

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BULANIK ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA
PROBLEMİNE ÇÖZÜM ÖNERİSİ**

Matematikçi Nurdan ÇETİN

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. .Dr. Fatma TİRYAKİ (Y.T.Ü)

İSTANBUL, 2008

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BULANIK ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA
PROBLEMİNE ÇÖZÜM ÖNERİSİ**

Matematikçi Nurdan ÇETİN

**FBE Matematik Anabilim Dalında Matematik Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ (Y.T.Ü)

İSTANBUL, 2008

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
KISALTMA LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	viii
ÖNSÖZ.....	ix
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. BULANIK ÇOK AMAÇLI LİNEER PROGRAMLAMA İÇİN ALTYAPI.....	3
2.1 Bulanık Küme Teorisi.....	3
2.1.1 Bulanık Kümeler	3
2.1.2 Zadeh'in Genişleme Prensipleri	12
2.1.3 Bulanık Sayılar	15
2.1.4 Özel Bulanık Sayılar.....	17
2.2 Bulanık Karar Verme.....	27
2.3 Bulanık Lineer Programlama.....	29
2.4 Çok Amaçlı Lineer Programlama.....	31
2.4.1 ÇALP için Çözüm Yöntemleri.....	33
2.4.1.1 Ölçekleme Metodları.....	33
2.4.1.1.1 Ağırlıklandırma Metodu.....	33
2.4.1.1.2 Kısıt Metodu.....	34
2.4.1.1.3 Ağırlıklı max-min Metodu.....	35
2.4.1.2 Lineer Hedef Programlama.....	37
2.4.1.3 Etkileşimli Çok Amaçlı Lineer Programlama.....	40
2.5 Bulanık Çok Amaçlı Lineer Programlama.....	41
2.5.1 Üyelik fonksiyonlarının değişik biçimleri	43
3. LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA.....	50
3.1 Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi.....	50
3.1.1 Tek Amaçlı LKP Probleminin Formülasyonu.....	51
3.1.2 Tek Amaçlı LKP Probleminin Çözüm Yöntemleri.....	51
3.1.2.1 Charnes-Cooper Dönüşümü.....	51
3.1.2.2 Güncelleştirilmiş (Updated) Amaç Fonksiyonu Yöntemi.....	53
3.1.2.3 Dinkelbach Algoritması.....	54
3.2 Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi	56

4.	TAŞIMA PROBLEMLERİ	60
4.1	Klasik Taşıma Problemi (TP).....	60
4.1.1	Taşıma Probleminin Formülasyonu.....	60
4.1.2	Taşıma Probleminin Çözüm Yöntemleri.....	62
4.1.2.1	Başlangıç Çözümünün Belirlenmesi.....	63
4.1.2.2	Optimal Çözümün Belirlenmesi.....	63
4.1.2.2.1	Atlama Taşı Yöntemi.....	63
4.1.2.2.2	MODI Yöntemi.....	64
4.2	Çok Amaçlı Taşıma Problemi.....	65
4.3	Lineer Kesirli Taşıma Problemi.....	67
4.3.1	LKTP'nin formülasyonu.....	67
4.3.2	Taşıma Simpleks Yöntemi.....	69
4.3.3	Nümerik Örnek.....	74
5.	ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİ (ÇALKTP)'ne BULANIK YAKLAŞIMLAR.....	81
5.1	ÇALKTP Formülasyonu.....	81
5.2	ÇALKTP için Bulanık Yaklaşımlar.....	85
5.2.1	Lineer Üyelik Fonksiyonlarının Kullanıldığı Yaklaşımlar.....	86
5.2.1.1	Amaçların Üyelik Fonksiyonlarının Oluşturulması.....	86
5.2.1.2	ÇALKTP için Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması.....	88
5.2.1.2.1	Pareto-optimallik Testi.....	90
5.2.1.3	Açıklayıcı Örnek.....	91
5.2.1.4	ÇALKTP için İkiye Bölme Yöntemi.....	96
5.2.1.4.1	Açıklayıcı Örnek.....	97
5.2.1.5	ÇALKTP için Bulanık Hedef Programlama Yaklaşımı.....	102
5.2.1.5.1	Açıklayıcı Örnek.....	105
5.2.2	Non-Lineer Üyelik Fonksiyonlarının Kullanıldığı Yaklaşımlar.....	107
5.2.2.1	Hiperbolik Üyelik Fonksiyonları ile ÇALKTP'nin Çözümü.....	107
5.2.2.1.1	Açıklayıcı Örnek.....	111
5.2.2.2	Üstel Üyelik Fonksiyonları ile ÇALKTP'nin Çözümü.....	114
5.2.2.2.1	Açıklayıcı Örnek.....	116
5.2.2.3	Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonu.....	119
5.2.2.3.1	Hannan'ın Yaklaşımı.....	119
5.2.2.3.2	Yang ve diğerleri'nin Yaklaşımı.....	129
6.	SONUÇ.....	145
	KAYNAKLAR.....	146
	ÖZGEÇMİŞ.....	149

SİMGE LİSTESİ

μ	Üyelik fonksiyonu
A	Bulanık bir küme
U	Evrensel küme
A_α	Bulanık A kümesinin α -keseni
X	Uygun çözümler bölgesi, karar uzayı veya alternatifler uzayı
z	Amaç fonksiyonu
Z	Kriter uzayı
X^{CO}	Çok Amaçlı Lineer Programlama Probleminin tam optimal çözümler kümesi
X^P	Çok Amaçlı Lineer Programlama Probleminin Pareto-optimal çözümler kümesi
X^{WP}	Çok Amaçlı Lineer Programlama Probleminin zayıf Pareto-optimal çözümler kümesi
w	Ağırlık vektörü
t_i	Hedef seviyeleri
d_i^+	Hedef seviyelerinden pozitif yönde sapma miktarını gösteren değişken
d_i^-	Hedef seviyelerinden negatif yönde sapma miktarını gösteren değişken
P_j	j . öncelik seviyesindeki hedefler
E^S	Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin Pareto-optimal çözümler kümesi
E^W	Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Probleminin zayıf Pareto-optimal çözümler kümesi
a_i	i . kaynak noktasının arz miktarı
b_j	j . talep noktasının talep miktarı
c_{ij}	i . kaynak noktasından j . varış noktasına bir birim malın taşıma maliyeti
x_{ij}	i . kaynak noktasından j . varış noktasına taşınacak mal miktarını gösteren karar değişkeni
p_{ij}	i kaynak noktasından j . varış noktasına taşınacak bir birim mal için elde edilen kâr
P	Kâr matrisi
d_{ij}	i kaynak noktasından j . varış noktasına taşınacak bir birim ürün için taşıma maliyeti
D	Maliyet matrisi
p_0	Sabit kâr
d_0	Sabit maliyet

α_q	Biçim parametre değeri
μ_q^E	q . amaç fonksiyonu için üstel üyelik fonksiyonu
μ_q^H	q . amaç fonksiyonu için hiperbolik üyelik fonksiyonu
μ_q^{PL}	q . amaç fonksiyonu için parçalı lineer üyelik fonksiyonu
λ^*	Amaç fonksiyonları için en temel tatmin seviyesi
z_q^*	q . amaç fonksiyonunun bireysel maksimum değeri
z_q^m	q . amaç fonksiyonunun bireysel minimum değeri
δ	Yaklaşma parametresi

KISALTMA LİSTESİ

BLP	Bulanık Lineer Programlama
ÇALKP	Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama
ÇALKTP	Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi
ÇALP	Çok Amaçlı Lineer Programlama
ÇATP	Çok Amaçlı Taşıma Problemi
HP	Hedef Programlama
KV	Karar Verici
LKTP	Lineer Kesirli Taşıma Problemi
LKP	Lineer Kesirli Programlama
LP	Lineer Programlama
TP	Taşıma Problemi

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	<i>Yaşlı</i> kümesinin üyelik fonksiyonu4
Şekil 2.2	Bir otomobilin hız uzayının bulanıklaştırılması..... 5
Şekil 2.3	Konveks bulanık küme..... 6
Şekil 2.4	Konveks olmayan bulanık küme.....6
Şekil 2.5	İki bulanık kümenin kesişimi.....8
Şekil 2.6	İki bulanık kümenin birleşimi.....9
Şekil 2.7	Bulanık kümenin tümleyeni.....9
Şekil 2.8	A ve B bulanık kümelerinin kesişimi..... 10
Şekil 2.9	Genişleme prensibinin açıklaması..... 13
Şekil 2.10	Genişleme prensibinin gösterimi..... 14
Şekil 2.11	Bulanık sayı örnekleri..... 16
Şekil 2.12	Bulanık A sayısının α –keseni.....16
Şekil 2.13	L - R tipli bulanık sayılar..... 18
Şekil 2.14	Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar.....18
Şekil 2.15	L - R tipli bulanık sayısının açıklaması.....19
Şekil 2.16	Bulanık karar.....29
Şekil 2.17	i . amaç fonksiyonu için lineer üyelik fonksiyonu.....42
Şekil 2.18	q . amaç fonksiyonu için lineer üyelik fonksiyonu.....44
Şekil 2.19	Üstel üyelik fonksiyonu.....45
Şekil 2.20	Hiperbolik üyelik fonksiyonu46
Şekil 2.21	Ters hiperbolik üyelik fonksiyonu.....47
Şekil 2.22	Parçalı lineer üyelik fonksiyonu..... 47
Şekil 5.1	$\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonu..... 107
Şekil 5.2	$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonu..... 113
Şekil 5.3	$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonu.....113
Şekil 5.4	$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonu..... 113
Şekil 5.5	$\mu_q^E(z_q(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonu..... 115
Şekil 5.6	$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonu.....118
Şekil 5.7	$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonu.....118
Şekil 5.8	$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonu118

Şekil 5.9	$\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu.....	120
Şekil 5.12	$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu.....	126
Şekil 5.13	$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu.....	126
Şekil 5.14	$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu.....	127
Şekil 5.15	Parçalı lineer konkav üyelik fonksiyonu.....	130
Şekil 5.16	S -biçimli μ_q üyelik fonksiyonu.....	136

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2.1 $M = (m, \alpha, \beta)$, $N = (n, \gamma, \delta)$ için cebirsel işlemler.....	23
Çizelge 2.2 $M = (a, b, \alpha, \beta)$, $N = (c, d, \gamma, \delta)$ için bulanık işlemler.....	23
Çizelge 2.3 $M = (l, m, u)$, $N = (a, b, c)$ için bulanık işlemler.....	24
Çizelge 2.4 $M = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $N = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ için bulanık işlemler.....	24
Çizelge 2.5 Karar modelleri.....	31
Çizelge 4.1 Taşıma tablosu.....	62
Çizelge 4.2 LKTP için simpleks taşıma tablosu.....	73
Çizelge 4.3 Döngü oluşturan örnekler.....	73
Çizelge 4.4 Döngü oluşturmayan örnekler.....	73
Çizelge 4.5 Kâr ve maliyet matrislerinin elemanları.....	74
Çizelge 4.6 Taşıma Simpleks Metot örneği- Başlangıç uygun taban çözüm.....	75
Çizelge 4.7 Taşıma Simpleks Metot örneği- Birinci Aşama.....	78
Çizelge 4.8 Taşıma Simpleks Metot örneği- İkinci Aşama.....	78
Çizelge 5.1 (5.11) probleminde herbir amaç için minimum ve maksimum çözümler ve karşılık gelen amaç değerleri.....	92
Çizelge 5.2 (5.13) probleminin beş iterasyon için sonuçları.....	96
Çizelge 5.3 İkiye Bölme Yöntemi'nin iterasyonları ve sonuçları.....	102
Çizelge 5.4 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	123
Çizelge 5.5 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	124
Çizelge 5.6 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	125
Çizelge 5.7 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ konkav parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	133
Çizelge 5.8 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	133
Çizelge 5.9 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ konkav parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	134
Çizelge 5.10 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ non-konkav (iki konkav) parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	140
Çizelge 5.11 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ non-konkav (iki konkav) parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	141
Çizelge 5.12 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ non-konkav (iki konkav) parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.....	142

ÖNSÖZ

Denizciler için kutup yıldızının, diğerlerinin arasında yeri bir başkadır. Yönlerini ona göre belirler, rotalarından şaşmazlar. Bu çalışmanın kutup yıldızı olan, yol gösteren ve güç katan değerli hocam **Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ** en büyük destekçim oldu. Kendisine şükran borçluyum.

Mesleğimizde örnek aldığımız bir duayen olarak eşsiz fikirlerini ve daha önemlisi çok değerli zamanını esirgemeyen ve büyük tevazu ile paylaşan saygıdeğer hocam **Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU**'na da en derin sevgi ve şükranlarımı sunarım.

Nurdan ÇETİN

BULANIK ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Nurdan ÇETİN
Matematik Bölümü, Doktora Tezi

Taşıma problemleri ve geliştirilen çözüm yöntemleri lojistikte, tedarik zinciri yönetiminde maliyetlerin azaltılması ve servis hizmetlerini iyileştirmede önemli bir rol oynamaktadır. Kısıtlı kapasiteye sahip üretim merkezlerinden talepleri belli olan tüketim merkezlerine taşıma yapılırken aynı anda birden fazla kriter optimize edilmeye çalışılabilir. Örneğin, maliyetin minimizasyonu, öncelikli müşterilere ortalama dağıtım zamanının minimizasyonu, yakıt tüketiminin minimizasyonu gibi. Bu kriterlerden bazıları kâr/maliyet, kâr/işgücü ihtiyacı, kâr/risk oranı ya da kârlılık oranının maksimizasyonu gibi kesirli yapıda olabilir. Böyle taşıma problemlerini Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi (ÇALKTP) olarak adlandırmaktayız.

Bu çalışmada amaçları iki lineer fonksiyonun oranı ve kısıtları taşıma problemi kısıtları olan çok amaçlı lineer kesirli taşıma problemi ele alınmış ve bu probleme bulanık çözüm önerileri geliştirilmiştir.

Çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş başlığını verdiğimiz birinci bölümde çalışmamızda ele aldığımız konular ana hatlarıyla anlatılmaktadır.

İkinci bölümde bulanık küme teorisi ve bulanık karar verme, üçüncü bölümde lineer kesirli programlama (LKP), dördüncü bölümde de taşıma problemleri başlığı altında klasik taşıma problemi, çok amaçlı taşıma problemi ve lineer kesirli taşıma problemi ele alınmaktadır.

Çalışmamızın orijinal kısmı olan beşinci bölümde ise, ÇALKTP'nin formülasyonu; problemin çözülebilirliği için temel teoremler; Pareto-optimal, zayıf Pareto-optimal ve uzlaşık çözüm kavramları; probleme bulanık yaklaşımla çözüm önerilerimiz yer almaktadır. Önerdiğimiz bulanık yaklaşımlar, üyelik fonksiyonlarının yapılarına göre lineer ve non-lineer (hiperbolik, üstel ve parçalı lineer) üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar olmak üzere iki ana başlık altında gruplanmakta olup her bir yaklaşımın işleyişi aynı temel örnek problem üzerinde açıklanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Taşıma problemi, lineer kesirli programlama problemi, çok amaçlı lineer programlama, bulanık matematik programlama.

JÜRİ:

1. Prof.Dr. Fatma TİRYAKİ
2. Prof.Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU
3. Prof.Dr. Erhan ÖZDEMİR
4. Prof.Dr. Müfit GİRESUNLU
5. Prof.Dr. Mustafa BAYRAM

Kabul tarihi: 20.10.2008
Sayfa Sayısı: 160

SOLUTION PROPOSAL to FUZZY MULTIOBJECTIVE LINEAR FRACTIONAL TRANSPORTATION PROBLEM

Nurdan CETİN
Mathematics Department, Ph.D. Thesis

Transportation problems and their solution techniques play an important role in logistics and supply chain management for reducing cost and improving service. While having a transportation process from supply points with limited capacity to demand points or consumption centers with definite demands, more than one criteria can be optimized at the same time. The minimization of the cost, fuel consumption and average distribution time to the customers with high priority can be given as examples of such criteria. In addition some of those criteria can be in a fractional structure such as profit/cost or profit/time or the maximization of profitability ratio. We called those type of transportation problems as Multi-Objective Linear Fractional Transportation Problems (MLFTP).

In this study the MLFTP whose objectives are the ratios of two linear functions and whose constraints are the transportation problem's constraints is dealt with and fuzzy solution proposals for this problem are proposed.

This study consists of five sections.

In the first section we called it as introduction, we outlined the subjects to be deal with in this thesis.

In the second section, fuzzy set theory and fuzzy decision making; in the third section, linear fractional programming (LFP); in the fourth section, the classical transportation problem, the multiobjective transportation problem and the linear fractional transportation problem that are subtitles of the transportation problems, were studied.

In the fifth section, which is the original part of our study, we gave the MLFTP formulization and basic theorems about the solvability of the problem. Defining Pareto-optimal, weak Pareto-optimal and compromise solution concepts for this problem, we offered fuzzy solution proposals using fuzzy approaches.

Our fuzzy approaches are grouped under two basic topics according to the structure of their membership functions: approaches using linear membership functions and approaches using non-linear membership functions. The execution for each approach is displayed on the same basic sample problem.

Keywords: Multi-objective transportation problem, multi-objective linear fractional programming, fuzzy mathematical programming.

JÜRİ:

1. Prof.Dr. Fatma TİRYAKİ
2. Prof.Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU
3. Prof.Dr. Erhan ÖZDEMİR
4. Prof.Dr. Müfit GİRESUNLU
5. Prof.Dr. Mustafa BAYRAM

Kabul tarihi: 20.10.2008
Sayfa Sayısı: 160

1. GİRİŞ

Zadeh'in 1965'de "Information and Control" adlı dergide "Fuzzy sets" adlı makalesiyle ortaya attığı bulanık küme teorisinin amacı, belirsizlik içeren kavramları üyelik dereceleriyle belirli hale getirmektir. Dolayısıyla klasik matematik programlama ile çözemediğimiz belirsizlik içeren çeşitli problemler bulanık küme teorisi yardımıyla çözülebilmektedir. Bu teori yöneylem araştırması, yapay zeka, sinir ağları, oyun teorisi, yönetim bilimi, kontrol teorisi, işletme, ekonomi, istatistik v.s. gibi birçok alana uygulanmaktadır. Ayrıca bulanık küme teorisinin karar problemlerine uygulanması 1970 yılında Bellman ve Zadeh tarafından yapılmıştır. Bulanık karar verme yaklaşımı gerçek yaşam problemlerinin modellenmesi ve çözümünde önemli bir yere sahiptir.

Taşıma problemi de gerçek yaşamda sıkça rastlanan özel tipte bir lineer programlama (LP) problemidir ve personel atama, lojistik, tedarik zinciri yönetimi gibi birçok alanda uygulama bulmaktadır. Bilindiği gibi klasik taşıma probleminde amaç, maliyet minimizasyonu ya da kâr maksimizasyonudur. Oysa bu amaçların yanısıra taşıma sisteminde yakıt tüketiminin minimizasyonu, belirli bir proseste yapılan üretimin maksimizasyonu, müşterilere ortalama dağıtım zamanının minimizasyonu gibi birden fazla ve genellikle birbiriyle çelişen amaçlar da aynı anda optimize (maksimize ya da minimize) edilmeye çalışılmaktadır. Amaç fonksiyonlarının yapısı iki lineer fonksiyonun oranı olarak lineer kesirli yapıda iseler, örneğin: kâr/risk, kâr/maliyet, kâr/zaman gibi, ÇALKTP ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada çalışmamızın esas konusu olan ÇALKTP'ne bulanık yaklaşımla çözüm önerileri geliştirilmektedir.

Giriş'ten sonraki bölümde, Zadeh'in bulanık küme teorisi; Bellman ve Zadeh'in 1970'de önerdiği "bulanık karar" tanımı, bulanık lineer programlama problemi; çok amaçlı lineer programlama probleminin tanımı, temel kavramları ve çözümü için temel yaklaşımları; bulanık çok amaçlı lineer programlama konusu, çeşitli tipte (lineer, üstel, hiperbolik ve parçalı lineer) üyelik fonksiyonları ve çözüm yöntemleri ana hatlarıyla verilmektedir.

Üçüncü bölümde, lineer kesirli programlama problemi tek amaçlı ve çok amaçlı olarak iki alt kısımda incelenmektedir. Problemlerin tanımları, özellikleri, örnek problem ve çözüm yöntemleri genel çerçevede ele alınmaktadır.

Dördüncü bölüm taşıma problemlerine ayrılmış olup, klasik taşıma probleminin bilindiği düşüncesiyle sadece model tanımı yapılmış, tablo ile çözüm yöntemlerine yer verilmemiştir. Çok amaçlı taşıma problemi için tanım ve yaklaşımların sınıflandırılması yapılmıştır. Ayrıca

lineer kesirli taşıma problemi tanıtılmış, Bajalinov'un (Bajalinov, 2003) tablo yöntemi dışında çözüm yaklaşımlarına literatürde rastlanmadığı vurgulanarak bu tablo yöntemi anlatılmıştır.

Çalışmamızın orijinal kısmını oluşturan beşinci bölümde ise öncelikle, ÇALKTP'nin formülasyonu, problemin çözülebilirliği için temel teoremler, Pareto-optimal, zayıf Pareto-optimal ve uzlaşık çözüm kavramları verilmektedir. Daha sonra, lineer kesirli amaç fonksiyonlarına karşılık gelen üyelik fonksiyonları (lineer ya da non-lineer) kurulmaktadır. Zimmermann'ın minimum operatörü kullanılarak bulanık yaklaşımla (Bulanık Matematik Programlama yoluyla) ÇALKTP için uzlaşık Pareto-optimal çözüm elde etmek üzere verdiğimiz çözüm önerileri: "Lineer üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar" ve "Non-lineer üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar" olarak iki ana başlık altında gruplanmaktadır.

"Lineer üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar"da "Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması", "İkiye Bölme Yöntemi" ve "Hedef Programlama Yaklaşımı" ile, "Non-lineer üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar"da da "Hiperbolik Üyelik Fonksiyonları", "Üstel Üyelik Fonksiyonları" ve "Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonları" kullanılarak ÇALKTP'nin Pareto-optimal çözümü bulunmaktadır. Çözüm yaklaşımlarının işleyişleri bir temel örnek problem üzerinde ayrıntılarıyla açıklanmaktadır.

Sonuç kısmında, çalışmamızda nelerin yapıldığı ve elde edildiği ifade edilmektedir. Ayrıca lineer kesirli programlama, taşıma kârlılık oranlarının optimizasyonu ve bunları bulanık çerçevede incelemenin önemi vurgulanmakta; gelecekte yapılabilecek çalışmalar hakkında araştırmacılar yönlendirilmektedir.

2. BULANIK ÇOK AMAÇLI LİNEER PROGRAMLAMA İÇİN ALTYAPI

2.1 Bulanık Küme Teorisi

Klasik mantıkta önermeler ya "doğru" ya da "yanlış" tır. Fakat günlük hayatımızda hemen hemen hiçbir şey kesinlikle doğru ya da kesinlikle yanlış değildir, yani önermeler kısmen doğru olabilir. İşte klasik mantığın yeterli olmadığı böyle durumlarda bulanık mantığa ihtiyaç duyulmaktadır. Bulanık mantıkta önermelerin doğruluk değeri, $[0,1]$ aralığına ait bir reel sayıdır. Benzer şekilde, klasik küme teorisinin genişletilmiş şekli olan bulanık küme teorisinde bir elemanın bir kümeye *ait olma (üyelik) derecesi* vardır, yani bir eleman bir kümeye belli derecede aittir. Bulanık küme kavramı ilk olarak Lütfi A. Zadeh tarafından 1965’de ortaya atılmıştır. Bulanık küme teorisinin amacı, belirsizlik içeren kavramları üyelik dereceleriyle belirli hale getirmektir.

2.1.1 Bulanık Kümeler

Temel Tanımlar

Üyelik Fonksiyonu (Karakteristik fonksiyon): U evrensel kümesindeki bir x elemanının, $\tilde{A}$ alt kümesine ait olma derecesini veren fonksiyona üyelik fonksiyonu denir ve $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ile gösterilen üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}(x):U \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlıdır.

Bulanık Küme: U evrensel küme ve $\mu_{\tilde{A}}(x):U \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu olmak üzere, $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)): x \in U\}$ ile tanımlanan $\tilde{A}$ kümesi *bulanık küme* adını alır.

Bulanık kümeler genelde $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ sembolleri ile gösterilmesine rağmen basitlik açısından bazen A , B , C ile de yazılabilir.

$U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu evrensel kümesi üzerinde tanımlı A bulanık kümesi, $A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\}$

şeklinde gösterilebilir. Bu ifadede basitlik açısından üyelik derecesi sıfır olan elemanlara ait ikililer yazılmayabilir (Sakawa, 1993).

Ayrıca A bulanık kümesi, eğer U evrensel kümesi sayılabilir veya kesikli ise,

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \frac{\mu_A(x_3)}{x_3} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

ve eğer U evrensel kümesi sayılamaz (sonsuz elemanlı) ve sürekli ise

$$A = \int_U \frac{\mu_A(x)}{x}$$

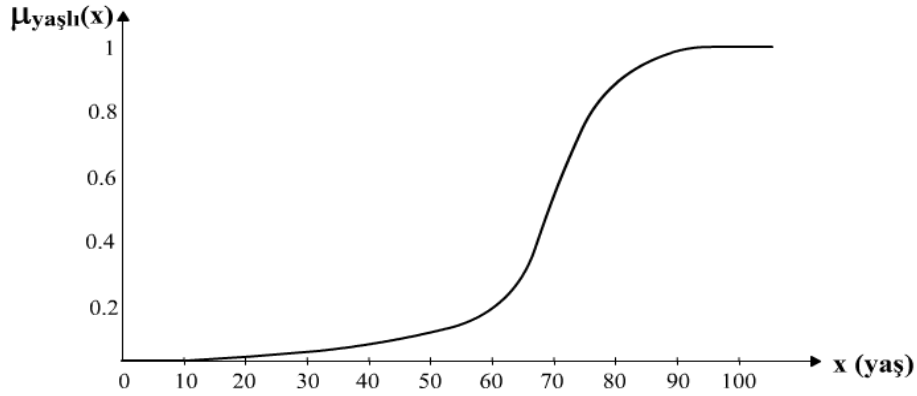
biçiminde gösterilebilir (Öğütü, 2002).

Örnek 2.1: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olsun. “yaklaşık olarak 5’e eşit olan tamsayılar” bulanık

kümesi $A = \{(3, 0.4), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.4)\}$ veya $A = \frac{0.4}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.4}{7}$

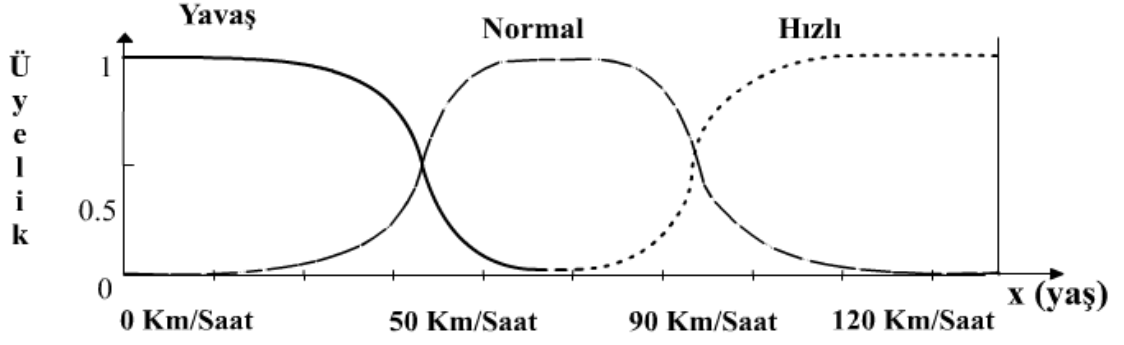
şeklinde gösterilir (Sakawa, 1993).

Örnek 2.2: 40 yaş üzerindeki bir kişinin *yaşlı* olarak nitelendirildiği ve x apsisinin kişinin yaşını belirttiği kabul edilirse, Şekil 2.1’de verilen üyelik fonksiyonu ile bir kişinin ne derece *yaşlı* olduğu belirlenebilir.



Şekil 2.1 *Yaşlı* kümesinin üyelik fonksiyonu.

Örnek 2.3: Bir otomobilin otoyol üzerinde yapabileceği hız, 0 ile 120 km/saat arasında olsun. Şekil 2.2’de verilen otomobil için hız uzayı: *Yavaş* (0 ile 40 km/saat), *Normal Hızda* (60 ile 80 km/saat) ve *Hızlı* (100 ile 120 Km/saat) olmak üzere üç kümeye ayrılsın. Bu otoyolda 70 km/saat hızında giden bir otomobil, *Normal* kümesine; 90 km/saat hızında giden bir otomobil ise belli bir üyelik derecesinde *Normal* ve belli bir üyelik derecesinde *Hızlı* kümesine girer. Bu örneğe göre otomobil, $\mu_{Hızlı}(90) = 0.5$ ve $\mu_{Normal}(90) = 0.5$ üyelik değerlerinde, her iki kümenin de üyesidir (Topuz vd., 2002).



Şekil 2.2 Bir otomobilin hız uzayının bulanıklaştırılması (Topuz vd., 2002).

Bulanık Kümenin Desteği

U evrensel kümesindeki bir A bulanık kümesinin desteği, üyelik derecesi pozitif olan noktaların oluşturduğu kesin (crisp) kümedir ve $S(A)$ şeklinde gösterilir.

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Bulanık Kümenin Alfa Keseni

U evrensel kümesindeki A bulanık kümesinin α -keseni, bu kümenin içerisinde üyelik derecesi $\alpha \in [0,1]$ sayısından büyük veya eşit olan elemanların oluşturduğu kesin kümedir ve

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde gösterilir (Zimmermann, 1993).

Örnek 2.4: Örnek 2.1’de verilen $A = \{(3, 0.4), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.4)\}$ bulanık kümesinin bazı α -kesenleri şu şekildedir:

$$A_{0.2} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A_{0.5} = \{4, 5, 6\}$$

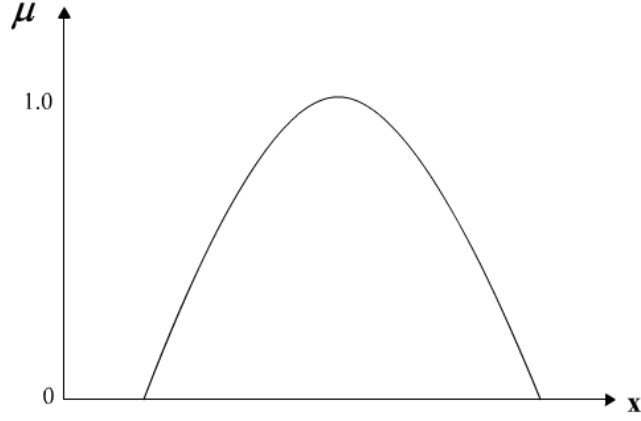
$$A_{0.8} = \{4, 5, 6\}$$

$$A_1 = \{5\}.$$

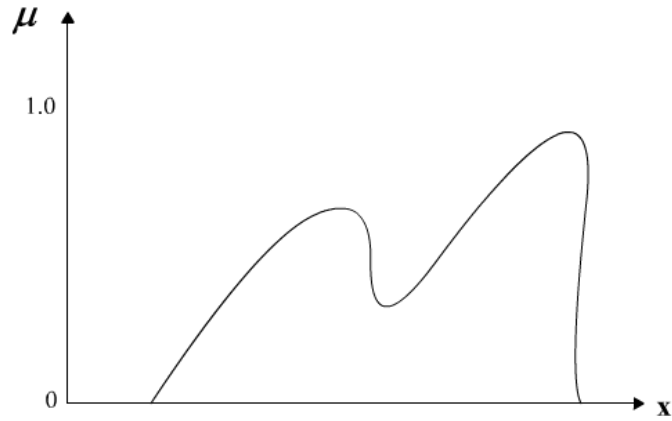
Konveks Bulanık Küme

U evrensel kümesindeki A bulanık kümesinin tüm α -kesenleri konveks ise bulanık kümeye konveks bulanık küme denir. Başka bir ifadeyle, bir A bulanık kümesinin konveks

olması için gerek ve yeter şart $\forall x_1, x_2 \in U, \lambda \in [0,1]$ için $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.



Şekil 2.3 Konveks bulanık küme.



Şekil 2.4 Konveks olmayan bulanık küme.

Bulanık Kümenin Yüksekliği

U evrensel kümesindeki bir A bulanık kümesinin yüksekliği, $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonlarının en küçük üst sınırıdır ve $\text{yükseklik}(A)$ şeklinde gösterilir:

$$\text{yükseklik}(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x).$$

Normal Bulanık Küme

$\mu_A(x)=1$ eşitliğini sağlayan en az bir $x \in U$ elemanı varsa, A bulanık kümesi normal bulanık kümedir. Normal olmayan bulanık küme de alt normal (subnormal) bulanık kümedir.

Herhangi bir A alt normal bulanık kümesi içerisindeki tüm $\mu_A(x)$ üyelik değerleri, kümenin yüksekliğine bölünerek küme normalize edilebilir (Sakawa,1993).

Bulanık Kümenin Kardinalitesi

U evrensel kümesindeki sonlu A bulanık kümesinin kardinalitesi, kümeye ait olan elemanların üyelik derecelerinin toplamına eşittir ve $|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca A bulanık kümesinin göreceli kardinalitesi $\|A\| = \frac{|A|}{|U|}$ ile tanımlanır.

Eğer U evrensel kümesi sonlu değilse A 'nın kardinalitesi,

$$|A| = \int_U \mu_A(x) dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu durumda kardinalite daima var olmayabilir (Zimmermann, 1993).

Bulanık Kümelerde Temel Küme Teorisi İşlemleri

Temel küme teorisi işlemleri bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları aracılığıyla tanımlanır. Zadeh tarafından önerilen temel küme teorisi işlemleri aşağıdadır (Sakawa, 1993).

Bir U evrensel kümesinde boş kümeden farklı iki bulanık küme A ve B olsun.

Eşitlik (Equality): A ve B kümelerinin eşit olabilmesi için gerek ve yeter şart U evrensel kümesindeki tüm noktalar için bu bulanık kümelerin üyelik derecelerinin eşit olmasıdır.

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U.$$

Altküme (Containment): A bulanık kümesinin, B nin altkümesi olması için gerek ve yeter şart A daki elemanlara karşılık gelen tüm üyelik derecelerinin, bu elemanların B deki üyelik derecelerinden küçük veya eşit olmasıdır.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in U.$$

Tümleyen (Complementation): A bulanık kümesinin tümleyeni $\bar{A}$ ile gösterilir ve

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in U$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Örnek 2.5: Örnek 2.1'deki $A = \{(3,0.4), (4,0.8), (5,1), (6,0.8), (7,0.4)\}$ bulanık kümesinin tümleyeni $\bar{A} = \{(1,1), (2,1), (3,0.6), (4,0.2), (6,0.2), (7,0.6), (8,1), (9,1)\}$ dir.

Kesişme (Intersection): A ve B bulanık kümelerinin kesişimi $A \cap B$ ile gösterilir ve

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U$$

şeklinde tanımlanır. Bulanık kümeler arası kesişim, " $\wedge$ " işareti ile gösterilen “mantıksal ve” bağlacına karşılık gelmektedir.

Birleşme (Union): A ve B bulanık kümelerinin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilir ve

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U$$

şeklinde tanımlanır. Bulanık kümeler arası birleşim, " $\vee$ " işareti ile gösterilen “mantıksal veya” bağlacına karşılık gelmektedir.

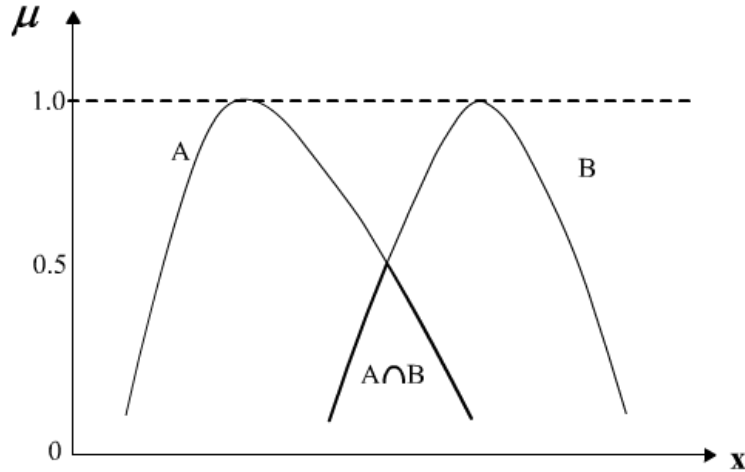
Örnek 2.6: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ evrensel kümesi, $A = \frac{0.2}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.3}{6}$ ve

$B = \frac{0.1}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.1}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.8}{6}$ bulanık kümeleri verilsin.

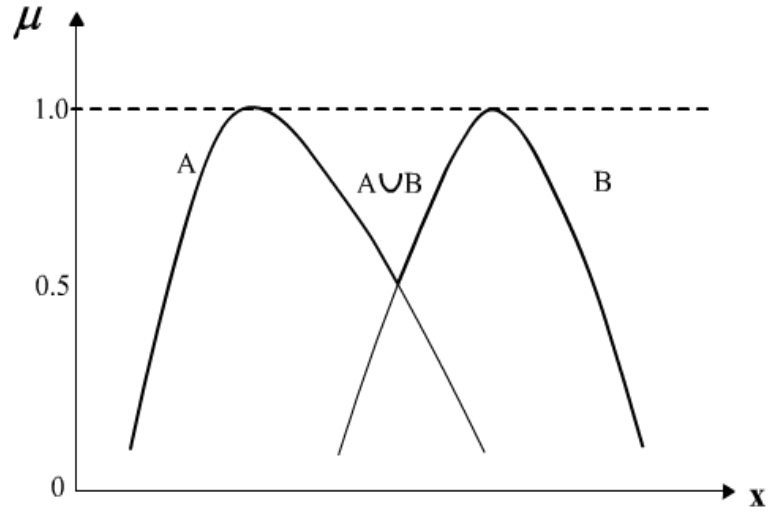
$$A \cup B = \frac{0.2}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.8}{6}$$

$$A \cap B = \frac{0.1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.1}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.3}{6}$$

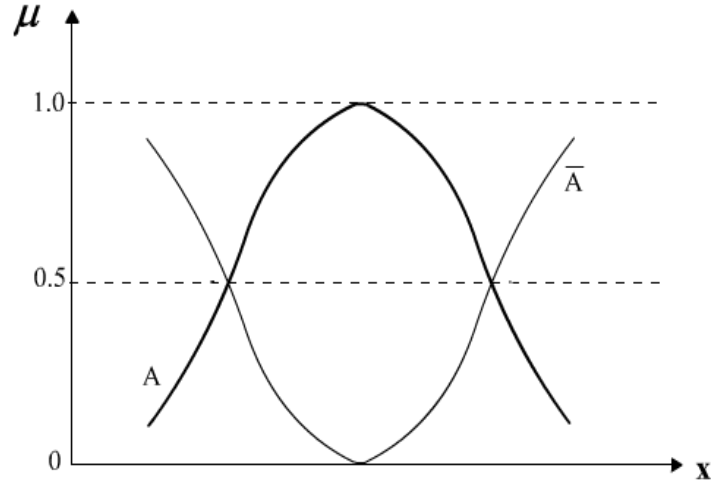
şeklindedir.



Şekil 2.5 İki bulanık kümenin kesişimi.



Şekil 2.6 İki bulanık kümenin birleşimi.



Şekil 2.7 Bulanık kümenin tümleyeni (Sakawa, 1993).

Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da A ve B bulanık kümeleri konveks ve normal olmasına rağmen $A \cup B$ kümesi konveks olmayan küme, $A \cap B$ kümesi de normal olmayan kümedir. Şekil 2.7'de A nın tümleyeni $\bar{A}$ sadece konvekslik özelliğini kaybetmiştir.

Örnek 2.7: “ $A = 10$ 'dan çok büyük reel sayılar” ve $B = “11$ 'e yaklaşık sayılar” bulanık kümelerine karşılık gelen üyelik fonksiyonları sırasıyla,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, & x > 10 \end{cases}$$

ve

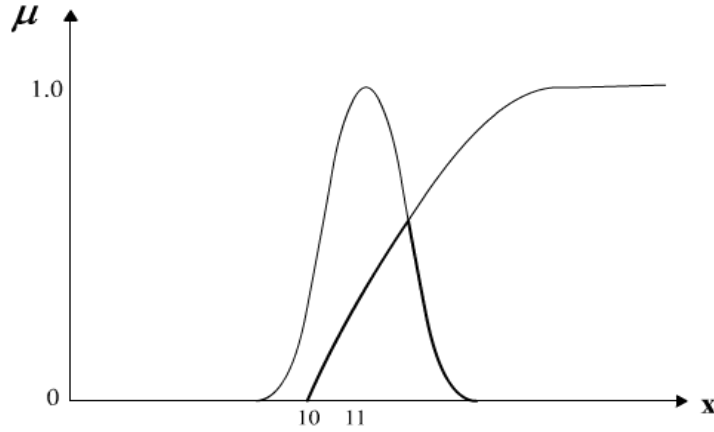
$$\mu_B(x) = (1 + (x - 11)^4)^{-1}$$

olsun. Bu durumda iki bulanık kümenin kesişim ve birleşim kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla,

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \min \left[(1 + (x-10)^{-2})^{-1}, (1 + (x-11)^4)^{-1} \right], & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \left[(1 + (x-10)^{-2})^{-1}, (1 + (x-11)^4)^{-1} \right], \quad x \in U$$

olarak tanımlanır. İki bulanık kümenin kesişiminin üyelik fonksiyonu Şekil 2.8 ile verilmiştir (Zimmermann, 1993).



Şekil 2.8 A ve B bulanık kümelerinin kesişimi (Örnek 2.7).

