ancak $v((k \triangleright \bar{3}) - \bar{3}) = v(\bar{1} - \bar{3}) = v(\bar{2}) = 0,25$. Bu nedenle $\psi(k) \not\leq v((k \triangleright \bar{3}) - \bar{3})$ ve (v, μ) normal değildir.

Grup teorisi, çaprazlanmış modüller teorisi ve bulanık altgrup teorisinde iyi bilinen bir sonuçtur ki, abelyenlik, altobjeler için otomatik olarak normallığı getirir. Bu durum, bulanık altçaprazlanmış modüller söz konusu olduğunda da farklı değildir.

Teorem 4.5. Değişmeli çaprazlanmış modülün her bulanık altçaprazlanmış modülü normaldir.

Kanıt. (τ, ψ) , değişmeli çaprazlanmış modülün (T, G, ∂) bulanık altçaprazlanmış modülü olsun.

(i) Tanım 2.13'e göre G değişmeli olduğundan, her $g, h \in G$ için $gh = hg$, böylece $\psi(gh) = \psi(hg)$ olur. Dolayısıyla μ , Teorem 2.4'e göre G 'nin değişmeli bulanık alt kümesidir.

(ii) (T, G, ∂) 'nin değişmeliliğine göre, her $g \in G, t \in T$ için $g \triangleright t = t \cdot \tau(g \triangleright t) = \tau(t)$ ve τ , Önerme 4.1'e göre çaprazlanmış değişmeli bulanık alt kümedir.

(iii) (T, G, ∂) değişmeli olduğundan $\psi(g) \leq 1 = \tau(tt^{-1}) = \tau((g \triangleright t)t^{-1})$ dir.

$(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ olsun. Daha sonra, her $g \in G$ için, $g\tau \subseteq T$ ve $g\psi \subseteq G$ bulanık alt kümelerini $t \in T, h \in G$ için aşağıdaki gibi göz önüne alırız.

$$\begin{aligned} [g_\tau](t) &:= \tau(g \triangleright t) \\ [g_\psi](h) &:= \psi(ghg^{-1}) \end{aligned}$$

Önerme 4.6. Eğer $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ ise, o zaman ayrıca her $g \in G$ için $(g_\tau, g_\psi) \leq (T, G, \partial)$ olur.

Kanıt. $g_\tau \leq T$ ve $g_\psi \leq G$ olduğundan

$$\begin{aligned} [g_\tau](s) \wedge [g_\tau](t) &= \tau(g \triangleright s) \wedge \tau(g \triangleright t) \leq \tau((g \triangleright s)(g \triangleright t)) = \tau(g \triangleright (st)) \\ &= [g_\tau](st), \end{aligned}$$

ve

$$[g_\psi](h) \wedge [g_\psi](k) = \psi(ghg^{-1}) \wedge \psi(gkg^{-1}) \leq \psi(ghg^{-1}gkg^{-1}) = [g_\psi](hk)$$

dır.

$$(FSM1) [g_\tau](t) = \tau(g \triangleright t) \leq \psi(\partial(g \triangleright t)) = \psi(g\partial(t)g^{-1}) = [g_\psi](\partial t).$$

$$\begin{aligned} (FSM2) [g_\tau](h \triangleright t) &= \tau(g \triangleright (h \triangleright t)) = \tau((gh) \triangleright t) \\ &= \tau((ghg^{-1}) \triangleright t) = \tau((ghg^{-1}) \triangleright (g \triangleright t)) \leq \psi(ghg^{-1}) \wedge \tau(g \triangleright t) \\ &= [g_\psi](h) \wedge [g_\tau](t) \end{aligned}$$

dir.

(T, G, ∂) 'nin iki bulanık altçaprazlanmış modülü (τ, μ) ve (ν, ν) , eğer $(\nu, \nu) = (g_\tau, g_\mu)$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, eşlenik bulanık altçaprazlanmış modüller olarak

adlandırılır. Açıkçası, eşlenik bulanık altçaprazlanmış modüller olmak bir denklik ilişkisidir, çünkü $(\tau, \psi) = (1_G \tau, 1_G \psi), (\tau, \psi) = (g^{-1}v, g^{-1}v)$ ise $(v, v) = (g \tau, g \psi)$ ve $(\omega, \xi) = (hg_\tau, hg_\psi)$ olduğundan $(v, v) = (g_\tau, g_\psi)$ ve $(\omega, \xi) = (h_v, h_v)$ gerçekleşir.