Bulanık Kümelerin Özellikleri (Sakawa, 1993)

U evrensel kümesi üzerinde tanımlı iki bulanık küme A ve B olsun. Klasik küme teorisindeki değişme, birleşme, dağılma v.s. gibi aşağıda verilen özellikler bulanık küme teorisinde de geçerlidir.

1. Değişme Özelliği (Commutativity Laws):

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2. Birleşme Özelliği (Associativity Laws):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

3. Dağılma Özelliği (Distributivity Laws):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. De Morgan Kuralları (De Morgan's Laws):

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

5. Eşgüçlülük (Idempotence):

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

6. Soğurma (Absorption):

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

7. Özdeşlik (Identity):

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

8. Çift Değilleme (Involution):

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Burada belirtilmelidir ki, klasik kümelerden farklı olarak bulanık kümeler için geçerli olan yegane kural $\bar{\bar{A}} \cup A \neq U$ ve $\bar{\bar{A}} \cap A \neq \emptyset$ özellikleridir. Bu özellikler klasik ile bulanık küme teorileri arasında ayırt edici rol oynarlar.

Bulanık Kümelerde Cebirsel İşlemler

Klasik küme işlemlerine ek olarak, bulanık kümeler üzerinde cebirsel işlemleri kullanmak da yararlıdır.

Cebirsel Çarpım (Algebraic product): A ve B bulanık kümelerinin cebirsel çarpımı olan bulanık küme AB ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

olarak tanımlanır.

Cebirsel Toplam (Algebraic sum): A ve B bulanık kümelerinin cebirsel toplamı olan bulanık küme $A + B$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

olarak tanımlanır.

Sınırlı Çarpım (Bounded product): A ve B bulanık kümelerinin sınırlı çarpımı olan bulanık küme $A \odot B$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A \odot B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) = 0 \vee (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$$

olarak tanımlanır.

Sınırlı Toplam (Bounded sum): A ve B bulanık kümelerinin sınırlı toplamı olan bulanık küme $A \oplus B$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)) = 1 \wedge (\mu_A(x) + \mu_B(x))$$

olarak tanımlanır.

Sınırlı Fark (Bounded difference): A ve B bulanık kümelerinin sınırlı farkı olan bulanık küme $A \ominus B$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A \ominus B}(x) = \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) = 0 \vee (\mu_A(x) - \mu_B(x))$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.8: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ evrensel kümesi, $A = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}$ ve

$B = \frac{0.7}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.5}{6}$ bulanık kümeleri verilsin.

$$A \cap B = \frac{0.7}{3} + \frac{0.5}{6}, \quad A \cup B = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6},$$

$$\bar{A} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.4}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10},$$

$$AB = \frac{0.56}{3} + \frac{0.3}{6}, \quad A+B = \frac{0.94}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.8}{6}, \quad A \odot B = \frac{0.5}{3} + \frac{0.1}{6},$$

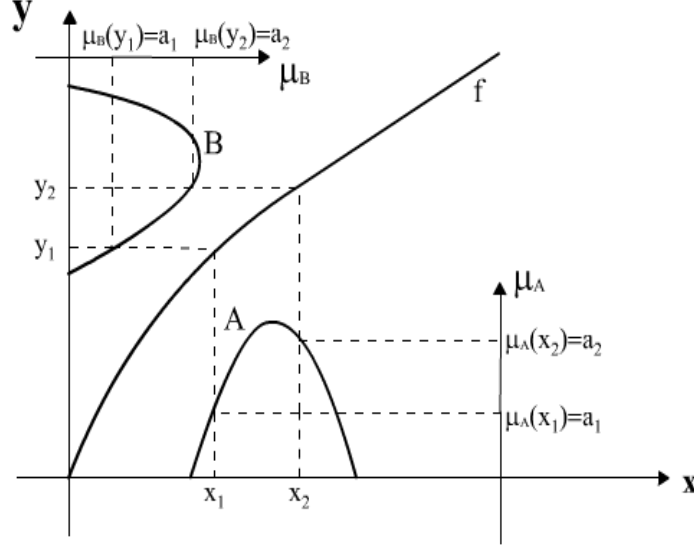
$$A \oplus B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}, \quad A \ominus B = \frac{0.1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.1}{6}.$$

2.1.2 Zadeh'in Genişleme Prensibi (Sakawa, 1993)

Klasik kümeler arasında tanımlanan fonksiyon kavramının, bulanık kümeler üzerinde tanımlanmasına genişleme prensibi denir. Başka bir ifadeyle f , I kümesinden J kümesine bir fonksiyon $f: I \rightarrow J$ olsun. Genişleme prensibi; I üzerinde bulanık A kümesi ve f fonksiyonu aracılığıyla J kümesi üzerinde $B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f(x), x \in I\}$ bulanık kümesinin

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \mu_A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanmasına imkân sağlar (Şekil 2.9). Burada $f^{-1}(y)$, y 'nin ters görüntüsüdür.

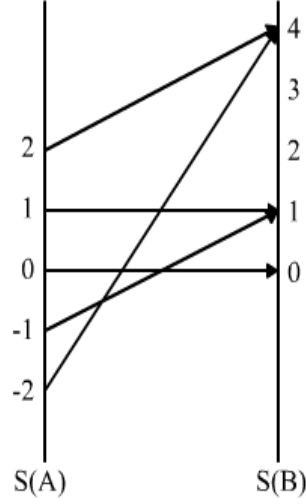


Şekil 2.9 Genişleme prensibinin açıklaması.

Örnek 2.9: $A = \frac{0.3}{-2} + \frac{0.5}{-1} + \frac{0.8}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.4}{2}$ bir bulanık küme ve $f(x) = x^2$ bir fonksiyon olmak üzere, genişleme prensibi ile

$$B = \frac{0.8}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.4}{4}$$

bulanık kümesi tanımlanır. Örnek 2.9'a uygulanan genişleme prensibi Şekil 2.10 ile gösterilmiştir.



Şekil 2.10 Genişleme prensibinin gösterimi (Örnek 2.9).

Tanım 2.1 (Kartezyen Çarpım) (Sakawa, 1993): $I_1, I_2, \dots, I_n$ üzerinde tanımlı bulanık kümeler sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_n$ karşılık gelen üyelik fonksiyonları da $\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)$ olsun. $A_1, A_2, \dots, A_n$ bulanık kümelerinin kartezyen çarpımı, $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ üzerinde $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ile gösterilen bir bulanık kümedir ve üyelik fonksiyonu da

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) \quad (2.1)$$

olarak ifade edilir.

Örnek 2.10: $I_1 = I_2 = \{3, 5, 7\}$ olsun. I_1 üzerinde A_1 ve I_2 üzerinde A_2 bulanık kümeleri:

$$A_1 = \frac{0.5}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{7}, \quad A_2 = \frac{1}{3} + \frac{0.6}{5}$$

olarak verilsin. Bu durumda kartezyen çarpım kümesi;

$$A_1 \times A_2 = \frac{0.5}{(3,3)} + \frac{1}{(5,3)} + \frac{0.6}{(7,3)} + \frac{0.5}{(3,5)} + \frac{0.6}{(5,5)} + \frac{0.6}{(7,5)}$$

olur.

Dikkat edilirse $A_1, A_2, \dots, A_n$ bulanık kümeler olmadığında, (2.1) kartezyen çarpımı kesin kümelerdeki klasik tanımına indirgenir. Bulanık kümelerdeki kartezyen çarpım tanımından, genişleme prensibi aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Tanım 2.2 (Kartezyen Uzayda Genişleme Prensibi):

$f : I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow J$ olmak üzere genişleme prensibi; $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ üzerinde bulanık $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ kümesi ve f fonksiyonu aracılığıyla J kümesi üzerinde

$B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n\}$ bulanık kümesinin

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \\ y = f(x)}} \mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (2.2)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanmasına imkan sağlar. Burada $f^{-1}(y)$, y 'nin ters görüntüsüdür. 1978'de H.T. Nguyen alfa seviye kümesi kavramını kullanarak, (2.2) genişleme prensibinin aşağıdaki ifadeye eşdeğer olduğunu göstermiştir.

Teorem 2.1 (Nguyen): Herhangi bir $y \in J$ için, $\mu_B(y) = \mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n)$ olacak şekilde $x_1, \dots, x_n$ 'ler mevcutsa, yani bazı $x_1, \dots, x_n$ için (2.2)'nin supremumuna ulaşırsa,

$$[f(A_1, \dots, A_n)]_\alpha = f(A_{1\alpha}, \dots, A_{n\alpha})$$

eşitliği geçerlidir.

2.1.3 Bulanık Sayılar

Tanım 2.3: Üyelik fonksiyonu parçalı sürekli olan, $\mathbb{R}$ reel ekseninde tanımlı, konveks ve normalize edilmiş bulanık kümeye bulanık sayı denir (Sakawa, 1993).

Tanım 2.4: Bir M bulanık sayısı, tüm negatif (pozitif) x değerleri için sıfır üyelik değerini alıyorsa bu bulanık sayı pozitifdir (negatifdir) denir. Yani,

M bulanık sayısı pozitifdir (negatifdir). $\Leftrightarrow \forall x < 0$ ($\forall x > 0$) için $\mu_M(x) = 0$ dır.

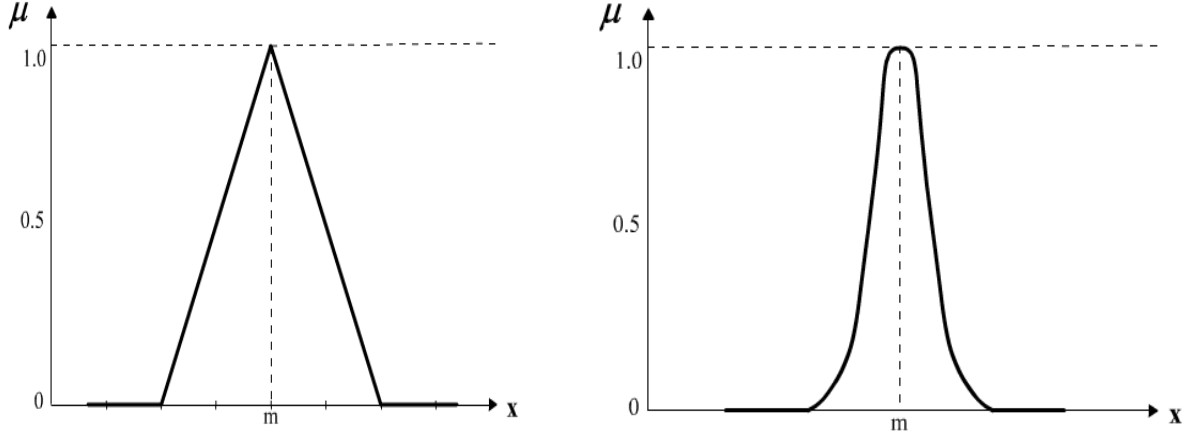
Örnek 2.11: Yaklaşık olarak m civarında bir M bulanık sayısı için üyelik fonksiyon örnekleri olarak üçgensel üyelik fonksiyonu,

$$\mu_M(x) = \max \left(0, 1 - \frac{|x - m|}{a} \right), \quad a > 0$$

ve çan şekilli üyelik fonksiyonu,

$$\mu_M(x) = e^{-b(x-m)^2}, \quad b \geq 1$$

yaygın şekilde kullanılmaktadır (Şekil 2.11).



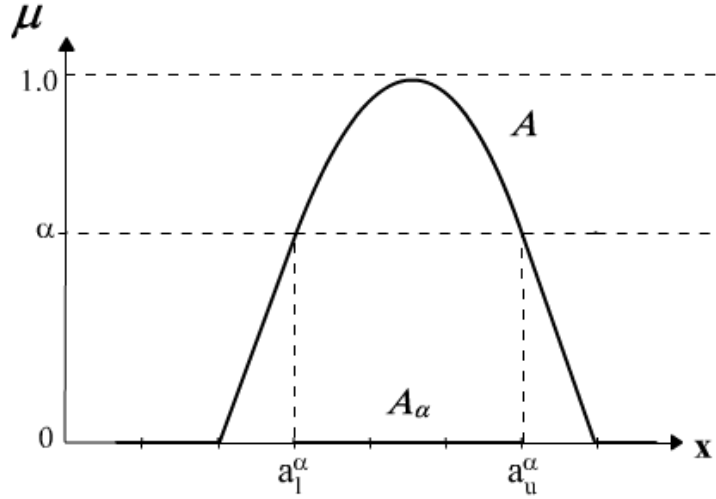
Şekil 2.11 Bulanık sayı örnekleri.

Bir Bulanık Sayının Güven Aralığı (Confidence Interval) (Sakawa, 1993, sayfa 23)

Üyelik derecesi α ($\alpha \in [0,1]$) sayısından büyük veya eşit olan tüm reel sayıların oluşturduğu aralığa güven aralığı (α -keseni) denir.

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$$

Bir bulanık A sayısının α -keseni A_α Şekil 2.12’de gösterilmiştir.



Şekil 2.12 Bulanık A sayısının α -keseni.

Bulanık Sayılarda Temel Aritmetik İşlemler

Bulanık küme teorisinde genişleme prensibinin ana uygulamalarından biri, klasik küme teorisinde “+”, “-”, “×” ve “÷” cebirsel işlemlerinin bulanık sayılara genişletilmesidir. Böyle bir genişleme, Zadeh’in genişleme prensibi ile yapılabilir.

M ve N bulanık sayılarının üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_M(x)$ ve $\mu_N(x)$ olmak üzere $\mathbb{R}$ deki “+”, “-”, “×” ve “÷” ikili işlemleri M ve N bulanık sayılarının “ $\oplus$ ”, “ $\ominus$ ”, “ $\otimes$ ” ve “ $\oslash$ ” ikili işlemlerine genişleme prensibi ile aşağıdaki gibi genişletilebilir (Sakawa, 1993).

1. Genişletilmiş Toplama: $M \oplus N$

$$\begin{aligned}\mu_{M \oplus N}(z) &= \sup_{z=x+y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \min(\mu_M(x), \mu_N(z-x)).\end{aligned}$$

2. Genişletilmiş Çıkarma: $M \ominus N$

$$\begin{aligned}\mu_{M \ominus N}(z) &= \sup_{z=x-y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \min(\mu_M(x), \mu_N(x-z)).\end{aligned}$$

3. Genişletilmiş Çarpma: $M \otimes N$

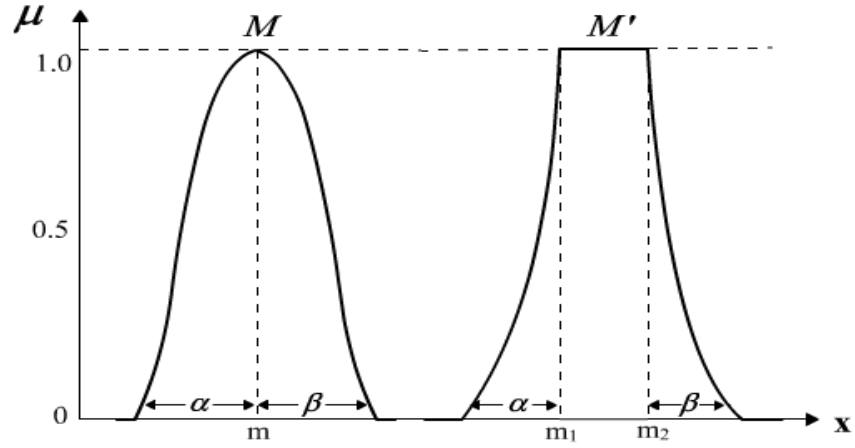
$$\begin{aligned}\mu_{M \otimes N}(z) &= \sup_{z=x \times y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \\ &= \begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}} \min(\mu_M(x), \mu_N(z/x)), & z \neq 0 \\ \max\{\sup_{x \in \mathbb{R}} \min(\mu_M(x), \mu_N(0)), \sup_{y \in \mathbb{R}} \min(\mu_M(0), \mu_N(y))\}, & z = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

4. Genişletilmiş Bölme: $M \oslash N$

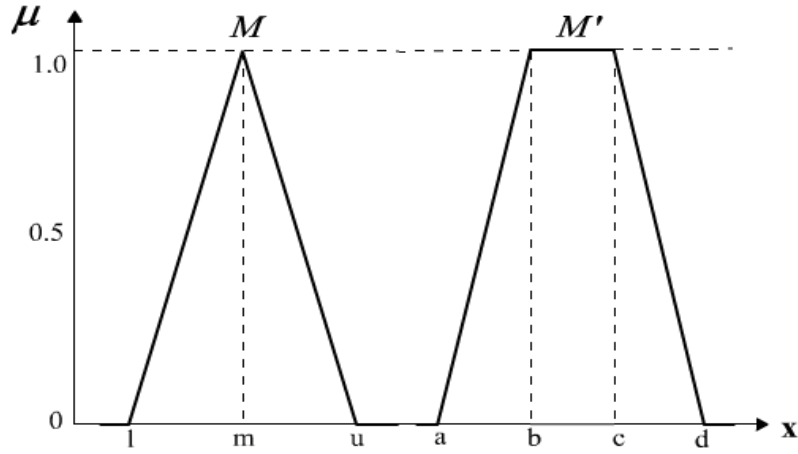
$$\begin{aligned}\mu_{M \oslash N}(z) &= \sup_{z=x/y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \min(\mu_M(x), \mu_N(x/z)) \\ &= \sup_{\substack{y \in S(N) \\ 0 \notin S(N)}} \min(\mu_M(z \cdot y), \mu_N(y)).\end{aligned}$$

2.1.4 Özel Bulanık Sayılar

Özel bulanık sayılar hesaplama uğraşısını azaltmak için önerilmişlerdir. Literatürde şimdiye kadar üçgensel, yamuksal ve bunların $L-R$ tipli olanları farklı karar modellerine uygulanmıştır (Chen ve Hwang, 1992). Şekil 2.13 ve Şekil 2.14 bazı özel bulanık sayıları vermektedir.



Şekil 2.13 $L-R$ tipli bulanık sayılar.



Şekil 2.14 Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar.

Tanım 2.5 $L-R$ tipli bulanık sayılar (Sakawa, 1993):

M bulanık sayısının $L-R$ tipli bir bulanık sayı olması için gerek ve yeter şart,

1. $L(x) = L(-x)$
2. $L(0) = 1$
3. $L(x)$, $[0, \infty)$ aralığında artmayan sol biçim fonksiyonu

olmak üzere

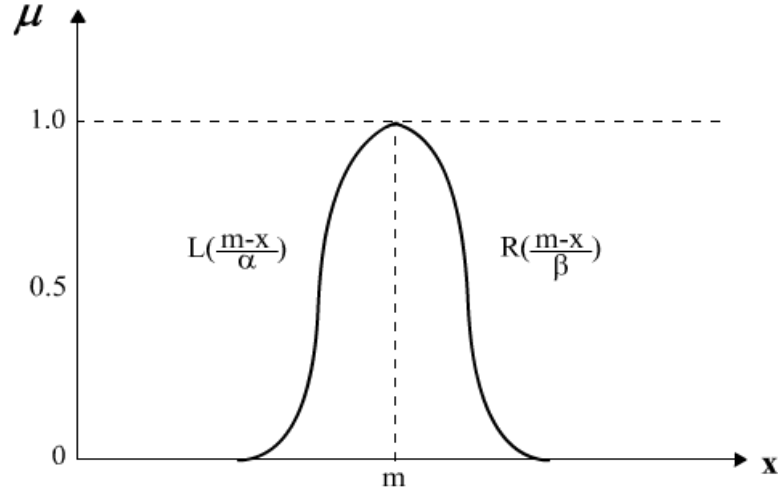
$$\mu_M(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}), & x \leq m, \quad \alpha > 0 \\ R(\frac{x-m}{\beta}), & x \geq m, \quad \beta > 0 \end{cases}$$

olmasıdır. Burada m , M bulanık sayısının orta değeri, α ve β sırasıyla sol ve sağ yayılımlardır. α ve β yayılımları sıfır olduğunda M bulanık sayısı m kesin sayısına indirgenir.

$R(\cdot)$ sağ yayılım fonksiyonu da $L(\cdot)$ ya benzer şekilde tanımlanabilir. M bulanık sayısı, orta değer, sağ ve sol yayılımlar ve biçim fonksiyonları kullanılarak bir $L-R$ tipli bulanık sayı

$$M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$$

ile sembolik şekilde gösterilebilir.



Şekil 2.15 $L-R$ tipli bulanık sayısının açıklaması.

Sol biçim fonksiyonlarına örnek olarak aşağıdaki fonksiyonlar verilebilir:

$$L(x) = \max(0, 1 - |x|^p), \quad p > 0$$

$$L(x) = \exp(-|x|^p), \quad p > 0$$

$$L(x) = 1/(1 + |x|^p), \quad p > 0$$

Tepe noktası tek değil ise $L-R$ tipli M bulanık sayısının düz bir tepe bölgesi vardır ve $M' = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$ olarak yazılabilir (Şekil 2.13).

Üçgensel (veya yamuksal) bulanık sayı (Chen ve Hwang, 1992)

$x, l, m, u \in \mathbb{R}$ olmak üzere M üçgensel bulanık sayısı

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 0, & x \leq l \\ \frac{x-l}{m-l}, & l < x \leq m \\ \frac{u-x}{u-m}, & m < x \leq u \\ 0, & x > u \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Şekil 2.14'deki $M = (l, m, u)$ bulanık sayısının alt sınırı l ve üst sınırı da u dur.

Şekil 2.14'deki M' yamuksal bulanık sayısının birçok tepe noktası vardır ve $M' = (a, b, c, d)$ şeklinde gösterilir. M' bulanık sayısı için $[b, c]$ aralığı en olası değerleri, a değerinin altında ve d değerinin üstündeki yerler ise tamamen imkansız olan değerleri gösterir. b den a ya ve c den d ye üyelik değeri derece derece (veya lineer olarak) azalır.

Üçgensel (veya yamuksal) bulanık sayı $L-R$ tipli bulanık sayıdan daha kısıtlayıcı formdadır. Tüm bacaklar lineer olmalıdır. Üstelik $\alpha = m - l$ ve $\beta = u - m$ olduğunda $M = (l, m, u) = (m, \alpha, \beta)$

olur. Benzer şekilde $\alpha = b - a$ ve $\beta = d - c$ olduğunda ise

$$M' = (a, b, c, d) = (b, c, \alpha, \beta)$$

olur. M ve M' bulanık sayılarının karakteristikleri aynı kalır.

Bulanık sayıların dört farklı tipini elde ettik. Her birinin kendine ait cebirsel işlem formülasyonu vardır. Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2 sırasıyla $L-R$ tipli üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar için cebirsel işlemleri, Çizelge 2.3 ve Çizelge 2.4 ise sırasıyla üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar için cebirsel işlemleri özetlemektedir.

α - kesenleri Yardımıyla Üçgensel Bulanık Sayılar için Cebirsel İşlemler:

Bir $M = (l, m, u)$ üçgensel bulanık sayısı α -kesenleri yardımıyla

$$\forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } M_\alpha = [l^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}] = [(m - l)\alpha + l, -(u - m)\alpha + u]$$

olarak tanımlanır (Kaufmann ve Gupta, 1988). Böylece $M = (l, m, u)$ ve $N = (a, b, c)$ üçgensel bulanık sayıları arasındaki cebirsel işlemler aşağıdaki gibidir:

Skaler ile Çarpma:

$$k > 0 \text{ olmak üzere } k \cdot M = k \cdot M_\alpha = [k l^{(\alpha)}, k u^{(\alpha)}]$$

Toplama:

$$M(+)N = M_\alpha(+)N_\alpha = [l^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}] + [a^{(\alpha)}, c^{(\alpha)}] = [l^{(\alpha)} + a^{(\alpha)}, u^{(\alpha)} + c^{(\alpha)}]$$

Çıkarma:

$$M(-)N = M_\alpha(-)N_\alpha = [l^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}] - [a^{(\alpha)}, c^{(\alpha)}] = [l^{(\alpha)} - c^{(\alpha)}, u^{(\alpha)} - a^{(\alpha)}]$$

Çarpma:

Sadece pozitif reel sayılar için tanımlı olan çarpım işlemi:

$$M_\alpha(\cdot)N_\alpha = [l^{(\alpha)} \cdot a^{(\alpha)}, u^{(\alpha)} \cdot c^{(\alpha)}]$$

olarak tanımlanır. Daha açık bir şekilde:

$$\begin{aligned}
M_{\alpha}(\cdot)N_{\alpha} &= [(m-l)\alpha + l, -(u-m)\alpha + u](\cdot)[(b-a)\alpha + a, -(c-b)\alpha + c] \\
&= [((m-l)\alpha + l) \cdot ((b-a)\alpha + a), (-(u-m)\alpha + u) \cdot (-(c-b)\alpha + c)] \\
&= [la + \alpha(lb - 2la + am) + \alpha^2(m-l)(b-a), uc + \alpha(ub - 2uc + cm) + \alpha^2(u-m)(c-b)]
\end{aligned}$$

olarak da yazılabilir.

$M = (l, m, u)$ ve $N = (a, b, c)$ bulanık sayılarının doğrudan çarpım işlemi $M > 0, N > 0$ için $M(\cdot)N = (la, mb, uc)$ (Çizelge 2.3) olup $M \cdot N$ 'nin α -keseni

$$(M \cdot N)_{\alpha} = [(mb - la)\alpha + la, -(uc - mb)\alpha + uc]$$

şeklindedir.

Doğrudan çarpım ile güven aralıkları ile yapılan çarpım karşılaştırıldığında, doğrudan çarpımın güven aralıkları ile yapılan çarpımdan belli miktarda saptığı görülmektedir. Bu sapma miktarı kabul edilebilir olduğunda, işlemde kolaylık açısından doğrudan çarpım tercih edilmektedir.

Bölme:

Sadece pozitif reel sayılar için tanımlı olan bölme işlemi, $a^{\alpha} > 0$ ve $c^{\alpha} > 0$ olmak üzere her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$M_{\alpha}(:)N_{\alpha} = \left[\frac{l^{\alpha}}{c^{\alpha}}, \frac{u^{\alpha}}{a^{\alpha}} \right] = \left[\frac{l + (m-l)\alpha}{-(c-b)\alpha + c}, \frac{-(u-m)\alpha + u}{a + (b-a)\alpha} \right]$$

şeklinde tanımlanır (Aksoy vd., 2003).

$M = (l, m, u)$ ve $N = (a, b, c)$ bulanık sayılarının doğrudan bölümü $M > 0, N > 0$ için

$M(:)N = (\frac{l}{c}, \frac{m}{b}, \frac{u}{a})$ (Çizelge 2.3) olup doğrudan ve güven aralıkları ile yapılan bölme

işlemi sonuçları, çarpma işlemine benzer şekilde karşılaştırılabilir.

Ters Alma:

$$M_{\alpha} = [l^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}] \Rightarrow M_{\alpha}^{-1} = \left[\frac{1}{u^{(\alpha)}}, \frac{1}{l^{(\alpha)}} \right] \text{ (Aksoy vd., 2003).}$$

Örnek 2.12: İki bulanık sayı $M = (-3, 2, 4)$ ve $N = (-1, 0, 5)$ olsun. $\forall \alpha \in [0, 1]$ için:

$$M_{\alpha} = [l^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}] = [(m-l)\alpha + l, -(u-m)\alpha + u] = [5\alpha - 3, -2\alpha + 4],$$

$$N_{\alpha} = [a^{(\alpha)}, c^{(\alpha)}] = [(b-a)\alpha + a, -(c-b)\alpha + c] = [\alpha - 1, -5\alpha + 5]$$

olur. Buradan

$$M_{\alpha}(+)N_{\alpha} = [5\alpha - 3 + \alpha - 1, -2\alpha + 4 - 5\alpha + 5] = [6\alpha - 4, -7\alpha + 9]$$

$$M_{\alpha}(-)N_{\alpha} = [5\alpha - 3 - (-5\alpha + 5), -2\alpha + 4 - (\alpha - 1)] = [10\alpha - 8, -3\alpha + 5]$$

elde edilir.

$$\alpha = 0 \text{ için } M_0(+)N_0 = [-4, 9] \quad \text{ve} \quad \alpha = 1 \text{ için } M_1(+)N_1 = [2, 2] = 2$$

$$\alpha = 0 \text{ için } M_0(-)N_0 = [-8, 5] \quad \text{ve} \quad \alpha = 1 \text{ için } M_1(-)N_1 = [2, 2] = 2$$

dir.

Örnek 2.13: İki üçgensel bulanık sayı $M = (2, 3, 5)$ ve $N = (1, 4, 8)$ olsun. $\forall \alpha \in [0, 1]$ için:

$$M_{\alpha} = [\alpha + 2, -2\alpha + 5] \text{ ve } N_{\alpha} = [3\alpha + 1, -4\alpha + 8] \text{ olup}$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha}(\cdot)N_{\alpha} &= [\alpha + 2, -2\alpha + 5](\cdot)[3\alpha + 1, -4\alpha + 8] \\ &= [(\alpha + 2)(3\alpha + 1), (-2\alpha + 5)(-4\alpha + 8)] \\ &= [3\alpha^2 + 7\alpha + 2, 8\alpha^2 - 36\alpha + 40] \end{aligned}$$

$$M_{\alpha}(\div)N_{\alpha} = \left[\frac{\alpha + 2}{-4\alpha + 8}, \frac{-2\alpha + 5}{3\alpha + 1} \right]$$

elde edilir.

$$\alpha = 0 \Rightarrow M_0(\cdot)N_0 = [2, 40] \quad \text{ve} \quad \alpha = 1 \Rightarrow M_1(\cdot)N_1 = [12, 12]$$

olur (Kaufmann ve Gupta, 1988).

Çizelge 2.1 $M = (m, \alpha, \beta)$, $N = (n, \gamma, \delta)$ için Cebirsel İşlemler

N 'nin görüntüsü: $-N = (-n, \delta, \gamma)$
N 'nin tersi: $N^{-1} = (n^{-1}, \delta n^{-2}, \gamma n^{-2})$
Toplama: $M (+) N = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)$
Çıkarma: $M (-) N = (m-n, \alpha+\delta, \beta+\gamma)$
Çarpma
$M > 0, N > 0$: $M (\cdot) N = (mn, m\gamma+n\alpha, m\delta+n\beta)$
$M < 0, N > 0$: $M (\cdot) N = (mn, n\alpha-m\delta, n\beta-m\gamma)$
$M < 0, N < 0$: $M (\cdot) N = (mn, -n\beta-m\delta, -n\alpha-n\gamma,)$
Skaler Çarpım
$k > 0, k \in \mathbb{R}$: $k (\cdot) M = (km, k\alpha, k\beta)$
$k < 0, k \in \mathbb{R}$: $k (\cdot) M = (km, -k\beta, -k\alpha)$
Bölme
$M > 0, N > 0$: $M (:) N = (\frac{m}{n}, \frac{m\delta+n\alpha}{n^2}, \frac{m\gamma+n\beta}{n^2})$
$M < 0, N > 0$: $M (:) N = (\frac{m}{n}, \frac{n\alpha-m\gamma}{n^2}, \frac{n\beta-m\delta}{n^2})$
$M < 0, N < 0$: $M (:) N = (\frac{m}{n}, \frac{-n\beta-m\gamma}{n^2}, \frac{-n\alpha-m\delta}{n^2})$

Çizelge 2.2 $M = (a, b, \alpha, \beta)$, $N = (c, d, \gamma, \delta)$ için Bulanık İşlemler

N 'nin görüntüsü: $N : -N = (-d, -c, \delta, \gamma)$
N 'nin tersi: $N^{-1} = (\frac{1}{a}, \frac{1}{c}, \frac{\delta}{d(d+\delta)}, \frac{\gamma}{c(c-\gamma)})$
Toplama: $M (+) N = (a+c, b+d, \alpha+\gamma, \beta+\delta)$
Çıkarma: $M (-) N = (a-d, b-c, \alpha+\delta, \beta+\gamma)$
Çarpma :
$M > 0, N > 0$: $M (\cdot) N = (ac, bd, a\gamma+c\alpha-\alpha\gamma, b\delta+d\beta+\beta\delta)$
$M < 0, N > 0$: $M (\cdot) N = (ad, bc, d\alpha-a\delta+\alpha\delta, -b\gamma+c\beta-\beta\gamma)$
$M < 0, N < 0$: $M (\cdot) N = (bd, ac, -b\delta-d\beta-\beta\delta, -a\gamma-c\alpha+\alpha\gamma)$
Bölme
$M > 0, N > 0$: $M (:) N = (\frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{a\delta+d\alpha}{d(d+\delta)}, \frac{b\gamma+c\beta}{c(c-\gamma)})$
$M < 0, N > 0$: $M (:) N = (\frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{c\alpha-a\gamma}{c(c-\gamma)}, \frac{d\beta-b\delta}{d(d+\delta)})$
$M < 0, N < 0$: $M (:) N = (\frac{b}{c}, \frac{a}{d}, \frac{-b\gamma-c\beta}{c(c-\gamma)}, \frac{-a\delta-d\alpha}{d(d+\delta)})$

Çizelge 2.3 $M = (l, m, u)$, $N = (a, b, c)$ için Bulanık İşlemler

N 'nin görüntüsü: $-N = (-c, -b, -a)$
N 'nin tersi: $N^{-1} = (\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a})$
Toplama: $M (+) N = (l + a, m + b, u + c)$
Çıkarma: $M (-) N = (l - c, m - b, u - a)$
Skaler Çarpım
$\forall k > 0, k \in \mathbb{R}: k (\cdot) M = (kl, km, ku)$
$\forall k < 0, k \in \mathbb{R}: k (\cdot) M = (ku, km, kl)$
Çarpma
$M > 0, N > 0: M (\cdot) N = (la, mb, uc)$
$M < 0, N > 0: M (\cdot) N = (lc, mb, ua)$
$M < 0, N < 0: M (\cdot) N = (uc, mb, la)$
Bölme
$M > 0, N > 0: M (:) N = (\frac{l}{c}, \frac{m}{b}, \frac{u}{a})$
$M < 0, N > 0: M (:) N = (\frac{u}{c}, \frac{m}{b}, \frac{l}{a})$
$M < 0, N < 0: M (:) N = (\frac{u}{a}, \frac{m}{b}, \frac{l}{c})$

Çizelge 2.4 $M = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $N = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ için Bulanık İşlemler

N 'nin görüntüsü: $N : -N = (-d_2, -c_2, -b_2, -a_2)$
N 'nin tersi: $N^{-1} = (\frac{1}{d_2}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{a_2})$
Toplama: $M (+) N = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$
Çıkarma: $M (-) N = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2)$
Skaler Çarpım
$\forall k > 0, k \in \mathbb{R}: k (\cdot) M = (ka_1, kb_1, kc_1, kd_1)$
$\forall k < 0, k \in \mathbb{R}: k (\cdot) M = (kd_1, kc_1, kb_1, ka_1)$
Çarpma
$M > 0, N > 0: M (\cdot) N = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4)$
$M < 0, N > 0: M (\cdot) N = (a_2d_1, b_2c_1, c_2b_1, d_2a_1)$
$M < 0, N < 0: M (\cdot) N = (d_1d_2, c_1c_2, b_1b_2, a_1a_2)$
Bölme
$M > 0, N > 0: M (:) N = (\frac{a_1}{d_2}, \frac{b_1}{c_2}, \frac{c_1}{b_2}, \frac{d_1}{a_2})$
$M < 0, N > 0: M (:) N = (\frac{d_1}{d_2}, \frac{c_1}{c_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2})$
$M < 0, N < 0: M (:) N = (\frac{d_1}{a_2}, \frac{c_1}{b_2}, \frac{b_1}{c_2}, \frac{a_1}{d_2})$

α - kesenleri Yardımıyla Yamuksal Bulanık Sayılar için Cebirsel İşlemler:

Bir yamuksal M bulanık sayısı α -kesenleri yardımıyla,

$$\forall \alpha \in [0,1] \text{ için } M_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, d_1^{(\alpha)}] = [(b_1 - a_1)\alpha + a_1, -(d_1 - c_1)\alpha + d_1]$$

olarak tanımlanır. Böylece $M = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ ve $N = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ yamuksal bulanık sayıları arasındaki cebirsel işlemler aşağıdaki gibidir:

Toplama:

$$M(+)N = M_\alpha(+)N_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, d_1^{(\alpha)}] + [a_2^{(\alpha)}, d_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} + a_2^{(\alpha)}, d_1^{(\alpha)} + d_2^{(\alpha)}]$$

Çıkarma:

$$M(-)N = M_\alpha(-)N_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, d_1^{(\alpha)}] - [a_2^{(\alpha)}, d_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} - a_2^{(\alpha)}, d_1^{(\alpha)} - d_2^{(\alpha)}]$$

Çarpma:

Sadece pozitif reel sayılar ve doğal sayılar için tanımlı yamuksal bulanık sayılarda çarpma işlemi

$$M > 0, N > 0 \text{ için } M_\alpha(\cdot)N_\alpha = [a_1^{(\alpha)} \cdot a_2^{(\alpha)}, d_1^{(\alpha)} \cdot d_2^{(\alpha)}]$$

olarak tanımlanır.

Bölme:

Pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı yamuksal bulanık sayılarda bölme işlemi $a_2^\alpha > 0$ ve $d_2^\alpha > 0$ olmak üzere her $\alpha \in [0,1]$ için

$$M_\alpha(:)N_\alpha = \left[\frac{a_1^\alpha}{d_2^\alpha}, \frac{d_1^\alpha}{a_2^\alpha} \right]$$

şeklinde tanımlanır (Aksoy vd., 2003).

Ters Alma:

Pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı olan M yamuksal bulanık sayısının tersi

$$M_\alpha^{-1} = \left[\frac{1}{d_1^{(\alpha)}}, \frac{1}{a_1^{(\alpha)}} \right]$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.14: İki yamuksal bulanık sayı $M = (-3, -1, 2, 7)$ ve $N = (-1, 5, 6, 8)$ olsun.

$\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$M_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, d_1^{(\alpha)}] = [2\alpha - 3, -5\alpha + 7], \quad N_\alpha = [a_2^{(\alpha)}, d_2^{(\alpha)}] = [6\alpha - 1, -2\alpha + 8]$$

olur. Buradan,

$$M_\alpha(+)N_\alpha = [8\alpha - 4, -7\alpha + 15]$$

elde edilir.

$$\alpha = 0 \text{ için } M_0(+)N_0 = [-4, 15] \quad \text{ve} \quad \alpha = 1 \text{ için } M_1(+)N_1 = [4, 8]$$

bulunur.

Örnek 2.15: Pozitif iki yamuksal bulanık sayı $M = (4, 6, 9, 12)$ ve $N = (1, 3, 7, 10)$ olsun.

$\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$M_\alpha = [2\alpha + 4, -3\alpha + 12] \quad \text{ve} \quad N_\alpha = [2\alpha + 1, -3\alpha + 10]$$

olur. Buradan,

$$M_\alpha(\cdot)N_\alpha = [(2\alpha + 4) \cdot (2\alpha + 1), (-3\alpha + 12) \cdot (-3\alpha + 10)] = [4\alpha^2 + 10\alpha + 4, 9\alpha^2 - 66\alpha + 120]$$

$$M_\alpha(:)N_\alpha = \left[\frac{2\alpha + 4}{-3\alpha + 10}, \frac{-3\alpha + 12}{2\alpha + 1} \right]$$

elde edilir.

$$\alpha = 0 \Rightarrow M_0(\cdot)N_0 = [4, 120] \quad \text{ve} \quad \alpha = 1 \Rightarrow M_1(\cdot)N_1 = [18, 63]$$

bulunur (Kaufmann ve Gupta, 1988).

Cebirsel İşlemlerdeki Basitlik-Hassasiyet trade-off (değiş-tokuş)'u

Bulanık kümeler, insan dünyasındaki kesin olmayan veya belirsiz kavramları matematiksel olarak modellemede kullanılırlar. Bulanık küme teorisi işlemleri yardımıyla, farklı bulanık kümeler kombine edilebilir ve klasik matematik modeller kullanılarak çözülemeyen problemlere bazı özel cevaplar elde edilebilir.

Bir bulanık sayı elemanları reel eksende olan bir bulanık kümedir. Klasik matematik kavramlarla bulanık miktarları Zadeh'in genişleme prensibini kullanarak birleştirmek doğal bir yoldur. Fakat bu yolu alfa-kesen yöntemi yardımı ile bile olsa cebirsel işlemlere uygulamak oldukça zordur. Böylece normallik ve konvekslik gibi bazı kısıtlayıcı özellikleri olan yeni bir tür bulanık sayılar çeşitli araştırmacılar tarafından tanımlanmıştır. Genellikle bu özel bulanık sayılar karar problemlerini modellemede ihtiyaçlarımızı karşılamaktadır. Bu özel bulanık sayıların her bir tipi için çok sayıda cebirsel işlem formülleri verilmiştir. Bu cebirsel formüller çoğu durumda sadece yaklaşık sonuçlar üretirler. Böylece bu formüller orijinal probleme daha fazla belirsizlik ya da bulanıklık katarlar. Basitlik ile hassasiyet arasındaki trade-off sorusu, kolay cevaplanacak bir soru değildir. KV hassasiyet (yani, genişleme prensibi ve düzgün (regüler) bulanık sayılar kullanma) ve basitlik (yani, özel bulanık sayı ve yaklaşım formülleri kullanma) arasında seçim yapılmalıdır. Bununla birlikte, pratik bakış açısından, basitliğin daha ağırlıklı olması gerektiği hissedilir. Çünkü gerçek yaşam

problemlerinin çoğu büyük boyutludur ve karmaşık hesaplama prosedürleri onları makul bir maliyette ele alamaz (Chen ve Hwang, 1992).

2.2 Bulanık Karar Verme

Bellman ve Zadeh (1970) bulanık hedef, bulanık kısıt ve bulanık karar olmak üzere üç temel kavramı tanımlamış ve bunların bulanıklık altında karar süreçlerine uygulamaları ile ilgili birçok çalışma yapmışlardır.