Yardımcı Teorem 4.7. $\tau \subseteq T, \psi \subseteq G$ olsun, burada (T, G, ∂) çaprazlanmış bir modüldür. O halde $(\tau, \psi) \trianglelefteq (T, G, \partial)$, ancak ve ancak tüm $a \in [0,1]$ için $(\tau_a, \psi_a) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ ise.

Kanıt. Yardımcı teorem 3.6 dikkate alındığında sadece normallik konularının ele alınması yeterlidir.

Eğer $(\tau, \mu) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ ve $a \in [0,1]$ ise, o zaman,

$$h \in \psi_a \Rightarrow \psi(h) \geq a \Rightarrow \psi(ghg^{-1}) \geq a \Rightarrow ghg^{-1} \in \psi_a$$

tüm $g \in G$ için, (τ, ψ) normalliğine göre $\psi \trianglelefteq G$ ve $\psi(h) = \psi(ghg^{-1})$ olduğundan,

$$t \in \tau_a \Rightarrow \tau(t) \geq a \Rightarrow \tau(g \triangleright t) \geq a \Rightarrow g \triangleright t \in \tau_a$$

$\tau(t) = \tau(g \triangleright t)$ ve $g \in \psi_a \Rightarrow \psi(g) \geq a \Rightarrow \tau((g \triangleright t)t^{-1}) \geq a \Rightarrow (g \triangleright t)t^{-1} \in \tau_a$ ve bu da $(\tau_a, \psi_a) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ olduğunu gösterir.

Tersine, tüm $a \in [0,1]$ için $(\tau_a, \psi_a) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ olsun. O zaman $(\tau_a, \mu_a) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ ve özellikle $\psi_a \trianglelefteq G$ olsun. Bu nedenle, her $g \in G$ için, $h \in \psi_a$ olduğundan $ghg^{-1} \in \psi_a$ olur. Bu da $\psi(ghg^{-1}) \geq a = \psi(h)$ olduğunu gösterir.

İkinci olarak, diyelim ki $t \in T$ için $\tau(t) = b$. O zaman tüm $g \in G$ için, $g \triangleright t \in \tau_b$, çünkü $t \in \tau_b$ ve $(\tau_b, \psi_b) \trianglelefteq (T, G, \partial)$. Bu da $\tau(g \triangleright t) \geq b = \tau(t)$ anlamına gelir. Son olarak, belirli bir $g \in G$ için $\psi(g) = c$ dersek, (τ_c, ψ_c) normalliği $g \in \psi_c$ ile tüm $t \in T$ için $(g \triangleright t)t^{-1} \in \tau_c$ anlamına gelir. Böylece $\tau(g \triangleright t)t^{-1} \geq c = \psi(g)$ dir. Dolayısıyla $(\tau, \psi) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ sağlanır.

Önerme 4.8. $(\tau, \psi) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ bulanık altçaprazlanmış modülünün normali olarak verilsin.

- (i) $(\tau *, \psi *) \trianglelefteq (T, G, \partial)$
- (ii) $(\tau *, \psi *) \trianglelefteq (T, G, \partial)$
- (iii) $(S, H) \trianglelefteq (T, G, \partial) \Leftrightarrow (\tau|S, \psi|H) \trianglelefteq (S, H)$

Kanıt. Önerme 3.3'e göre, sadece normallikleri sorgulamak yeterlidir.

Önerme 2.5'ten $\psi, \psi * \trianglelefteq G$ ve $\psi H \trianglelefteq H$ olduğu bilinmektedir.

(i) $g \in G$ ve $s \in \tau^*$ olsun. O zaman $\tau(s) > 0$. $(\tau, \psi) \trianglelefteq (T, G, \partial)$, $\tau(g \triangleright s) = \tau(s) > 0$, yani $g \triangleright s \in \tau^*$.

Eğer $h \in \psi^*$ ve $t \in T$ ise, $\psi(h) > 0$ olur ve (τ, μ) 'nin normalliği ile $\psi(h \leq \tau(h \triangleright t)) t^{-1}$ olur, bu da $\tau((h \triangleright t)t^{-1})$ 'i sıfırdan farklı olmaya zorlar ve bu da $(h \triangleright t)t^{-1} \in \tau^*$ anlamına gelir.