X alternatifler uzayı üzerinde bir bulanık hedef;

$$\mu_G : X \rightarrow [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile; bir bulanık kısıt ise

$$\mu_C : X \rightarrow [0,1]$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bir bulanık kümedir.

Bellman ve Zadeh (1970)'in önerdiği bulanık karar tanımında, bulanık hedef ile bulanık kısıtın aynı anda sağlanması istenir. Böylece Bellman ve Zadeh bulanık karar D 'yi; bulanık hedef G ve bulanık kısıt C 'nin kesişimi ile tanımlamaktadır. Daha açıkça, X kümesi üzerinde tanımlı bulanık karar kümesi;

$$D = G \cap C$$

ile tanımlanır ve bu küme

$$\mu_D(x) = \mu_{G \cap C} = \min \{ \mu_G(x), \mu_C(x) \} \quad (2.3)$$

üyelik fonksiyonu ile belirlenir. Bu tanımdan, maksimize edici karar

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min (\mu_G(x), \mu_C(x))$$

olur.

Daha genel olarak, k tane bulanık hedef $G_1, G_2, \dots, G_k$, m tane bulanık kısıt $C_1, C_2, \dots, C_m$ olmak üzere, bulanık karar;

$$D = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k \cap C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$$

ve bulanık kararın üyelik fonksiyonu da

$$\mu_D = \min \{ \mu_{G_1}, \mu_{G_2}, \dots, \mu_{G_k}, \mu_{C_1}, \mu_{C_2}, \dots, \mu_{C_m} \} = \min \{ \mu_{G_i}, \mu_{C_j} \} = \min \{ \mu_i \}$$

şeklindedir. Ayrıca maksimize edici karar ise

$$\max_{x \in X} \mu_D(x) = \max_{x \in X} \min (\mu_{G_1}(x), \dots, \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x), \dots, \mu_{C_m}(x))$$

olarak tanımlanır. Ancak, karara etkisi açısından bulanık hedef ve bulanık kısıt arasında bir fark olmadığı, her ikisinin de eşit önem ağırlığıyla karara katkıda bulunduğu unutulmamalıdır. Bazı durumlarda hedef ve bulanık kısıtları farklı ağırlıklarla bir araya getiren birleştirici

modeller kullanılabilir. Bellman ve Zadeh (1970), bulanık hedef ve kısıtların eşit önem ağırlığına sahip olmadığı bu durumlar için konveks bulanık karar tanımını vermişlerdir. Bu tanıma göre bulanık karar ,

$$\mu_D^{konveks}(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu_{C_j}(x)$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j = 1, \quad \alpha_i, \beta_j \geq 0$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Burada ve sırasıyla hedeflerin ve kısıtların göreceli önemlerini yansıtan ağırlık katsayılarıdır. Ayrıca çarpım işlemiyle de bulanık kararın üyelik fonksiyonu

$$\mu_D^{carpim}(x) = \left(\prod_{i=1}^k \mu_{G_i}(x) \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^m \mu_{C_j}(x) \right)$$

olarak tanımlanabilir. x^* optimal seçeneği de konveks ve çarpım bulanık kararın maksimize edilmesiyle bulunur.

$$\mu_D^{konveks}(x^*) = \max_{x \in X} \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu_{C_j}(x) \right\}$$

$$\mu_D^{carpim}(x^*) = \max_{x \in X} \left(\prod_{i=1}^k \mu_{G_i}(x) \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^m \mu_{C_j}(x) \right)$$

Bu üç bulanık kararın üyelik fonksiyonları arasında $\mu_D^{carpim}(x) \leq \mu_D(x) \leq \mu_D^{konveks}(x)$ bağıntısı vardır (Sakawa,1993).

Örnek 2.16: “ x , 10’den oldukça büyük olmalı” amaç fonksiyonu

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10 \\ (1 + (x-10)^{-2})^{-1}, & x > 10 \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile, “ x , 11 civarında olmalı” kısıtı

$$\mu_C(x) = (1 + (x-11)^4)^{-1}$$

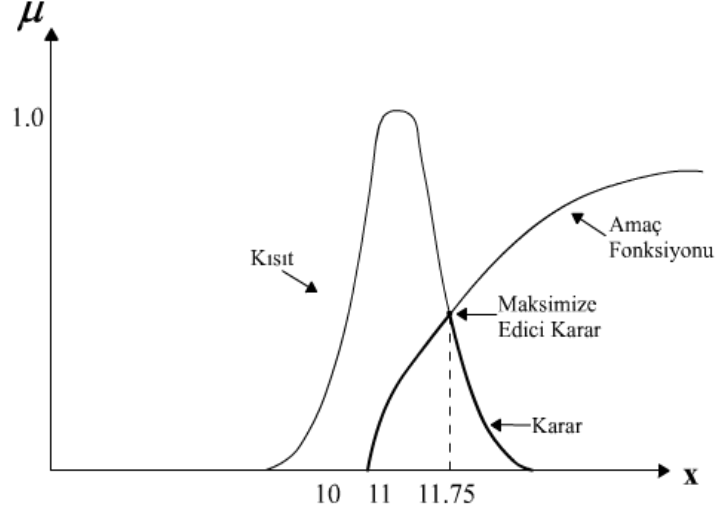
üyelik fonksiyonu ile karakterize edilsin.

Buradan kararın üyelik fonksiyonu,

$$\mu_D(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x)$$

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \min \left\{ (1 + (x-10)^{-2})^{-1}, (1 + (x-11)^4)^{-1} \right\}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}$$

olur. Bulanık karar Şekil 2.16 ile gösterilmiştir (Zimmermann, 1993).



Şekil 2.16 Bulanık karar.

2.3 Bulanık Lineer Programlama (BLP)

İlk kez H.-J. Zimmermann 1976 yılında geleneksel LP problemlerinde bulanık küme teorisini kullanmıştır. Çalışmasında bir bulanık hedefi ve bulanık kısıtları olan LP problemlerini göz önüne almıştır. Lineer üyelik fonksiyonlarıyla birlikte Bellman ve Zadeh'in önerdiği bulanık kararı izleyerek bir eşdeğer LP probleminin mevcut olduğunu ispatlamıştır. O zamandan beri bulanık LP, birçok başarılı uygulamada farklı yönlerde gelişmektedir. Günümüzde bulanık programlama, bulanıklık altında çok amaçlı optimizasyonun en önemli alanı olarak dikkate alınmaktadır (Sakawa, 1993).

LP modelleri, karar modelinin özel bir şekli olarak düşünülebilir. Karar uzayı kısıtlarla, hedef (fayda fonksiyonu) ise amaç fonksiyonu ile tanımlanır. LP problemlerinin klasik modeli:

$$\text{Amaç: } \max f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{Kısıtlar: } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

(2.4)

ile gösterilmiştir. Klasik modelde $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ 'nin tüm bileşenleri kesin sayılardır. “ $\leq$ ” sembolü ve “max” sözcüğü kesinlik ifade etmektedir.

KV amaç fonksiyonunu maksimize veya minimize etmek yerine bazı istek seviyelerine ulaşmak yani mevcut durumunu olabildiğince iyileştirmek isteyebilir. Buna karşılık kısıtlar, $\leq$ işaretinin kesin matematiksel anlamını ifade etmeyebilir, küçük ihlalleri (sapmaları) kabul edebilecek şekilde belirsiz olabilir, bazen de duyulara ilişkin gereksinimlerin temsil edilmesi

durumunda uygun bir kesin kısıt kestirilemeyebilir. Ayrıca; $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektörleri ve $\mathbf{A}$ matrisinin bileşenleri de bulanık yapıda olabilir. Çünkü bu parametreler bulanık algılamalardan dolayı bulanık karakterlerle ifade edilebilirler. (2.4)'de bu gibi olası modifikasyonlar varsa LP problemine bulanık lineer programlama problemi (BLP) denir (Zimmermann,1993).

BLP'de modellenecek gerçek durumun özelliklerine ve kabullerine bağlı olarak birçok model tipi mevcuttur. Zimmermann'ın karar modellerini sınıflandırması Çizelge 2.5'de verilmiştir. Çizelge, karar modellerinin durumlarına ve modelleme prosesine bağlı olarak ortaya çıkabilecek model tiplerini göstermektedir. Tablodaki simetrik model ifadesi esas olarak hedeflerin yanı sıra kısıtların da bulanık kümeler yoluyla modellenebileceğini kabul etmektedir. Ayrıca çözümlerin hedeflere ve kısıtlara göre üyelik derecelerinin karşılaştırılabilir olduğu kabulü de mevcuttur. Çizelge 2.5'deki Tip 2 modeli yani kısıtların kesin yapıda, amaç fonksiyonunun bulanık küme olduğu model, Tip 5'in özel bir durumudur.

Bulanık küme teorisi fayda teorisine de uygulanabilir (Tip 3 ve Tip 6). Ayrık çözüm uzayı için iki temel yaklaşım sınıfı vardır. Birincisinde faydalar, genellikle linguistik değişkenler kullanılarak bulanık kümeler ile modellenir. Alternatiflere ait bulanık faydalar bulanık kümelerdeki sıralama metotları ile derecelendirilir, böylece alternatifler sıralanır. İkinci yaklaşım sınıfı ise faydaların amacına, yani olayların arzu edilebilirliklerine göre olayları sıralamaya odaklanır ve böylece bulanık sıralama bağıntılarını kullanır. Çözüm uzayı sürekli olduğunda ise bu yaklaşımlar artık geçerli değildir. Fayda teorisine bulanık küme teorisini en sade uygulama şekli fayda fonksiyonunu bir bulanık küme olarak yorumlamaktır. Fakat bu yorum, fayda fonksiyonunun bir kesin üyelik fonksiyonu olarak görülmesini sağlar. Böylece problem, simetrik bulanık seçim modeline indirgenir. Yaklaşımda karar vericinin istek seviyelerini bildiği kabulü vardır. Ancak bu kabul pek gerçekçi gözükmemektedir. Dolayısıyla fayda teorisine bulanık küme teorisini uygulama yolu, fayda fonksiyonunu bir bulanık fonksiyon olarak ele almaktır (Zimmermann,1987, Sayfa 24).

Çizelge 2.5 Karar Modelleri (Zimmermann,1987).

	HEDEFLER			
		Kesin	Bulanık küme	Bulanık fonksiyon
KISITLAR	Kesin	1) Geleneksel seçim modeli (non-simetrik model)	2) Simetrik model	3) Bulanık fayda non-simetrik model
	Bulanık	4) Non-simetrik model	5) Simetrik model	6) Bulanık fayda non-simetrik model

2.4 Çok Amaçlı Lineer Programlama (ÇALP)

Verilen lineer kısıtlar altında birden fazla lineer amacı optimize etmeye çalışan problem, Çok Amaçlı Lineer Programlama (ÇALP) problemi olarak adlandırılır. Problemin matematiksel modeli şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
 \text{Amaçlar:} \quad & \max z_1(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_1 \mathbf{x} \\
 & \max z_2(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_2 \mathbf{x} \\
 & \vdots \\
 & \max z_k(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_k \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Kısıtlar:} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad (\text{Lineer eşitsizlik kısıtı}) \\
 & \mathbf{x} \geq 0 \quad (\text{Nonnegatiflik kısıtı})
 \end{aligned}$$

Burada $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$, z_i , $i = 1, 2, \dots, k$ amacının katsayılar vektörü; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$;

$$n - \text{boyutlu karar değişkenleri vektörü; } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} \quad m \times n - \text{boyutlu teknolojik}$$

katsayılar matrisi; $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ m -boyutlu sağ taraf sabitleri vektörüdür.

$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), \dots, z_k(\mathbf{x}))^T = (\mathbf{c}_1 \mathbf{x}, \dots, \mathbf{c}_k \mathbf{x})^T$ k -boyutlu kriter vektörü ve $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k)^T$ $k \times n$ -boyutlu fiyat matrisi olmak üzere ÇALP problemi kısaca:

$$\text{Amaç:} \quad \max \mathbf{z}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{C} \mathbf{x} \tag{2.6}$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{x} \in X \triangleq \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

vektör-maksimizasyon problemi olarak da ifade edilebilir. Burada X kümesine problemin uygun çözümler bölgesi, karar uzayı veya alternatifler uzayı da denilebilir.

Tanım 2.6 (İdeal Nokta):

Her bir $z_i(\mathbf{x})$ amacının optimal değeri $z_i^* = \max \{z_i(\mathbf{x}) \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere $\mathbf{z}_i^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*)$ noktasına *ideal nokta* denir.

Tanım 2.7 (Tam-optimal çözüm) (Complete optimal solution):

$\mathbf{x}^* \in X$ noktasının *tam-optimal çözüm* olması için gerek ve yeter şart $\forall \mathbf{x} \in X$ için $z_i(\mathbf{x}) \leq z_i(\mathbf{x}^*)$, $i = 1, 2, \dots, k$ olacak şekilde $\mathbf{x}^* \in X$ noktasının mevcut olmasıdır.

Ancak genelde amaç fonksiyonları birbirleri ile çeliştiğinden amaç fonksiyonlarının tümünü aynı anda maksimum yapan bir *tam optimal çözüm* daima mevcut değildir. Böylece tam optimal çözüm kavramının yanısıra X karar uzayı'nda *pareto-optimalite* (etkinlik), *zayıf-Pareto optimalite* (zayıf-etkinlik), Z kriter uzayı'nda da *basılamazlık* (nondominated) gibi yeni kavramlar geliştirilmiştir.

Tanım 2.8 (Basılamaz Kriter vektör):

$Z = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{z} = \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \in X\}$ kriter uzayında uygun bölge olmak üzere $\bar{\mathbf{z}} \in Z$ olsun. $\bar{\mathbf{z}}$ nin *basılamaz* olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{z} \geq \bar{\mathbf{z}}$ ve $\mathbf{z} \neq \bar{\mathbf{z}}$ olacak şekilde bir başka $\mathbf{z} \in Z$ nin mevcut olmamasıdır. Aksi halde $\bar{\mathbf{z}}$, *basılan* bir kriter vektördür.

Tanım 2.9 (Pareto-optimal çözüm):

$\mathbf{x}^* \in X$ noktasının *Pareto-optimal çözüm* (*etkin çözüm*) olması için gerek ve yeter şart $\forall i$ için $z_i(\mathbf{x}) \geq z_i(\mathbf{x}^*)$ ve $\exists j$ için $z_j(\mathbf{x}) \neq z_j(\mathbf{x}^*)$ olacak şekilde bir başka $\mathbf{x} \in X$ noktasının mevcut olmamasıdır.

Pareto-optimalliğe ek olarak aşağıdaki zayıf pareto-optimalite kavramı, pareto-optimaliteden biraz daha zayıf bir çözüm kavramı olarak tanımlanır. Bu nedenle literatürde *etkin çözüm* ile *kuvvetli etkin* (*strongly efficient*) çözüm tanımları aynıdır.

Tanım 2.10 (Zayıf Pareto-optimal çözüm) (Zayıf-etkin çözüm):

$\mathbf{x}^* \in X$ noktasının *zayıf Pareto-optimal çözüm* olması için gerek ve yeter şart $i = 1, 2, \dots, k$ için $z_i(\mathbf{x}) > z_i(\mathbf{x}^*)$ olacak şekilde bir başka $\mathbf{x} \in X$ noktasının mevcut olmamasıdır.

Bu tanımlara göre çok amaçlı lineer programlamada X^{CO} , X^P ve X^{WP} sırasıyla tam optimal, pareto-optimal ve zayıf pareto-optimal çözüm kümelerini göstermek üzere

$$X^{CO} \subseteq X^P \subseteq X^{WP}$$

bağıntısı geçerlidir (Sakawa, 1993).

2.4.1 ÇALP için Çözüm Yöntemleri

2.4.1.1 Ölçekleme Metodları (Scalarization Methods): ÇALP'yi ölçeklemede, farklı metotlara bağlı olarak pareto-optimal çözümleri elde etmek üzere birçok metot önerilmektedir.

Bu metotlar arasında en çok bilinenler:

- Ağırlıklandırma metodu,
- Kısıt metodu
- Ağırlıklı min-max metodu

olarak sayılabilir.

2.4.1.1.1 Ağırlıklandırma Metodu: Bir pareto-optimal çözüm elde eden bu metod, orijinal ÇALP problemini çözmek için bütün amaç fonksiyonların ağırlıklı toplamını alarak formülize edilmiş bir ağırlıklı problem çözmektedir. Model kısaca:

$$\text{Amaç:} \quad \max \quad \mathbf{w} z(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^k w_i z_i(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{x} \in X$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, amaç fonksiyonlarına atanmış ağırlık katsayılar vektörüdür ve $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) \geq \mathbf{0}$ olduğu kabul edilir.

(2.7) ağırlıklı probleminin optimal çözümü $\mathbf{x}^*$ ile ÇALP probleminin pareto-optimalite kavramı arasındaki ilişki aşağıdaki teoremlerle verilmektedir.

Teorem 2.2: $\mathbf{x}^* \in X$, bazı $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ için ağırlıklı problemin bir optimal çözümü ise, $\mathbf{x}^*$ ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümüdür.

İspat: Ağırlıklı problemin $\mathbf{x}^*$ optimal çözümü, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü değilse, bazı j 'ler için $z_j(\mathbf{x}) > z_j(\mathbf{x}^*)$ ve $i=1, 2, \dots, k$, $i \neq j$ için $z_i(\mathbf{x}) \geq z_i(\mathbf{x}^*)$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in X$ mevcuttur. $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) > \mathbf{0}$ olduğundan $\sum_i w_i z_i(\mathbf{x}) > \sum_i w_i z_i(\mathbf{x}^*)$ dir.

Fakat bu eşitsizlik, bazı $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ için $\mathbf{x}^*$ 'in ağırlıklı problemin optimal çözümü olması kabulü ile çelişir. $\diamond$

Bu teoremden $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ şartı konulduğunda ağırlıklandırma probleminin çözümünün tekliği garantilenemez. Bu durumda zayıf pareto-optimallikten söz edilir.

Teorem 2.3: $\mathbf{x}^* \in X$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü ise; $\mathbf{x}^*$, bazı $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) \geq \mathbf{0}$ için ağırlıklı problemin bir optimal çözümüdür.

2.4.1.1.2 Kısıt metodu: Bir pareto-optimal çözüm elde eden kısıt metodunda i . amaç maksimum yapılmak üzere seçilir ve diğer amaçlar ε_i $i=1, \dots, k$, $i \neq j$ alt seviyeleri ile kısıtlara katılır. Matematiksel olarak metot:

$$\text{Amaç:} \quad \max z_j(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad z_i(\mathbf{x}) \geq \varepsilon_i \quad i=1, \dots, k, \quad i \neq j$$

$$\mathbf{x} \in X$$

şeklinde LP problemi olarak ifade edilir.

Teorem 2.4: $\mathbf{x}^* \in X$, bazı ε_i $i=1, \dots, k$, $i \neq j$ için (2.8) kısıt probleminin yegane (unique) optimal çözümü ise; $\mathbf{x}^*$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümüdür.

İspat: Kısıt probleminin yegane optimal çözümü $\mathbf{x}^*$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü değilse, bazı l için $z_l(\mathbf{x}) > z_l(\mathbf{x}^*)$ ve $i=1, \dots, k$, $i \neq l$ için $z_i(\mathbf{x}) \geq z_i(\mathbf{x}^*)$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in X$ mevcuttur. Bu ya

$$z_i(\mathbf{x}) \geq z_i(\mathbf{x}^*) \geq \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, k, \quad i \neq j, \quad z_j(\mathbf{x}) > z_j(\mathbf{x}^*),$$

ya da

$$z_i(\mathbf{x}) \geq z_i(\mathbf{x}^*) \geq \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, k, \quad i \neq j, \quad z_j(\mathbf{x}) = z_j(\mathbf{x}^*)$$

demektir. Dolayısıyla bu da $\mathbf{x}^*$ 'in bazı ε_i $i=1, \dots, k$, $i \neq j$ ler için kısıt probleminin yegane optimal çözümü olduğu kabulü ile çelişir. $\diamond$

Bu teoremin ispatından anlaşılacağı gibi, bir çözümün tekliği garantilenemezse, sadece zayıf pareto-optimallik garantilenir.

Teorem 2.5: $\mathbf{x}^* \in X$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü ise; $\mathbf{x}^*$, bazı ε_i $i=1, \dots, k$, $i \neq j$ için kısıt probleminin bir optimal çözümüdür.

İspat: ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü $\mathbf{x}^* \in X$, bazı ε_i $i=1, \dots, k$, $i \neq j$ için kısıt probleminin bir optimal çözümü değilse,

$$z_j(\mathbf{x}) > z_j(\mathbf{x}^*), \quad z_i(\mathbf{x}) \geq z_i(\mathbf{x}^*) = \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, k, \quad i \neq j,$$

olacak şekilde $\mathbf{x} \in X$ mevcuttur. Bu da $\mathbf{x}^*$ 'ın ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü olması ile çelişir. $\diamond$

2.4.1.1.3 Ağırlıklı max-min metodu: Pareto-optimal çözümleri elde eden ağırlıklı max-min metodu:

$$\text{Amaç:} \quad \max \min_{i=1, \dots, k} w_i z_i(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{x} \in X$$

veya eşdeğer olarak

$$\text{Amaç:} \quad \max v \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Kısıtlar:} \quad w_i z_i(\mathbf{x}) &\geq v & i=1, 2, \dots, k \\ \mathbf{x} &\in X \end{aligned}$$

probleminin çözümüdür. Genelliği kaybetmeksizin, $\forall \mathbf{x} \in X$ için $z_i(\mathbf{x}) > 0$ $i=1, 2, \dots, k$ olduğu kabul edilir. $\mathbf{x} \in X$ için $z_i(\mathbf{x}) > 0$ 'ı sağlamayan amaç fonksiyonları için, amaçların bireysel minimumu $z_i^{\min} = \min_{\mathbf{x} \in X} z_i(\mathbf{x})$ kullanılarak ve $\hat{z}_i(\mathbf{x}) = z_i(\mathbf{x}) - z_i^{\min}$ alınarak $\forall \mathbf{x} \in X$ için $\hat{z}_i(\mathbf{x}) > 0$ $i=1, 2, \dots, k$ olur.

Teorem 2.6: $\mathbf{x}^* \in X$, bazı $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) \geq \mathbf{0}$ için ağırlıklı max-min probleminin yegane optimal çözümü ise; $\mathbf{x}^*$, ÇALP'nin bir pareto-optimal çözümüdür.

İspat: Bazı $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) \geq \mathbf{0}$ için ağırlıklı max-min probleminin yegane optimal çözümü $\mathbf{x}^*$, bir pareto-optimal çözüm değilse, bazı j 'ler için $z_j(\mathbf{x}) > z_j(\mathbf{x}^*)$ ve $i=1, 2, \dots, k$, $i \neq j$ için $z_i(\mathbf{x}) \geq z_i(\mathbf{x}^*)$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in X$ mevcuttur. $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) \geq \mathbf{0}$ olduğundan, $w_i z_i(\mathbf{x}) \geq w_i z_i(\mathbf{x}^*)$, $i=1, 2, \dots, k$ ve $\min_{\mathbf{x} \in X} w_i z_i(\mathbf{x}) \geq \min_{\mathbf{x} \in X} w_i z_i(\mathbf{x}^*)$ olur. Bu da $\mathbf{x}^*$ 'ın $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) \geq \mathbf{0}$ için ağırlıklı max-min probleminin yegane optimal çözümü olması ile çelişir. $\diamond$

Bu teoremin ispatından anlaşılacağı gibi, bir çözümün tekliği garantilenemezse, sadece zayıf pareto-optimallik garantilenir.

Teorem 2.7: $\mathbf{x}^* \in X$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü ise; $\mathbf{x}^*$, bazı $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) > \mathbf{0}$ için max-min probleminin bir optimal çözümüdür.

İspat: ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü $\mathbf{x}^* \in X$ için $\mathbf{w}^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_k^*) > \mathbf{0}$ seçerek $w_i^* z_i(\mathbf{x}^*) = v$, $i=1,2,\dots,k$ yi oluşturalım. O halde tüm $\mathbf{x} \in X$ için $z_i(\mathbf{x}) > 0$, $i=1,2,\dots,k$ olduğundan $\mathbf{w}^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_k^*) > \mathbf{0}$ olarak elde edilir. Şimdi $\mathbf{x}^*$ 'ın max-min probleminin bir optimal çözümü olmadığı kabul edildiğinde,

$$w_i^* z_i(\mathbf{x}) > w_i^* z_i(\mathbf{x}^*) = v^*, \quad i=1,2,\dots,k$$

olacak şekilde $\mathbf{x} \in X$ mevcuttur. Bu ifade, $\mathbf{w}^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_k^*) > \mathbf{0}$ olduğundan, $z_i(\mathbf{x}) > z_i(\mathbf{x}^*)$, $i=1,2,\dots,k$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in X$ 'in varlığını gösterir. Bu da $\mathbf{x}^*$ 'ın bir pareto-optimal çözüm olması kabulü ile çelişir. $\diamond$

Teorem 2.4 ve Teorem 2.6'dan ölçekleme problemi için optimal çözüm $\mathbf{x}^*$ 'ın tekliği garantilenemez ise $\mathbf{x}^*$ 'a Pareto-optimallik testi yapmak gerekir.

Pareto-optimallik Testi: $\mathbf{x}^*$ için bu test, karar değişkenleri $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ve $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)^T$ olmak üzere

$$\text{Amaç:} \quad \max \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Kısıtlar:} \quad & z_i(\mathbf{x}) + \varepsilon_i = z_i(\mathbf{x}^*), \quad i=1,2,\dots,k \\ & \mathbf{x} \in X, \quad \varepsilon \geq 0 \end{aligned}$$

LP problemini çözmektir.

Teorem 2.8: (2.11) pareto-optimallik test probleminin $\bar{\mathbf{x}}$ ve $\bar{\varepsilon}$ optimal çözümleri için,

1. Tüm $\bar{\varepsilon}_i = 0$ ise $\bar{\mathbf{x}}$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümüdür.
2. En azından bir $\bar{\varepsilon}_i \geq 0$ ise $\bar{\mathbf{x}}$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü değildir. $\mathbf{x}^*$ 'ın yerine $\bar{\mathbf{x}}$, ölçekleme problemi için bir pareto-optimal çözümdür.

İspat:

1. $\bar{\mathbf{x}}$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü değilse bazı j 'ler için $z_j(\bar{\mathbf{x}}) > z_j(\mathbf{x}^*)$ ve $i=1,2,\dots,k$ $i \neq j$ için $z_i(\bar{\mathbf{x}}) \geq z_i(\mathbf{x}^*)$ olacak şekilde $\bar{\mathbf{x}} \in X$ mevcuttur. Bu da tüm $\bar{\varepsilon}_i = 0$ olduğu kabulü ile çelişir.

2. En azından bir $\bar{\varepsilon}_i \geq 0$ ve $\bar{\mathbf{x}}$, ÇALP probleminin bir pareto-optimal çözümü değilse, bazı j 'ler için $z_j(\mathbf{x}) > z_j(\bar{\mathbf{x}})$ ve $i=1,2,\dots,k$ $i \neq j$ için $z_i(\mathbf{x}) \geq z_i(\bar{\mathbf{x}})$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in X$ mevcuttur. Böylece bazı $\varepsilon' \geq 0$ için $z(\mathbf{x}) + \varepsilon' = z(\bar{\mathbf{x}})$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in X$ mevcuttur. Bu da $\bar{\varepsilon}$ 'nin optimalliği ile çelişir (Sakawa, 1993).

2.4.1.2 Lineer Hedef Programlama: Hedef programlama (HP), çok kriterli karar verme alanında en eski yaklaşımlarından biridir. Başlangıçta tek amaçlı LP uygulaması olarak Charnes ve Cooper tarafından 1955’de, ÇALP’yi ele alan çalışmasında da 1961’de kullanılmıştır. KV’nin amaç fonksiyonları için hedef veya istek seviyelerini belirlediği kabulü yapılmıştır. 1960 ve 1970’lerde Ijiri, Lee ve Ignizio ile popüler olmuştur. Ayrıca araştırma makaleleri 1977’de Charnes-Cooper ve 1983’de Ignizio tarafından sunulmuştur. Bu yöntemde öncelikle KV’den her bir amaç için erişilmesini arzu ettiği bir hedef değer belirlemesi istenir. Yöntemin temel fikri, KV’nin hedef veya istek seviyelerinden sapmaları minimize etmektir. Böylece HP çoğu durumda bir optimize edici çözüm elde etmeden ziyade bir tatmin edici çözüm (satisfying solution) verir.

Genel bir HP problemi:

$$\begin{aligned}
 \text{Hedef } \{c_1 \mathbf{x} = z_1\} & \quad (z_1 \geq t_1) \\
 \text{Hedef } \{c_2 \mathbf{x} = z_2\} & \quad (z_2 \leq t_2) \\
 \text{Hedef } \{c_3 \mathbf{x} = z_3\} & \quad (z_3 = t_3) \\
 \text{Hedef } \{c_4 \mathbf{x} = z_4\} & \quad (z_4 \in [t_4^l, t_4^u])
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Kısıtlar: $\mathbf{x} \in X$

tiplerinin herhangi kombinasyonlarından birisi şeklinde ifade edilir. Burada t_i 'ler hedef seviyeleridir.

HP’nin çözümü için iki temel yaklaşım vardır: “Archimedian yaklaşım” ve “öncelikli (preemptive) yaklaşım”. Literatürde Archimedian yaklaşım “ağırlıklı hedef programlama”, öncelikli yaklaşım “lexicographic hedef programlama” olarak da anılmaktadır.

Archimedian HP

(2.12) deki HP probleminin Archimedian modeli;

$$\text{Amaç:} \quad \min \left\{ w_1^- d_1^- + w_2^+ d_2^+ + w_3^- d_3^- + w_3^+ d_3^+ + w_4^- d_4^- + w_4^+ d_4^+ \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Kısıtlar:} \quad & c_1 x + d_1^- \geq t_1 \\ & c_2 x - d_2^+ \leq t_2 \\ & c_3 x - d_3^+ + d_3^- = t_3 \\ & c_4 x + d_4^- \geq t_4^l \\ & c_4 x - d_4^+ \leq t_4^u \\ & \mathbf{x} \in X \\ & d_i^+, d_i^- \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

şeklinde LP problemidir. Burada w_i ($i = 1, 2, 3, 4$)'ler, pozitif “ceza” ağırlıkları; d_i^+, d_i^- 'ler t_i hedef seviyelerinden sırasıyla artı ve eksi yönde sapma değişkenleridir. Modelde istenmeyen sapma değişkenleri yer almaktadır.

Öncelikli HP

Öncelikli HP’de hedefler önceliklerine göre gruplandırılarak indislenir. Küçük indisli hedef, bir sonraki hedeften sonsuz derecede daha önemlidir.

Örnek bir öncelikli HP problemi;

$$\begin{aligned} \text{Hedef } \{ \mathbf{c}_1 \mathbf{x} = z_1 \} \quad & P_1(z_1 \leq t_1) \\ \text{Hedef } \{ \mathbf{c}_2 \mathbf{x} = z_2 \} \quad & P_2(z_2 \geq t_2) \\ \text{Hedef } \{ \mathbf{c}_3 \mathbf{x} = z_3 \} \quad & P_3(z_3 = t_3) \\ \text{Kısıtlar:} \quad & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{2.13}$$

olsun. Burada P_j , $j = 1, 2, 3$ 'ler, j . öncelik seviyesindeki hedefleri belirtir. Ayrıca $P_j \gg P_{j+1}$ şeklinde olup çok daha büyük (öncelikli) anlamındadır. Bu problem;

Amaç: $\min \{P_1(d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^+ + d_3^-)\}$

Kısıtlar: $\mathbf{c}_1\mathbf{x} - d_1^+ \leq t_1$

$\mathbf{c}_2\mathbf{x} + d_2^- \geq t_2$

$\mathbf{c}_3\mathbf{x} - d_3^+ + d_3^- = t_3$

$\mathbf{x} \in X$

$d_i^+, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3$

şeklinde yazılabilir. Problemi, LP ile çözmek için üç optimizasyon aşaması gereklidir. Birinci aşamada;

Amaç: $\min \{d_1^+\}$

Kısıtlar: $\mathbf{c}_1\mathbf{x} - d_1^+ \leq t_1$

$\mathbf{x} \in X$

$d_1^+ \geq 0$

LP problemi çözülür. Alternatif optimal çözüm varsa, ikinci aşamada;

Amaç: $\min \{d_2^-\}$

Kısıtlar: $\mathbf{c}_1\mathbf{x} \leq t_1 + (d_1^+)^*$

$\mathbf{c}_2\mathbf{x} + d_2^- \geq t_2$

$\mathbf{x} \in X$

$d_2^- \geq 0$

LP problemi çözülür. Burada $(d_1^+)^*$, birinci aşamadaki d_1^+ 'nin optimal değeridir. Alternatif optimal çözüm varsa, üçüncü aşamada;

Amaç: $\min \{d_3^+ + d_3^-\}$

Kısıtlar: $\mathbf{c}_1\mathbf{x} \leq t_1 + (d_1^+)^*$

$\mathbf{c}_2\mathbf{x} \geq t_2 - (d_2^-)^*$

$\mathbf{c}_3\mathbf{x} - d_3^+ + d_3^- = t_3$

$\mathbf{x} \in X$

$d_3^+, d_3^- \geq 0$

LP problemi çözülür. Burada $(d_2^-)^*$, ikinci aşamadaki d_2^- 'nin optimal değeridir. Üçüncü aşamada bulunan herhangi bir çözüm, öncelikli HP'nin çözümüdür.

Tek bir çözümü olan optimizasyon aşamasına rastlandığında diğer aşamalar çözülmez. Böylece alt sıradaki hedefler, HP'nin bulunan çözümlerini etkileyemez. Her bir aşama, daha önceki aşamalardan optimallik bilgisi aldığından, öncelikli HP'yi çözme dinamik bir prosestir (Steuer,1986, Sayfa 285-294, Tiryaki, 1993).

2.4.1.3 Etkileşimli Çok Amaçlı Lineer Programlama: Etkileşimli yöntemler, hesaplama fazları ve ardarda gelen karar verme fazları ile tanımlanır. Her iterasyonda karar verici-analist veya karar verici-bilgisayar diyalogu kurulur. Yöntemlerde ilk olarak bir “uzlaşık çözüm” bulunur. Bu çözüm, çok kriterli problem ile bağlantılı olan tek amaçlı problemin optimal çözümüdür. KV ile diyalog sayesinde kriterlerdeki istek ya da kabul seviyeleri belirlenir, kriterler arası değiş-tokuşlar tayin edilir ve belirli çözümler karşılaştırılır. Elde edilen bilgilerle oluşturulan yeni tek amaçlı problemin optimal çözümü, yeni uzlaşık çözümdür.

Etkileşimli yöntemler “uygun bölgenin daraltılması”, “ağırlıklandırma vektörü uzayının daraltılması”, “kriter konisinin daraltılması” ya da “doğrultu arama” (line search) yöntemleri olarak sınıflandırılabilir.

Daraltılmış uygun bölge yöntemine örnek olarak 1971’de Benayoun, Montgolfier, Tergny ve Laritchev tarafından sunulmuş “STEM (step) Yöntemi” verilebilir. Bu yöntem çok amaçlı sahasında etkisi olan ilk etkileşimli yöntemidir.

Daraltılmış ağırlıklandırma vektör uzayı yöntemine örnek olarak Zionts ve Wallenius tarafından 1976’da sunulmuş ve 1983’de geliştirilmiş “Z-W Yöntemi” verilebilir.

Kriter konisinin daraltılması yöntemine örnek olarak Steuer’in 1977’de verdiği “Daralan Gradyent Koni Yöntemi”, doğrultu arama yöntemine örnek olarak da Geoffrion, Dyer ve Feinberg tarafından 1972’de sunulan “GDF Yöntemi” verilebilir (Steuer, 1986, sayfa 361-389, Tiryaki, 1993).

KV için Pareto-optimal çözüm kümesinden tatmin edici bir çözüm üreten bir etkileşimli algoritma yapısı şu şekilde verebilir. “*” ile işaretli adımlar KV ile etkileşmeyi göstermektedir. Bu etkileşimli metot trade-off (değiş-tokuş) bilgisi içeren bir referans nokta metodu olarak da yorumlanabilir. Burada trade-off ifadesi, KV’nin fayda fonksiyonu bilinmediğinde kendisinden talep edilen bir bilgidir. Yani, kriterlerin erişilen değerleri arasında diğerlerinin lehine birinden yapabileceği fedakarlık miktarı (veya tersi) bilgisidir.

Etkileşimli Çok Amaçlı Lineer Programlama Algoritması:

Adım 0: Verilen kısıtlar altında her bir amaç fonksiyonunun bireysel minimumunu $z_i^{\min} = \min_{\mathbf{x} \in X} z_i(\mathbf{x})$ ve bireysel maksimumunu $z_i^{\max} = \max_{\mathbf{x} \in X} z_i(\mathbf{x})$ hesapla.

Adım 1*: KV'den bireysel minimumu ve bireysel maksimumu dikkate alarak başlangıç referans noktasını seçmesini iste. KV böyle bir noktayı tanımlamayı zor ya da imkansız bulursa bu amaçla ideal nokta $z_i^{\max} = \max_{\mathbf{x} \in X} z_i(\mathbf{x})$ kullanılabilir.

Adım 2: KV tarafından tanımlanmış referans nokta için amaç fonksiyonları arasında trade-off bilgisi ile birlikte pareto-optimal çözüm elde etmek için karşılık gelen max-min problemini çöz.

Adım 3*: KV pareto-optimal çözümün aldığı değerleri tatmin edici bulduysa, DUR. O halde mevcut pareto-optimal çözüm, KV için tatmin edici çözümdür. Aksi halde, KV'den amaç fonksiyonları arasında trade-off oranları ile birlikte amaç fonksiyonlarının şimdiki değerlerini dikkate alarak mevcut referans noktasını güncellemesini iste ve Adım 2'ye geri dön.

KV'ye herhangi bir amaç fonksiyonundaki bir iyileşme ya da artışın, sadece diğer amaçların en azından birinde bir azalma ile mümkün olabileceği kesinlikle anlatılmalıdır (Sakawa,1993).

2.5 Bulanık Çok Amaçlı Lineer Programlama

1978'de H.-J. Zimmermann bulanık lineer programlama yaklaşımını k tane lineer $\max z_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i \mathbf{x}$, $i = 1, 2, \dots, k$ amaç fonksiyonuna sahip ÇALP'ye aşağıdaki gibi genişletmiştir:

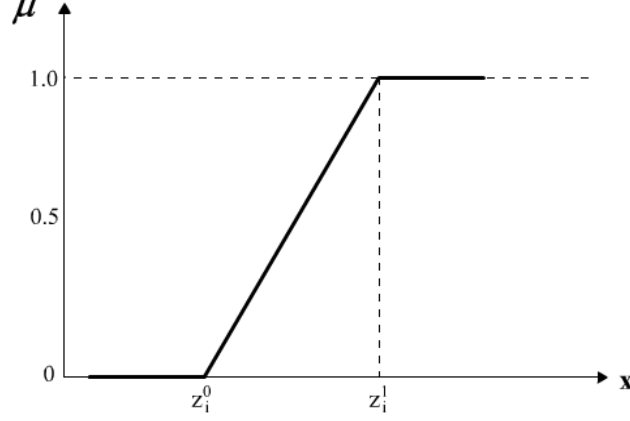
$$\text{Amaçlar:} \quad \max z(\mathbf{x}) \triangleq (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}), \dots, z_k(\mathbf{x}))^T \quad (2.14)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Burada $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ ve $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ olarak tanımlıdır. KV'nin her bir $\max z_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i \mathbf{x}$, $(i = 1, 2, \dots, k)$ amacı için $\mu_i^L(z_i(\mathbf{x}))$ lineer üyelik fonksiyonu;

$$\mu_i^L(z_i(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_i(\mathbf{x}) \leq z_i^0 \\ \frac{z_i(\mathbf{x}) - z_i^0}{z_i^1 - z_i^0}, & z_i^0 \leq z_i(\mathbf{x}) \leq z_i^1 \\ 1, & z_i(\mathbf{x}) \geq z_i^1 \end{cases} \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır. Burada z_i^0 ve z_i^1 değerleri $z_i(\mathbf{x})$ amacının üyelik fonksiyonunun sırasıyla 0 ve 1 olduğu değerleri göstermektedir. Lineer üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 2.17’de gösterilmiştir.



Şekil 2.17 i . amaç fonksiyonu için lineer üyelik fonksiyonu.

Böyle $\mu_i^L(z_i(\mathbf{x}))$, $i = 1, 2, \dots, k$ lineer üyelik fonksiyonları kullanılarak ve Bellman ve Zadeh’ in bulanık karar tanımından orijinal ÇALP problemi:

$$\text{Amaç:} \quad \max \min_{i=1,2,\dots,k} \{\mu_i^L(z_i(\mathbf{x}))\}$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (2.16)$$

olarak yazılabilir. $\min_i \{\mu_i^L(z_i(\mathbf{x}))\} = \lambda$ yardımcı değişkeniyle problem,

$$\text{Amaç:} \quad \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \lambda \leq \mu_i^L(z_i(\mathbf{x})), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (2.17)$$

geleneksel LP problemine dönüşür.

1978’de Zimmermann, $\max_{\mathbf{x} \in X} z_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, k$ ile tanımlanmış bireysel maksimizasyon problemlerinin $\mathbf{x}^{io}$ optimal çözümlerinin varlığını kabul ederek, $\mu_i^L(z_i(\mathbf{x}))$ lineer üyelik fonksiyonunu belirleyen bir yöntem önermiştir. Bireysel maksimum

$$z_i^{\max} = z_i(\mathbf{x}^{io}) = \max_{\mathbf{x} \in X} z_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.18)$$

ile birlikte

$$z_i^m = \min (z_i(\mathbf{x}^{1,o}), \dots, z_i(\mathbf{x}^{i-1,o}), z_i(\mathbf{x}^{i+1,o}), \dots, z_i(\mathbf{x}^{k,o})) \quad i=1,2,\dots,k \quad (2.19)$$

bularak, ayrıca $z_i^1 = z_i^{\max}$ ve $z_i^0 = z_i^m$ alarak, (2.15) deki gibi lineer üyelik fonksiyonunu belirlemiştir. Bu üyelik fonksiyonu için, (2.16) veya (2.17)'nin optimal çözümü yegane ise, bu çözümün yine ÇALP'nin de bir pareto optimal çözümü olduğu kolaylıkla gösterilebilir (Sakawa,1993).