(ii) $s \in \tau^*$ ve $g \in G$ verildiğinde, normallik gereği $\tau(g \triangleright s) = \tau(s) = 1$ olur, böylece $g \triangleright s \in \tau^*$ olur.

$h \in \mu^*$ ve $t \in T$ olsun. O halde $\tau((h \triangleright t)t^{-1}) \geq \mu(h) = 1$, $((h \triangleright t)t^{-1}) \in \tau^*$ değerini verir.

(iii) $\tau|S(h \triangleright s) = \tau(h \triangleright s) = \tau(s) = \tau|S(s)$ ve $\psi|H(h) = \psi(h) \leq \tau((h \triangleright s)s^{-1}) = \tau|S((h \triangleright s)s^{-1})$ olduğu direkt olarak görülür.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Normal Bulanık Altçaprazlanmış Modül Modunda Bölümler

Bu bölümde, çaprazlanmış modüllerin normal bulanık altçaprazlanmış modüller ile bölümüne odaklanılmaktadır. Bu bölüm çaprazlanmış modülün aslında bölümlerin klasik anlamlarından birine izomorfik olduğu net bir çaprazlanmış modüldür.

Teorem 5.1. (T, G, ∂) 'nin normal bulanık altçaprazlanmış modülü (τ, ψ) verilmiştir. O zaman $\frac{(T, G, \partial)}{(\tau, \psi)} := (T/\tau, G/\psi, \tilde{\partial})$ yapısı çaprazlanmış bir modüldür. Burada $\tilde{\partial} : T/\tau \rightarrow G/\psi$ sınır homomorfizmi $\tilde{\partial}(t\tau) = \partial(t)\psi$ ile verilir ve $G/\psi, T/\tau$ üzerinde $g\psi \triangleright t\tau := (g \triangleright t)\tau$ kuralı ile etki eder.

Kanıt. $(\tau^*, \mu^*) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ Önerme 4. 8 ve normal altçaprazlanmış modüller için, $\tilde{\partial}(t\tau^*) = \partial(t)\psi^*$ ve $g\psi^* \triangleright t\tau^* = (g \triangleright t)\tau^*$ ile tanımlanan ∂ ve $\triangleright$ kurallarının iyi tanımlı olduğu ve $(T/\tau^*, G/\psi^*, \tilde{\partial})$ 'yı çaprazlanmış bir modüle dönüştürdüğü bilinmektedir (Ovchinnikov, 1998).

Ayrıca Önerme 2.7 (iii)'ye göre, $t_1\tau = t_2\tau \iff t_1\tau^* = t_2\tau^*$ ve $g_1\psi = g_2\psi \iff g_1\psi^* = g_2\psi^*$. Bunların sonucunda $(T/\tau, G/\mu, \tilde{\partial})$ çaprazlanmış bir modüldür.

Teorem 5.1'in ispatı dikkate alındığında, aynı gösterimler altında aşağıdaki sonuç açıkça ortaya çıkar.

Sonuç 5.2. Eğer $(\tau, \psi) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ ise, o zaman $(T/\tau, G/\mu, \tilde{\partial})$ ve $(T/\tau^*, G/\psi^*, \tilde{\partial})$ izomorfik çaprazlanmış modüllerdir.

Önerme 5.3. Eğer $(\tau, \psi) \trianglelefteq (T, G, \partial)$ ise, o zaman $(\tau', \psi') \trianglelefteq (T/\tau, G/\psi, \tilde{\partial})$ dir.

Kanıt. Teorem 2.8 (iv), τ' ve ψ' 'nin iyi tanımlı olduğunu ve ayrıca normal bulanık alt gruplar olduğunu ima eder.

$\tau(t\tau) = \tau(t) \leq \psi(\partial t) = \psi(\partial(t)\psi) = \psi(\tilde{\partial}(t\psi))$ ve $\tau'(g\psi \triangleright t\tau) = \tau'((g \triangleright t)\tau) = \tau(g \triangleright t) \geq \psi(g) \wedge \tau(t) = \psi(g\psi) \wedge \tau'(t\tau)$ olduğuna dikkat ederek (τ, μ') bulanık alt-çaprazlanmış bir modül olduğunu gözlemleriz.