2.5.1 Üyelik fonksiyonlarının değişik biçimleri

Bulanık yaklaşım kullanarak problemlerin çözümünde üyelik fonksiyonunun seçimi önemli bir yere sahiptir. Hesaplamalarda kolaylık sağladığı ve LP direkt olarak uygulanabildiği için genellikle lineer üyelik fonksiyonu tercih edilmektedir. Fakat literatürde lineer üyelik fonksiyonlarının yanı sıra hiperbolik, üstel, ters hiperbolik, parçalı lineer gibi non-lineer yapıda çeşitli üyelik fonksiyonları da mevcuttur. Bu non-lineer yapıdaki üyelik fonksiyonları çözülecek problemi de non-lineer yapılara götürmektedir. Ancak çeşitli dönüşümler yapılarak non-lineer yapıdaki bu problemler genellikle lineer yapılara indirgenebilmektedir. Her ne kadar non-lineer üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı problem çözümleri zor olsa da uygulama alanlarında rastlanan bazı sistemler böyle non-lineer üyelik fonksiyonlarının kullanımını gerektirir. Çünkü böyle non-lineer fonksiyonlar, sistemleri daha iyi modellemektedir. Böylece üyelik fonksiyonunun yapısının seçimi ve problemin yapısına uygunluğu, problemin çözümünü doğrudan etkilemektedir. Örneğin, 1981'de Leberling hiperbolik üyelik fonksiyonlarını, 1981'de Hannan ve 1984'de Nakamura parçalı lineer üyelik fonksiyonlarını, 1986'da Carlsson ve Korhonen üstel üyelik fonksiyonlarını kullanmışlardır (Yenilmez, 2001). Zimmermann 1978'de lineer yapıdaki üyelik fonksiyonlarını kullanarak, bulanık "min" operatör modelini geliştirmiş ve ÇALP'nin tek amaçlı LP problemine indirgenebileceğini göstermiştir. Daha sonra, Leberling 1981'de ÇALP için non-lineer (hiperbolik) yapıli üyelik fonksiyonunu kullanmış ve elde edilen bulanık lineer programlama probleminin çözümlerinin daima etkin olduğunu göstermiştir. ÇALP için Hannan 1981'de parçalı lineer üyelik fonksiyonunu, Lee ve Li 1991'de üstel üyelik fonksiyonunu kullanmışlardır. Ayrıca Dhingra ve Moskowitz 1991'de non-lineer üyelik fonksiyonlarının diğ er tiplerini (üstel, kuadratik ve logaritmik üyelik fonksiyonları) tanımlamışlar ve optimal dizayn problemlerine uygulamışlardır.

Verma ve diğ erleri 1997'de çok amaçlı taşıma problemini çözmek için özel tipteki non-lineer üyelik fonksiyonlarını (hiperbolik ve üstel üyelik fonksiyonları) kullanmışlar ve problem için

optimal uzlaşık çözüm elde etmişlerdir. Elde edilen çözümü, bir lineer üyelik fonksiyon kullanarak bulunan çözüm ile karşılaştırmışlardır.

KV'nin her bir $z_q(\mathbf{x})$, $q=1,...,Q$ amaç fonksiyonuna karşılık $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$ üyelik fonksiyonunun kuruluşu şöyledir:

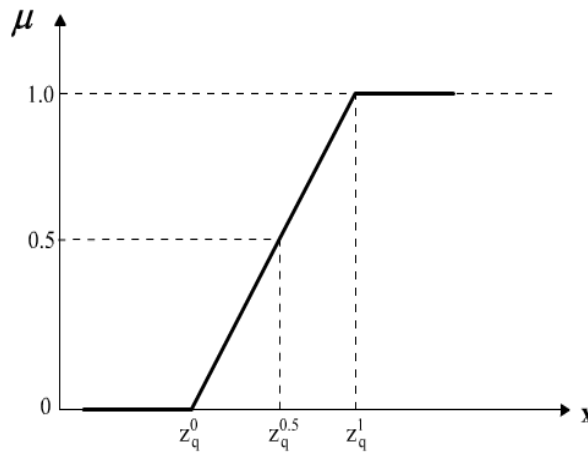
Verilen kısıtlar altında amaçların bireysel maksimum ve minimum z_q^* ve z_q^m değerleri hesaplanır. Üyelik fonksiyonundaki tatmin artış oranı ile birlikte her bir amaç fonksiyonunun maksimum ve minimum değerleri dikkate alınarak KV'den lineer, üstel, hiperbolik, ters hiperbolik ve parçalı lineer tipte fonksiyonlar arasından bir üyelik fonksiyonunu subjektif tarzda seçmesi istenir. Aşağıdaki alt başlıklarda görüleceği üzere bu üyelik fonksiyonlarına ait parametre değerleri KV'den etkileşme yoluyla alınabilir. Açıklamalardaki $a \in [0,1]$ olmak üzere z_q^a ifadesi; z_q^* ve z_q^m aralığında olacak şekilde $z_q(\mathbf{x})$ 'in değerini, $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$ 'de ona karşılık gelen üyelik fonksiyon değerini göstermektedir (Sakawa, 1993).

1. Lineer Üyelik Fonksiyonu

Her bir amaç fonksiyonu için, karşılık gelen lineer üyelik fonksiyonu

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & z_q > z_q^1 \\ \frac{z_q(\mathbf{x}) - z_q^0}{z_q^1 - z_q^0}, & z_q^0 \leq z_q \leq z_q^1, \\ 0, & z_q < z_q^0 \end{cases} \quad q=1,...,Q \quad (2.20)$$

olarak tanımlanır. Bu üyelik fonksiyonu z_q^m ve z_q^* aralığında z_q^0 ve z_q^1 noktaları KV'den istenerek belirlenir. z_q ya göre lineer ve monoton artandır. Şekil 2.18, lineer üyelik fonksiyonunun grafiğini göstermektedir.



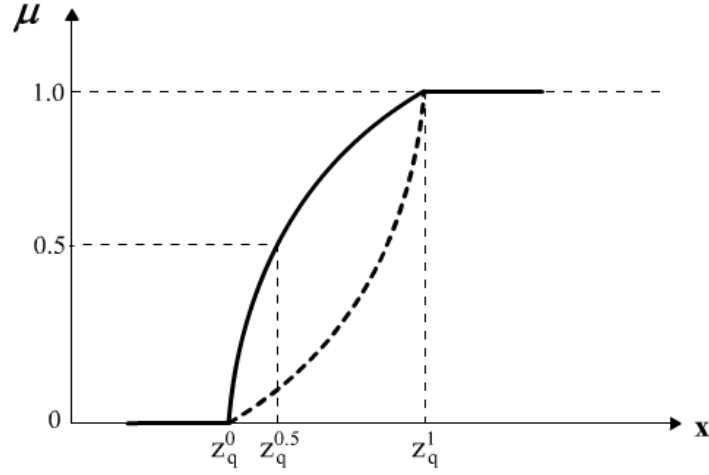
Şekil 2.18 q . amaç fonksiyonu için lineer üyelik fonksiyonu.

2. Üstel Üyelik Fonksiyonu

Her bir amaç fonksiyonu için, karşılık gelen üstel üyelik fonksiyonu:

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_q < z_q^0 \\ a_q \left[1 - \exp \left\{ -\alpha_q (z_q(\mathbf{x}) - z_q^0) / (z_q^1 - z_q^0) \right\} \right], & z_q^0 \leq z_q \leq z_q^1 \\ 1, & z_q > z_q^1 \end{cases}, \quad q = 1, \dots, Q \quad (2.21)$$

ile tanımlanır. Burada parametreler $a_q > 1$, $\alpha_q > 0$ veya $a_q < 0$, $\alpha_q < 0$ dır. KV'den z_q^m ve z_q^* aralığında üç tane (z_q^0 , $z_q^{0.5}$ ve z_q^1) nokta belirlemesi istenerek üstel üyelik fonksiyonu kurulur. α_q 'ya da biçim parametresi (shape parameter) denir. Şekil 2.19, üstel üyelik fonksiyonunun grafiğini göstermektedir.



Şekil 2.19 Üstel üyelik fonksiyonu.

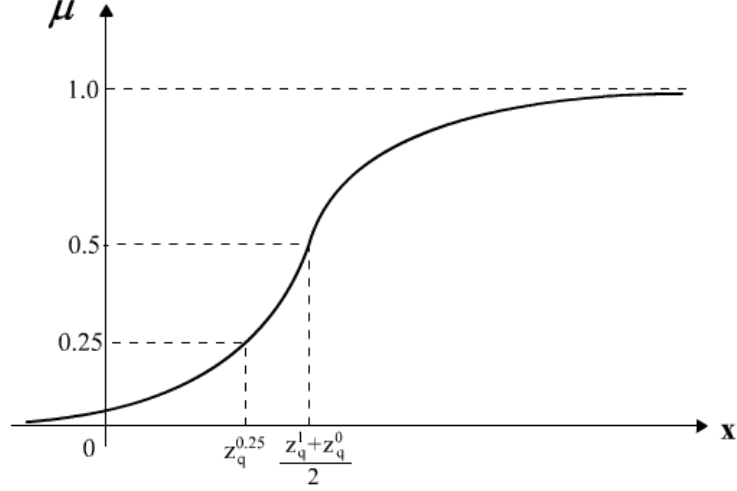
3. Hiperbolik Üyelik Fonksiyonu

Her bir amaç fonksiyonu için karşılık gelen hiperbolik üyelik fonksiyonu:

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_q < z_q^0 \\ \frac{1}{2} \tanh((z_q(\mathbf{x}) - b_q) \cdot \alpha_q) + \frac{1}{2}, & z_q^0 \leq z_q \leq z_q^1 \\ 1, & z_q > z_q^1 \end{cases}, \quad q = 1, \dots, Q \quad (2.22)$$

ile tanımlanır. Burada $\alpha_q > 0$ $q = 1, \dots, Q$ biçim parametresidir. KV'den z_q^m ve z_q^* aralığında iki nokta ($z_q^{0.25}$ ve $z_q^{0.5}$) belirlemesi istenerek hiperbolik üyelik fonksiyonu kurulur. Burada

$b_q = \frac{z_q^* + z_q^m}{2}$ ifadesi büküm noktasıdır. Şekil 2.20, hiperbolik üyelik fonksiyonunun grafiğini göstermektedir.



Şekil 2.20 Hiperbolik üyelik fonksiyonu.

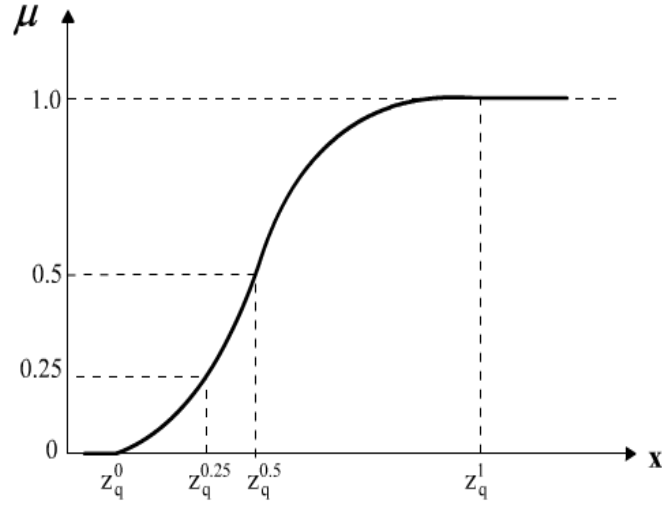
4. Ters Hiperbolik Fonksiyonu

Her bir amaç fonksiyonu için, karşılık gelen ters hiperbolik üyelik fonksiyonu:

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_q < z_q^0 \\ a_q \tanh^{-1}((z_q(\mathbf{x}) - b_q) \cdot \alpha_q) + \frac{1}{2}, & z_q^0 \leq z_q \leq z_q^1 \\ 1, & z_q > z_q^1 \end{cases}, \quad q = 1, \dots, Q \quad (2.23)$$

ile tanımlanır. Burada parametrelerin $a_q > 0$ ve $\alpha_q < 0$ $q = 1, \dots, Q$ olmasıyla üyelik fonksiyonunun monoton artanlığı görülmektedir. KV'den z_q^m ve z_q^* aralığında üç nokta (z_q^0 , $z_q^{0.25}$ ve $z_q^{0.5}$) belirlemesi istenerek ters hiperbolik üyelik fonksiyonu kurulur. Burada α_q

biçim parametresi ve $b_q = \frac{z_q^* + z_q^m}{2}$ ifadesi de büküm noktasıdır. Şekil 2.21, ters hiperbolik üyelik fonksiyonunun grafiğini göstermektedir.



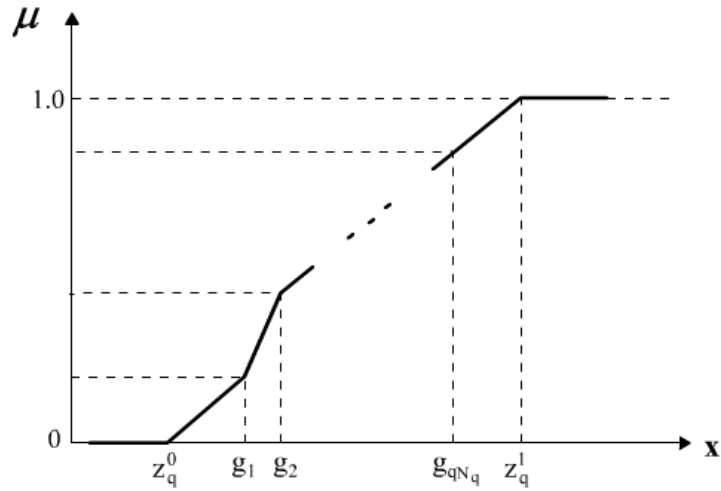
Şekil 2.21 Ters hiperbolik üyelik fonksiyonu.

5. Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonu

Her bir amaç fonksiyonu için karşılık gelen parçalı lineer üyelik fonksiyonu

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) = t_{qr} z_q(\mathbf{x}) + s_{qr} \quad , \quad g_{qr-1} \leq z_q(\mathbf{x}) \leq g_{qr}$$

ile tanımlanır. Burada t_{qr} ve s_{qr} ’ler $[g_{q,r-1}, g_{qr}]$ aralığında sırasıyla $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$ ’nin eğimini ve μ ekseninde kestiği parçasını göstermektedir. KV’den z_q^m ve z_q^* aralığında amaç fonksiyonlarının birçok değerlerine karşılık üyelik derecelerini belirlemesi istenir. Her bir alt aralıkta lineer üyelik fonksiyonu kurularak $[z_q^0, z_q^1]$ aralığında parçalı lineer üyelik fonksiyonu oluşturulur. N_q , $[z_q^m, z_q^*] = [z_q^0, z_q^1]$ aralığında parçalanma sayısı olmak üzere Şekil 2.22, parçalı lineer üyelik fonksiyonunun grafiğini göstermektedir.



Şekil 2.22 Parçalı lineer üyelik fonksiyonu.

Her bir amaç fonksiyonu için üyelik fonksiyonları belirlendikten sonra ve 1970’de Bellman ve Zadeh’in önerdiği bulanık karar uygulanarak çözülecek problem:

$$\max_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \min_{q=1,2,\dots,Q} (\mu_q(z_q(\mathbf{x}))) \right\}$$

veya eşdeğer olarak

$$\text{Amaç:} \quad \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mu_q(z_q(\mathbf{x})) \geq \lambda$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \lambda \geq 0$$

yapısındadır. Ancak beş tip üyelik fonksiyonunun her biri için bu problem, bir non-lineer programlama problemidir. Bu problemi LP’yi kullanarak çözmek için Sakawa (Sakawa, 1993), beş tip üyelik fonksiyonunun yer aldığı her bir kısıt denkleminde aşağıdaki dönüşümleri yapmıştır:

$$1. (z_q(\mathbf{x}) - z_q^0) / (z_q^1 - z_q^0) \geq \lambda \text{ dır. Çünkü } z_q^1 > z_q^0 \text{ olduğundan}$$

$$z_q(\mathbf{x}) \geq \lambda (z_q^1 - z_q^0) + z_q^0$$

elde edilir.

$$2. a_q \left[1 - \exp \left\{ -\alpha_q (z_q(\mathbf{x}) - z_q^0) / (z_q^1 - z_q^0) \right\} \right] \geq \lambda \text{ dır. } a_q > 1 \text{ ve } \alpha_q > 0 \text{ durumunda}$$

$$(a_q - \lambda) / a_q \geq \exp \left\{ -\alpha_q (z_q(\mathbf{x}) - z_q^0) / (z_q^1 - z_q^0) \right\}$$

olur. Logaritma alınarak yeniden düzenlenerek,

$$z_q(\mathbf{x}) \geq z_q^0 - \left\{ (z_q^1 - z_q^0) / \alpha_q \right\} \log \left\{ (a_q - \lambda) / a_q \right\}$$

elde edilir. Benzer şekilde $a_q < 0$ ve $\alpha_q < 0$ durumunda da aynı sonuçlar bulunur.

$$3. \frac{1}{2} \tanh((z_q(\mathbf{x}) - b_q) \cdot \alpha_q) + \frac{1}{2} \geq \lambda \text{ dır. “tanh” ve “tanh}^{-1}\text{” fonksiyonları, kesin monoton}$$

artan olduğundan,

$$(z_q(\mathbf{x}) - b_q) \cdot \alpha_q \geq \tanh^{-1}(2\lambda - 1)$$

olduğu görülür. $\alpha_q > 0$ için

$$z_q(\mathbf{x}) \geq b_q + \frac{1}{\alpha_q} \tanh^{-1}(2\lambda - 1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

4. $a_q \tanh^{-1}((z_q(\mathbf{x}) - b_q) \cdot \alpha_q) + \frac{1}{2} \geq \lambda$ dır. “ $\tanh$ ” ve “ $\tanh^{-1}$ ” fonksiyonları, kesin monoton artan olduğundan ve $a_q > 0$, $\alpha_q > 0$ için

$$z_q(\mathbf{x}) \geq b_q + \frac{1}{\alpha_q} \tanh\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) / a_q\right)$$

olduğu görülür.

5. $f(g_{qr-1}) \leq \lambda \leq f(g_{qr})$ için $t_{qr} z_q(\mathbf{x}) + s_{qr} \geq \lambda$ dır. $t_{qr} > 0$ olduğundan

$$f(g_{qr-1}) \leq \lambda \leq f(g_{qr}) \text{ için } z_q(\mathbf{x}) \geq (\lambda - s_{qr}) / t_{qr}$$

olduğu görülür.

Beş tip üyelik fonksiyonu için her bir $\mu_q(z_q(\mathbf{x})) \geq \lambda$ kısıtı yukarıda tanımlanmış formlarına dönüştürülürse aşağıdaki problem elde edilir:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $z_q(\mathbf{x}) \geq \lambda (z_q^1 - z_q^0) + z_q^0$

$$z_q(\mathbf{x}) \geq z_q^0 - \left\{ (z_q^1 - z_q^0) / \alpha_q \right\} \log \left\{ (a_q - \lambda) / a_q \right\}$$

$$z_q(\mathbf{x}) \geq b_q + \frac{1}{\alpha_q} \tanh^{-1}(2\lambda - 1)$$

$$z_q(\mathbf{x}) \geq b_q + \frac{1}{\alpha_q} \tanh\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) / a_q\right)$$

$$z_q(\mathbf{x}) \geq (\lambda - s_{qr}) / t_{qr}, \quad f(g_{qr-1}) \leq \lambda \leq f(g_{qr}) \text{ için}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Bu modelde λ değeri sabit tutulduğunda problemin bir lineer eşitsizlikler kümesine indirgenebileceğine dikkat edelim. λ^* optimal çözümünü elde etme süreci, problemin kısıt denklemlerini sağlayan kabul edilebilir bir küme mevcut olacak şekilde λ 'nın maksimum değerini belirlemeye eşdeğerdir. $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğundan bu problemi çözmek için Sakawa, ikiye bölme yöntemi ile LP'nin faz 1'ini kombine eden bir yöntem önermiştir (Sakawa, 1993).

3. LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA (LKP)

3.1 Tek Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi

1960'da Macar matematikçisi Bela Martos tarafından “hiperbolik programlama problemi” formüle edilmiş ve bu problem İngilizce literatüründe “lineer kesirli programlama problemi” olarak anılmıştır. 1981'de Schaible tarafından kesirli programlama ve onun uygulamalarıyla ilgili birçok çalışma yayınlanmıştır (Schaible, 1981). Bu konu halen popülerliğini sürdürmektedir. Stancu Minasian 1960'dan günümüze kadar altı tane kesirli programlama bibliyografyası yayınlamıştır (Stancu Minasian, 1981, 1983, 1985, 1992, 1999, 2006). Literatürdeki bazı uygulama alanları ve mümkün lineer kesirli amaçlara örnek olarak:

- Kaynak dağıtım problemlerinde yatırım kazancı yani kâr/sermaye oranını maksimize etmek, kâr/maliyet oranını maksimize etmek,
- üretim planlama problemlerinde yatırım fonları ve diğer kaynak kısıtları altında işletme kârının işletme maliyetine oranını maksimize etmek,
- optimal kesme problemlerinde mevcut kısıtlar altında artık malların (firelerin) kullanılan hammadde miktarına oranını minimize etmek,
- endüstriyel alanda mamül verimliliğini maksimum yapmak; projelere işgüçlerinin atanması probleminde “kâr/birim zaman”, “kâr/maliyet” gibi oranları maksimize etmek,
- yatırım seçimi problemlerinde kazanç oranını, kârın riske oranını maksimum yapmak,
- deniz taşıma problemlerinde taşınacak mal miktarları ve gemi taşıma kapasitesi kısıtları altında kâr/maliyet oranını maksimize etmek,
- ürün karışımı problemlerinde karışımı oluşturan bileşenlerden farklı oranlarda kullanarak ve istenen şartlara uyarak gelir/maliyet oranını maksimize etmek,
- üniversite planlama problemlerinde öğrenci/öğretmen, maliyet/öğrenci gibi oranları minimum yapmak,
- pazarlama ve medya seçim problemlerinde pazar payı oranını maksimum yapmak, reklam harcamaları/satışlar oranını minimum yapmak,
- hastane planlama problemlerinde maliyet/hasta, hemşire/hasta gibi oranları minimum yapmak, faydalanma oranını maksimum yapmak

vs. verilebilir.

3.1.1 Tek Amaçlı LKP Probleminin Formülasyonu

Genel bir tek amaçlı LKP problemi:

$$\text{Amaç:} \quad \max \quad z(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{x} + p_0}{\mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0} \quad (3.1)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{x} \in X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ ve $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$ ler sırasıyla pay ve paydadaki lineer fonksiyonların katsayılar vektörleri, $\mathbf{x}$ karar değişkenleri vektörü, p_0 ile d_0 sabitler ve $\mathbf{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$, $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ $m \times n$ katsayılar matrisidir. Yapılan kabuller:

- $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$
- $\forall \mathbf{x} \in X$ için $D(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0 > 0$

dir.

$z(\mathbf{x})$, iki lineer fonksiyonun oranı olarak lineer olmayan bir yapıda olmasına rağmen, keyfi bir $\bar{z}$ -yüzey eğrisi için,

$$\frac{\mathbf{p}^T \mathbf{x} + p_0}{\mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0} = \bar{z}$$

$$(\mathbf{p} - \bar{z} \mathbf{d})^T \mathbf{x} = d_0 \bar{z} - p_0$$

lineer denklemi elde edilir. Bu nedenle tek amaçlı LKP probleminin optimum çözümü varsa, X 'in uç noktalarından en azından birinde oluşur.

3.1.2 Tek Amaçlı LKP Probleminin Çözüm Yöntemleri

Tek amaçlı LKP problemlerinin çözümü için çeşitli yöntemler mevcut olup aşağıda en temel olanları verilecektir.

3.1.2.1 Charnes-Cooper Dönüşümü

Charnes ve Cooper tarafından 1962'de geliştirilmiştir. (3.1)'deki tek amaçlı LKP probleminde,

$$\rho = \frac{1}{\mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0}$$

değişken dönüşümü yapılır. Bu dönüşümle amaç fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^n (p_i x_i \rho) + p_0 \rho$$

olur. Her i için $y_i = x_i \rho$ dönüşümleri de yapılırsa, tek amaçlı LKP problemi

$$\text{Amaç:} \quad \max \{ \mathbf{p}^T \mathbf{y} + p_0 \rho \}$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{b} \rho \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{y} + d_0 \rho = 1$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \rho \in \mathbb{R}$$

şeklinde $n+1$ değişkenli, $m+1$ kısıtlı LP problemine dönüşür (Steuer, 1986; Tiryaki, 1993).

Teorem 3.1: Lineer kesirli amaç fonksiyonu $z(\mathbf{x})$ maksimum değerini, $\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ 'ın uygun taban çözümünde alır.

İspatında şu yardımcı teorem gereklidir.

Yardımcı Teorem 3.1:

$$\mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{b} \rho \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{y} + \beta \rho = \gamma$$

$$\rho, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad (\gamma \neq 0, \text{ spesifik bir sayıdır})$$

kısıtlarını sağlayan her $\mathbf{y}, \rho$ çözümlerinde $\rho > 0$ dır (Tiryaki, 1993).

Örnek 3.1:

$$\text{Amaç:} \quad \max \quad z(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{8x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4}{2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7}$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3,$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

tek amaçlı LKP problemini ele alalım. Kısıtların oluşturduğu uygun bölge boş kümeden farklı

ve bu küme üzerinde $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7 > 0$ olduğundan $\rho = \frac{1}{2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7}$ değişken

dönüşümü yapılır. Böylece problem:

Amaç: $\max z(\mathbf{x}) = 8y_1 + 9y_2 + 4y_3 + 4\rho$

Kısıtlar: $y_1 + y_2 + 2y_3 - 3\rho \leq 0,$

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 - 4\rho \leq 0$$

$$5y_1 + 3y_2 + y_3 - 15\rho \leq 0$$

$$2y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 7\rho = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j=1,2,3, \quad \rho > 0.$$

şeklindeki LP problemine indirgenir. Bu problem çözülerek $y_1^* = \frac{1}{15}, y_2^* = \frac{2}{15}, y_3^* = \frac{0}{15},$

$\rho^* = \frac{1}{15}$ bulunur. $\mathbf{y}^* = (\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0, \frac{1}{15})^T$ kullanılarak optimal çözüm $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* / \rho^* = (1, 2, 0)^T$

olur. $P(\mathbf{x}^*) = 30, D(\mathbf{x}^*) = 15$ 'den de amaç değeri $z(\mathbf{x}^*) = 2$ olarak elde edilir (Bajalinov, 2003).

3.1.2.2 Güncelleştirilmiş (Updated) Amaç Fonksiyonu Yöntemi

Bitran ve Novaes tarafından 1973'de verilen bu yöntemde, kesirli amaç fonksiyonunun $\bar{\mathbf{x}}$ noktasındaki bölgesel (local) gradyenti

$$\nabla z(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{(\mathbf{d}^T \bar{\mathbf{x}} + d_0)\mathbf{p} - (\mathbf{p}^T \bar{\mathbf{x}} + p_0)\mathbf{d}}{(\mathbf{d}^T \bar{\mathbf{x}} + d_0)^2}$$

periyodik olarak yeniden hesaplanır. Bu gradyentler, bir LP probleminin amaç fonksiyon katsayıları olarak alınır ve böylece bir dizi LP problemi çözülerek LKP problemi çözülür.

Yöntemin algoritması şöyledir:

Adım 1: $i = 0$ al.

Adım 2: $i = i + 1$ yap.

Adım 3: $\mathbf{x}^{(i)}$ noktasında amaç fonksiyonunun bölgesel gradyentini hesapla.

Adım 4: $\max \{ \nabla z(\mathbf{x}^i) \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X \}$ problemini çözerek $\mathbf{x}^{(i+1)}$ uç noktasını bul.

Adım 5: $\mathbf{x}^{(i+1)} \neq \mathbf{x}^{(i)}$ ise Adım 2'ye git, aksi halde Adım 6'ya git.

Adım 6: $\mathbf{x}^{(i)}$, LKP probleminin optimal çözümüdür, DUR.

Bu yöntem X 'in sınırsız bölge olması durumunda yakınsamayabilir (Steuer,1986, Tiryaki, 1993).

3.1.2.3 Dinkelbach Algoritması

Tek amaçlı LKP probleminin çözümü için W. Dinkelbach tarafından geliştirilen parametrik bir yaklaşımdır. Bu metot, yani Dinkelbach Algoritması, bir dizi

$$F(\lambda) = \max_{\mathbf{x} \in X} \{P(\mathbf{x}) - \lambda D(\mathbf{x})\}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

parametrik problemini çözmeye karşılık gelir.

Algoritmayı vermeden önce aşağıdaki yardımcı teoremi verelim. Bu teorem, algoritmanın teorik temelini oluşturmada önemli bir rol oynamaktadır.

Teorem 3.2: $\mathbf{x}^*$ vektörünün, (3.1)'deki tek amaçlı LKP probleminin optimal çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^* = \frac{P(\mathbf{x}^*)}{D(\mathbf{x}^*)} \quad (3.3)$$

olacak şekilde

$$F(\lambda^*) = \max_{\mathbf{x} \in X} \{P(\mathbf{x}) - \lambda^* D(\mathbf{x})\} = 0 \quad (3.4)$$

olmasıdır.

İspat: $\mathbf{x}^*$ vektörü, (3.1)'deki tek amaçlı LKP probleminin optimal çözümü ise

$$\forall \mathbf{x} \in X \text{ için } \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \leq \frac{P(\mathbf{x}^*)}{D(\mathbf{x}^*)} = \lambda^*$$

demektir. Buradan

$$\forall \mathbf{x} \in X \text{ için } P(\mathbf{x}) - \lambda^* D(\mathbf{x}) \leq 0$$

dır. (3.3) ifadesi dikkate alınarak,

$$\max_{\mathbf{x} \in X} \{P(\mathbf{x}) - \lambda^* D(\mathbf{x})\} = 0$$

elde edilir. Tersine olarak, $\mathbf{x}^*$ vektörü (3.4) probleminin bir optimal çözümü ise,

$$\forall \mathbf{x} \in X \text{ için } P(\mathbf{x}) - \lambda^* D(\mathbf{x}) \leq P(\mathbf{x}^*) - \lambda^* D(\mathbf{x}^*) = 0$$

olur. Bu da, $\mathbf{x}^*$ vektörünün (3.1)'deki tek amaçlı LKP probleminin bir optimal çözümü olması demektir.

◇

Bu teorem, tek amaçlı LKP probleminin optimal çözümlerini hesaplamak için bir prosedür verir. $\forall \mathbf{x} \in X$ için $D(\mathbf{x}) > 0$ olduğundan

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = -D(\mathbf{x}) < 0$$

dır. Böylece $F(\lambda)$, λ 'ya göre monoton azalandır ve algoritmanın adımları şöyledir:

Dinkelbach Algoritması:

Adım 0: $\mathbf{x}^{(0)} \in X$ al. $\lambda^{(1)} := \frac{P(\mathbf{x}^{(0)})}{D(\mathbf{x}^{(0)})}$ hesapla ve $k := 1$ al;

Adım 1: $\mathbf{x}^{(k)} := \arg \max_{\mathbf{x} \in X} \{P(\mathbf{x}) - \lambda^{(k)} D(\mathbf{x})\}$ belirle;

Adım 2: Eğer $F(\lambda^{(k)}) = 0$ ise $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k)}$ optimal çözüm; DUR.

Adım 3: $\lambda^{(k+1)} := \frac{P(\mathbf{x}^{(k)})}{D(\mathbf{x}^{(k)})}$ hesapla; $k := k + 1$ al; Adım 1 e git.

Örnek 3.2:

$$\text{Amaç:} \quad \max z(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3x_1 + 2x_2 + 15}$$

$$\begin{aligned} \text{Kısıtlar:} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

tek amaçlı LKP problemine Dinkelbach Algoritmasını uygulayalım.

Adım 0: $\mathbf{x} = (0,0)^T$ vektörü, problemin tüm kısıtlarını sağladığından, $\mathbf{x}^{(0)} \in X$ başlangıç noktası olarak alınsın. Böylece $\mathbf{x} = (0,0)^T$ için,

$$\lambda^{(1)} := \frac{P(\mathbf{x}^{(0)})}{D(\mathbf{x}^{(0)})} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

elde edilir.

Adım 1: (3.5)'in kısıtlarıyla

$$\max \{P(\mathbf{x}) - \lambda^{(1)} D(\mathbf{x})\} = \max \left\{ P(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} D(\mathbf{x}) \right\} = \max \left\{ \frac{1}{3} x_2 \right\}$$

LP problemi çözülerek,

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0,3)^T, \quad F(\lambda^{(1)}) = 1$$

elde edilir.

Adım 2: $F(\lambda^{(1)}) \neq 0$ dır.

Adım 3:

$$\lambda^{(2)} := \frac{P(\mathbf{x}^{(1)})}{D(\mathbf{x}^{(1)})} = \frac{1 \times 3 + 5}{2 \times 3 + 15} = \frac{8}{21}, \text{ sonra}$$

$k := k + 1 = 2$ alınır ve Adım1'e gidilir.

Adım 1: (3.5)'in kısıtlarıyla

$$\begin{aligned} \max \{P(\mathbf{x}) - \lambda^{(2)} D(\mathbf{x})\} &= \max \left\{ \left(1 - \frac{8}{21} \times 3\right)x_1 + \left(1 - \frac{8}{21} \times 2\right)x_2 + \left(5 - \frac{8}{21} \times 15\right) \right\} \\ &= \max \left\{ -\frac{1}{7}x_1 + \frac{5}{21}x_2 - \frac{5}{7} \right\} \end{aligned}$$

LP problemi çözülerek optimal çözüm $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 3)^T$ ve $F(\lambda^{(2)}) = 0$ elde edilir.

Adım 2: $F(\lambda^{(2)}) = 0$ olduğundan $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(2)}$ vektörü optimal çözümdür; Algoritma son bulur.

Algoritmaya göre tek amaçlı LKP probleminin optimal çözümü $\mathbf{x}^* = (0, 3)^T$ ve optimal amaç değeri de $z(\mathbf{x}^*) = \frac{8}{21}$ olur (Bajalinov, 2003).

LKP problemine parametrik yaklaşım olan Dinkelbach Algoritması literatürde çeşitli alanlarda uygulama bulmuştur. Bir finans uygulaması örneği Özdemir ve Giresunlu tarafından “Portföy seçimi için bir algoritma önerisi” isimli çalışmada verilmiştir (Özdemir ve Giresunlu, 1998). Bu çalışmada, E portföyün beklenen getirisi, V portföyün riski olmak üzere, portföy seçiminde kullanılan E/V modeli Markowitz'in $\lambda E - V$ modeline dönüştürülmüştür. Bu işlem sırasında, kesirli programlama probleminin parametrik çözümü olan Dinkelbach yönteminden esinlenmiş ve ikiye bölme yöntemi kullanılarak portföy seçimi için bir algoritma sunulmuştur. Ayrıca E/V modeli ile $\lambda E - V$ modelinin aynı etkin çözümlere sahip olduğu da teoremlerle ispatlanmıştır.

Şimdi LKP probleminin çok amaçlı versiyonunu kısaca inceleyelim:

3.2 Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama (ÇALKP) Problemi

ÇALKP problemi:

$$\text{Amaçlar:} \quad \max z_q(\mathbf{x}) = \frac{P_q(\mathbf{x})}{D_q(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{p}_q^T \mathbf{x} + p_{q0}}{\mathbf{d}_q^T \mathbf{x} + d_{q0}}, \quad q = 1, \dots, Q \quad (3.6)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{x} \in X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \right\}$$

şeklindedir. Burada X , ÇALKP probleminin uygun çözümler bölgesi olmak üzere yapılan kabuller:

- $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ kapalı ve sınırlı bir küme (Kompakt küme)
- $\forall \mathbf{x} \in X$ ve her $q = 1, \dots, Q$ için $D_q(\mathbf{x}) = \mathbf{d}_q^T \mathbf{x} + d_{q0} > 0$

dir. Birbiriyle zıtlaşan ve aynı anda optimize edilemeyen birden fazla lineer kesirli amaca sahip problemler, deniz taşımacılığı, fabrika planlama, eğitim planlama, şebeke akışları gibi alanlarda uygulama bulmaktadır.

Bilindiği gibi tek amaçlı programlamadaki optimal çözüm kavramının yerine, çok kriterli programlamada etkin (efficient) veya Pareto-optimal çözüm kavramları kullanılmaktadır. Etkin çözümün standart tanımı olan kuvvetli etkinlik (strongly-efficient), ÇALKP’da yeterli değildir ve zayıf etkinlik (weakly efficient) (zayıf Pareto-optimal) kavramı dikkate alınmaktadır. Teorik olarak, ÇALKP probleminin kuvvetli-etkin çözümlerini bulma arzu edilir. Ancak literatürdeki çözüm algoritmaları, zayıf etkin çözümler kümesi E^W yı bulmaya çalışırlar. Çünkü E^W kümesi daima kapalıdır ve tepeleri bağlantılı graf oluşturmaktadır (Kornbluth ve Steuer, 1981a,1981b; Benson, 1985; Nykowski ve Zolkiewski, 1985; Tiryaki, 1993).

Bu problemi çözen çeşitli yaklaşımlardan bazıları aşağıdadır:

Ağırlıklı Toplamlar (Weighted sum) Yaklaşımı: (3.6)’daki ÇALKP problemindeki amaç fonksiyonları KV’nin tercihlerini ifade eden $w_q > 0$ ağırlıkları ile birleştirilerek

$$\max z'(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^Q w_q z_q(\mathbf{x})$$

amaç fonksiyonu (KV’nin tercih fonksiyonu) elde edilir ve $\mathbf{x} \in X$ üzerinde çözülür. Burada $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_Q)$ ağırlık vektörü ve $\mathbf{x}^* \in X$ de tercih edilen çözümdür. Ayrıca tercih fonksiyonunun, z_q ’ların yapısından dolayı, yüksek mertebeden bir non-lineer fonksiyon olduğuna dikkat edilmelidir.

Dilsel (Lexicographic) Yaklaşım: z_q , $q = 1, \dots, Q$ lineer kesirli fonksiyonları için öncelik sırası:

$$z_{q_1}(\mathbf{x}) \geq z_{q_2}(\mathbf{x}) \geq \dots \geq z_{q_Q}(\mathbf{x})$$

şeklinde olsun. O halde ardışık olarak çözülecek optimizasyon problemleri şöyledir:

$$(q_1): \max_{\mathbf{x} \in X_1} z_{q_1}(\mathbf{x})$$

$$(q_2): \max_{\mathbf{x} \in X_2} z_{q_2}(\mathbf{x})$$

$\vdots$

$$(q_Q): \max_{\mathbf{x} \in X_Q} z_{q_Q}(\mathbf{x})$$

Burada

$$X_1 = X$$

$$X_2 = \left\{ \mathbf{x} \in X_1 \mid z_{q_1}(\mathbf{x}) = z_{q_1}^* \right\},$$

$$X_3 = \left\{ \mathbf{x} \in X_2 \mid z_{q_2}(\mathbf{x}) = z_{q_2}^* \right\},$$

$\vdots$

$$X_Q = \left\{ \mathbf{x} \in X_{Q-1} \mid z_{q_{Q-1}}(\mathbf{x}) = z_{q_{Q-1}}^* \right\}$$

ve $z_{q_i}^*$ değeri, (q_i) $i=1,2,...,Q-1$ probleminin optimal amaç değeridir.

Her iki yaklaşım, eğer mevcutsa, etkin çözüm üretir ve *etkin sınır (efficient frontier)* olarak bilinen bütün E^S etkin noktalar kümesini üretmek için problemde yine daha önce ifade edilen kabuller geçerlidir.

ÇALKP problemleri için birçok araştırmacı tarafından önerilen temel yaklaşım, orijinal problemin bir ÇALP problemine indirgenmesine dayanmaktadır. Örneğin, 1985’de Nykowski ve Zolkiewski (3.6)’daki orijinal kesirli amaç fonksiyonları yerine tüm $\mathbf{x} \in X$ için $z_q(\mathbf{x}) > 0$, $q = 1,...,Q$ yaparak

$$\max_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}) = \left(P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), ..., P_Q(\mathbf{x}), -D_1(\mathbf{x}), -D_2(\mathbf{x}), ..., -D_Q(\mathbf{x}) \right)$$

çok amaçlı LP problemini kurmuşlardır. Ayrıca Luhandjula tarafından 1984’de, Dutta ve arkadaşları tarafından 1993’de bulanık yaklaşımlar önerilmiştir.

1997’de Stancu-Minasian, (3.6)’daki orijinal ÇALKP problemiyle ÇALP problemi arasında aşağıdaki ilişkiyi kurmuştur:

$$\mathbf{x}^{(0)} \in X \text{ noktasını alarak}$$

$$h_{qj} = p_{qj} D(\mathbf{x}^{(0)}) - d_{qj} P(\mathbf{x}^{(0)}), \quad q = 1,...,Q, \quad j = 1,2,...,n$$

katsayıları bulunur ve

$$G_q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n h_{qj} x_j, \quad q = 1,...,Q$$

olmak üzere

$$\begin{array}{ll}
 \text{Amaç:} & \max \mathbf{G}(\mathbf{x}) = (G_1(\mathbf{x}), G_2(\mathbf{x}), \dots, G_Q(\mathbf{x})) \quad , \quad q = 1, \dots, Q \\
 \text{Kısıtlar:} & \mathbf{x} \in X
 \end{array} \tag{3.7}$$

ÇALP problemi çözülür.