$\psi' \leq G/\psi$ ile ψ , değişmeli bir bulanık alt kümedir ve $\tau(g\psi \triangleright t\tau) = \tau((g \triangleright t)\tau) = \tau(g \triangleright t) = \tau(t) = \tau'(t\tau)$ (τ, ψ) normalliğine göre. Dolayısıyla τ değişmeli çaprazlanmış olur. Son olarak, $\psi'(g\psi) = \psi(g) \leq \tau((g \triangleright t)t^{-1}) = \tau(((g \triangleright t) t^{-1})\tau) = \tau((g\psi \triangleright t\tau) \bullet (t\tau)^{-1})$ dir.



4.2. Normal Altçaprazlanmış Modül Modunda Bulanık Bölümler

Bölüm 5'teki yaklaşımın aksine, burada normal bir bulanık altçaprazlanmış modül yerine klasik anlamda normal bir altçaprazlanmış modül ile bir bölüm ele alınmaktadır. Ancak, bu kez, başlangıçta verilen çaprazlanmış modülün bulanık bir altçaprazlanmış modülü aracılığıyla bu bölüm için bir bulanık altçaprazlanmış modül sağlanır.

Teorem 6.1. $(\tau, \psi) \leq (T, G, \partial)$ ve $(S, H) \leq (T, G, \partial)$ ise, o zaman bir de $(\tilde{\tau}, \tilde{\psi}) \leq (T/S, G/H, \bar{\partial})$ vardır.

Kanıt. Teorem 2.9'dan $\tilde{\tau} \leq T/S$ ve $\tilde{\psi} \leq G/H$ olduğu bilinmektedir.

FSM1) Eğer $r, t \in T$ için $r \in tS$ ise, bazı $s \in S$ için $r = ts$ olur. ∂ bir homomorfizm olduğundan ve $\partial(S) \subseteq H$ olduğundan, bu $\partial r \in \partial(t)H$ anlamına gelir. Böylece,

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(tS) &= \bigvee \{\tau(r) : r \in tS\} \\ &\leq \bigvee \{\psi(\partial r) : r \in tS\} \\ &\leq \bigvee \{\psi(k) : k \in \partial(t)H\} \\ &= \tilde{\psi}(\partial(t)H) \\ &= \tilde{\psi}(\partial(tS)).\end{aligned}$$

FSM2) Benzer şekilde, $\bigvee \{a_i : i \in I\} \wedge \bigvee \{b_j : j \in J\} = \bigvee \{a_i \wedge b_i : (i, j) \in I \times J\}$ eşitliği $[0, 1]$ kafesinde tutulduğundan, her $g \in G$ ve $t \in T$ için

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(gH) \wedge \tilde{\tau}(tS) &= \bigvee \{\psi(k) : k \in gH\} \wedge \bigvee \{\tau(r) : r \in tS\} \\ &= \bigvee \{\psi(k) \wedge \tau(r) : (k, r) \in (gH) \times (tS)\} \\ &\leq \bigvee \{\tau(k \triangleright r) : (k, r) \in (gH) \times (tS)\} \\ &\leq \bigvee \{\tau(k \triangleright r) : k \triangleright r \in (g \triangleright t)S\} \\ &\leq \bigvee \{\tau(q) : q \in (g \triangleright t)S\} \\ &= \tilde{\tau}((g \triangleright t)S) \\ &= \tilde{\tau}(gH \triangleright tS)\end{aligned}$$

olur ve bu $(k, r) \in (gH) \times (tS) k \triangleright r \in (g \triangleright t)S$ anlamına gelir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çaprazlanmış modüller, grupların bir genellemesi olarak ilk kez bulanık mantık çerçevesinde ele alınmış ve bu bağlamda bulanık altçaprazlanmış modül kavramı tanımlanmıştır. Bu yeni yapıların, klasik çaprazlanmış modüller ve bulanık altgruplarla olan ilişkileri araştırılmış; normallik koşulları tartışılmış ve bölüm nesneleri çeşitli yönlerden incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar hem grup teorisine hem de bulanık mantığın matematiksel uygulamalarına katkı sağlamaktadır.