Aşağıdaki teorem, (3.6)'daki orijinal ÇALKP problemi ile (3.7)'deki ÇALP problemi arasındaki temel ilişkiyi kurar.

Teorem 3.3: $\mathbf{x}^{(0)} \in X$ vektörünün (3.6)'daki orijinal ÇALKP probleminin etkin çözümü olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{x}^{(0)} \in X$ vektörünün (3.7)'deki ÇALP probleminin bir etkin çözümü olmasıdır (Bajalinov, 2003).

4. TAŞIMA PROBLEMLERİ

4.1 Klasik Taşıma Problemi

Klasik Taşıma Problemi ya da sadece Taşıma Problemi (TP), tek tip bir ürünün kısıtlı kapasiteye sahip üretim merkezlerinden (fabrika, kaynak, arz noktası, vs) talepleri belli olan tüketim merkezlerine (depo, pazar, hedef, talep noktası, vs) maliyeti minimum ya da kârı maksimum yapacak şekilde dağıtımını yapma problemleridir. Taşıma modeli ilk kez Frank L. Hitchcock tarafından 1941 yılında önerilmiştir. Daha sonra 1947’de Koopmans’ın “Taşıma sistemlerinden optimum yararlanma” adlı makalesinde geliştirdiği tekniklerle, ayrıca G. B. Dantzig’in primal simpleks taşıma yöntemi adı altında geliştirdiği simpleks algoritma ile, 1954’de de Charnes ve Cooper’ın TP’nin optimal çözümünü bulan atlama taşı yöntemi ile yaygınca kullanılmaya başlanmıştır (Taha, 2000).

TP özel yapılı bir LP problemi olup, kendisine ait çözüm yöntemleri mevcuttur. TP ve geliştirilen çözüm yöntemleri, lojistikte, tedarik zinciri yönetiminde, maliyetlerin azaltılması ve servis hizmetlerinin iyileştirilmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

4.1.1 TP Formülasyonu (Sezginman, 1993)

Kapasiteleri $a_1, a_2, \dots, a_m$ olan m tane kaynak noktası ve kapasiteleri $b_1, b_2, \dots, b_n$ olan n tane varış noktası olmak üzere, TP’de aşağıdaki varsayımlar geçerlidir:

Varsayım 1: Her i ($i = 1, 2, \dots, m$) kaynağından her j ($j = 1, 2, \dots, n$) varış yerine tek tip mal taşınmaktadır.

Varsayım 2: Varış yerlerinin talepleri tamamen karşılandığı zaman kaynaklardaki toplam mal miktarı da tamamen tükenmiş olacaktır. Bu varsayıma *arz-talep dengesi* denir. Eğer toplam arz, toplam talebe eşitse, yani

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \text{ (Denge Şartı)}$$

ise, problem *dengeli TP*, aksi halde *dengesiz TP* olarak adlandırılır. Dengesiz TP, *hayali (dummy) kaynak* veya *hayali talep merkezi* eklenerek dengeli hale dönüştürülebilir.

Varsayım 3: i . kaynaktaki malların j . varış yerine dağıtımı sürecinde aktarma noktaları yoktur.

Varsayım 4: i . kaynaktan j . varış yerine taşınacak miktar x_{ij} , birim başına taşıma maliyeti c_{ij} (sabit) olmak üzere i . kaynaktan j . varış yerine taşıma maliyeti $c_{ij}x_{ij}$, x_{ij} ile orantılıdır.

TP'nin matematiksel modeli:

$$\text{Amaç:} \quad \min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (4.1)$$

$$\text{Kısıtlar :} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{Arz Kısıtları}) \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{Talep Kısıtları}) \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

yapısındadır.

TP modeli m tane kaynak, n tane talep kısıtı olmak üzere $m+n$ sayıda kısıt ve mn sayıda karar değişkeni içerdiğinden A katsayılar matrisi, $(m+n) \times mn$ boyutlu olup 1 ve 0 elemanlarından oluşur. Bu nedenle, simpleks yöntemden daha etkin çözüm algoritmaları mevcuttur. Aşağıdaki üç özellik dengeli TP için çözüm yöntemlerinin temelini oluşturmaktadır:

Özellik 1 (Gereksiz Kısıt Özelliği): A katsayılar matrisinin rankı en fazla $m+n-1$ dir.

İspat: A matrisine elemanter satır işlemleri uygulandığında en az bir satırın lineer bağımlı ve bu nedenle matrisin rankının en çok $m+n-1$ olduğu görülür. O halde, en fazla $m+n-1$ lineer bağımsız vektör bulunduğundan lineer denklem sisteminin taban değişken sayısı da en çok $m+n-1$ olur. $\diamond$

Özellik 2 (Çözülebilirlik Özelliği): Her dengeli TP'nin en az bir uygun çözümü olup optimal çözümü de mevcuttur.

İspat: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = \alpha$ alınırsa $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\alpha}$ değerleri bir uygun çözüm oluşturur. O halde

TP'de uygun çözüm bölgesi boş kümeden farklıdır. Öte yandan $a_i > 0$ ve $b_j > 0$ olduğundan $x_{ij} > 0$ olmak durumundadır ki karar değişkenlerinin toplamı alttan sıfır, üstten de a_i 'ler veya b_j 'lerle sınırlı demektir. c_{ij} sabit olduğundan amaç fonksiyonu z sınırlıdır. En az bir uygun çözüm olduğuna göre, modelin mutlaka bir optimal çözümü vardır. $\diamond$

Özellik 3 (Tamsayı Olma Özelliği): TP'de a_i ve b_j 'ler tamsayı ise her uygun taban çözüm ve buna bağlı olarak optimal çözüm de tamsayı değer alır.

İspat: Modelin katsayılar matrisinin elemanları 1 veya 0 olduğuna göre, simpleks yöntemde bir uygun taban çözümden diğer bir uygun taban çözüme geçerken, genişletilmiş katsayılar matrisinin satırları arasında yalnızca toplama ve çıkarma işlemi yapıldığından, uygun taban çözümler a_i 'lerle b_j 'lerin toplanması ya da çıkartılmasıyla bulunabilir. O halde, a_i 'lerle b_j 'ler tamsayı olduğunda uygun taban değişkenlerinin alacağı değerler de tamsayı olur. Dolayısıyla optimal çözüm de tamsayı değer alır. $\diamond$

TP'nin çözümünde taşıma tablolarından yararlanılmaktadır. Kaynaklar satırları, talep yerleri sütunları göstermek üzere, kaynak-talep yeri eşlemeleri, $m \times n$ hücresi olan Çizelge 4.1'deki taşıma tablosu haline dönüşür (Kara, 1991) .

Çizelge 4.1 Taşıma tablosu.

Varış Yerleri Kaynaklar	1	2	...	n	Arz Miktarları
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
Talep Miktarları	b_1	b_2	...	b_n	

4.1.2 TP'nin Çözüm Yöntemleri

TP'nin çözüm yöntemleri, simpleks yöntemin adımlarını aynen takip eden algoritmalar olup, normal simpleks tabloyu kullanmak yerine TP'nin özel yapısının avantajını kullanan daha etkin çözüm algoritmalarıdır. Algoritmalarda öncelikle başlangıç uygun taban çözümü bulunur, daha sonra bulunan çözümün optimalliği kontrol edilir ve optimal çözüm elde edilene kadar bir uygun taban çözümden diğerine geçilir.

4.1.2.1 Başlangıç Çözümünün Belirlenmesi

Başlangıç uygun taban çözümünün bulunması için geliştirilen yöntemlerden bazıları şunlardır:

1. Kuzey Batı Köşesi Yöntemi
2. En Düşük Maliyetler Yöntemi
3. VAM (Vogel Yaklaşım) Yöntemi (Ceza Maliyeti Yöntemi)

Bu üç yöntem arasında oluşturdukları başlangıç taban çözümünün “kalitesi” açısından farklılık vardır.

4.1.2.2 Optimal Çözümünün Belirlenmesi

TP’de elde var olan bir uygun taban çözümünün optimal çözüm olup olmadığını test etmek için farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan biri, her taban dışı değişkenin tabana alınması halinde, taban değişkenlerde meydana gelecek farklılaşmalardan hareketle amaç fonksiyonundaki artma veya azalmayı hesaplamaya dayanan atlama taşı (stepping stone) yöntemidir. Diğerisi ise, dual modelden hareketle, eldeki uygun taban çözüme karşılık gelen dual değişkenlerin, dual problemin kısıtlarını sağlayıp sağlamadığına bakan, kolay ve yaygın uygulanabilen MODI (Modified Distribution Method) yöntemidir. Ayrıca literatürde TP’yi çözen bu klasik yöntemlerden farklı yöntemler de örneğin “Dış nokta algoritmaları (Exterior Point Algorithms)” vardır (Papamantou vd., 2004).

4.1.2.2.1 Atlama Taşı Yöntemi (Taha, 2000 ve Öztürk, 2001)

Atlama Taşı Yöntemi, boş bir hücreye atama yapıldığında, toplam maliyetin ne kadar değişeceğini hesaplayarak optimal çözüme yaklaşan bir yöntemdir. Boş bir hücreye bir birimlik atama yapıldığında maliyetteki net değişim miktarı d_{ij} hesaplanır. Bulunan d_{ij} miktarı, boş hücreye ait taban dışındaki değişkenin tabana alındığında amaca birim katkısı olarak yorumlanabilir.

Bir birimlik mal atanan hücrenin bulunduğu satır ve sütunun arz ve talep miktarlarının korunması gereklidir. Bu nedenle atama yapılan hücreden başlayarak bu hücrenin bulunduğu satır ve sütundaki dolu hücrelerdeki atamaları sırasıyla bir birim azaltarak ve artırarak denge korunmuş olur. Döngüye ait her köşe noktası hesaplamanın yapıldığı hücre haricinde taban değişkenlere ait hücrelerdir. Bu hesaplama sadece yatay ve dikey olarak birbirlerine bağlanmış hücrelerden oluşan kapalı bir döngü oluşturularak yapılır, çapraz bağlantıya izin verilmez.

Amacın minimum maliyet olduğu da göz önüne alınırsa, mutlak değerce en büyük negatif net değişim miktarına sahip olan hücredeki değişkenin tabana girmesiyle amaçta tasarruf sağlanacak ve ilgili değişken tabana girecektir. Ayrıca söz konusu hücreye daha çok mal atama olanağı bulunduğundan, oluşan döngüdeki taban değişkenlerin değerleri arasında en küçüğü boş hücreye atanacak miktar olarak belirlenir. Böylece boş hücre bu değerle tabana giren değişken, en küçük değere sahip taban değişken de tabandan çıkan değişken olur. İteratif işlemler sonucunda, eğer tüm boş hücreler için hesaplanan d_{ij} değerleri arasında negatif bir değer kalmamışsa, başka bir ifadeyle $d_{ij} \geq 0$ ise, herhangi bir boş hücreye yapılacak atama toplam maliyette bir tasarruf sağlamayacaktır ve dolayısıyla mevcut çözüm optimal çözümdür.

4.1.2.2.2 MODI Yöntemi (Öztürk, 2001)

MODI yöntemi, dual problemin çözümüne dayanır. Dengeli klasik taşıma problemini primal problem olarak alırsak, problemin duali aşağıdaki şekildedir:

$$\text{Amaç:} \quad \max \quad g = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \quad (4.5)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (4.6)$$

$$u_i, v_j \text{ serbest} \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.7)$$

m tane arz kısıtına karşılık u_i ($i=1,2,\dots,m$) dual değişkenleri ve n tane talep kısıtına karşılık v_j ($j=1,2,\dots,n$) dual değişkenleri getirildiğinden toplam $m+n$ sayıda dual değişken vardır. Ayrıca primalde $m+n-1$ tane taban değişken var olduğundan bu değişkenlere karşılık gelen $c_{ij} - u_i - v_j$ simpleks çarpanları sıfır değerini alır. Buradan elde edilen $m+n-1$ denkleme karşılık $m+n$ sayıda dual değişken mevcut olduğundan u_i ve v_j 'lerden birinin değeri sıfır olarak kabul edilip denklem sistemi çözülür. Özetle, dolu hücreler yani taban değişkenler için $-c_{ij} + u_i + v_j = 0$ kabul edilerek tüm u_i ve v_j değerleri hesaplanır. Atama yapılmayan boş hücrelerin yani taban dışı değişkenlerin $c_{ij} - u_i - v_j$ değerleri hesaplanır. Eğer tüm taban dışı değişkenler için hesaplanan simpleks çarpanlar sıfıra eşit veya sıfırdan büyük ise mevcut taban çözüm optimaldir. Eğer taban dışı değişkenlerden en az birisi için simpleks çarpan değeri negatif ise mutlak değerce en büyük değere sahip hücreye atama yapılarak toplam maliyet azaltılabilir.

Tabandan çıkan değişkeni belirlemek için atlama taşı yöntemine benzer olarak tabana girecek değişken için kapalı döngü oluşturulur. Burada mevcut yöntemin atlama taşı yönteminden farkı, bu döngünün sadece giren değişken için kurulmasıdır. Oysa atlama taşı yönteminde hangi değişkenin tabana gireceği henüz belli olmadığından bu döngü tüm taban dışı değişkenler için kurulmaktaydı. Ayrıca mevcut yöntemde çıkan değişken bir önceki yöntemde olduğu gibi döngüdeki en küçük değere sahip taban değişken olarak seçilir. Sonuç olarak, tek taban dışı değişken için kurulan döngü ile bu değişkenin hangi değerle tabana gireceği ve bunun yanında hangi taban değişkenin tabandan çıkacağı da belirlenmiş olur. Elde edilen yeni çözüm ile yöntemin adımları tekrarlanır.

TP'nin çözüm işlemleri sırasında bozulmuş uygun taban çözümle karşılaşıldığında, taban değişken sayısını $m+n-1$ yapacak şekilde, taşıma tablosunun uygun hücrelerine yeterince küçük pozitif ε kadar dağıtım yapıp, işlemlere devam edilir (Kara, 1991).

4.2 Çok Amaçlı Taşıma Problemi (ÇATP)

Gerçek yaşam problemlerinde taşıma yapılırken sadece maliyet minimizasyonu değil bunun yanı sıra dağıtım güvenliğinin maksimizasyonu, dağıtım zamanının minimizasyonu ya da yakıt tüketiminin minimizasyonu gibi genellikle birbiriyle çelişen birden fazla amaç optimize edilmektedir. TP'nin çok amaçlı versiyonu ve çözüm yöntemleri aşağıda genel olarak verilecektir.

ÇATP'nin matematiksel modeli:

$$\text{Amaçlar:} \quad \min z_q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^q x_{ij} \quad , \quad q = 1, \dots, Q \quad (4.8)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (\text{Arz Kısıtları}) \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{Talep Kısıtları}) \quad (4.10)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.11)$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{z}_q(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}), \dots, z_Q(\mathbf{x}))$, Q tane amaç fonksiyonunu içeren bir vektör ve $S \neq \emptyset$, (4.9)-(4.11) kısıtlarının sağlandığı uygun çözümler bölgesi olsun. Ayrıca,

- $a_i > 0 \quad \forall i, \quad b_j > 0 \quad \forall j, \quad c_{ij}^q \geq 0 \quad \forall (i, j),$
- $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

kabulleri geçerlidir.

Tanım 4.1 (ÇATP için Basılamaz Çözüm):

$\bar{\mathbf{x}} \in S$ noktasının basılamaz bir çözüm olması için gerek ve yeter şart $\forall q, \quad q=1,2,\dots,Q$ için

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^q x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^q \bar{x}_{ij} \quad \text{ve} \quad \exists q \quad \text{için} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^q x_{ij} \neq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^q \bar{x}_{ij} \quad \text{eşitsizliklerini}$$

sağlayan $\mathbf{x} \in S$ noktasının mevcut olmamasıdır.

Tanım 4.2 (ÇATP için Uzlaşık Çözüm):

S uygun çözümler bölgesi, E etkin çözümler kümesi, $\wedge$ “minimum” operatörünü göstermek üzere;

$\mathbf{x}^* \in S$ *uzlaşık çözüm*’dür. $\Leftrightarrow \mathbf{x}^* \in E$ ve $z(\mathbf{x}^*) \leq \bigwedge_{\mathbf{x} \in S} z(\mathbf{x})$ olmasıdır.

E etkin çözümler kümesinin bütün elemanlarını belirlemek ve bu elemanlar arasından uzlaşık çözüm bulmak oldukça zordur. Bu nedenle, kümenin bütün elemanlarını belirlemeden uzlaşık çözüm bulan farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlar dört grupta sınıflandırılmaktadır (Abd El-Wahed ve Lee, 2006):

- (a) *Etkileşimli Yaklaşımlar*, örneğin 1987’de Ringuest ve Rinks; 1993’de Climaco, et al. (Climaco vd., 1993),
- (b) *Etkileşimli olmayan yaklaşımlar*, örneğin 1979’da Anaje ve Nair, 1979’da Isermann ve 2000’de Kasana (Kasana, 2000),
- (c) *Hedef Programlama yaklaşımları*, örneğin 1973’de Lee ve Moore; 1994’de Aenaida ve Kwak (Aenaida ve Kwak , 1994),
- (d) *Bulanık Yaklaşımlar*: Bit ve diğerleri (Bit vd., 1992) çok kriterli TP problemlerinin çözümü için bulanık programlama tekniğinin kullanıldığı bir prosedür geliştirmiş ve sonra 1993’de ÇALTP için toplamli bir bulanık programlama modeli sunmuştur. Das ve diğerleri (Das vd., 1999), arz ve talep parametrelerinin, amaç fonksiyon maliyet katsayılarının KV’ler tarafından aralık olarak verildiği bir ÇATP’yi çözmek için bir yöntem sunmuşlardır. Abd El-Wahed (Abd El-Wahed, 2001), ÇATP’ye uzlaşık bir çözüm sağlamak için bir bulanık yaklaşım geliştirdi ve ÇATP modelinin özel bir yapısı üzerinde bulanık programlama kullanmanın etkisini inceledi. Ayrıca Li ve Lai (Li ve Lai, 2000) ÇATP’ye bir uzlaşık çözüm

elde etmek için bir bulanık yaklaşım geliştirmişlerdir. Ammar ve Youness (Ammar ve Youness, 2005) bulanık sayılarla (bulanık katsayılar ve/veya bulanık arz miktarları ve/veya bulanık talep miktarları) ÇATP'nin kararlılığını ve etkin çözümlerini incelemişlerdir. Abd El-Wahed (Abd El-Wahed, 2006) ÇATP için tercih edilen uzlaşık çözümleri belirlemek için bir etkileşimli bulanık hedef programlama yaklaşımı sunmuştur.

4.3 Lineer Kesirli Taşıma Problemi (LKTP)

LKTP, arz ve talep kısıtları altında kâr/maliyet veya kâr/zaman olarak ifade edilen kârlılık oranını maksimize eden ya da maliyet/taşınacak mal miktarı oranını minimize eden bir problemdir. Bajalinov'un çalışması (Bajalinov, 2003) dışında LKTP ile ilgili çalışmaya literatürde rastlanmamaktadır. Bajalinov LKTP'nin genel formülasyonunu vermiş ve TP'nin çözüm yöntemlerinden olan Taşıma Simpleks Metodunu yani taşıma tablolarını kullanan çözüm tekniğini LKTP'ye adapte etmiştir.

4.3.1 LKTP'nin formülasyonu:

Bir LKTP'de genellikle aşağıdaki bilgiler mevcuttur:

1. Kapasiteleri $a_1, a_2, \dots, a_m$ olan m tane kaynak noktası (arz noktası) vardır.
2. Kapasiteleri $b_1, b_2, \dots, b_n$ olan n tane varış noktası (talep noktası) vardır.
3. i kaynak noktasından j . varış noktasına taşınacak bir birim ürün için elde edilen kâr p_{ij} ve kâr matrisi $P = [p_{ij}]_{m \times n}$ dir.
4. i . kaynak noktasından j . varış noktasına taşınacak bir birim ürün için taşıma maliyeti d_{ij} ve maliyet matrisi $D = [d_{ij}]_{m \times n}$ dir.
5. p_0 ve d_0 da sırasıyla sabit kâr ve maliyeti göstermektedir.

i kaynak noktasından j . varış noktasına taşınan miktar x_{ij} olmak üzere, LKTP'nin matematiksel modeli şu şekildedir:

$$\text{Amaç:} \quad \max_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} + p_0}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} + d_0} \quad (4.12)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (4.14)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n). \quad (4.15)$$

Burada $S \neq \emptyset$, (4.13)-(4.15) kısıtlarının sağlandığı kapalı ve konveks bir kümedir. Ayrıca kesirli programlama problemi ve taşıma problemlerinden gelen aşağıdaki kabuller:

- $\forall \mathbf{x} = (x_{ij}) \in S$ için $D(\mathbf{x}) > 0$
- $a_i > 0, b_j > 0$, $(i=1,2,\dots,m)$; $(j=1,2,\dots,n)$
- $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$ (Toplam arz miktarı, toplam talep miktarından küçük olamaz.) (4.16)

geçerlidir.

(4.16) eşitsizliği, (4.12)-(4.15) probleminin uygun çözümünün varlığını gösteren ifadedir. Böylece, ele aldığımız LKTP'nin çözülebilirliği için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1: LKTP'nin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart (4.16) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Teoremin ispatı (Bajalinov, 2003, sayfa 247)'de verilmektedir.

Tanım 4.3 (Dengeli LKTP): (4.12)-(4.15) problemi,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (\text{Denge şartı}) \quad (4.17)$$

şartını sağlıyorsa, yani toplam arz miktarı toplam talep miktarına eşit ise, dengeli LKTP olarak adlandırılır.

(4.12)-(4.15) probleminin eşitlik kısıtlarına sahip kanonik formu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{Amaç:} \quad \max Q(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} + p_0}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij} + q_0} \quad (4.18)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (4.19)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.20)$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n; \quad (4.21)$$

burada $\forall \mathbf{x} = (x_{ij}) \in S$ için $D(\mathbf{x}) > 0$ dır.

Teorem 4.2: Kanonik formdaki LKTP'nin ((4.18)-(4.21) probleminin) çözülebilir olması için gerek ve yeter şart (4.17) deki denge şartının sağlanmasıdır.

İspat: Teoremin ispatı (Bajalinov, 2003, sayfa 250-251)'de verilmektedir.

4.3.2 LKTP için Taşıma Simpleks Yöntemi

LKTP'nin tablo yöntemi ile çözümü iki aşamadan oluşmaktadır.

Adım 1: Başlangıç uygun taban çözümün bulunması.

Adım 2: Mevcut uygun taban çözümün, optimallik kriteri sağlanana kadar geliştirilmesi.

LKTP için başlangıç uygun taban çözüm bulma lineer taşıma problemi ile aynıdır. Adım 2'nin açıklaması aşağıdadır.

LKTP modelinde de m tanesi kaynak, n tanesi talep kısıtı olmak üzere $m+n$ sayıda kısıt ve mn sayıda karar değişkeni içerdiğinden $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi, $(m+n) \times mn$ boyutlu olup 1 ve 0 elemanlarından oluşur. Dolayısıyla TP'de olduğu gibi aşağıdaki üç özellik kanonik formda verilen LKTP için Taşıma Simpleks Yönteminin temelini oluşturmaktadır:

Özellik 1 (Gereksiz Kısıt Özelliği): $\mathbf{A}$ katsayılar matrisinin rankı en fazla $m+n-1$ dir.

Özellik 2 (Çözülebilirlik Özelliği): Her dengeli kanonik formdaki LKTP'nin en az bir uygun çözümü olup optimal çözümü de mevcuttur.

Özellik 3 (Tamsayı Olma Özelliği): Kanonik formdaki LKTP'de a_i ve b_j 'ler pozitif tamsayı iseler ve denge şartı sağlanıyorsa, her uygun taban çözüm ve buna bağlı olarak $\mathbf{x}^*$ optimal çözümü de tamsayı değer alır.

$m+n-1$ sayıdaki A_{ij} vektörlerinin oluşturduğu bir B sistemi, kanonik formdaki LKTP'nin bir tabanı olsun. A_{ij} taban vektörlerine karşılık gelen (ij) indis çiftleri kümesi J_B ile gösterilsin. Ayrıca J kümesi $(i=1,2,\dots,m)$, $(j=1,2,\dots,n)$ olası tüm (ij) indis çiftlerinin kümesi olmak üzere, $J_N = J / J_B$ kümesi de B tabanında olmayan yani taban dışı A_{ij} vektörlerinin (ij) indis kümesini gösterir.

Tanım 4.4: $\mathbf{x} = (x_{ij})$ çözümü,

$$\sum_{(ij) \in J_B} A_{ij} x_{ij} = R, \quad R = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)^T \text{ ve } \forall (ij) \in J_N \text{ için } x_{ij} = 0$$

sistemini sağlıyorsa, kanonik formdaki LKTP'nin bir *taban çözümüdür*.

$\mathbf{x} = (x_{ij})$ çözümünde, x_{ij} $((ij) \in J_B)$ değişkenlerine taban değişken ve x_{ij} $((ij) \in J_N)$ değişkenlerine de taban dışı değişkenler denir.

Tanım 4.5: Taban değişkenlerden en azından biri sıfırsa $(\exists (ij) : (ij) \in J_B, x_{ij} = 0)$, $\mathbf{x}$ taban çözümüne *dejenere taban çözüm* denir. $\forall (ij) \in J_B$ için $x_{ij} \neq 0$ ise, $\mathbf{x}$ taban çözümüne *dejenere olmamış taban çözüm* denir.

Tanım 4.6: $(ij) \in J_B$ olmak üzere bütün x_{ij} elemanları, (4.21)'deki non-negatiflik kısıtını sağlıyorsa, $\mathbf{x} = (x_{ij})$ taban çözümüne, kanonik formdaki LKTP'nin *uygun taban çözümü* denir.

Bir LKTP'ne taşıma simpleks metodunun nasıl adapte edilebileceğini göstermek için öncelikle, $P(\mathbf{x})$ payı ile u_i' , v_j' simpleks çarpanları, $D(\mathbf{x})$ paydasıyla da u_i'' , v_j'' simpleks çarpanları ilişkilendirilsin. (4.19)'daki m tane arz kısıtına karşılık gelen elemanlar u_i' ve u_i'' , $i=1,2,\dots,m$; (4.20)'deki n tane talep kısıtına karşılık gelen elemanlar da v_j' ve v_j'' , $j=1,2,\dots,n$ ise aşağıdaki lineer eşitlik sistemleri:

$$u_i' + v_j' = p_{ij}, \quad (ij) \in J_B \quad (4.22)$$

ve

$$u_i'' + v_j'' = d_{ij}, \quad (ij) \in J_B \quad (4.23)$$

den u_i' , v_j' , u_i'' ve v_j'' simpleks çarpanları bulunur. Δ_{ij}' ve Δ_{ij}'' *azaltılmış maliyetler* olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_{ij} &= u'_i + v'_j - p_{ij} \\ \Delta''_{ij} &= u''_i + v''_j - d_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.24)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$U_i(\mathbf{x}) = u'_i - Q(\mathbf{x})u''_i, \quad i=1,2,\dots,m,$$

$$V_j(\mathbf{x}) = v'_j - Q(\mathbf{x})v''_j, \quad j=1,2,\dots,n,$$

$$Z_{ij}(\mathbf{x}) = U_i(\mathbf{x}) + V_j(\mathbf{x}), \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n$$

$$C_{ij}(\mathbf{x}) = p_{ij} - Q(\mathbf{x})d_{ij}, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n$$

değerleri tanımlanarak

$$\Delta_{ij}(\mathbf{x}) = Z_{ij}(\mathbf{x}) - C_{ij}(\mathbf{x}), \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n$$

ya da bu ifade

$$\Delta_{ij}(\mathbf{x}) = \Delta'_{ij} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{ij}, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.25)$$

yazılabilir.

Bu notasyonlar kullanılarak, $\mathbf{x}$ uygun taban çözümünün optimalliği için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3 (Optimallik Kriteri):

$$\Delta_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.26)$$

ise kanonik formdaki LKTP'nin $\mathbf{x} = (x_{ij})$ uygun taban çözümü optimaldir.

İspat: Kanonik formdaki LKTP'nin bir uygun tabanı B ve karşılık gelen uygun taban çözümü de $\mathbf{x}$ olsun. Taban dışı $x_{rk}, (rk) \in J_N$ değişkeni tabana girerek sadece bir elemanı ile $\mathbf{x}$ den farklı ve $\mathbf{x}$ 'den elde edilmiş başka bir $\mathbf{x}'$ çözümünün var olduğu kabul edilsin.

$$P(\mathbf{x}') = P(\mathbf{x}) - \theta \Delta'_{rk} \quad \text{ve} \quad D(\mathbf{x}') = D(\mathbf{x}) - \theta \Delta''_{rk},$$

Burada $\theta \geq 0$, x_{rk} yeni taban değişkenleri ile ilgili bir değerdir, Δ'_{rk} ve Δ''_{rk} azaltılmış maliyetleri (4.24) ile hesaplanır.

$Q(\mathbf{x}')$ ve $Q(\mathbf{x})$ amaç değerleri arasındaki fark hesaplanarak,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}') - Q(\mathbf{x}) &= \frac{P(\mathbf{x}')}{D(\mathbf{x}')} - \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{P(\mathbf{x}) - \theta \Delta'_{rk}}{D(\mathbf{x}) - \theta \Delta''_{rk}} - \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \\ &= -\frac{\theta \Delta'_{rk} D(\mathbf{x}) - \theta \Delta''_{rk} P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x}') D(\mathbf{x})} = -\frac{\theta (\Delta'_{rk} - Q(\mathbf{x}) \Delta''_{rk})}{D(\mathbf{x}')} = \\ &= -\frac{\theta \Delta_{rk}(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x}')}, \quad \forall (rk) \in J_N \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir. $\forall \mathbf{x}' \in S$ için $D(\mathbf{x}') > 0$ olduğundan (4.27)'deki $Q(\mathbf{x}') - Q(\mathbf{x})$ amaç değerleri farkı sadece $\Delta_{rk}(\mathbf{x}) < 0$ olan (rk) indisi mevcut olduğunda pozitifdir. Böylece teorem ispatlanmış olur. $\diamond$

LKTP'nin tablosu (Çizelge (4.2)), taşıma tablosundakine benzer yapıdadır. Problemin verileri tablo hücrelerine

$$\forall (ij) \in J_B \quad \text{ise} \quad \begin{array}{|c|} \hline p_{ij} \\ \hline x_{ij} \\ \hline d_{ij} \\ \hline \end{array}$$

$$\forall (ij) \in J_N \quad \text{ise} \quad \begin{array}{|c|} \hline p_{ij} \\ \hline \Delta_{ij}(x) \\ \hline d_{ij} \\ \hline \end{array} \quad \text{veya} \quad \begin{array}{|c|} \hline p_{ij} & \Delta'_{ij} \\ \hline \Delta_{ij}(x) & \\ \hline d_{ij} & \Delta''_{ij} \\ \hline \end{array}$$

gibi yerleştirilebilir.

Tanım 4.8: Taşıma simpleks tablosunun en azından dört farklı hücreden oluşan bir sıralı altkümesi,

1. Herhangi iki ardışık hücre aynı satırda (ya da sütunda) bulunursa,
 2. Ardışık üç hücre aynı satırda (ya da sütunda) bulunmazsa,
 3. Dizideki son hücre ile ilk hücre ortak bir satıra (ya da sütuna) sahipse,
- bir *döngü* oluşturur.

Örneğin, döngü oluşturan yollar:

$$(1,1) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,2) \rightarrow (2,4) \rightarrow (4,4) \rightarrow (4,1) \rightarrow (1,1)$$

ve

$$(1,3) \rightarrow (1,5) \rightarrow (2,5) \rightarrow (2,1) \rightarrow (4,1) \rightarrow (4,3) \rightarrow (1,3)$$

şeklinde olup Çizelge 4.3'de verilmektedir. Döngü oluşturmayan yollar ise Çizelge 4.4'de görülmektedir.

Çizelge 4.2 LKTP için simpleks taşıma tablosu.

	Dükkan 1	Dükkan 2	...	Dükkan n	Arz
Depo1	p_{11} x_{11} d_{11}	p_{12} x_{12} d_{12}		p_{1n} x_{1n} d_{1n}	b_1
Depo2	p_{21} x_{21} d_{21}	p_{22} x_{22} d_{22}		p_{2n} x_{2n} d_{2n}	b_2
...					
Depo m	p_{m1} x_{m1} d_{m1}	p_{m2} x_{m2} d_{m2}		p_{mn} x_{mn} d_{mn}	b_m
Talep	a_1	a_2		a_n	

Çizelge 4.3 Döngü oluşturan örnekler.

	1	2	3	4
1	→	↓		
2		→		↓
3				
4	↑			←

	1	2	3	4	5
1			→		↓
2	↓				←
3					
4	→		↑		

Çizelge 4.4 Döngü oluşturmeyen örnekler.

	1	2	3	4	5
1	→		→		↓
2	↑				←
3					

	1	2	3
1	→	↓	
2			
3			
4	↑		←

4.3.3 Nümerik Örnek

Aşağıda verilen dengeli LKTP'yi ele alalım:

$$\text{Amaç:} \quad \max Q(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 p_{ij} x_{ij} + p_0}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 d_{ij} x_{ij} + d_0} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \text{Kısıtlar:} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 150 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 250 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 200 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 150 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 250 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 50 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 150 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.32)$$

Burada $p_0 = 100$ $d_0 = 120$ ve p_{ij}, d_{ij} sırasıyla kâr ve maliyet katsayıları Çizelge 4.5'de verilmektedir.

Çizelge 4.5 Kâr ve maliyet matrislerinin elemanları.

p_{ij}	1	2	3	4
1	10	14	8	12
2	8	12	14	8
3	9	6	15	9

d_{ij}	1	2	3	4
1	15	12	16	8
2	10	6	13	12
3	13	15	12	10

Maksimum Kâr Metodu kullanılarak, Çizelge 4.6'da gösterilen bir başlangıç uygun çözümü yani taşıma yapılabilecek sadece 5 dolu hücre: $x_{12} = 150$, $x_{22} = 100$, $x_{24} = 150$, $x_{31} = 150$, $x_{33} = 50$ bulunur. Bu aşamada problem $m+n-1=3+4-1=6$ tane taban değişken içermediğinden, uygun çözüm bir başlangıç uygun taban çözüm değildir. Bu durumda taban dışı değişken, örneğin $x_{11} = 0$ tabana girer. Böylece Çizelge 4.6'da gösterilen çözüm, aşağıdaki taban indis kümesi

$$J_B = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3)\}$$

olan dejenere bir çözümdür.

Çizelge 4.6 Taşıma simpleks metot örneği- Başlangıç uygun taban çözüm.

	1	2	3	4	
1	10 0 15	14 150 12	8 16	12 8	150
2	8 10	12 100 6	14 13	8 12 150	250
3	9 150 13	6 15	15 50 12	9 10	200
	150	250	50	150	

Bu çözüme karşılık,

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{p_{11}x_{11} + p_{12}x_{12} + p_{22}x_{22} + p_{24}x_{24} + p_{31}x_{31} + p_{33}x_{33} + p_0}{d_{11}x_{11} + d_{12}x_{12} + d_{22}x_{22} + d_{24}x_{24} + d_{31}x_{31} + d_{33}x_{33} + d_0}$$

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{0 \cdot 10 + 150 \cdot 14 + 100 \cdot 12 + 150 \cdot 8 + 150 \cdot 9 + 50 \cdot 15 + 100}{12 \cdot 150 + 6 \cdot 100 + 12 \cdot 150 + 13 \cdot 150 + 50 \cdot 12 + 120}$$

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{6700}{6870} \cong 0.975255$$

amaç değeri elde edilir. Bu uygun taban çözüm ve (4.22)-(4.23) formülasyonları kullanılarak

$$\left. \begin{aligned} u_1' + v_1' &= p_{11} = 10 \\ u_1' + v_2' &= p_{12} = 14 \\ u_2' + v_2' &= p_{22} = 12 \\ u_2' + v_4' &= p_{24} = 8 \\ u_3' + v_1' &= p_{31} = 9 \\ u_3' + v_3' &= p_{33} = 15 \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} u_1'' + v_1'' &= d_{11} = 15 \\ u_1'' + v_2'' &= d_{12} = 12 \\ u_2'' + v_2'' &= d_{22} = 6 \\ u_2'' + v_4'' &= d_{24} = 12 \\ u_3'' + v_1'' &= d_{31} = 13 \\ u_3'' + v_3'' &= d_{33} = 12 \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

lineer eşitlik sistemleri kurulur.

Bu sistemlerde sırasıyla $u_1' = 0$ ve $u_1'' = 0$ alınarak geri kalan bilinmeyenler çözülürse:

$$u_1' = 0 \quad \text{ve} \quad u_2' = -2 \quad u_3' = -1 \quad v_1' = 10 \quad v_2' = 14 \quad v_3' = 16 \quad v_4' = 10$$

ve

$$u_1'' = 0 \quad u_2'' = -6 \quad u_3'' = -2 \quad v_1'' = 15 \quad v_2'' = 12 \quad v_3'' = 14 \quad v_4'' = 18$$

elde edilir. Bu değerler

$$J_N = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4)\}$$

taban dışı indisleri için Δ_{ij}' ve Δ_{ij}'' azaltılmış maliyetlerini hesaplamada kullanılırsa:

$$\Delta_{13}' = u_1' + v_3' - p_{13} = 0 + 16 - 8 = 8$$

$$\Delta_{14}' = u_1' + v_4' - p_{14} = 0 + 10 - 12 = -2$$

$$\Delta_{21}' = u_2' + v_1' - p_{21} = -2 + 10 - 8 = 0$$

$$\Delta_{23}' = u_2' + v_3' - p_{23} = -2 + 16 - 14 = 0$$

$$\Delta_{32}' = u_3' + v_2' - p_{32} = -1 + 14 - 6 = 7$$

$$\Delta_{34}' = u_3' + v_4' - p_{34} = -1 + 10 - 9 = 0$$

$$\Delta_{13}'' = u_1'' + v_3'' - d_{13} = 0 + 14 - 16 = -2$$

$$\Delta_{14}'' = u_1'' + v_4'' - d_{14} = 0 + 18 - 8 = 10$$

$$\Delta_{21}'' = u_2'' + v_1'' - d_{21} = -6 + 15 - 10 = -1$$

$$\Delta_{23}'' = u_2'' + v_3'' - d_{23} = -6 + 14 - 13 = -5$$

$$\Delta_{32}'' = u_3'' + v_2'' - d_{32} = -2 + 12 - 15 = -5$$

$$\Delta_{34}'' = u_3'' + v_4'' - d_{34} = -2 + 18 - 10 = 6$$

bulunur. Ayrıca taban dışı Δ_{ij}' ve Δ_{ij}'' değerlerini elde ettikten sonra (4.25) formülasyonunu

kullanarak taban dışı değişkenler için $\Delta_{ij}(\mathbf{x})$ azaltılmış maliyet değerleri:

$$\Delta_{ij}(\mathbf{x}) = \Delta_{ij}' - Q(\mathbf{x})\Delta_{ij}''$$

$$\Delta_{13}(\mathbf{x}) = \Delta_{13}' - Q(\mathbf{x})\Delta_{13}'' = 9 \frac{653}{687}$$

$$\Delta_{14}(\mathbf{x}) = \Delta_{14}' - Q(\mathbf{x})\Delta_{14}'' = -11 \frac{517}{687}$$

$$\Delta_{21}(\mathbf{x}) = \Delta'_{21} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{21} = \frac{670}{687}$$

$$\Delta_{23}(\mathbf{x}) = \Delta'_{23} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{23} = 4\frac{602}{687}$$

$$\Delta_{32}(\mathbf{x}) = \Delta'_{32} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{32} = 11\frac{602}{687}$$

$$\Delta_{34}(\mathbf{x}) = \Delta'_{34} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{34} = -5\frac{195}{229}$$

olur. Bütün taban dışı $\Delta_{ij}(\mathbf{x})$ azaltılmış maliyetleri non-negatif olmadığından, optimallik kriteri (Teorem 4.3) gereğince, mevcut $\mathbf{x}$ uygun taban çözümü optimal çözüm değildir. Bu nedenle negatif azaltılmış maliyet $\Delta_{ij}(\mathbf{x})$ ler arasında mutlak değerce en büyüğü ile ilgili taban dışı değişken x_{ij} seçilir ve bu değişken tabana girer. Bu değişken x_{14} dır. Böylece (1,4) hücresine bu aşamada değeri bilinmeyen $\theta > 0$ taşıma miktarı girilir ve θ 'nın değerini belirlemek için bir döngü kurulur. Bu aşama Çizelge 4.7'de gösterilmektedir. Döngü kurulduktan sonra θ 'nın değeri:

$$\theta = \min \{x_{12}, x_{24}\} = \min \{150, 150\} = 150$$

olarak belirlenir. Bu ifadede θ nın minimal değerinin (1,2) ve (2,4) indislerinden elde edildiği görülür. Böylece x_{12}, x_{24} değişkenlerinden bir tanesi tabandan ayrılır ve ikincisi dejenere değişken olarak sıfır değeriyle tabanda kalır. Diyelim ki x_{24} değişkeni tabandan ayrılınsın, x_{12} de tabanda kalsın. Bu durumda yeni oluşan taban indis kümesi

$$J_N = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4)\}$$

iken

$$J_B = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (3,1), (3,3)\}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılsa, Çizelge 4.8'deki veriler elde edilir. Bu tablodan yeni uygun taban çözüm $\mathbf{x}$; $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{14} = 150$, $x_{22} = 250$, $x_{31} = 150$, $x_{33} = 50$ olarak bulunur. Buna karşılık amaç fonksiyon değeri de $P(\mathbf{x}) = 7000$ ve $D(\mathbf{x}) = 5370$ 'den

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{7000}{5370} \cong 1.303538 \text{ olur.}$$

Çizelge 4.7 Taşıma simpleks metot örneği-Birinci aşama

	1	2	3	4	
1	10 0 15	14 12	8 16	12 θ 8	150
2	8 10	12 $100+\theta$ 6	14 13	8 $150-\theta$ 12	250
3	9 150 13	6 15	15 50 12	9 10	200
	150	250	50	150	

Çizelge 4.8 Taşıma simpleks metot örneği-İkinci aşama

	1	2	3	4	
1	10 0 15	14 0 12	8 16	12 150 8	150
2	8 10	12 250 6	14 13	8 12	250
3	9 150 13	6 15	15 50 12	9 10	200
	150	250	50	150	

Yeni taban için,

$$u_1' + v_1' = p_{11} = 10$$

$$u_1' + v_2' = p_{12} = 14$$

$$u_1' + v_4' = p_{14} = 12$$

$$u_2' + v_2' = p_{22} = 12$$

$$u_3' + v_1' = p_{31} = 9$$

$$u_3' + v_3' = p_{33} = 15$$

ve

$$u_1'' + v_1'' = d_{11} = 15$$

$$u_1'' + v_2'' = d_{12} = 12$$

$$u_1'' + v_4'' = d_{14} = 8$$

$$u_2'' + v_2'' = d_{22} = 6$$

$$u_3'' + v_1'' = d_{31} = 13$$

$$u_3'' + v_3'' = d_{33} = 12$$

eşitlik sistemleri kurulur. Bu sistemler çözülerek,

$$u_1' = 0 \quad u_2' = -2 \quad u_3' = -1 \quad v_1' = 10 \quad v_2' = 14 \quad v_3' = 16 \quad v_4' = 12$$

ve

$$u_1'' = 0 \quad u_2'' = -6 \quad u_3'' = -2 \quad v_1'' = 15 \quad v_2'' = 12 \quad v_3'' = 14 \quad v_4'' = 8$$

elde edilir. Bu değerler Δ'_{ij} , Δ''_{ij} ve $\Delta_{ij}(\mathbf{x})$ taban-dışı azaltılmış maliyetlerini aşağıdaki gibi yeniden hesaplamaya imkân sağlar:

$$\Delta'_{13} = u_1' + v_3' - p_{13} = 0 + 16 - 8 = 8$$

$$\Delta'_{21} = u_2' + v_1' - p_{21} = -2 + 10 - 8 = 0$$

$$\Delta'_{23} = u_2' + v_3' - p_{23} = -2 + 16 - 14 = 0$$

$$\Delta'_{24} = u_2' + v_4' - p_{24} = -2 + 12 - 8 = 2$$

$$\Delta'_{32} = u_3' + v_2' - p_{32} = -1 + 14 - 6 = 7$$

$$\Delta'_{34} = u_3' + v_4' - p_{34} = -1 + 12 - 9 = 2$$

$$\Delta''_{13} = u_1'' + v_3'' - d_{13} = 0 + 14 - 16 = -2$$

$$\Delta''_{21} = u_2'' + v_1'' - d_{21} = -6 + 15 - 10 = -1$$

$$\Delta''_{23} = u_2'' + v_3'' - d_{23} = -6 + 14 - 13 = -5$$

$$\Delta''_{24} = u_2'' + v_4'' - d_{24} = -6 + 8 - 12 = -10$$

$$\Delta''_{32} = u_3'' + v_2'' - d_{32} = -2 + 12 - 15 = -5$$

$$\Delta''_{34} = u_3'' + v_4'' - d_{34} = -2 + 8 - 10 = -4$$

ve sonuçta

$$\Delta_{13}(\mathbf{x}) = \Delta'_{13} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{13} = 10\frac{326}{537}$$

$$\Delta_{21}(\mathbf{x}) = \Delta'_{21} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{21} = 1\frac{163}{537}$$

$$\Delta_{23}(\mathbf{x}) = \Delta'_{23} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{23} = 6\frac{278}{537}$$

$$\Delta_{24}(\mathbf{x}) = \Delta'_{24} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{24} = 15\frac{19}{537}$$

$$\Delta_{32}(\mathbf{x}) = \Delta'_{32} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{32} = 13\frac{278}{537}$$

$$\Delta_{34}(\mathbf{x}) = \Delta'_{34} - Q(\mathbf{x})\Delta''_{34} = 7\frac{115}{537}$$

bulunur. Tüm taban-dışı azaltılmış maliyetler $\Delta_{ij} \geq 0$, $(ij) \in J_N$ olduğundan mevcut $\mathbf{x}$ uygun taban çözümü, LKTP'nin bir optimal çözümüdür. O halde optimal çözüm

$$\mathbf{x}^* = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) = (0, 0, 0, 150, 0, 250, 0, 0, 150, 0, 50, 0)$$

ve optimal amaç fonksiyon değeri de

$$Q(\mathbf{x}^*) = 1.304$$

olarak elde edilir.

5. ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİ (ÇALKTP)'ne BULANIK YAKLAŞIMLAR

Çalışmamızın esas konusu olan ÇALKTP modeli ve buna ait çözüm yöntemleri, Tiryaki ve Çetin (Tiryaki ve Çetin, 2005, 2006)'in çalışmalarından başka literatürde hemen hemen yok gibidir.

Tezimizin orijinal kısmı olan bu bölümde öncelikle, ÇALKTP'nin formülasyonu, problemin çözülebilirliği için temel teoremler, problemle ilgili Pareto-optimal, zayıf Pareto-optimal ve uzlaşık çözüm kavramları verilecektir. Daha sonra, lineer kesirli amaç fonksiyonlarına karşılık üyelik fonksiyonları kurulacak ve bağlantılı olarak çözüm önerilerimiz ayrıntılarıyla açıklanacaktır. Bulanık yaklaşımlarımız, üyelik fonksiyonlarının yapılarına göre lineer ve non-lineer (hiperbolik, üstel ve parçalı lineer) üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar olarak iki ana başlık altında gruplandırılacaktır. Her bir yaklaşımın işleyişi aynı temel örnek problem üzerinde açıklanacaktır.

5.1 ÇALKTP Formülasyonu

Tanım 5.1: Bir ÇALKTP'de genellikle aşağıdaki bilgiler mevcuttur:

1. Kapasiteleri $a_1, a_2, \dots, a_m$ olan m tane kaynak noktası (arz merkezi, fabrikalar, üretim merkezi vs.) vardır.
2. Kapasiteleri $b_1, b_2, \dots, b_n$ olan n tane varış noktası (talep merkezi, pazar, satış noktası vs.) vardır.

$z_q(\mathbf{x})$, ($q = 1, \dots, Q$) amacı için,

3. i . kaynak noktasından j . varış noktasına taşınacak bir birim ürün için elde edilen kâr p_{ij}^q ve kâr matrisi $P = [p_{ij}^q]_{m \times n}$ dir.
4. i . kaynak noktasından j . varış noktasına taşınacak bir birim ürün için taşıma maliyeti d_{ij}^q ve maliyet matrisi $D = [d_{ij}^q]_{m \times n}$ dir.
5. p_0^q ve d_0^q da sırasıyla sabit kâr ve maliyeti göstermektedir.

i . kaynak noktasından j . varış noktasına taşınan miktar x_{ij} olmak üzere, eşitsizlik kısıtlarına sahip bir ÇALKTP'nin matematiksel formülasyonu şu şekildedir:

$$\text{Amaçlar:} \quad \max z_q(\mathbf{x}) = \frac{p_q(\mathbf{x})}{d_q(\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}^q x_{ij} + p_0^q}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}^q x_{ij} + d_0^q}, \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.1.a)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.1.b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.1.c)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1.d)$$

Burada $\mathbf{z}_q(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}), \dots, z_Q(\mathbf{x}))$, Q tane amaç fonksiyonunu içeren vektör (kriter vektörü); $S \neq \emptyset$, (5.1.b)–(5.1.d) kısıtlarının sağlandığı kapalı ve konveks bir kümedir. Ayrıca kesirli programlama problemi ve taşıma problemlerinden gelen aşağıdaki kabuller:

- $\forall \mathbf{x} = (x_{ij}) \in S$ için $d_q(\mathbf{x}) > 0$, $q = 1, \dots, Q$,
- $a_i > 0$, $\forall i$; $b_j > 0$, $\forall j$; $\forall i, j$ için $p_{ij}^q > 0$, $d_{ij}^q > 0$, $p_0^q > 0$, $d_0^q > 0$,
- $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$ (Toplam arz miktarı, toplam talep miktarından büyük veya eşittir) (5.2)

geçerlidir.

(5.2) eşitsizliği, (5.1) probleminin uygun çözümünün varlığını gösteren ifadedir. Böylece, ele aldığımız ÇALKTP'nin çözülebilirliği için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.1: ÇALKTP'nin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart (5.2) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: *Gereklik.* ÇALKTP'nin çözülebilir olduğunu varsayalım ve $\mathbf{x}$ de bu problemin bir uygun taban çözümü olsun. Her $i = 1, 2, \dots, m$ için (5.1.b) arz kısıtlarını ve her $j = 1, 2, \dots, n$ için (5.1.c) talep kısıtlarını taraf tarafa toplayarak,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m a_i \quad \text{ve} \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq \sum_{j=1}^n b_j$$

elde edilir. Eşitsizliklerin sol tarafları aynı olduğundan, toplam talep miktarı toplam arz miktarından küçük ya da eşit olur. Böylece (5.2) eşitsizliği sağlanır.

Yeterlilik. Şimdi (5.2) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. (5.1) probleminin S uygun çözümler bölgesinin boş kümeden farklı ve tüm $z_q(\mathbf{x})$, $q=1,...,Q$ amaç fonksiyonlarının S bölgesi üzerinde sınırlı olduğunu göstermeliyiz.

- Öncelikle

$$R = \sum_{j=1}^n b_j > 0$$

olmak üzere,

$$x'_{ij} = \frac{a_i b_j}{R}, \quad i=1,2,...,m, \quad j=1,2,...,n$$

alalım ve x'_{ij} nün (5.1) probleminin bir uygun çözümü olduğunu gösterelim.

Gerçekten,

$$\sum_{j=1}^n x'_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{R} = \frac{a_i}{R} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{R} R = a_i, \quad i=1,2,...,m$$

ve

$$\sum_{i=1}^m x'_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{b_j a_i}{R} = \frac{b_j}{R} \sum_{i=1}^m a_i \geq \frac{b_j}{R} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{b_j}{R} R = b_j, \quad j=1,2,...,n,$$

dir. Ayrıca, $a_i > 0$, $\forall i$; $b_j > 0$, $\forall j$ olduğundan her i, j için $x'_{ij} \geq 0$ sağlanır.

Buradan, S uygun çözümler bölgesi boş kümeden farklıdır, yani $\mathbf{x}' = (x'_{ij}) \in S \neq \emptyset$ dir.

- Şimdi de, $z_q(\mathbf{x})$, $q=1,...,Q$ amaç fonksiyonlarının S bölgesi üzerinde sınırlı olduğunu gösterelim.

(5.1.b) ve (5.1.d) den,

$$0 \leq x_{ij} \leq a_i, \quad i=1,2,...,m, \quad j=1,2,...,n$$

dir. Bu eşitsizlik S uygun çözümler bölgesinin sınırlı olduğu anlamına gelir. S sınırlı uygun çözümler bölgesi üzerinde $p_q(\mathbf{x})$ ve $d_q(\mathbf{x})$ $q=1,...,Q$ lineer fonksiyonlar ve $d_q(\mathbf{x}) > 0$, $q=1,...,Q$ olduğundan, tüm $z_q(\mathbf{x})$ amaç fonksiyonları S üzerinde sınırlıdır.

Dolayısıyla ÇALKTP, çözülebilir bir problemdir.

◇

Tanım 5.2 (Dengeli ÇALKTP): (5.1) problemi,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (\text{Denge şartı}) \quad (5.3)$$

şartını sağlıyorsa, yani toplam arz miktarı toplam talep miktarına eşit ise, dengeli ÇALKTP olarak adlandırılır.

Bilindiği gibi bir taşıma probleminde toplam arz, toplam talepten küçük ise, problem *dengesiz taşıma problemi* olup uygun çözüme sahip değildir. Bu durumda bazı talep merkezlerinin ihtiyaçları karşılanamamaktadır. Karşılanamayan talep miktarına eşit üretim yapan hayali bir arz noktası oluşturularak ve onunla ilgili bir ceza fiyatı belirlenerek, problem dengeli hale getirilebilir. Dolayısıyla, denge şartının sağlanmadığı ÇALKTP’de de benzer işlemler uygulanarak denge şartı sağlanabilir.

(5.1) probleminin eşitlik kısıtlarına sahip kanonik formu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{Amaçlar:} \quad \max z_q(\mathbf{x}) = \frac{p_q(\mathbf{x})}{d_q(\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}^q x_{ij} + p_0^q}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}^q x_{ij} + d_0^q}, \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.4.a)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.4.b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.4.c)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.4.d)$$

burada $\forall \mathbf{x} = (x_{ij}) \in S$ için $d_q(\mathbf{x}) > 0$, $q = 1, \dots, Q$ dır.

Teorem 5.2: Kanonik formdaki ÇALKTP’nin ((5.4) probleminin) çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul (5.3)’teki denge şartının sağlanmasıdır.

İspat: Teorem 5.1 dekine benzer şekilde ispatlanabilir. $\diamond$

Aşağıda ÇALKTP için Pareto-optimal, zayıf Pareto-optimal, uzlaşık çözüm gibi temel tanımlar verilmektedir.

Tanım 5.3 (ÇALKTP için Pareto-optimal çözüm):

$\bar{\mathbf{x}} \in S$ noktasının *Pareto-optimal (strongly efficient or nondominated)* çözüm olması için gerek ve yeter şart $\forall q, q=1,...,Q$ için $z_q(\mathbf{x}) \geq z_q(\bar{\mathbf{x}})$ ve $\exists q$ için $z_q(\mathbf{x}) > z_q(\bar{\mathbf{x}})$ olacak şekilde bir başka $\mathbf{x} \in S$ noktasının mevcut olmamasıdır.

Tanım 5.4 (ÇALKTP için zayıf Pareto-optimal çözüm):

$\bar{\mathbf{x}} \in S$ noktasının *zayıf Pareto-optimal (weakly efficient)* çözüm olması için gerek ve yeter şart $\forall q, q=1,2,...,Q$ için $z_q(\mathbf{x}) > z_q(\bar{\mathbf{x}})$ olacak şekilde bir başka $\mathbf{x} \in S$ noktasının mevcut olmamasıdır.

Bu tanımlara göre, E^S ve E^W sırasıyla Pareto-optimal ve zayıf pareto-optimal çözümler kümesini göstermek üzere $E^S \subset E^W$ olur.

Tanım 5.5 (ÇALKTP için uzlaşık (compromise) çözüm):

$\bar{\mathbf{x}} \in S$ uygun çözümünün bir uzlaşık çözüm (Leberling, 1981; Abd El-Wahed ve Lee, 2006; Tiryaki, 2006) olması için gerek ve yeter şart $\bar{\mathbf{x}} \in E^W$ ve $\mathbf{Z}(\bar{\mathbf{x}}) \geq \wedge_{\mathbf{x} \in S} \mathbf{Z}(\mathbf{x})$ olmasıdır. Burada $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}), ..., z_Q(\mathbf{x}))$ dir ve $\wedge$, “min” operatöre karşılık gelir.

Tanım 5.5 e göre:

- (i) Uzlaşık çözüm, bir zayıf-etkin çözüm olmalıdır.
- (ii) $\bar{\mathbf{x}}$ uygun çözüm vektörü, S deki diğer noktalara nazaran, ideal noktadan minimum sapmaya sahip olmalıdır. Uzlaşık çözüm, KV'nin fayda fonksiyonunu maksimum yapan ideal çözüme en yakın olan çözümdür.

Genellikle ÇALKTP’de, amaç fonksiyonları birbirleriyle çeliştiğinden bütün amaç fonksiyonlarını aynı anda maksimize eden bir optimal çözüm her zaman mevcut değildir. Belli bir pareto-optimal çözüm seçildiğinde, diğer amaç fonksiyonlarından en az birindeki kayıba karşılık herhangi bir amaçta bir iyileşme sağlanabilir. Böylece ÇALKTP için yukarıdaki Tanım 5.3 ile çok amaçlı programlamadaki pareto-optimallik tanımı aynıdır.

5.2 ÇALKTP için Bulanık Yaklaşımlar

Bu bölümde, Zimmermann’ın minimum operatörünü kullanarak bulanık yaklaşımla (Bulanık Matematik Programlama yoluyla) ÇALKTP için uzlaşık Pareto-optimal çözüm elde etmek üzere çözüm önerilerimiz aşağıdaki başlıklar altında verilecektir.

Lineer üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar:

- ÇALKTP için Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması,
- ÇALKTP için İkiye Bölme Yöntemi,
- ÇALKTP için Hedef Programlama Yaklaşımı.

Non-lineer üyelik fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımlar:

- Hiperbolik Üyelik Fonksiyonları ile ÇALKTP'nin çözümü,
- Üstel Üyelik Fonksiyonları ile ÇALKTP'nin çözümü,
- Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonları ile ÇALKTP'nin çözümü.

5.2.1 Lineer Üyelik Fonksiyonlarının Kullanıldığı Yaklaşımlar

Bu kısımda, ÇALKTP çözümü için lineer üyelik fonksiyonlarını kullanan üç bulanık programlama yaklaşımı yer almaktadır. Öncelikle yaklaşımların temelini oluşturan lineer üyelik fonksiyonları kurulacak, daha sonra Zimmermann'ın minimum operatörü ile probleme karşılık bir yardımcı problem (minimum operatör modeli) elde edilecektir. Amaç fonksiyonlarının kesirli olmasından dolayı bu yardımcı problem nonlinear yapıdadır. Üç farklı yaklaşım:

- Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması,
- İkiye Bölme Yöntemi,
- Hedef Programlama Yaklaşımı

ile yardımcı problemimiz lineer yapıya indirgenecektir. Böylece ÇALKTP için bir zayıf etkin çözüm, bu çözüme de Pareto-optimalite testi uygulanarak kuvvetli etkin çözüm elde edilecektir. Çözüm yaklaşımlarının işleyişleri bir temel örnek problem üzerinde ayrıntılarıyla açıklanacaktır.

5.2.1.1 Amaçların Üyelik Fonksiyonlarının Oluşturulması

Literatürde çeşitli tiplerde örneğin, lineer, hiperbolik, ters hiperbolik, üstel ve parçalı lineer v.s. üyelik fonksiyonları mevcuttur (Sakawa, 1993). Bu kısımda, en basit tip olan lineer üyelik fonksiyonu kurulacaktır.

ÇALKTP'nin q . amaç fonksiyonuna karşılık gelen lineer yapıya sahip $\mu_q(z_q)$ üyelik fonksiyonunu,

$$\mu_q(z_q) = \begin{cases} 0, & z_q < z_q^m \\ \frac{z_q - z_q^m}{z_q^* - z_q^m}, & z_q^m \leq z_q \leq z_q^*, \\ 1, & z_q^* < z_q \end{cases} \quad q=1, \dots, Q \quad (5.5)$$

olarak tanımlayalım. Burada $\min_{\mathbf{x} \in S} z_q(\mathbf{x}) = z_q^m$ ve $\max_{\mathbf{x} \in S} z_q(\mathbf{x}) = z_q^*$, $q=1, \dots, Q$ değerleri, üyelik fonksiyonunu sırasıyla 0 ve 1 yapan $z_q(\mathbf{x})$ amaç fonksiyon değerlerini gösterir. Bu üyelik fonksiyonu $[z_q^m, z_q^*]$ aralığında z_q ya göre lineer ve monoton artandır. (5.5) ifadesindeki üyelik fonksiyonları belirlenirken $2Q$ tane tek amaçlı lineer kesirli taşıma problemi çözülmektedir.

Öncelikle ÇALKTP'yi çözmek için, Zimmermann tarafından önerilen bulanık “min” operatör modelini (Zimmermann, 1978) kullanarak,

$$\text{Amaç:} \quad \max \min_{1 \leq q \leq Q} \mu_q(z_q(\mathbf{x})) \quad (5.6)$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mathbf{x} \in S$$

yardımcı problemini oluşturalım. λ yardımcı değişkeni ile

$$\lambda = \min \mu_q(z_q) \Rightarrow \mu_q(z_q) \geq \lambda$$

alınarak, bu yardımcı problem

$$\text{Amaç:} \quad \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \mu_q(z_q) \geq \lambda, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{x} \in S$$

maksimizasyon problemine dönüştürülür. $\mu_q(z_q)$ üyelik fonksiyonu $[z_q^m, z_q^*]$ aralığında z_q amaç fonksiyonuna göre monoton artan olduğundan, $\mu_q^{-1}(\lambda) = \inf \{z_q \mid \mu_q(z_q) \geq \lambda\}$ olmak üzere (5.7) problemi,

$$\text{Amaç:} \quad \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad z_q \geq \mu_q^{-1}(\lambda),$$

$$\mathbf{x} \in S$$

şeklinde de yazılabilir.

Amaç fonksiyon değeri λ^* , kâr/maliyet veya kâr/zaman olarak ifade edilen bütün lineer kesirli amaçlar arasında minimum tatmin seviyesini aynı anda maksimize eden bir tatmin değerini belirtir. Bu değer aynı zamanda “en temel tatmin” olarak da yorumlanabilir. Yani, taşıma sisteminde yer alan her bir amaç fonksiyonu, en azından bu λ^* değeri kadar tatmin olmaktadır.

(5.6) daki max-min problemini, eşdeğer olarak (5.7) deki minimum operatör modelini, aynı zamanda genelleştirilmiş lineer kesirli taşıma problemi (LKTP) olarak da adlandırabiliriz. Böylece, non-lineer yapıdaki bu problemi Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması ile lineerleştirerek ve bir dizi lineer programlama problemi çözümüne indirgeyerek iteratif olarak çözülebiliriz (Borde ve Crouzeix, 1987, Katagiri vd., 2001; Bajalinov, 2003). İterasyon sonucu bulunan çözüm, (5.1) problemi için bir zayıf Pareto-optimal çözümdür. Minimum operatör modeli, dengeleyici olmayan (non-compensatory) bir model (Tiryaki, 2006) olduğundan, ÇALKTP için kuvvetli Pareto-optimal çözüm elde etmeyi garantilemez. Dolayısıyla bulunan zayıf Pareto-optimal çözüme, Pareto-optimallik testi uygulanarak kuvvetli Pareto-optimal çözüm araştırılır. Testin nasıl uygulanacağı, algoritma verildikten sonra açıklanacaktır.

5.2.1.2 ÇALKTP için Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması

(5.6) daki max-min probleminde bütün üyelik fonksiyonları lineer kesirli fonksiyonlar olduğundan, bu problem Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması (Borde ve Crouzeix, 1987, Katagiri vd., 2001; Bajalinov, 2003) ile lineerleştirilerek çözülebilir.

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) \text{ üyelik fonksiyonunun } [z_q^m, z_q^*] \text{ aralığındaki parçasını } \mu_q(z_q(\mathbf{x})) = \frac{z_q - z_q^m}{z_q^* - z_q^m} = \frac{P_q(\mathbf{x})}{D_q(\mathbf{x})},$$

$q = 1, \dots, Q$ şeklinde gösterelim ve (5.6) problemini

$$\max_{\mathbf{x} \in S} \min_{1 \leq q \leq Q} \left\{ \frac{P_q(\mathbf{x})}{D_q(\mathbf{x})} \right\} \quad (5.8)$$

olarak yeniden ifade edelim. Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması bir dizi

$$F(\lambda) = \max_{\mathbf{x} \in S} \min_{1 \leq q \leq Q} (P_q(\mathbf{x}) - \lambda D_q(\mathbf{x})). \quad (5.9)$$

parametrik problemini çözmeye karşılık gelir.

Algoritmayı sunmadan önce aşağıdaki iki yardımcı teoremi verelim. Bu teoremler, $F(\lambda)$ parametrik amaç fonksiyonuna sahip (5.9) problemi ile genelleştirilmiş LKTP ((5.8) problemi) dolayısıyla orijinal problem olan (5.1) problemi arasında bir ilişki kurmaktadır.

Yardımcı Teorem 5.1 (Bajalinov, 2003) : $\bar{\lambda} = \max_{\mathbf{x} \in S} \min_{1 \leq q \leq Q} \left\{ \frac{P_q(\mathbf{x})}{D_q(\mathbf{x})} \right\}$ olsun. O halde,

1. Parametrik fonksiyon $F(\lambda) > -\infty$ dır. Ayrıca $F(\lambda)$, alttan yarı-sürekli (lower semi-continuous) ve azalmayan (non-decreasing) dır;
2. $\lambda < \bar{\lambda}$ olması için gerek ve yeter şart $F(\lambda) > 0$;
3. $F(\bar{\lambda}) \leq 0$;
4. (5.8) problemi çözülebilirse $F(\bar{\lambda}) = 0$ dır.
5. $F(\bar{\lambda}) = 0$ ise (5.8) ve (5.9) problemleri aynı optimal çözümler kümesine sahiptir.

Yardımcı Teorem 5.2 (Bajalinov, 2003): S uygun çözümler kümesi kompakt ise

1. Parametrik fonksiyon $F(\lambda) > -\infty$ dır. Ayrıca $F(\lambda)$, sürekli ve daima artandır;
2. (5.8) ve (5.9) problemleri daima optimal çözümlere sahiptir;
3. $\bar{\lambda}$ sonlu bir değerdir ve $F(\bar{\lambda}) = 0$ dır;
4. $F(\lambda) = 0$ olması $\lambda = \bar{\lambda}$ olduğunu gösterir;

Bu iki yardımcı teorem, Dinkelbach Algoritması'nın genelleştirilmesi için gerekli teorik temeli sağlamaktadır.

ÇALKTP'nin çözümü için Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritması:

Adım 0: $r = 0$ al.

Adım 1: Keyfi bir $\mathbf{x}^r (= \mathbf{x}^0) \in S$ uygun çözümünü al ve $\lambda^{(0)} = \min_{1 \leq q \leq Q} \left\{ \frac{P_q(\mathbf{x}^{(0)})}{D_q(\mathbf{x}^{(0)})} \right\}$ değerini hesapla.

Adım 2:

$\max \quad t$

$$\frac{1}{D_q(\mathbf{x}^{(r)})} [P_q(\mathbf{x}) - \lambda^r D_q(\mathbf{x})] \geq t, \quad q = 1, \dots, Q$$

$\mathbf{x} \in S$

problemini çöz ve elde edilen çözümü $\mathbf{x}^{r+1}$ olarak al.

Adım 3: Eğer $t < \delta$ (Burada $\delta > 0$, yaklaşma parametresidir.) ise, mevcut çözüm $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{r+1}$, (5.8) probleminin optimal çözümüdür ve $\lambda^{(r)}$ de onun optimal değeridir, DUR. Aksi halde,

$$\lambda^{(r+1)} = \min_{1 \leq q \leq Q} \left\{ \frac{P_q(\mathbf{x}^{r+1})}{D_q(\mathbf{x}^{r+1})} \right\} \text{ değerini hesapla, } r := r+1 \text{ al ve Adım 2 ye dön.}$$

Adım 2 de $F(\lambda^r)$ parametrik probleminden üretilmiş $\{\lambda^r\}$ dizisinin yakınsaklığı, dizinin aşağıdaki özellikleri ile garantilenir:

$$\text{Tüm } r \geq 0 \text{ için, } \lambda^{(r)} = \min_{1 \leq q \leq Q} \mu_q(z_q(\mathbf{x}^r)) \leq \lambda^* \text{ dır,}$$

$\{\lambda^r\}$ dizisi monoton artandır,

$$\text{burada } \lambda^* = \max_{\mathbf{x} \in S} \min_{1 \leq q \leq Q} \mu_q(z_q(\mathbf{x})) \text{ dır.}$$

5.2.1.2.1 Pareto-optimallik Testi

(5.8) probleminin Adım 3 den elde edilen $\mathbf{x}^*$ çözümü, (5.1) probleminin zayıf Pareto-optimal (uzlaşık) çözümüdür. Eğer aynı optimal λ değerini veren bir alternatif çözüm mevcut değilse, $\mathbf{x}^*$ çözümü aynı zamanda kuvvetli Pareto-optimal çözümdür. Eğer alternatif optimal çözüm varsa, bir kuvvetli Pareto-optimal çözüm bulmak için (Kornbluth ve Steuer, 1981a, 1981b; Steuer, 1986; Sakawa ve Nishizaki, 2002; Ahlatçioğlu ve Tiryaki, 2007):

$$\text{Amaç:} \quad \max \quad \sum_{q=1}^Q \varepsilon_q$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad z_q(\mathbf{x}) - \varepsilon_q \geq z_q(\mathbf{x}^*), \quad q = 1, \dots, Q$$

$$\mathbf{x} \in S$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \varepsilon_q \geq 0, \quad q = 1, \dots, Q$$

problemine eşdeğer:

$$\text{Amaç:} \quad \max \quad \sum_{q=1}^Q \widehat{\varepsilon}_q$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}^q - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}^q z_q^* \right) \cdot \mathbf{x} - \widehat{\varepsilon}_q \geq d_0^q \cdot z_q^* - p_0^q, \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.10)$$

$$\mathbf{x} \in S$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \widehat{\varepsilon}_q \geq 0, \quad q = 1, \dots, Q$$

pareto LP problemi çözülür.

- Eğer $\max \sum_{q=1}^Q \hat{\varepsilon}_q = 0$ ise, $\mathbf{x}^*$ kuvvetli Pareto-optimal çözümdür.
- Eğer $\max \sum_{q=1}^Q \hat{\varepsilon}_q > 0$ ise, pareto LP probleminin çözümü $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}^*$ in yerine konur ve

tekrar (5.10) problemi çözülür. Bu işlem $\max \sum_{q=1}^Q \hat{\varepsilon}_q = 0$ sağlanana kadar sürdürülür.

Elde edilen son çözüm $\bar{\mathbf{x}}$, dolayısıyla $\mathbf{x}^*$, kuvvetli pareto-optimal çözümdür.

5.2.1.3 Açıklayıcı Örnek

Aşağıdaki ÇALKTP'yi, **Temel Örnek Problem** olarak tanımlayalım. Önerdiğimiz bütün bulanık yaklaşımların işleyişleri bu problem üzerinde açıklanacaktır.

$$\begin{aligned} \text{Amaçlar:} \quad \max z_1(\mathbf{x}) &= \frac{x_{11} + 2x_{12} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2} \\ \max z_2(\mathbf{x}) &= \frac{2x_{11} + 4x_{12} + 10x_{21} + 8x_{22} + 6}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4} \\ \max z_3(\mathbf{x}) &= \frac{6x_{11} + x_{12} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5} \end{aligned}$$

Kısıtlar: (5.11)

$$\text{Arz kısıtları:} \quad x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$$

$$\text{Talep kısıtları:} \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\text{Non-negatiflik kısıtı: } \mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

Üç tane lineer kesirli taşıma problemi nonlinear yapıdadır. Bu kesirli taşıma problemlerinin maksimum ve minimum çözümleri, ya GAMS (Rosenthal, 2007), Gino gibi nonlinear problemleri direkt olarak çözebilen paket programlar yardımıyla ya da Charnes Cooper değişken dönüşümü (Charnes ve Cooper, 1962) ile kesirli fonksiyonlar lineerleştirilip winqsb, LINDO gibi LP çözen paket programlar yardımıyla bulunabilir. Çizelge 5.1'de üç tane lineer kesirli taşıma probleminin ayrı ayrı çözülmesiyle elde edilen maksimum ve minimum çözümler ve bu çözümlere karşılık gelen amaç fonksiyon değerleri verilmektedir. Örneğin z_1 amaç fonksiyonu için maksimum çözüm $\mathbf{x}_1^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (0, 150, 50, 200)$ ve karşılık gelen maksimum amaç değeri $z_1^* = 2.111$; minimum çözüm ise

$\mathbf{x}_1^m = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (50, 100, 0, 250)$ ve karşılık gelen minimum amaç değeri $z_1^m = 2.059$ dir. Ayrıca $\mathbf{x}_1^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (0, 150, 50, 200)$ çözümüne karşılık z_2 amacının değeri 4.138, z_3 amacının ise 1.687 dir.

Çizelge 5.1 (5.11) probleminde herbir amaç için minimum ve maksimum çözümler ve karşılık gelen amaç değerleri

	z_1	z_2	z_3
z^*	2.111	4.972	1.736
z^m	2.059	4.138	1.687
$x_1^*(0, 150, 50, 200)$	2.111	4.138	1.687
$x_1^m(50, 100, 0, 250)$	2.059	4.972	1.736
$x_2^*(50, 100, 0, 250)$	2.059	4.972	1.736
$x_2^m(0, 150, 50, 200)$	2.111	4.138	1.687
$x_3^*(50, 100, 0, 250)$	2.059	4.972	1.736
$x_3^m(0, 150, 50, 200)$	2.111	4.138	1.687

Böylece, Çizelge 5.1'deki veriler ve (5.5) deki lineer üyelik fonksiyon yapısı kullanılarak, üç tane amaç fonksiyonunun $[z_q^m, z_q^*]$ $q=1, 2, 3$ aralığındaki üyelik fonksiyonları şöyledir:

$$\begin{aligned}
 \mu_1(z_1(\mathbf{x})) &= \frac{-20.366 x_{11} - 80.328 x_{12} + 114.251 x_{21} + 36.193 x_{22} - 2.269}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2}, \\
 \mu_2(z_2(\mathbf{x})) &= \frac{-2.563x_{11} - 5.127 x_{12} - 2.894x_{21} + 4.631 x_{22} - 12.652}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4}, \\
 \mu_3(z_3(\mathbf{x})) &= \frac{53.591x_{11} - 14.02 x_{12} + 47.204 x_{21} - 1.245 x_{22} - 8.877}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5}.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

(5.11) için (5.8)'e karşılık gelen min operatör modelimiz aşağıdaki formdadır:

Amaç: $\max \lambda$

$$\text{Kısıtlar: } \mu_1(z_1(\mathbf{x})) \geq \lambda \Rightarrow \frac{-20.366x_{11} - 80.328x_{12} + 114.251x_{21} + 36.193x_{22} - 2.269}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2} \geq \lambda$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) \geq \lambda \Rightarrow \frac{-2.563x_{11} - 5.127x_{12} - 2.894x_{21} + 4.631x_{22} - 12.652}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4} \geq \lambda$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) \geq \lambda \Rightarrow \frac{53.591x_{11} - 14.02x_{12} + 47.204x_{21} - 1.245x_{22} - 8.877}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5} \geq \lambda$$

Arz kısıtları:

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$$

Talep kısıtları:

$$x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350 \quad (5.13)$$

Non-negatiflik kısıtı:

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

Temel Örnek Problem İçin Genelleştirilmiş Dinkelbach Algoritmasının Uygulanışı

Adım 0: $r = 0$ al.

Adım 1: $\max \{ \mathbf{0}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S \}$ 'nin bir uygun çözümü $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 150, 50, 200) \in S$ olsun. $\mathbf{x}^{(0)}$ çözümüne karşılık amaçların tatmin seviyeleri

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x}^{(0)})) = \frac{P_1(\mathbf{x}^{(0)})}{D_1(\mathbf{x}^{(0)})} = 1, \quad \mu_2(z_2(\mathbf{x}^{(0)})) = \frac{P_2(\mathbf{x}^{(0)})}{D_2(\mathbf{x}^{(0)})} = 0, \quad \mu_3(z_3(\mathbf{x}^{(0)})) = \frac{P_3(\mathbf{x}^{(0)})}{D_3(\mathbf{x}^{(0)})} = 0$$

$$\text{ve amaçların minimum tatmin seviyesi } \lambda^{(0)} = \min \left\{ \frac{P_1(\mathbf{x}^{(0)})}{D_1(\mathbf{x}^{(0)})}, \frac{P_2(\mathbf{x}^{(0)})}{D_2(\mathbf{x}^{(0)})}, \frac{P_3(\mathbf{x}^{(0)})}{D_3(\mathbf{x}^{(0)})} \right\} = 0$$

olarak bulunur.

Adım 2: Şimdi, $\lambda^{(0)} = 0$ için aşağıdaki problem kurulur:

Amaç: $\max t$

$$\text{Kısıtlar: } \begin{cases} \frac{1}{D_1(\mathbf{x}^{(0)})} [P_1(\mathbf{x}) - \lambda^{(0)} D_1(\mathbf{x})] \geq t \\ \frac{1}{D_2(\mathbf{x}^{(0)})} [P_2(\mathbf{x}) - \lambda^{(0)} D_2(\mathbf{x})] \geq t \\ \frac{1}{D_3(\mathbf{x}^{(0)})} [P_3(\mathbf{x}) - \lambda^{(0)} D_3(\mathbf{x})] \geq t \end{cases}$$

Arz kısıtları: $x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$

Talep kısıtları: $x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$

Non-negatiflik kısıtı: $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$.

Buradan

Amaç: $\max t$

$$\text{Kısıtlar: } \begin{cases} 0.001 (-20.366 x_{11} - 80.328 x_{12} + 114.251 x_{21} + 36.193 x_{22} - 2.269) \geq t \\ 0.002 (-2.563 x_{11} - 5.127 x_{12} - 2.894 x_{21} + 4.631 x_{22} - 12.652) \geq t \\ 0.001 (53.591 x_{11} - 14.02 x_{12} + 47.204 x_{21} - 1.245 x_{22} - 8.877) \geq t \end{cases}$$

Arz kısıtları: $x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$

Talep kısıtları: $x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$

Non-negatiflik kısıtı: $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$

yazılır ve problem çözülerek $\mathbf{x}^{(1)} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (24.165, 125.835, 25.835, 224.165)$ elde edilir.

Adım 3: Yaklaşma parametresi $\delta = 0.001$ olsun. $t = 0.462 < \delta$ olduğundan, $\mathbf{x}^{(1)}$ için tatmin

$$\text{seviyeleri } \mu_1(z_1(\mathbf{x}^{(1)})) = \frac{P_1(\mathbf{x}^{(1)})}{D_1(\mathbf{x}^{(1)})} = 0.527, \quad \mu_2(z_2(\mathbf{x}^{(1)})) = \frac{P_2(\mathbf{x}^{(1)})}{D_2(\mathbf{x}^{(1)})} = 0.419,$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x}^{(1)})) = \frac{P_3(\mathbf{x}^{(1)})}{D_3(\mathbf{x}^{(1)})} = 0.527 \text{ dir ve bunların minimum değeri}$$

$$\lambda^{(1)} = \min \left\{ \frac{P_1(\mathbf{x}^{(1)})}{D_1(\mathbf{x}^{(1)})}, \frac{P_2(\mathbf{x}^{(1)})}{D_2(\mathbf{x}^{(1)})}, \frac{P_3(\mathbf{x}^{(1)})}{D_3(\mathbf{x}^{(1)})} \right\} = 0.419 \text{ dir. } r := r + 1 \quad (r = 0 + 1 = 1) \text{ alalım.}$$

Adım 2: $\lambda^{(1)} = 0.419$ için aşağıdaki problem:

Amaç: $\max t$

$$\text{Kısıtlar: } \begin{cases} \frac{1}{D_1(\mathbf{x}^{(1)})} [P_1(\mathbf{x}) - \lambda^{(1)} D_1(\mathbf{x})] \geq t \\ \frac{1}{D_2(\mathbf{x}^{(1)})} [P_2(\mathbf{x}) - \lambda^{(1)} D_2(\mathbf{x})] \geq t \\ \frac{1}{D_3(\mathbf{x}^{(1)})} [P_3(\mathbf{x}) - \lambda^{(1)} D_3(\mathbf{x})] \geq t \end{cases}$$

Arz kısıtları: $x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$

Talep kısıtları: $x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$

Non-negatiflik kısıtı: $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$

yani,

Amaç: $\max t$

$$\text{Kısıtlar: } \begin{cases} 0.001 (-20.785 x_{11} - 81.585 x_{12} + 113.832 x_{21} + 35.355 x_{22} - 3.107) \geq t \\ 0.002 (-2.982 x_{11} - 5.965 x_{12} - 4.151 x_{21} + 4.212 x_{22} - 14.328) \geq t \\ 0.001 (52.753 x_{11} - 14.439 x_{12} + 46.785 x_{21} - 2.502 x_{22} - 10.972) \geq t \end{cases}$$

Arz kısıtları: $x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$

Talep kısıtları: $x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$

Non-negatiflik kısıtı: $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$

kurulur. Bu problem çözülerek $\mathbf{x}^{(2)} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (26.510, 123.490, 23.490, 226.510)$ elde edilir.

Algoritmayı bu tarzda uygulamaya devam ederek, (5.8) probleminin beş iterasyon için elde edilen sonuçları, Çizelge 5.2’de verilmektedir. Çizelgede iterasyon sayısı r , r . iterasyondaki çözümler $\mathbf{x}^{(r)}$, bu çözümler için amaçların tatmin seviyeleri $\mu_q(\mathbf{x}^{(r)})$, $q=1,2,3$, monoton artan $\lambda^{(r)}$ dizisi ve yakınsaklık parametresi t görülmektedir.

$r=5$ için Adım 2 ’de, $t=0.0004 < \delta=0.001$ dır. Mevcut çözüm

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^r = \mathbf{x}^{(5)} = (26.867, 123.133, 23.133, 226.867),$$

(5.13) probleminin (min operator modelinin) bir uzlaşık çözümüdür. Karşılık gelen üyelik fonksiyonlarının değerleri

$$\mu_1(\mathbf{x}^{(5)}) = 0.472, \quad \mu_2(\mathbf{x}^{(5)}) = 0.472, \quad \mu_3(\mathbf{x}^{(5)}) = 0.581$$

ve amaç fonksiyonlarının değerleri ise

$$z_1(\mathbf{x}) = 2.08357, \quad z_2(\mathbf{x}) = 4.53180, \quad z_3(\mathbf{x}) = 1.71545$$

olur. Böylece

$$\lambda^{(r)} = \lambda^{(5)} = 0.472,$$

(5.13) probleminin optimal değeridir. Bu değer, taşıma sisteminde her bir amacın ulaşabileceği en temel tatmin seviyesi olarak yorumlanabilir. (5.13) probleminin alternatif çözümü olmadığından, Pareto optimallik testi gereği, bu zayıf etkin (uzlaşık) çözüm aynı zamanda kuvvetli Pareto-optimal bir çözümdür.