Bulanık altçaprazlanmış modüllerin tanımı ve temel özelliklerinin incelenmesi, grup teorisi ile bulanık matematik arasındaki kesişim noktasında yeni bir bakış açısı sunmakta ve bu alanda birçok yeni araştırma olanağı doğurmaktadır. Bu yapılar, bulanık grup teorisinin temel kavramlarının çaprazlanmış modül teorisine nasıl uyarlanabileceğini göstermekte; ayrıca bu uyarlamaların nasıl geliştirilebileceğine dair bir çerçeve sunmaktadır. Özellikle normal bulanık altçaprazlanmış modüllerin tanımı ve bu yapıların bölüm nesneleri üzerine yapılan çalışmalar, teorinin cebirsel tutarlılığını ve geniş bir kuramsal çerçevede uygulanabilirliğini desteklemektedir. Bu bağlamda elde edilen bulgular, bulanık altçaprazlanmış modül teorisinin temellerini oluşturmakta ve alandaki gelecekteki araştırmalar için bir yön haritası çizmektedir.

Bu sonuçlar, bulanık mantığın çaprazlanmış modül teorisine nasıl entegre edilebileceğini ortaya koyarak, yeni araştırma ve uygulama alanlarına işaret etmektedir. Bu kapsamda, bulanık altçaprazlanmış modüllerin hem diğer cebirsel yapılara ve genellemelere uygulanması hem de potansiyel gerçek dünya uygulamalarıyla ilişkilendirilmesi öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

- Abdullah, S., Aslam, M., Khan, T. A., ve Naeem, M. (2013). A new type of fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 25(1), 37-47.
- Adi Nugraha, A., Fitriani, F., Ansori, M., ve Faisol, A. (2022). The implementation of rough set on a group structure. *Jurnal Matematika MANTIK*, 8(1), 45-52.
- Akay, H. G., ve Akça, İ. İ. (2022). Completeness of the category of rack crossed modules. *Ikonion Journal of Mathematics*, 4(2), 56-68.
- Akça, İ. İ., ve Arslan, U. E. (2023). Categorification of algebras: 2-algebras. *Ikonion Journal of Mathematics*, 5(1), 1-19.
- Allen, P. J., Neggers, J., ve Kim, H. S. (2022). Fuzzy subgroups and digraphs induced by fuzzy subgroups. *Transactions on Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), 114-119.
- Almutairi, B., Ali, A., X^{-} in, Q., ve Khan, A. (2023). A novel concept of complex anti-fuzzy isomorphism over groups. *Symmetry*, 15(9), 1693-1706.
- Alolaiyan, H., Shuaib, U., Latif, L., ve Razaq, A. (2019). t-intuitionistic fuzzification of Lagrange's theorem of t-intuitionistic fuzzy subgroup. *IEEE Access*, 7, 158419-158426.
- Alp, M., Bekir, A., ve Ulualan, E. (2001). Relation between crossed square and crossed corner. *Journal of Science and Technology of Dumlupınar University*, 2, 89-96.
- Alsarahead, M. O., ve Al-Husban, A. (2022). Complex multi-fuzzy subgroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 25(8), 2707-2716.
- Ardanza-Trevijano, S., Chasco, M. J., ve Elorza, J. (2019). The annihilator of fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 369, 122-131.
- Asaad, M., ve Abou-Zaid, S. (1996). A contribution to the theory of fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 77(3), 355-369.
- Bejines, C., Chasco, M. J., ve Elorza, J. (2021). Aggregation of fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 418, 170-184.
- Bhunia, S., Ghorai, G., X^{-} in, Q., ve Torshavn, F. I. (2021). On the characterization of Pythagorean fuzzy subgroups. *AIMS Mathematics*, 6(1), 962-978.
- Boixader, D., ve Recasens, J. (2019). On the relationship between fuzzy subgroups and indistinguishability operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 373, 149-163.