Not: Bulunan çözümler, GAMS paket programı kullanılarak elde edilmiştir.

Çizelge 5.2 (5.13) probleminin beş iterasyon için sonuçları

İterasyon r	$\mathbf{x}^{(r)}$	$\mu_1(\mathbf{x}^{(r)})$	$\mu_2(\mathbf{x}^{(r)})$	$\mu_3(\mathbf{x}^{(r)})$	$\lambda^{(r)}$	t
$r = 0$	$\mathbf{x}^{(0)} = (0, 150, 50, 200)$	1	0	0	0	—
$r = 1$	$\mathbf{x}^{(1)} = (24.165, 125.835, 25.835, 224.165)$	0.527	0.419	0.527	0.419	0.462
$r = 2$	$\mathbf{x}^{(2)} = (26.51, 123.49, 23.49, 226.51)$	0.48	0.465	0.574	0.465	0.053
$r = 3$	$\mathbf{x}^{(3)} = (26.82, 123.18, 23.18, 226.82)$	0.473	0.471	0.58	0.471	0.007
$r = 4$	$\mathbf{x}^{(4)} = (26.86, 123.14, 23.14, 226.86)$	0.473	0.472	0.58	0.472	0.001
$r = 5$	$\mathbf{x}^{(5)} = (26.867, 123.133, 23.133, 226.867)$	0.472	0.472	0.581	0.472	0.0004

5.2.1.4 ÇALKTP için İkiye Bölme Yöntemi

Bu bölümde Sakawa ve Yumine (1983), Sakawa ve Yano (1988)'nin ÇALKP problemi için önerdiği bir etkileşimli bulanık yöntemin temelini, yani ikiye bölme yöntemi ile LP kombinasyonu olan bir algoritmayı, ÇALKTP'ye uygulayacağız. Bu yöntemle taşıma problemini çözmenin zorluğu, iterasyon sayısının fazla, yani çözüme yakınsamanın oldukça yavaş olmasıdır.

Non-lineer problem olan (5.7)'de λ değeri sabit tutulduğunda, problemin bir lineer eşitsizlikler kümesine indirgenebileceğine dikkat edelim. Lineerleştirilmiş problemin λ^* optimal çözümünü elde etme prosesi, (5.7)'nin kısıtlarını sağlayan kabul edilebilir bir S' kümesi mevcut olacak şekilde λ 'nın maksimum değerini bulmaya eşdeğerdir. μ_q , $q = 1, \dots, Q$ nun minimum değeri $\mu_{\min}$ olmak üzere λ , $\mu_{\min} \leq \lambda \leq \mu_{\min} + 1$ olduğundan, (5.7)

problemimizi çözmek için ikiye bölme yöntemi ile LP deki simpleks metodun faz 1'ini kullanan çözüm algoritmamız şöyledir:

Adım 1: $\lambda = \mu_{\min} = 0$ al ve simpleks metodun faz 1 yöntemini kullanarak (5.7) probleminin kısıtlarını sağlayan kabul edilebilir bir S' kümesinin mevcut olup olmadığını test et. Eğer S' kümesi varsa algoritmaya devam et. Aksi takdirde $\lambda^* = \mu_{\min}$, DUR.

Adım 2: $\lambda = \mu_{\min} + 1$ al ve (5.7) probleminin kısıtlarını sağlayan bir S' kümesinin mevcut olup olmadığını simpleks metodun faz 1 yöntemini kullanarak test et. Eğer S' kümesi mevcut ise, $\lambda^* = \mu_{\min} + 1$ al. Aksi takdirde, (5.7) probleminin kısıtlarını sağlayan λ nın maksimum değeri λ^* , $\mu_{\min}$ ile $\mu_{\min} + 1$ arasında olduğundan Adım 3 e geç.

Adım 3: λ değeri, başlangıç değeri $\lambda_1 = \mu_{\min} + 0.5$ alınarak, ikiye bölme metodu ile aşağıdaki gibi güncellenir:

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1}{2^{n+1}}, & \lambda_n \text{ için uygun çözüm bölgesi mevcut ise} \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{1}{2^{n+1}}, & \lambda_n \text{ için uygun çözüm bölgesi mevcut değilse.} \end{cases}$$

Yani, her bir λ sabit değeri için, (5.7) probleminin lineer kısıtlarını sağlayan kabul edilebilir bir S' kümesinin mevcut olup olmadığı simpleks metodun faz 1 yöntemi kullanılarak test edilmiş ve böylece non-lineer (5.7) probleminin kısıtlarını sağlayan maksimum λ değeri belirlenmiş olur.

5.2.1.4.1 Açıklayıcı Örnek:

ÇALKTP'nin çözümü için önerdiğimiz ikiye bölme yöntemi ile LP birleşimini temel alan bulanık yaklaşımı uygulamak üzere (5.11)'de verilen temel örnek problemi yeniden ele alalım.

(5.13) probleminin çözümü için LP tabanlı ikiye bölme algoritmasını aşağıdaki gibi uygulayabiliriz:

Adım 1: $\lambda = \mu_{\min} = 0$ alalım. (5.7) problemine karşılık kurulan (5.13) max-min probleminin kısıtlarını sağlayan kabul edilebilir bir S' kümesinin mevcut olup olmadığını test edelim. Bunun için,

Amaç: $\max \mathbf{0}^T \mathbf{x}$

Kısıtlar: $\mu_1(z_1(\mathbf{x})) \geq 0 \Rightarrow \frac{-20.366x_{11} - 80.328x_{12} + 114.251x_{21} + 36.193x_{22} - 2.269}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2} \geq 0$

$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) \geq 0 \Rightarrow \frac{-2.563x_{11} - 5.127x_{12} - 2.894x_{21} + 4.631x_{22} - 12.652}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4} \geq 0$

$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) \geq 0 \Rightarrow \frac{53.591x_{11} - 14.02x_{12} + 47.204x_{21} - 1.245x_{22} - 8.877}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5} \geq 0$

Arz kısıtları:

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$$

Talep kısıtları:

$$x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

Non-negatiflik kısıtı:

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

problemini, eşdeğer olarak

Amaç: $\max \mathbf{0}^T \mathbf{x}$

Kısıtlar: $\mu_1(z_1(\mathbf{x})) \geq 0 \Rightarrow -20.366x_{11} - 80.328x_{12} + 114.251x_{21} + 36.193x_{22} - 2.269 \geq 0$

$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) \geq 0 \Rightarrow -2.563x_{11} - 5.127x_{12} - 2.894x_{21} + 4.631x_{22} - 12.652 \geq 0$

$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) \geq 0 \Rightarrow 53.591x_{11} - 14.02x_{12} + 47.204x_{21} - 1.245x_{22} - 8.877 \geq 0$

Arz kısıtları:

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$$

Talep kısıtları:

$$x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

Non-negatiflik kısıtı:

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

LP problemini kuralım. Simpleks yöntemin faz 1 problemini çözerek,

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (0.035, 149.965, 49.965, 200.035)$$

$\mathbf{x} \in S'$ noktasını buluruz. Böylece kabul edilebilir bir $\emptyset \neq S'$ kümesi mevcuttur. ($S' = \emptyset$ olması durumunda $\lambda^* = \mu_{\min} = 0$ demektir, yani ÇALKTP'nin tüm amaç fonksiyonlarını

aynı anda tatmin eden pareto-optimal çözüm bulanık yaklaşımla bulunamıyor anlamına gelmektedir.)

Adım 2: $\lambda = \mu_{\min} + 1 = 0 + 1 = 1$ alalım. (5.7) problemine karşılık kurulan (5.13) max-min probleminin kısıtlarını sağlayan bir kabul edilebilir S' kümesinin mevcut olup olmadığını test edelim. Bunun için:

Amaç: $\max \mathbf{0}^T \mathbf{x}$

Kısıtlar:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) \geq 1 \Rightarrow -21.366x_{11} - 83.328x_{12} + 113.251x_{21} + 34.193x_{22} - 4.269 \geq 0$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) \geq 1 \Rightarrow -3.563x_{11} - 7.127x_{12} - 5.894x_{21} + 3.631x_{22} - 16.652 \geq 0$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) \geq 1 \Rightarrow 51.591x_{11} - 15.02x_{12} + 46.204x_{21} - 4.245x_{22} - 13.877 \geq 0$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

problemi çözülerek $S' = \emptyset$ bulunur.

Adım 3: Başlangıç değeri $\lambda_1 = \mu_{\min} + 0.5 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ alınarak,

Amaç: $\max \mathbf{0}^T \mathbf{x}$

Kısıtlar:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) \geq 0.5 \Rightarrow -20.7816x_{11} - 81.5019x_{12} + 113.318x_{21} + 35.06513x_{22} - 3.24904 \geq 0$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) \geq 0.5 \Rightarrow -3.06123x_{11} - 6.12245x_{12} - 4.39097x_{21} + 4.127846x_{22} - 14.6483 \geq 0$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) \geq 0.5 \Rightarrow 52.48269x_{11} - 14.4919x_{12} + 46.60794x_{21} - 2.74236x_{22} - 11.3595 \geq 0$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

problemi çözülür ve $S' = \emptyset$ bulunur. λ değeri, λ_n için kabul edilebilir bir S' kümesi

mevcut olmadığından $\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{1}{2^{n+1}}$ formülü ile

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n=1} \lambda_2 = \lambda_1 - \frac{1}{2^2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_2 = 0.25$$

olarak güncellenir. $\lambda_2 = 0.25$ değeri için,

Amaç: $\max \mathbf{0}^T \mathbf{x}$

Kısıtlar:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) \geq 0.25 \Rightarrow -20.5316x_{11} - 80.7519x_{12} + 113.568x_{21} + 35.56513x_{22} - 2.74904 \geq 0$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) \geq 0.25 \Rightarrow -2.81123x_{11} - 5.62245x_{12} - 3.64097x_{21} + 4.377846x_{22} - 13.6483 \geq 0$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) \geq 0.25 \Rightarrow 52.98269x_{11} - 14.2419x_{12} + 46.85794x_{21} - 1.99236x_{22} - 10.1095 \geq 0$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

problemi çözülerek

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (15.103, 134.897, 34.897, 215.103),$$

$\mathbf{x} \in S'$ noktası bulunur. Böylece bir kabul edilebilir $\emptyset \neq S'$ kümesi mevcuttur. λ değeri, λ_n

için kabul edilebilir S' kümesi mevcut olduğundan $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ formülü ile

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n=2} \lambda_3 = \lambda_2 + \frac{1}{2^3} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda_3 = 0.375$$

olarak güncellenir. $\lambda_3 = 0.375$ değeri için,

Amaç: $\max \mathbf{0}^T \mathbf{x}$

Kısıtlar:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) \geq 0.375 \Rightarrow -20.6566x_{11} - 81.1269x_{12} + 113.443x_{21} + 35.31513x_{22} - 2.99904 \geq 0$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) \geq 0.375 \Rightarrow -2.93623x_{11} - 5.87245x_{12} - 4.01597x_{21} + 4.252846x_{22} - 14.1483 \geq 0$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) \geq 0.375 \Rightarrow 52.73269x_{11} - 14.3669x_{12} + 46.73294x_{21} - 2.36736x_{22} - 10.7345 \geq 0$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

problemi çözülerek

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (21.888, 128.112, 28.112, 221.888),$$

$\mathbf{x} \in S'$ bulunur. Buradan, λ_3 değeri kullanılarak,

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n=3} \lambda_4 = \lambda_3 + \frac{1}{2^4} \Rightarrow \lambda_4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} \Rightarrow \lambda_4 = 0.4375$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek on iterasyon sonra,

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n=10} \lambda_{11} = \lambda_{10} + \frac{1}{2^{11}} \Rightarrow \lambda_{11} = 0.4716796$$

değeri elde edilir. Böylece

$$\text{Amaç:} \quad \max \mathbf{0}^T \mathbf{x}$$

Kısıtlar:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) \geq 0.474355 \Rightarrow -20.7533x_{11} - 81.4169x_{12} + 113.3463x_{21} + 35.12177x_{22} - 3.1924 \geq 0$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) \geq 0.474355 \Rightarrow -3.03291x_{11} - 6.06581x_{12} - 4.30601x_{21} + 4.156166x_{22} - 14.535 \geq 0$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) \geq 0.474355 \Rightarrow 52.53933x_{11} - 14.4636x_{12} + 46.63626x_{21} - 2.6574x_{22} - 11.2179 \geq 0$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

problemi çözülerek

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (26.832, 123.168, 23.168, 226.832) \in S'$$

noktası bulunur. Ardışık iki iterasyon sonunda aynı $\mathbf{x} \in S'$ noktası bulunduğundan, yani λ değerinde bundan sonra güncelleme yapılamadığından, iterasyon sona erer ve $\lambda^* = 0.4716796$ bulunur. Bu noktaya karşılık gelen üyelik fonksiyon değerleri

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 0.4732, \quad \mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 0.471672, \quad \mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 0.579876$$

ve amaç fonksiyon değerleri

$$z_1(\mathbf{x}) = 2.08361, \quad z_2(\mathbf{x}) = 4.53122, \quad z_3(\mathbf{x}) = 1.71541$$

olarak elde edilir.

Çizelge 5.3 İkiye bölme yönteminin iterasyonları ve sonuçları

İteration r	$\mathbf{x}^{(r)}$	$\lambda^{(r)}$
$r = 0$	$\mathbf{x}^{(0)} = (0.035, 149.965, 49.965, 200.035)$	0
$r = 1$	$S' = \emptyset$ (uygun çözüm yoktur)	1
$r = 2$	$S' = \emptyset$ (uygun çözüm yoktur)	0.5
$r = 3$	$\mathbf{x}^{(3)} = (15.103, 134.897, 34.897, 215.103)$	0.25
$r = 4$	$\mathbf{x}^{(4)} = (21.888, 128.112, 28.112, 221.888)$	0.375
$r = 5$	$\mathbf{x}^{(5)} = (25.113, 124.887, 24.887, 225.113)$	0.4375
$r = 6$	$\mathbf{x}^{(5)} = (26.686, 123.314, 23.314, 226.686)$	0.46875
$r = 7$	$S' = \emptyset$ (uygun çözüm yoktur)	0.484375
$r = 8$	$S' = \emptyset$ (uygun çözüm yoktur)	0.476563
$r = 9$	$S' = \emptyset$ (uygun çözüm yoktur)	0.472656
$r = 10$	$\mathbf{x}^{(5)} = (26.784, 123.216, 23.216, 226.784)$	0.4707031
$r = 11$	$\mathbf{x}^{(5)} = (26.832, 123.168, 23.168, 226.832)$	0.4716796
$r = 12$	$\mathbf{x}^{(5)} = (26.832, 123.168, 23.168, 226.832)$	0.4716796

5.2.1.5 ÇALKTP için Bulanık Hedef Programlama (HP) Yaklaşımı

Genellikle birbirleriyle çelişen birden fazla amacı içeren çok amaçlı karar verme problemlerinin çözüm yöntemlerinden birisi olan HP, KV'nin her bir amaç için istenilen bir hedef değeri belirlemesine dayanır. İstenilen çözüm bu hedef değerlerden sapmaları minimum yapan çözümdür. HP yaklaşımında, amaç fonksiyonları sapma değişkenleri ile kısıtlara katılır ve istenmeyen sapma değişkenleri minimum yapılarak çözüm araştırılır. HP yönteminin avantajı LP modelini kullanmasıdır. HP modelinde, amaç fonksiyonları ve amaçlara ait hedef değerleri ve kısıtlar deterministiktir. Ancak hedef değerlerini, hedeflerin önceliklerinin sırasını ve göreceli ağırlıklarını kesin olarak belirlemek oldukça zordur. Bu veriler çoğu zaman KV'nin tercihlerine göre belirlenir. HP modelindeki bu subjektiflik olgusu bulanık küme teorisi ile de ele alınabilir. Bulanık küme teorisi HP modeline uygulandığı zaman, amaçların hedef değerleri ve tercih öncelikleri kesin olmayan ifadelerle ele alınır.

Hedeflerin önceliğine göre, bulanık HP modeli iki şekilde ele alınabilir. Bunlardan ilki, bütün hedeflerin aynı tercih önceliğine sahip olduğu bulanık HP modelidir. Bu modelde, bütün hedefleri eşanlı (the Archimedian fuzzy GP) olarak doyuran bir çözüm belirlenir. İkincisi ise hedeflerin farklı tercih önceliklerinde yer alabildiği tercih öncelikli bulanık HP (the

preemptive fuzzy GP) modelidir. Bu modelde, KV'nin tercihini dikkate alan bir çözüm belirlenmeye çalışılır (Özkan, 2003).

Çalışmamızın bu bölümünde Pal ve diğerleri (Pal vd., 2003) tarafından bulanık ÇALKP için önerilen HP yaklaşımını ÇALKTP'yi çözmede kullanacağız. Amacımız öncelikle problemimizin amaç fonksiyonlarını, yani bu amaçlara karşılık gelen üyelik fonksiyonlarını kurmak, üyelik fonksiyonlarına hedef değerler olarak 1'i atamak ve daha sonra belirlenen her bir üyelik hedefinin istenilen hedef değerinden negatif yönde sapmasının ağırlıklı toplamını minimum yapmaktır.

Şimdi öncelikle (5.5) deki lineer üyelik fonksiyonları için hedef değeri olarak 1'i atayalım. Bu durumda üyelik hedef kısıtlarını,

$$\mu_q(z_q(x)) + r_q^- - r_q^+ = 1, \quad q = 1, \dots, Q$$

şeklinde yazabiliriz. $r_q^- (\geq 0)$ ve $r_q^+ (\geq 0)$, $q = 1, \dots, Q$ değişkenleri sırasıyla hedef değerinden negatif ve pozitif sapma miktarlarını göstermek üzere $r_q^- \cdot r_q^+ = 0$ olur. Amacımız r_q^- negatif sapma değişken değerlerinin ağırlıklı toplamını minimum yapmaktır. Böylece bu yaklaşımda sadece r_q^- değişkenleri minimum yapılır. Bulanık hedeften pozitif sapma miktarları üyelik fonksiyon değerinin tam tatmin olması anlamına gelmektedir. Bu nedenle r_q^+ değişkenlerinin minimum yapılması aslında gereksizdir.

Üyelik hedeflerinin Lineerleştirilmesi

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) = \frac{z_q - z_q^m}{z_q^* - z_q^m} = \frac{P_q(\mathbf{x})}{D_q(\mathbf{x})}, \quad q = 1, \dots, Q \text{ olduğundan}$$

$$R_q^- = r_q^- D_q(x) \text{ ve } R_q^+ = r_q^+ D_q(x)$$

değişken dönüşümleri ile,

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) + r_q^- - r_q^+ = 1 \Rightarrow P_q(x) + R_q^- - R_q^+ = D_q, \quad q = 1, \dots, Q$$

lineer denklemleri elde edilir. $r_q^-, r_q^+ \geq 0$ ve $D_q(x) > 0$ olduğundan $R_q^-, R_q^+ \geq 0$ ve

$R_q^- \cdot R_q^+ = 0$ olur. r_q^- nin minimum yapılması $\frac{R_q^-}{D_q(x)}$ oranının minimumunu bulmaya

eşdeğerdir. Üyelik hedefleri tam tatmin olduğunda negatif sapma değişken $r_q^- = 0$, üyelik

hedefleri hiç tatmin olmadığında $r_q^- = 1$ olur. Böylece çözümde $r_q^- \leq 1$ eşitsizliğinin bulunması, problemin modelinde $\frac{R_q^-}{D_q(x)} \leq 1$, yani $R_q^- - D_q(x) \leq 0$ kısıtının bulunmasını gerektirir. Burada r_q^+ pozitif sapma değişkeninin minimum yapılmasının gereksizliği konusundaki tartışmaya dayanarak, bu değişkene karşılık böyle bir kısıt model formülasyonunda yer almaz.

Söz konusu şartlar altında (5.7) problemimizin HP model formülasyonu aşağıdaki gibidir:

$$\text{Amaç:} \quad \min \sum_{q=1}^Q w_q^- R_q^-$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad P_q(x) + R_q^- - R_q^+ = D_q$$

$$R_q^- - D_q(x) \leq 0$$

$$\forall \mathbf{x} = (x_{ij}) \in S, \quad R_q^-, R_q^+ \geq 0, \quad q = 1, \dots, Q.$$

Burada w_q^- (≥ 0) nümerik ağırlıkları, sapma değişkenlerinin ağırlıklarıdır ve bulanık hedeflerin göreceli önemlerini yansıtır. Bu ağırlıklar KV tarafından çeşitli şekilde belirlenebilir. Mohamed (Mohamed, 1997) tarafından önerilmiş ağırlıklandırma planı şöyledir:

$$w_q^- = \begin{cases} \frac{1}{z_q^* - z_q^m}, & \mu_q, [z_q^m, z_q^*] \text{ aralığında lineer ve monoton artan fonksiyon ise} \\ \frac{1}{z_q^* - z_q^m}, & \mu_q, [z_q^m, z_q^*] \text{ aralığında lineer ve monoton azalan fonksiyon ise} \end{cases} \quad q = 1, \dots, Q.$$

Çalışmamızda w_q^- (≥ 0) ağırlık değerlerini, toplamaları bir olacak şekilde eşit ağırlıklı olarak belirleyeceğiz. Fakat istenirse ağırlıklar, amaçların önem derecesine göre farklı alınabilir veya Mohamed tarafından verilen yaklaşımla da belirlenebilir.

5.2.1.5.1 Açıklayıcı Örnek:

(5.10) da verilen üyelik fonksiyonları için üyelik hedef değerleri olarak 1'i atayalım.

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) + r_1^- - r_1^+ = 1 \Rightarrow \frac{-20.366x_{11} - 80.328x_{12} + 114.251x_{21} + 36.193x_{22} - 2.269}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2} + r_1^- - r_1^+ = 1$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) + r_2^- - r_2^+ = 1 \Rightarrow \frac{-2.563x_{11} - 5.127x_{12} - 2.894x_{21} + 4.631x_{22} - 12.652}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4} + r_2^- - r_2^+ = 1$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) + r_3^- - r_3^+ = 1 \Rightarrow \frac{53.591x_{11} - 14.02x_{12} + 47.204x_{21} - 1.245x_{22} - 8.877}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5} + r_3^- - r_3^+ = 1$$

Burada $r_q^-, r_q^+ \geq 0$, $r_q^- r_q^+ = 0$, $q=1,2,3$ tür. Formülasyonda paydalar eşitlenerek ve

$$R_1^- = r_1^-(x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2) \quad \text{ve} \quad R_1^+ = r_1^+(x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2),$$

$$R_2^- = r_2^-(x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4) \quad \text{ve} \quad R_2^+ = r_2^+(x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4),$$

$$R_3^- = r_3^-(2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5) \quad \text{ve} \quad R_3^+ = r_3^+(2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5)$$

değişken dönüşümleri yapılarak her bir amaç için sırasıyla,

$$-21.366x_{11} - 83.328x_{12} - 113.251x_{21} + 34.193x_{22} + R_1^- - R_1^+ = 4.269,$$

$$-3.563x_{11} - 7.127x_{12} - 5.894x_{21} + 3.631x_{22} + R_2^- - R_2^+ = 16.652,$$

$$51.591x_{11} - 15.02x_{12} + 46.204x_{21} - 4.245x_{22} + R_3^- - R_3^+ = 13.877$$

lineer denklemleri elde edilir. $r_q^-, r_q^+ \geq 0$ ve $D_q(x) > 0$, $q=1,2,3$ olduğundan $R_q^-, R_q^+ \geq 0$ ve

$$R_q^- R_q^+ = 0, \quad q=1,2,3 \quad \text{olur.}$$

$$r_1^- \leq 1, r_2^- \leq 1 \quad \text{ve} \quad r_3^- \leq 1 \quad \text{eşitsizliklerine karşılık sırasıyla,}$$

$$R_1^- - (x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2) \leq 0,$$

$$R_2^- - (x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4) \leq 0,$$

$$R_3^- - (2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5) \leq 0$$

kısıtları bulunur.

Üyelik hedeflerinin ağırlıkları w_q , $q=1,2,3$ olmak üzere, (5.11) problemi için Archimedian bulanık HP modeli,

Amaç: $\min w_1^- R_1^- + w_2^- R_2^- + w_3^- R_3^-$

Kısıtlar: $-21.366x_{11} - 83.328x_{12} + 113.251x_{21} + 34.193x_{22} + R_1^- - R_1^+ = 4.269$

$$-3.563x_{11} - 7.127x_{12} - 5.894x_{21} + 3.631x_{22} + R_2^- - R_2^+ = 16.652$$

$$51.591x_{11} - 15.02x_{12} + 46.204x_{21} - 4.245x_{22} + R_3^- - R_3^+ = 13.877$$

$$R_1^- - x_{11} - 3x_{12} - x_{21} - 2x_{22} \leq 2$$

$$R_2^- - x_{11} - 2x_{12} - 3x_{21} - x_{22} \leq 4$$

$$R_3^- - 2x_{11} - x_{12} - x_{21} - 3x_{22} \leq 5$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}, \quad R_q^-, R_q^+ \geq 0, \quad q = 1, 2, 3$$

olur. Bu problem örneğın $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$ eşit ağırlıkları alınarak GAMS paket programı ile çözüldüğünde, minimum ağırlıklı toplam sapma miktarı 285.962 değeriyle çözüm takımı olarak $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (49.717, 100.283, 0.283, 249.717)$ noktası bulunur. Elde edilen $\mathbf{x}$ zayıf etkin noktası, Pareto-optimallik testi gereğı, alternatif çözüm olmadığından, aynı zamanda Pareto-optimal nokta olur. Ayrıca $\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 0$, $\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 0.993154$, $\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 0.997746$ üyelik değeri ve $z_1(\mathbf{x}) = 0.001173$, $z_2(\mathbf{x}) = 0.001981$, $z_3(\mathbf{x}) = 0.001048$ amaç fonksiyon değeri bulunur. Mohamed'in ağırlıklandırma planı uygulanırsa

$$w_1 = \frac{1}{z_1^* - z_1^m} = \frac{1}{2.111 - 2.059} = 19.23076,$$

$$w_2 = \frac{1}{z_2^* - z_2^m} = \frac{1}{4.972 - 4.138} = 1.199040,$$

$$w_3 = \frac{1}{z_3^* - z_3^m} = \frac{1}{1.736 - 1.687} = 20.408163$$

ağırlıkları ve normalize edilerek $\mathbf{w} = (0.470903, 0.029360, 0.499735)$ ağırlık vektörü elde edilir. Bu ağırlıklarla bulanık hedef programlama problemi çözüldüğünde az önce verilen çözüm takımı değişmeden kalmasına rağmen, minimum ağırlıklı toplam sapma miktarı 402.518 olmuştur. Görüldüğü gibi, hedeflere farklı ağırlıklar atayarak hedef değeri “1” den oransal olarak negatif yöndeki sapmaların toplam miktarını minimum yapacak şekilde negatif yöndeki sapma miktarlarını bulan çözümler araştırılmıştır.

5.2.2 Non-Linear Üyelik Fonksiyonlarının Kullanıldığı Yaklaşımlar

ÇALKTP'yi çözmek için, (5.3) ifadesinde verilen lineer üyelik fonksiyonunu kullanan bulanık yaklaşımlarımız Kısım 5.2.1'de verilmişti. Bu kısımda ise non-lineer (hiperbolik, üstel ve parçalı lineer) üyelik fonksiyonlarını kullanan bulanık çözüm önerilerimiz ile (5.1) problemi çözülecektir.

5.2.2.1 Hiperbolik Üyelik Fonksiyonları ile ÇALKTP'nin çözümü

Leberling (1981) tarafından tanımlanan hiperbolik üyelik fonksiyonundan faydalanarak, ÇALKTP'nin q . lineer kesirli amaç fonksiyonuna karşılık $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonunu:

$$\mu_q^H(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_q < z_q^m \\ \frac{1}{2} \tanh(z_q(\mathbf{x}) - b_q) \alpha_q + \frac{1}{2}, & z_q^m \leq z_q \leq z_q^*, \quad q = 1, \dots, Q \\ 1, & z_q > z_q^* \end{cases} \quad (5.14)$$

veya eşdeğer olarak

$$\mu_q^H(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_q < z_q^m \\ \frac{1}{2} + \frac{\left[e^{(z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2}) \alpha_q} - e^{-(z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2}) \alpha_q} \right]}{e^{(z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2}) \alpha_q} + e^{-(z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2}) \alpha_q}}, & z_q^m \leq z_q \leq z_q^*, \quad q = 1, \dots, Q \\ 1, & z_q > z_q^* \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Burada α_q , $q = 1, \dots, Q$ biçim parametresidir. Literatürde genellikle

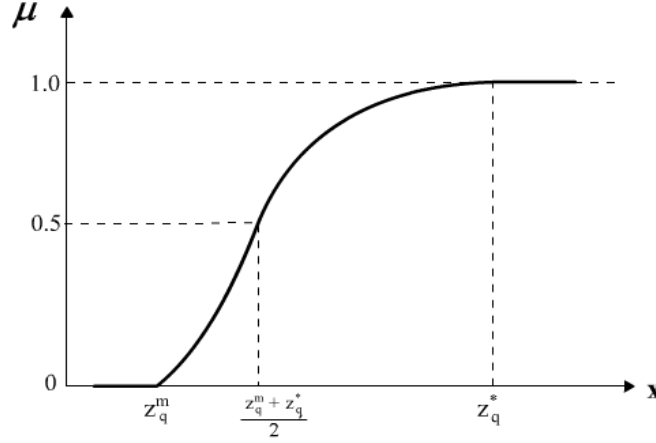
$\alpha_q = \frac{3}{\frac{z_q^* - z_q^m}{2}}$ (Leberling, 1981) olarak alınmaktadır. b_q ifadesi ise $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x})) = 0.5$ olacak

şekilde $z_q(\mathbf{x})$ in değerini gösterir ve üyelik fonksiyonunun büküm noktası ile ilgili değeridir.

Leberling tarafından $b_q = \frac{z_q^* + z_q^m}{2}$ olarak alınmıştır (Sakawa, 1993).

(5.14) deki hiperbolik üyelik fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$ üyelik fonksiyonu $[z_q^m, z_q^*]$ aralığında $z_q(\mathbf{x})$ 'e göre kesin monoton artan bir fonksiyondur.
- $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$ üyelik fonksiyonu $[z_q^m, z_q^*]$ aralığında $z_q(\mathbf{x}) \leq \frac{z_q^m + z_q^*}{2}$ ise kesin konveks, $z_q(\mathbf{x}) \geq \frac{z_q^m + z_q^*}{2}$ ise kesin konkav ve $z_q(\mathbf{x}) = \frac{z_q^m + z_q^*}{2}$ ise $\frac{1}{2}$ dir.
- Tüm $\mathbf{x} \in R^n$ ler için $0 < \mu_q^H(z_q(\mathbf{x})) < 1$ eşitsizliği geçerlidir: Dolayısıyla $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonunun alt asimtotik fonksiyonu $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x})) \equiv 0$ ve üst asimtotik fonksiyonu ise $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x})) \equiv 1$ dir.



Şekil 5.1 $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$ Hiperbolik Üyelik Fonksiyonu

Şekil 5.1’de verilen grafikte görüldüğü gibi, hiperbolik üyelik fonksiyonundaki tatmin artış oranı, lineer üyelik fonksiyonundaki gibi daima sabit değildir.

(5.7) deki Zimmermann’ın min operatör modeli ve (5.14) deki hiperbolik üyelik fonksiyonu kullanılarak,

Amaç: $\max \lambda$

$$\text{Kısıtlar: } \mu_q^H(z_q(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} + \frac{\left[e^{(z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2})\alpha_q} - e^{-(z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2})\alpha_q} \right]}{e^{(z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2})\alpha_q} + e^{-(z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2})\alpha_q}} \geq \lambda, \quad q = 1, \dots, Q$$

(5.15)

$$\mathbf{x} \in S, \lambda \geq 0$$

non-lineer programlama problemi elde edilir.

Teorem 5.3: $(\lambda^*, \mathbf{x}^*)$, (5.15) probleminin optimal çözümü olmak üzere; λ^* , $0 < \lambda^* < 1$ eşitsizliğini sağlar.

İspat: Tüm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve tüm $q = 1, \dots, Q$ için $0 < \mu_q^H(z_q(\mathbf{x})) < 1$ dir.

$$\lambda^* = \mu_D(z_q(\mathbf{x}^*)) = \min_q (\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}^*))) := \mu_{q^*}^H(z_{q^*}(\mathbf{x}^*)) \quad \text{ve} \quad 0 < \mu_{q^*}^H(z_{q^*}(\mathbf{x}^*)) < 1 \quad \text{olduğundan}$$

$$0 < \lambda^* < 1 \quad \text{dir.} \quad \diamond$$

$\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$ tanjant hiperbolik üyelik fonksiyonları ve $z_q(\mathbf{x})$ lineer kesirli fonksiyonlarının her ikisi de non-lineer yapıda olduğundan, (5.15) formülasyonunda basitliği sağlamak için Leberling'in (1981) dönüşümünü uygulayabiliriz.

$\lambda^* > 0$ olduğundan (5.15) problemini yeniden düzenleyerek,

$$\text{Amaç:} \quad \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \lambda \leq \frac{1}{2} \tanh(z_q(\mathbf{x}) - b_q) \alpha_q + \frac{1}{2}, \quad q = 1, \dots, Q$$

$$\mathbf{x} \in S, \lambda \geq 0$$

ya da eşdeğer olarak,

$$\text{Amaç:} \quad \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \tanh\left((z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2}) \alpha_q\right) \geq (2\lambda - 1), \quad q = 1, \dots, Q$$

$$\mathbf{x} \in S, \lambda \geq 0$$

şeklinde yazabiliriz.

“ $\tanh$ ” tanjant hiperbolik fonksiyonu ve “ $\tanh^{-1}$ ” ters tanjant hiperbolik fonksiyonu, $\mathbf{x}$ ’ e göre kesin monoton artan olduğundan,

$$\text{Amaç:} \quad \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \tanh^{-1}(2\lambda - 1) \leq \alpha_q (z_q(\mathbf{x}) - \frac{z_q^m + z_q^*}{2}), \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.16)$$

$$\mathbf{x} \in S, \lambda \geq 0$$

elde ederiz.

$$x_{n+1} = \tanh^{-1}(2\lambda - 1)$$

dersek,

$$\lambda = \frac{1}{2} \tanh(x_{n+1}) + \frac{1}{2} \quad (5.17)$$

olur. $\tanh(\mathbf{x})$ fonksiyonu, $\mathbf{x}'$ e göre kesin monoton artan fonksiyon olduğundan, λ nın maksimizasyonu x_{n+1} 'in maksimizasyonuna eşdeğerdir. Böylece (5.16) problemini aşağıdaki non-lineer programlama problemine dönüştürebiliriz:

$$\text{Amaç:} \quad \max x_{n+1}$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \alpha_q z_q(\mathbf{x}) - x_{n+1} \geq \alpha_q \left[\frac{z_q^m + z_q^*}{2} \right], \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.18)$$

$$\mathbf{x} \in S, \lambda \geq 0.$$

Bu problemin optimal çözümü $(x_{n+1}^*, \mathbf{x}^*)$ olsun. (5.17) ifadesini kullanarak (5.18) probleminin optimal çözümü,

$$(\lambda^*, \mathbf{x}^*) = \left(\frac{1}{2} \tanh(x_{n+1}^*) + \frac{1}{2}, \mathbf{x}^* \right)$$

olur.

(5.15) probleminin optimal çözümünün pareto-optimalliği ile ilgili olarak da Leberling'in ÇALP için ispatladığı teoremden faydalananarak ÇALKTP için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.4:

1. $(\lambda^*, \mathbf{x}^*)$, (5.15) probleminin bir optimal çözümü ise; $\mathbf{x}^*$, ÇALKTP'nin bir zayıf Pareto-optimal çözümüdür.
2. $(\lambda^*, \mathbf{x}^*)$, (5.15) probleminin yegane optimal çözümü ise; $\mathbf{x}^*$, ÇALKTP'nin Pareto-optimal çözümüdür.

İspat:

1. $\mathbf{x}^*$, ÇALKTP'nin bir zayıf Pareto-optimal çözümü olmasın. O halde $z_q(\mathbf{x}^*) < z_q(\hat{\mathbf{x}})$, $q = 1, \dots, Q$ olacak şekilde $\bar{\mathbf{x}} (\neq \mathbf{x}^*)$ uygun çözümü mevcuttur. $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$, $z_q(\mathbf{x})$ 'e göre kesin monoton artan olduğundan $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}^*)) < \mu_q^H(z_q(\bar{\mathbf{x}}))$, $q = 1, \dots, Q$ elde edilir. Böylece,

$$\lambda^* = \min_{q=1,\dots,Q} \mu_q^H(z_q(\mathbf{x}^*)) < \min_{q=1,\dots,Q} \mu_q^H(z_q(\bar{\mathbf{x}})) = \bar{\lambda}$$

olur ki bu da $(\lambda^*, \mathbf{x}^*)$ 'in optimalliği ile çelişir.

2. $\mathbf{x}^*$, ÇALKTP'nin bir Pareto-optimal çözümü olmasın. O halde bazı j 'ler için $z_j(\mathbf{x}^*) < z_j(\hat{\mathbf{x}})$ ve her $q=1,\dots,Q$, $q \neq j$ için $z_q(\mathbf{x}^*) \leq z_q(\hat{\mathbf{x}})$ olacak şekilde $\hat{\mathbf{x}} (\neq \mathbf{x}^*)$ uygun çözümü mevcuttur. $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$, $z_q(\mathbf{x})$ 'e göre kesin monoton artan olduğundan bazı j 'ler için $\mu_j^H(z_j(\mathbf{x}^*)) < \mu_j^H(z_j(\hat{\mathbf{x}}))$ ve her $q=1,\dots,Q$, $q \neq j$ için $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}^*)) \leq \mu_q^H(z_q(\hat{\mathbf{x}}))$ demektir. Böylece,

$$\lambda^* = \min_{q=1,\dots,Q} \mu_q^H(z_q(\mathbf{x}^*)) \leq \min_{q=1,\dots,Q} \mu_q^H(z_q(\hat{\mathbf{x}})) = \hat{\lambda}$$

elde ederiz ki bu da ya $\lambda^* < \hat{\lambda}$ ya da $\lambda^* = \hat{\lambda}$ olarak $(\lambda^*, \mathbf{x}^*)$ 'in yegane optimal çözüm olmasıyla çelişir.