- Casas, J. M., Datuashvili, T., ve Ladra, M. (2009). Actor of a precrossed module. *Communications in Algebra*, 37(12), 4516-4541.
- Casas, J. M., Çetin, S., ve Uslu, E. Ö. (2020). Crossed modules in the category of Loday QD-Rinehart algebras. *Homology, Homotopy and Applications*, 22(2), 347-366.
- Çetin, S. (2024). Generalizations of Zassenhaus Lemma and Jordan-Hölder Theorem for 2-crossed modules. *Turkish Journal of Mathematics*, 48(3), 567-593.
- Çetin, S., ve Can, E. (2025). Isomorphism theorems for crossed squares of commutative algebras. *Süleyman Demirel University Journal of Natural and Applied Sciences*, (Baskıda).
- Çetin, S., ve Gürdal, U. (2024). A characterization of crossed self-similarity on crossed modules in L -algebras. *Logic Journal of the IGPL*, jzae003.
- Çetin, S., ve Gürdal, U. (2024). Crossed modules with action. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 74(4), 581-598.
- Diker, M., ve Uğur, A. A. (2022). Fuzzy rough set models over two universes using textures. *Fuzzy Sets and Systems*, 442, 155-195.
- Diker, M. (2023). *Texture spaces*. Cham, Switzerland: Springer.
- Gayen, S., Jha, S., Singh, M., ve Kumar, R. (2019). On a generalized notion of anti-fuzzy subgroup and some characterizations. *International Journal of Engineering and Advanced Technology*, 8(3), 385-390.
- Gulzar, M., Abbas, G., ve Dilawar, F. (2020). Algebraic properties of ω -Q-fuzzy subgroup. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 15(1), 265-274.
- Kamali Ardekani, L., ve Davvaz, B. (2020). On the number of fuzzy subgroups of dicyclic groups. *Soft Computing*, 24(8), 6183-6191.
- Kim, J., Lim, P. K., Lee, J. G., ve Hur, K. (2019). Hesitant fuzzy subgroups and subrings. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 18(2), 105-122.
- Koçak, M., ve Çetin, S. (2024). Higher dimensional Leibniz-Rinehart algebras. *Journal of Mathematical Sciences and Modelling*, 7(1), 45-50.
- Kousar, S., Saleem, T., Kausar, N., Pamucar, D., ve Addis, G. M. (2022). Homomorphisms of lattice-valued intuitionistic fuzzy subgroup type-3. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2022(1), 1-11.
- Mishref, M. A. (1995). Normal fuzzy subgroups and fuzzy normal series of finite groups. *Fuzzy Sets and Systems*, 72(3), 379-383.

- Mordeson, J. N., Bhutani, K. R., ve Rosenfeld, A. (2005). *Fuzzy group theory*. New York, USA: Springer.
- Murali, V., ve Makamba, B. B. (2001). On an equivalence of fuzzy subgroups I. *Fuzzy Sets and Systems*, 123(2), 259-264.
- Mutlu, A. (2000). Free 2-crossed complexes of simplicial algebras. *Mathematical and Computational Applications*, 5(1), 13-22.
- Mutlu, A. (2000). Join for (augmented) simplicial group. *Mathematical and Computational Applications*, 5(2), 105-112.
- Mutlu, A., ve Mutlu, B. (2012) (a). On semi 3-crossed module by using simplicial algebra. *Global Journal of Science Frontier Research*, 12, 81-90.
- Mutlu, A., ve Mutlu, B. (2012) (b). Quasi 3-crossed modules. *Theoretical Mathematics and Applications*, 2, 101-118.
- Norrie, K. J. (1987). *Crossed modules and analogues of group theorems* (Doktora tezi). King's College London (University of London), London, United Kingdom.
- Ovchinnikov, S. (1998). On the image of an L -fuzzy group. *Fuzzy Sets and Systems*, 94(1), 129-131.
- Öztunç, S., Bildik, N., ve Mutlu, A. (2013). The construction of simplicial groups in digital images. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013(1), 1-13.
- Polat, Ç. N., Yaylalı, G., ve Tanay, B. (2018). A new approach for soft semi-topological groups based on soft element. *Filomat*, 32(16), 5743-5751.
- Razaq, A., Alhamzi, G., Razzaque, A., ve Garg, H. (2022). A comprehensive study on Pythagorean fuzzy normal subgroups and Pythagorean fuzzy isomorphisms. *Symmetry*, 14(10), 2084-2102.
- Sangodapo, T. O., ve Onasanya, B. O. (2023). Bipolar picture fuzzy subgroup of a group: bipolar picture fuzzy subgroup. *Journal of the Nigerian Mathematical Society*, 42(2), 111-139.
- Shuaib, U., Amin, M., Dilbar, S., ve Tahir, F. (2020). On algebraic attributes of ξ -intuitionistic fuzzy subgroups. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 15(1), 395-411.
- Silambarasan, I. (2021). Fermatean fuzzy subgroups. *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 11(1), 1-16.

Talavera, F. J., Ardanza-Trevijano, S., Bragard, J., ve Elorza, J. (2023). Aggregation of T-subgroups of groups whose subgroup lattice is a chain. *Fuzzy Sets and Systems*, 473, 108717.

Yaylalı, G., Polat, N. Ç., ve Tanay, B. (2018). A completely new approach for the theory of Soft Groups and Soft Rings. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 36(3), 2963-2972.