Teoremin ispatı böylece tamamlanır. ◇

5.2.2.1.1 Açıklayıcı Örnek:

(5.11) problemini ele alalım. Çizelge 5.1'i gözönüne alarak, (5.14)'de tanımlanan hiperbolik üyelik fonksiyon için α_q , $q=1,2,3$ biçim parametre değerlerini

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{z_1^* - z_1^m}{2}} = 38.46154, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\frac{z_2^* - z_2^m}{2}} = 2.398082, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\frac{z_3^* - z_3^m}{2}} = 40.81633$$

olarak seçelim. (5.18) modeline karşılık kurulan;

Amaç: $\max x_4$

$$\text{Kısıtlar: } \alpha_1 z_1(\mathbf{x}) - x_4 \geq \left[\frac{z_1^m + z_1^*}{2} \right] \alpha_1$$

$$\alpha_2 z_2(\mathbf{x}) - x_4 \geq \left[\frac{z_2^m + z_2^*}{2} \right] \alpha_2$$

$$\alpha_3 z_3(\mathbf{x}) - x_4 \geq \left[\frac{z_3^m + z_3^*}{2} \right] \alpha_3$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

non-lineer programlama probleminde elde edilen parametre değerleri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, problem:

Amaç: $\max \lambda$

$$\text{Kısıtlar: } 38.46154 \cdot \left[\frac{x_{11} + 2x_{12} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2} \right] - x_4 \geq 80.19231$$

$$2.398082 \cdot \left[\frac{2x_{11} + 4x_{12} + 10x_{21} + 8x_{22} + 6}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4} \right] - x_4 \geq 10.92326$$

$$40.81633 \cdot \left[\frac{6x_{11} + x_{12} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5} \right] - x_4 \geq 69.85714$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

şekline dönüşür. Bu non-lineer problem GAMS paket programı ile çözülerek, $x_4^* = 0$ ve $\mathbf{x}^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (27.963, 121.507, 22.037, 227.963)$ zayıf pareto-optimal çözümü, Pareto-optimallik testi gereği, aynı zamanda pareto-optimal çözümü elde edilir. $x_4^* = \tanh^{-1}(2\lambda - 1)$ dönüşümünden $\lambda^* = 0.5$ bulunur. O halde (5.11) problemi için optimal çözüm takımı

$$(\lambda^*, \mathbf{x}^*) = \left(\frac{1}{2} \tanh(x_{n+1}^*) + \frac{1}{2}, \mathbf{x}^* \right) = (0.5, 27.963, 121.507, 22.037, 227.963)$$

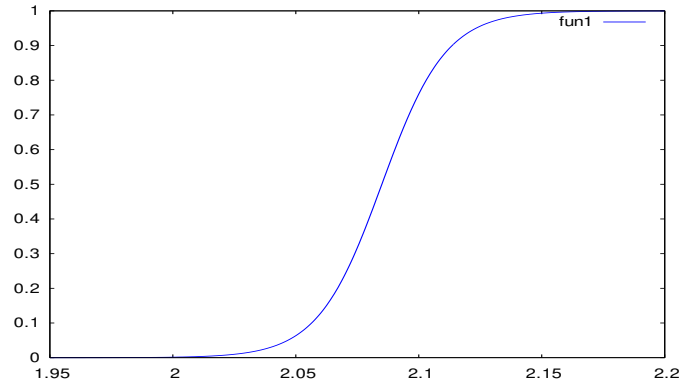
dır. (5.11) problemi için $z_q(\mathbf{x})$, $q = 1, 2, 3$ amaçlarına karşılık $[z_q^m, z_q^*]$ aralığında $z_q(\mathbf{x})$ ya göre kesin monoton artan olarak kurulan $\mu_q^H(z_q(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonlarının

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{38.46154z_1(\mathbf{x}) - 80.19231} - e^{-38.46154z_1(\mathbf{x}) + 80.19231}}{e^{38.46154z_1(\mathbf{x}) - 80.19231} + e^{-38.46154z_1(\mathbf{x}) + 80.19231}},$$

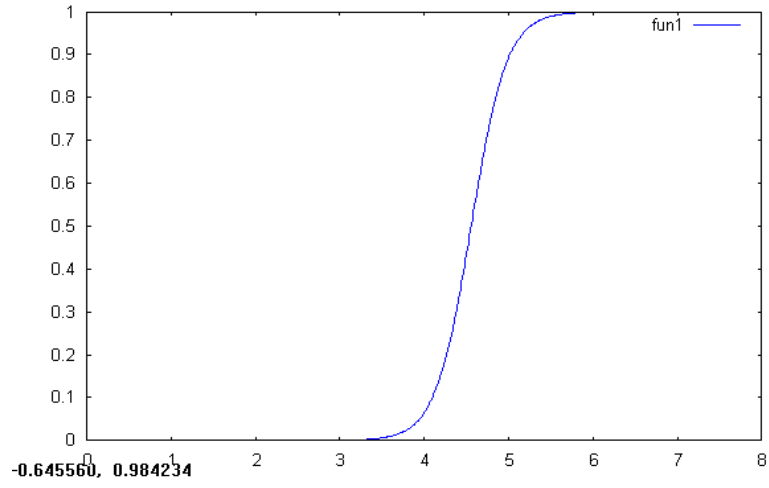
$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2.398082z_2(\mathbf{x}) - 10.92326} - e^{-2.398082z_2(\mathbf{x}) + 10.92326}}{e^{2.398082z_2(\mathbf{x}) - 10.92326} + e^{-2.398082z_2(\mathbf{x}) + 10.92326}}$$

$$\text{ve } \mu_3(z_3(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{40.81633z_3(\mathbf{x}) - 69.85714} - e^{-40.81633z_3(\mathbf{x}) + 69.85714}}{e^{40.81633z_3(\mathbf{x}) - 69.85714} + e^{-40.81633z_3(\mathbf{x}) + 69.85714}}$$

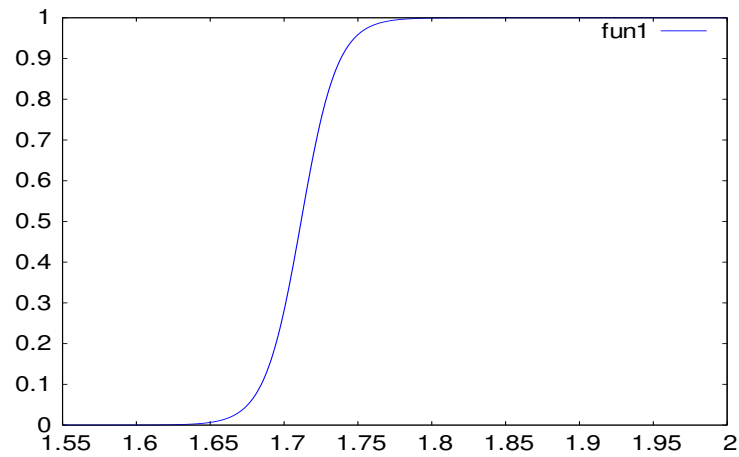
“maxima” çizim programı¹ (2008) ile çizilen grafikleri sırasıyla Şekil 5.2, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 de verilmiştir.



Şekil 5.2 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonu



Şekil 5.3 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonu



Şekil 5.4 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ hiperbolik üyelik fonksiyonu

¹ <http://www.maxima.sourceforge.net>

5.2.2.2 Üstel Üyelik Fonksiyonları ile ÇALKTP'nin çözümü

Çok amaçlı LP problemlerinde üstel üyelik fonksiyonunu kullanmanın iki avantajı vardır. Birincisi, “çarpım” ve diğer çeşitli non-lineer birleştirme operatörleri kullanıldığında elde edilen non-lineer problemler lineer probleme dönüştürülebilir. İkincisi de, bazı pratik uygulamalarda lineer üyelik fonksiyonlar yerine üstel üyelik fonksiyonları kullanma ile gerçek yaşam problemleri daha iyi yansıtılmaktadır (Li ve Lee, 1991). Ancak lineer kesirli fonksiyonlarla çalışırken üstel üyelik fonksiyonları kullanma ile elde edilen avantaj, non-lineer problemin lineer probleme indirgenmesi yerine gerçek yaşam problemlerinin daha gerçekçi temsil edilmesidir.

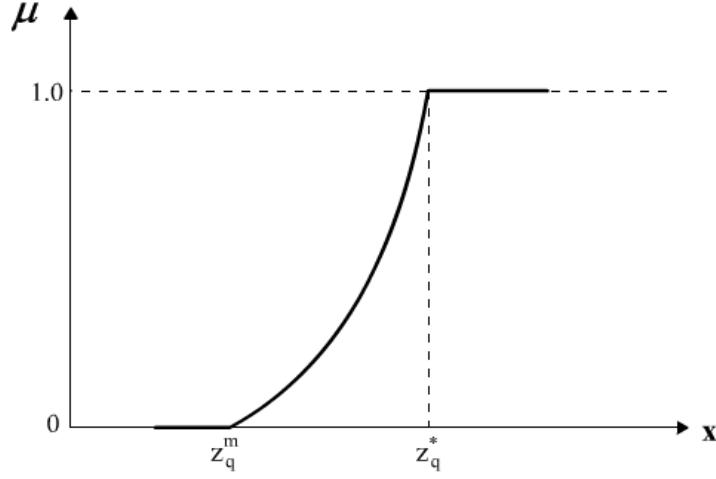
Li ve Lee (1991) tarafından tanımlanan üstel üyelik fonksiyonundan faydalanarak, ÇALKTP'nin q . lineer kesirli amaç fonksiyonuna karşılık $\mu_q^E(z_q(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonunu:

$$\mu_q^E(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} \exp\left(\frac{a_q(z_q - z_q^*)}{z_q^* - z_q^m}\right), & z_q \in (-\infty, z_q^*] \\ 1, & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (5.19)$$

olarak tanımlayalım. Burada a_q , $q=1,...,Q$, biçim parametresi olarak bir ayarlama çarpanıdır. a_q , $q=1,...,Q$ Li ve Lee (1991) tarafından $a_q=3$ olarak alınmıştır.

(5.19) daki üstel üyelik fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\mu_q^E(z_q(\mathbf{x}))$ üyelik fonksiyonu $[z_q^m, z_q^*]$ aralığında $z_q(\mathbf{x})$ 'e göre kesin monoton artan fonksiyondur.
- $\forall z_q \in (-\infty, z_q^*]$ için $0 \leq \mu_q^E(z_q(\mathbf{x})) \leq 1$ ve $\mu_q^E(z_q^*(\mathbf{x})) = 1$ dir .
- $z_q \rightarrow -\infty$ gittikçe $\mu_q^E(z_q(\mathbf{x})) \rightarrow 0$ olur.



Şekil 5.5. Üstel Üyelik Fonksiyonu

(5.7) deki Zimmermann'ın min operatör modelini ve (5.19)'daki üstel üyelik fonksiyonunu kullanarak,

Amaç: $\max \lambda$

$$\text{Kısıtlar: } \exp\left(\frac{a_q(z_q - z_q^*)}{z_q^* - z_q^m}\right) \geq \lambda, \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.20)$$

$$\lambda \in [0, 1], \quad \mathbf{x} \in S$$

non-lineer programlama problemini elde ederiz.

$\mu_q^E(z_q(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonları ve $z_q(\mathbf{x})$ lineer kesirli fonksiyonlar her ikisinde non-lineer yapıda olduğundan (5.19) formülasyonunda basitliği sağlamak için Li ve Lee (1991)'nin dönüşümünü uygulayabiliriz.

Burada $\lambda' = -\ln \lambda$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{a_q(z_q - z_q^*)}{z_q^* - z_q^m}\right) \geq \lambda &\Rightarrow \left(\frac{a_q(z_q - z_q^*)}{z_q^* - z_q^m}\right) \geq \ln \lambda \\ &\Rightarrow -\left(\frac{a_q(z_q - z_q^*)}{z_q^* - z_q^m}\right) \leq -\ln \lambda \\ &\Rightarrow \left(\frac{a_q(z_q^* - z_q)}{z_q^* - z_q^m}\right) \leq \lambda' \end{aligned}$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda' \geq 0,$$

$$\mu_q^E(z_q) \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{a_q(z_q^* - z_q)}{z_q^* - z_q^m} \right) \geq 0$$

elde edilir. O halde (5.20) problemi,

$$\text{Amaç:} \quad \min \lambda'$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \left(\frac{a_q(z_q^* - z_q)}{z_q^* - z_q^m} \right) \leq \lambda' \quad , \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.21)$$

$$\left(\frac{a_q(z_q^* - z_q)}{z_q^* - z_q^m} \right) \geq 0$$

$$\mathbf{x} \in S, \quad \lambda' \geq 0$$

problemine indirgenir. Bu problem $z_q(\mathbf{x})$ lineer kesirli amaç fonksiyonları ve λ' değişkeninden dolayı hala non-lineer yapıdadır. Dolayısıyla, üstel üyelik fonksiyonlarını kullanma avantajı non-lineer problemin lineer programlama problemine indirgenmesi değil gerçek yaşam problemlerinin bu kullanım yoluyla iyi temsil edilmesidir. (5.21) probleminin optimal çözümü $(\lambda', \mathbf{x}^*)$ ise, $\lambda' = -\ln \lambda$ dönüşümü ile, ÇALKTP'nin Pareto-optimal çözümü $(\lambda^*, \mathbf{x}^*) = (e^{-\lambda'}, \mathbf{x}^*)$ olur.

5.2.2.2.1 Açıklayıcı Örnek

(5.11) problemini ele alalım. (5.19)'da tanımlanan üstel üyelik fonksiyonu için biçim parametresini $a_q = 2$, $q = 1, 2, 3$ olarak seçelim. (5.20) modeline karşılık kurulan;

$$\text{Amaç:} \quad \max \lambda$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \exp \left(\frac{2 \cdot (z_1(\mathbf{x}) - z_1^*)}{z_1^* - z_1^m} \right) \geq \lambda \quad \exp \left(\frac{2 \cdot (z_2(\mathbf{x}) - z_2^*)}{z_2^* - z_2^m} \right) \geq \lambda$$

$$\exp \left(\frac{2 \cdot (z_3(\mathbf{x}) - z_3^*)}{z_3^* - z_3^m} \right) \geq \lambda$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

non-lineer programlama probleminde Çizelge 5.1'i gözönüne alarak ve $\lambda' = -\ln \lambda$ dönüşümünü yaparak,

Amaç: $\min \lambda'$

Kısıtlar:

$$\frac{2 \left[\left[\frac{x_{11} + 2x_{12} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2} \right] - 2.111 \right]}{0.052} \leq \lambda', \quad \frac{2 \left[\left[\frac{x_{11} + 2x_{12} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2} \right] - 2.111 \right]}{0.052} \geq 0$$

$$\frac{2 \left[\left[\frac{2x_{11} + 4x_{12} + 10x_{21} + 8x_{22} + 6}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4} \right] - 4.972 \right]}{0.854} \leq \lambda', \quad \frac{2 \left[\left[\frac{2x_{11} + 4x_{12} + 10x_{21} + 8x_{22} + 6}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4} \right] - 4.972 \right]}{0.854} \geq 0$$

$$\frac{2 \left[\left[\frac{6x_{11} + x_{12} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5} \right] - 1.736 \right]}{0.049} \leq \lambda', \quad \frac{2 \left[\left[\frac{6x_{11} + x_{12} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5} \right] - 1.736 \right]}{0.049} \geq 0$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}, \quad \lambda' \geq 0$$

problemmini elde ederiz. Bu problem GAMS paket programı ile çözülerek, $\lambda' = 1.055$ ve

$$\mathbf{x}^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (26.874, 123.126, 23.126, 226.874)$$

zayıf pareto-optimal çözümü elde edilir. Pareto-optimallik testi yapıldığında, bu çözümün aynı zamanda Pareto-optimal çözüm olduğu görülür. $\lambda' = -\ln \lambda$ dönüşümünden $\lambda^* = 0.348192427$ optimal değeri bulunur.

O halde (5.11) problemi için optimal çözüm takımı

$$(\lambda^*, \mathbf{x}^*) = (0.348192, 26.874, 123.126, 23.126, 226.874)$$

dır.

(5.11) problemi için $z_q(\mathbf{x})$, $q=1,2,3$ amaçlarına karşılık $[z_q^m, z_q^*]$ aralığında $z_q(\mathbf{x})$ ya göre

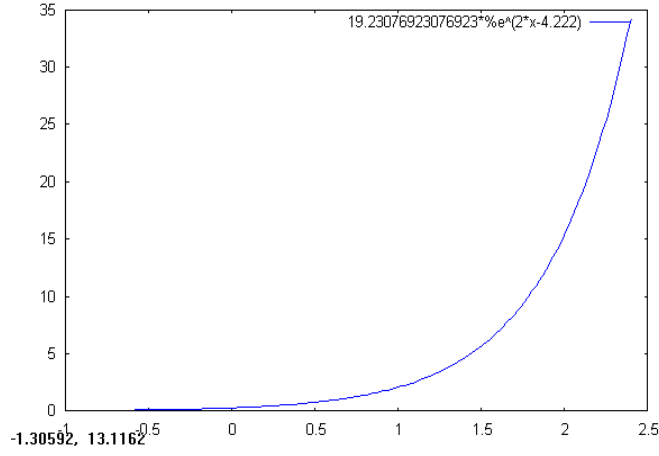
kesin monoton artan olarak kurulan $\mu_q^E(z_q(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonlarının

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \exp\left(\frac{2z_1(\mathbf{x}) - 4.222}{0.052}\right)$$

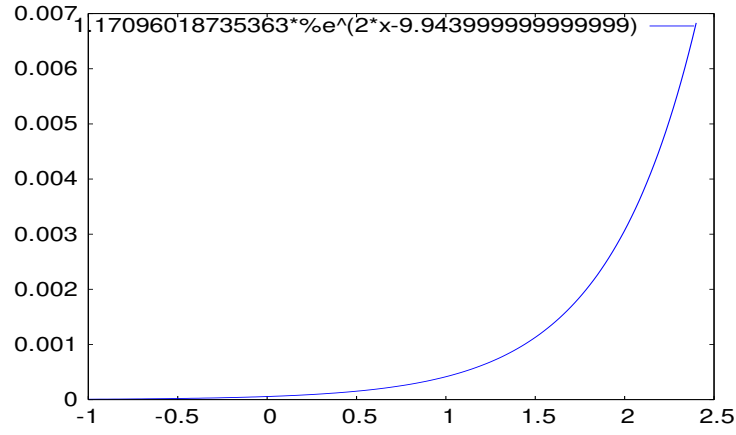
$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \exp\left(\frac{2z_2(\mathbf{x}) - 9.944}{0.854}\right),$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = \exp\left(\frac{2z_3(\mathbf{x}) - 3.472}{0.049}\right)$$

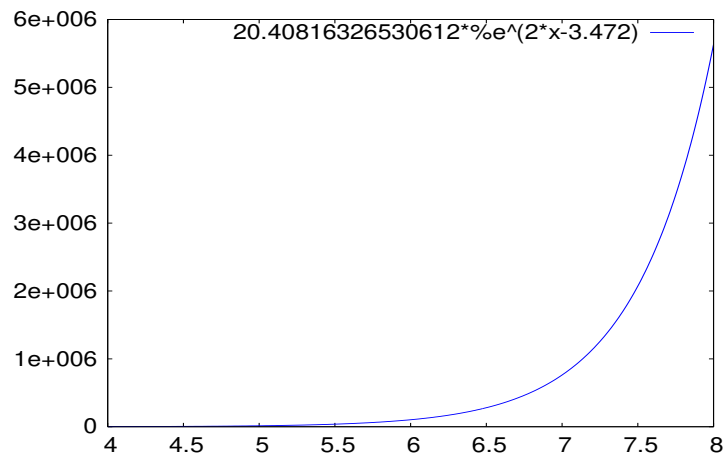
“maxima” çizim programı² (2008) ile çizilen grafikleri sırasıyla Şekil 5.6, Şekil 5.7 ve Şekil 5.8 de verilmiştir.



Şekil 5.6 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonu



Şekil 5.7 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonu



Şekil 5.8 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ üstel üyelik fonksiyonu

² <http://www.maxima.sourceforge.net>

5.2.2.3 Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonu

Çok kriterli programlama modellerini ele alan bulanık lineer programlama (BLP) probleminde lineer üyelik fonksiyonları kullanıldıysa problem tek amaçlı bir LP problemine dönüştürülebilir. Böylece dönüştürülmüş model herhangi bir lineer programlama algoritmasıyla çözülebilir.

Çok genel non-lineer üyelik fonksiyonlarının kullanımında dönüştürme prosesi bir hayli karışıktır. Non-lineer üyelik fonksiyonlarına parça parça lineer fonksiyonlarla (piecewise linear approximation) yaklaşarak, non-lineer programlama modelleri bir dizi lineer programlama modellerine indirgenebilir. Çok sayıda lineer yaklaşım yapmak yani çok sayıda doğru parçasıyla yaklaşmak kabul edilebilir bir hassaslık sağlar. Ancak buna karşılık dönüşmüş modelde kısıt sayısı, dolayısıyla problem çözümünde yapılan işlem hacmi artar. Böylece tipik bir bulanık non-lineer üyelik fonksiyonu sadece konkav, konveks veya S -biçimli yapıda olduğundan lineer yaklaşımların sayısı minimal olmalıdır.

Aşağıda parçalı lineer üyelik fonksiyonlarını kullanan Hannan'ın (Hannan, 1981) ve Yang ve diğerleri (Yang vd., 1991)'nin BLP için verdiği yaklaşımlar ÇALKTP'ne uygulanacak ve yaklaşımlarımız temel örnek problem üzerinde açıklanacaktır.

5.2.2.3.1 Hannan'ın Yaklaşımı (Hannan, 1981)

E.L.Hannan (Hannan, 1981), Leberling'in hiperbolik üyelik fonksiyonundan farklı olan ve parçalı lineer üyelik fonksiyonunu kullanan bir yaklaşım önermiştir. Bu yaklaşım, Zimmermann'ın lineer üyelik fonksiyonunun bir uzantısıdır. Yaklaşımda KV'nin, ÇALP problemindeki $z_q(\mathbf{x})$ amaç fonksiyonunun çeşitli değerleri için üyelik fonksiyonlarının derecesini belirlediği varsayılmaktadır.

Hannan'ın parçalı lineer üyelik fonksiyonundan faydalanarak, ÇALKTP'nin q . lineer kesirli amaç fonksiyonuna karşılık $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunu:

$$\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{N_q} \alpha_{qj} |z_q(\mathbf{x}) - g_{qj}| + \beta_q z_q(\mathbf{x}) + \gamma_q \quad (5.22)$$

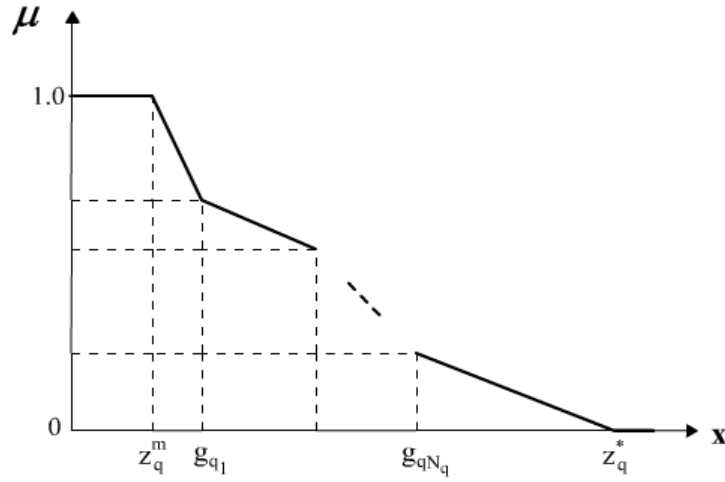
olarak tanımlayalım. Burada

$$\alpha_{qj} = (t_{q,j+1} - t_{qj}) / 2 ;$$

$$\beta_q = (t_{q,N_q+1} + t_{q1}) / 2 ;$$

$$\gamma_q = (s_{q,N_q+1} + s_{q1})/2, \quad q = 1, \dots, Q; \quad j = 1, \dots, N_q \quad (N_q, \text{ parçalanma noktalarının sayısı})$$

dır. Her bir $g_{q,r-1} \leq z_q(\mathbf{x}) \leq g_{qr}$ doğru parçası için bu parçalı lineer üyelik fonksiyonunun $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) = t_{qr}z_q(\mathbf{x}) + s_{qr}$ olduğunu kabul ediyoruz. Burada t_{qr} ve s_{qr} ler sırasıyla $[g_{q,r-1}, g_{qr}]$ aralığında $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ 'nin eğimini ve μ ekseninde kestiği noktayı göstermektedir. $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ 'nin değerleri üyelik derecesini gösterdiğinden tüm $z_q(\mathbf{x})$, $q = 1, \dots, Q$ ler için $0 \leq \mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) \leq 1$ dir.



Şekil 5.9 $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu.

KV'nin bulanık hedeflerine göre kurulan parçalı lineer üyelik fonksiyonu kullanılarak ÇALKTP için Zimmermann'ın "min" operatör modeli:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) \geq \lambda, \quad q = 1, \dots, Q$ (5.23)

$$\mathbf{x} \in S, \lambda \geq 0$$

şeklindedir. Bu problemi hedef programlama problemi olarak ifade etmek üzere g_{qj} değerini, j . noktada q . lineer kesirli amaç fonksiyonu $z_q(\mathbf{x})$ için hedef değeri olarak; d_{qj}^+ ve d_{qj}^- değişkenlerini de j . nokta için sapma değişkenleri olarak tanımlayalım. O halde problem için hedef kısıtlarını

$$z_q(\mathbf{x}) - d_{q1}^+ + d_{q1}^- = g_{q1}$$

$$\vdots$$

$$z_q(\mathbf{x}) - d_{qN_q}^+ + d_{qN_q}^- = g_{qN_q}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece Hannan'ın yaklaşımından faydalanarak $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu,

$$\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{N_q} \alpha_{qj} (d_{qj}^+ + d_{qj}^-) + \beta_q z_q(\mathbf{x}) + \gamma_q, \quad q = 1, \dots, Q$$

olur.

Böylece (5.23) problemi aşağıdaki hedef tipli kısıtlara sahip bir non-lineer programlama problemine dönüşür:

Amaç: $\max \lambda$

$$\text{Kısıtlar: } \mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{N_q} \alpha_{qj} (d_{qj}^+ + d_{qj}^-) + \beta_q z_q(\mathbf{x}) + \gamma_q \geq \lambda, \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.24)$$

$$z_q(\mathbf{x}) - d_{qj}^+ + d_{qj}^- = g_{qj}$$

$$q = 1, \dots, Q; \quad j = 1, \dots, N_q$$

$$\mathbf{x} \in S, \quad \lambda \geq 0$$

$$d_{qj}^+ \geq 0, \quad d_{qj}^- \geq 0$$

$$q = 1, \dots, Q; \quad j = 1, \dots, N_q$$

Ayrıca Hannan 1981'deki çalışmasında bulanık karar yerine, herbir parçalı lineer üyelik fonksiyonu için $\hat{\mu}_q (0 < \hat{\mu}_q \leq 1)$, $q = 1, \dots, Q$ hedef değerlerini ve hedefler arasında P_l , $l = 1, \dots, L$ önceliklerini belirlemiştir (Sakawa, 1993, sayfa 75). Böylece çok amaçlı non-lineer kesirli taşıma problemimizi aşağıdaki genel bulanık non-lineer hedef programlama taşıma problemine dönüştürebiliriz:

Amaç:
$$\min \sum_{l=1}^L P_l \left(\sum_{q \in I_l} e_q^- \right)$$

Kısıtlar:
$$\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) - e_q^+ + e_q^- = \hat{\mu}_q, \quad q = 1, \dots, Q \quad (5.25)$$

$$z_q(\mathbf{x}) - d_{qj}^+ + d_{qj}^- = g_{qj}$$

$$q = 1, \dots, Q; \quad j = 1, \dots, N_q$$

$$\mathbf{x} \in S, \quad \lambda \geq 0$$

$$d_{qj}^+ \geq 0, \quad d_{qj}^- \geq 0, \quad q = 1, \dots, Q; \quad j = 1, \dots, N_q$$

$$e_i^+ \geq 0, \quad e_i^- \geq 0, \quad q = 1, \dots, Q$$

Burada $I_l \neq \emptyset$, l . öncelik sınıfındaki amaç fonksiyonlarının indis kümesini ve e_q^+ , e_q^- lerde sapma değişkenlerini göstermektedir.

Elde edilen $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ çözümünün Pareto-optimalliği için Pareto-optimallik testi yapılır ve her bir amaç için $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$, $q = 1, \dots, Q$ tatmin seviyeleri bulunur.

Açıklayıcı Örnek 1:

Kısım 5.2.1.3'de verilen **Temel Örnek Problem**'i ele alalım. KV tarafından sağlanan $z_1(\mathbf{x})$, $z_2(\mathbf{x})$, $z_3(\mathbf{x})$ amaç fonksiyon değerleri ve karşılık gelen üyelik fonksiyon dereceleri sırasıyla Çizelge 5.4, Çizelge 5.5 ve Çizelge 5.6'da verilmiştir.

Çizelge 5.4 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$	$z_1(\mathbf{x})$	$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = t_{1r} z_1(\mathbf{x}) + s_{1r}, r = 1, 2, 3$
0	$g_{10} = z_1^m = 2.059$	$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \frac{0.45 - 0}{2.08361 - 2.059} = 18.28822 \\ s_{11} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{11} z_1(\mathbf{x}) = -37.65544 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) = 18.28822 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 37.65544$
0.45	$g_{11} = 2.08361$	
0.45	$g_{11} = 2.08361$	$\left. \begin{aligned} t_{12} &= \frac{0.80 - 0.45}{2.09572 - 2.08361} = 28.88265 \\ s_{12} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{12} z_1(\mathbf{x}) = -59.73017 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) = 28.88265 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 59.73017$
0.80	$g_{12} = 2.09572$	
0.80	$g_{12} = 2.09572$	$\left. \begin{aligned} t_{13} &= \frac{1 - 0.80}{2.111 - 2.09572} = 13.09243 \\ s_{13} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{13} z_1(\mathbf{x}) = -26.63807 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{13}(z_1(\mathbf{x})) = 13.09243 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 26.63807$
1	$g_{13} = z_1^* = 2.111$	

Çizelge 5.5 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$	$z_2(\mathbf{x})$	$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = t_{2r} z_2(\mathbf{x}) + s_{2r}, r = 1, 2, 3$
0	$g_{20} = z_2^m = 4.138$	$\left. \begin{aligned} t_{21} &= \frac{0.15 - 0}{4.34636 - 4.138} = 0.71992 \\ s_{21} &= \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{21} z_2(\mathbf{x}) = -2.97903 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{21}(z_2(\mathbf{x})) = 0.71992 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.97903$
0.15	$g_{21} = 4.34636$	
0.15	$g_{21} = 4.34636$	$\left. \begin{aligned} t_{22} &= \frac{0.65 - 0.15}{4.52878 - 4.34636} = 2.7409 \\ s_{22} &= \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{22} z_2(\mathbf{x}) = -11.76294 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{22}(z_2(\mathbf{x})) = 2.7409 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 11.76294$
0.65	$g_{22} = 4.52878$	
0.65	$g_{22} = 4.52878$	$\left. \begin{aligned} t_{23} &= \frac{1 - 0.65}{4.972 - 4.52878} = 0.78967 \\ s_{23} &= \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{23} z_2(\mathbf{x}) = -2.92624 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{23}(z_2(\mathbf{x})) = 0.78967 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.92624$
1	$g_{23} = z_2^* = 4.972$	

Çizelge 5.6 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$	$z_3(\mathbf{x})$	$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = t_{3r} z_3(\mathbf{x}) + s_{3r}, r = 1, 2, 3$
0	$g_{30} = z_3^m = 1.687$	$\left. \begin{aligned} t_{31} &= \frac{0.45 - 0}{1.71375 - 1.687} = 16.82432 \\ s_{31} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{31} z_3(\mathbf{x}) = -28.38263 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) = 16.82432 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 28.38263$
0.45	$g_{31} = 1.71375$	
0.45	$g_{31} = 1.71375$	$\left. \begin{aligned} t_{32} &= \frac{0.60 - 0.45}{1.71541 - 1.71375} = 89.98201 \\ s_{32} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{32} z_3(\mathbf{x}) = -153.75667 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) = 89.98201 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 153.75667$
0.60	$g_{32} = 1.71541$	
0.60	$g_{32} = 1.71541$	$\left. \begin{aligned} t_{33} &= \frac{1 - 0.60}{1.736 - 1.71541} = 19.43068 \\ s_{33} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{33} z_3(\mathbf{x}) = -32.73158 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{33}(z_3(\mathbf{x})) = 19.43068 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 32.73158$
1	$g_{33} = z_3^* = 1.736$	

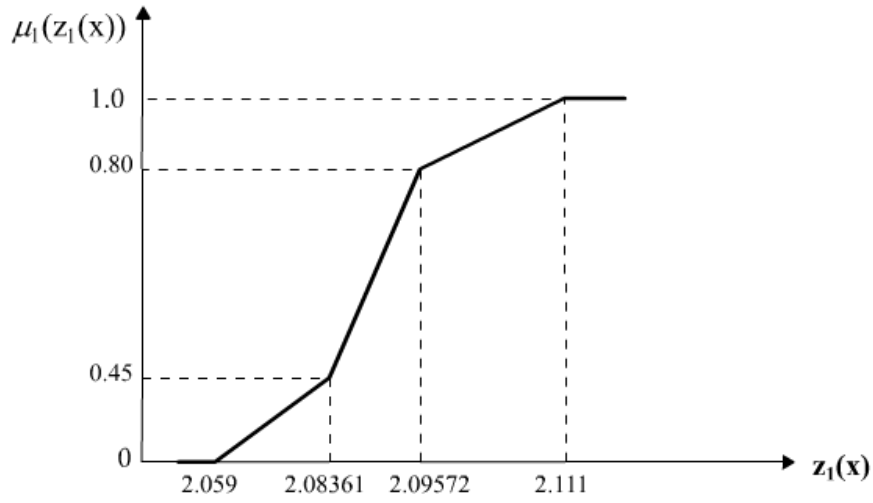
Yukarıdaki verilerden yararlanarak herbir amaca ait elde edilen parçalı lineer üyelik fonksiyonları sırasıyla:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_1(\mathbf{x}) \leq 2.059 \\ \mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) = 18.28822 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 37.65544, & 2.059 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.08361 \\ \mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) = 28.88265 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 59.73017, & 2.08361 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.09572 \\ \mu_{13}(z_1(\mathbf{x})) = 13.09243 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 26.63807, & 2.09572 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.111 \\ 1, & z_1(\mathbf{x}) > 2.111 \end{cases} \quad (5.26)$$

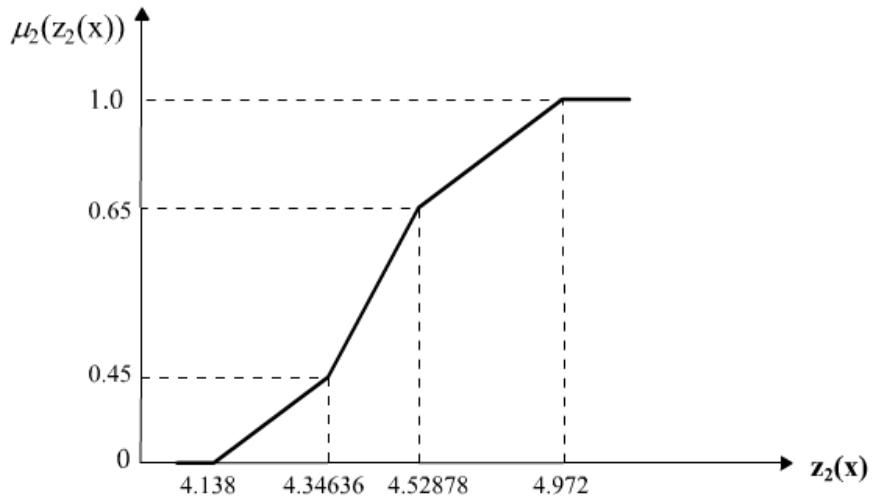
$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_2(\mathbf{x}) \leq 4.138 \\ \mu_{21}(z_2(\mathbf{x})) = 0.71992 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.97903, & 4.138 < z_2(\mathbf{x}) \leq 4.34636 \\ \mu_{22}(z_2(\mathbf{x})) = 2.7409 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 11.76294, & 4.34636 < z_2(\mathbf{x}) \leq 4.52878 \\ \mu_{23}(z_2(\mathbf{x})) = 0.78967 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.92624, & 4.52878 < z_2(\mathbf{x}) \leq 4.972 \\ 1, & z_2(\mathbf{x}) > 4.972 \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_3(\mathbf{x}) \leq 1.687 \\ \mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) = 16.82432 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 28.38263, & 1.687 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.71375 \\ \mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) = 89.98201 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 153.75667, & 1.71375 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.71541 \\ \mu_{33}(z_3(\mathbf{x})) = 19.43068 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 32.73158, & 1.71541 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.736 \\ 1, & z_3(\mathbf{x}) > 1.736 \end{cases} \quad (5.28)$$

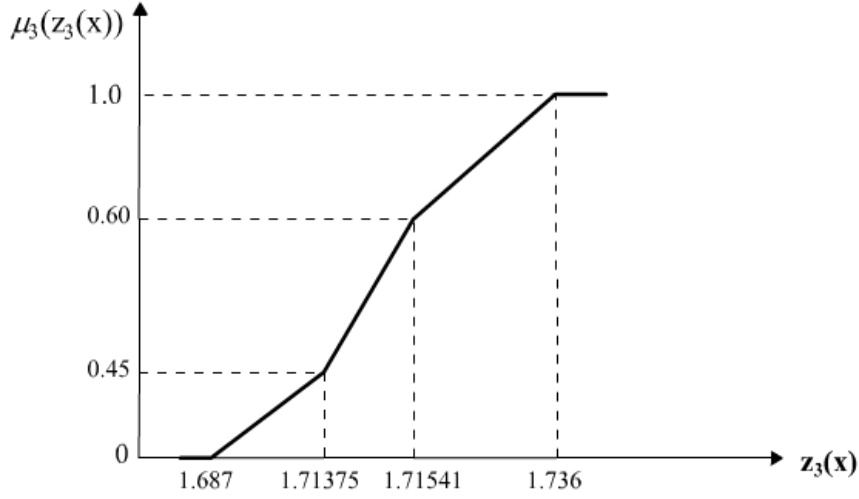
şeklinde yazılabilir. Bu üyelik fonksiyonları sırasıyla Şekil 5.12, Şekil 5.13, Şekil 5.14’de gösterilmiştir.



Şekil 5.12 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu



Şekil 5.13 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu



Şekil 5.14 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu

Hannan'ın yaklaşımından ve Çizelge 5.4, Çizelge 5.5, Çizelge 5.6'daki verilerden faydalanarak her bir amaca karşılık gelen $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$, $q=1,2,3$ parçalı lineer üyelik fonksiyonları:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \alpha_{11} \cdot (d_{11}^+ + d_{11}^-) + \alpha_{12} \cdot (d_{12}^+ + d_{12}^-) + \beta_1 \cdot z_1(\mathbf{x}) + \gamma_1$$

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \frac{t_{12} - t_{11}}{2} \cdot (d_{11}^+ + d_{11}^-) + \frac{t_{13} - t_{12}}{2} \cdot (d_{12}^+ + d_{12}^-) + \frac{t_{13} + t_{11}}{2} \cdot z_1(\mathbf{x}) + \frac{s_{13} + s_{11}}{2}$$

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 58.297215 \cdot (d_{11}^+ + d_{11}^-) - 7.89511 \cdot (d_{12}^+ + d_{12}^-) + 15.69033 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 32.14676,$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \alpha_{21} \cdot (d_{21}^+ + d_{21}^-) + \alpha_{22} \cdot (d_{22}^+ + d_{22}^-) + \beta_2 \cdot z_2(\mathbf{x}) + \gamma_2$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \frac{t_{22} - t_{21}}{2} \cdot (d_{21}^+ + d_{21}^-) + \frac{t_{23} - t_{22}}{2} \cdot (d_{22}^+ + d_{22}^-) + \frac{t_{23} + t_{21}}{2} \cdot z_2(\mathbf{x}) + \frac{s_{23} + s_{21}}{2}$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 1.01049 \cdot (d_{21}^+ + d_{21}^-) - 0.97562 \cdot (d_{22}^+ + d_{22}^-) + 0.7548 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.95264,$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = \alpha_{31} \cdot (d_{31}^+ + d_{31}^-) + \alpha_{32} \cdot (d_{32}^+ + d_{32}^-) + \beta_3 \cdot z_3(\mathbf{x}) + \gamma_3$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = \frac{t_{32} - t_{31}}{2} \cdot (d_{31}^+ + d_{31}^-) + \frac{t_{33} - t_{32}}{2} \cdot (d_{32}^+ + d_{32}^-) + \frac{t_{33} + t_{31}}{2} \cdot z_3(\mathbf{x}) + \frac{s_{33} + s_{31}}{2}$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 36.57885 \cdot (d_{31}^+ + d_{31}^-) - 35.27567 \cdot (d_{32}^+ + d_{32}^-) + 18.1275 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 30.55711$$

ve hedef kısıtları:

$$z_1(\mathbf{x}) - d_{11}^+ + d_{11}^- = g_{11} \Rightarrow z_1(\mathbf{x}) - d_{11}^+ + d_{11}^- = 2.08361$$

$$z_1(\mathbf{x}) - d_{12}^+ + d_{12}^- = g_{12} \Rightarrow z_1(\mathbf{x}) - d_{12}^+ + d_{12}^- = 2.09572$$

$$z_2(\mathbf{x}) - d_{21}^+ + d_{21}^- = g_{21} \Rightarrow z_2(\mathbf{x}) - d_{21}^+ + d_{21}^- = 4.34636$$

$$z_2(\mathbf{x}) - d_{22}^+ + d_{22}^- = g_{22} \Rightarrow z_2(\mathbf{x}) - d_{22}^+ + d_{22}^- = 4.52878$$

$$z_3(\mathbf{x}) - d_{31}^+ + d_{31}^- = g_{31} \Rightarrow z_3(\mathbf{x}) - d_{31}^+ + d_{31}^- = 1.71375$$

$$z_3(\mathbf{x}) - d_{32}^+ + d_{32}^- = g_{32} \Rightarrow z_3(\mathbf{x}) - d_{32}^+ + d_{32}^- = 1.71541$$

yazılabilir. Böylece ÇALKTP için Zimmermann'ın “min” operatör modeli, aşağıdaki hedef tipli kısıtlara sahip bir non-lineer programlama problemine dönüşür:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x}) = 58.297215 \cdot (d_{11}^+ + d_{11}^-) - 7.89511 \cdot (d_{12}^+ + d_{12}^-) + 15.69033 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 32.14676 \geq \lambda$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x}) = 1.01049 \cdot (d_{21}^+ + d_{21}^-) - 0.97562 \cdot (d_{22}^+ + d_{22}^-) + 0.7548 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.95264 \geq \lambda$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x}) = 36.57885 \cdot (d_{31}^+ + d_{31}^-) - 35.27567 \cdot (d_{32}^+ + d_{32}^-) + 18.1275 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 30.55711 \geq \lambda$$

$$z_1(\mathbf{x}) - d_{11}^+ + d_{11}^- = 2.08361, \quad z_1(\mathbf{x}) - d_{12}^+ + d_{12}^- = 2.09572$$

$$z_2(\mathbf{x}) - d_{21}^+ + d_{21}^- = 4.34636, \quad z_2(\mathbf{x}) - d_{22}^+ + d_{22}^- = 4.52878 \quad (5.29)$$

$$z_3(\mathbf{x}) - d_{31}^+ + d_{31}^- = 1.71375, \quad z_3(\mathbf{x}) - d_{32}^+ + d_{32}^- = 1.71541$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250, \quad x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\lambda \geq 0, \quad d_{qj}^+ \geq 0, \quad d_{qj}^- \geq 0, \quad q = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2$$

Herbir parçalı lineer üyelik fonksiyonu için hedef değeri $\hat{\mu}_q = 1$, $q = 1, 2, 3$ ve hedefler arasında P_l , $l = 1, \dots, L$ öncelikleri kullanılarak da çok amaçlı non-lineer kesirli taşıma problemi aşağıdaki bulanık non-lineer hedef programlama problemine dönüştürülebilir:

Amaç: $\min (e_1^- + e_2^- + e_3^- + e_1^+ + e_2^+ + e_3^+)$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned}
 \mu_1(z_1(\mathbf{x})) &= 5.297215 \cdot (d_{11}^+ + d_{11}^-) - 7.89511 \cdot (d_{12}^+ + d_{12}^-) + 15.69033 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 32.14676 - e_1^+ + e_1^- = \hat{\mu}_1 = 1 \\
 \mu_2(z_2(x)) &= 1.01049 \cdot (d_{21}^+ + d_{21}^-) - 0.97562 \cdot (d_{22}^+ + d_{22}^-) + 0.7548 \cdot z_2(x) - 2.95264 - e_2^+ + e_2^- = \hat{\mu}_2 = 1 \\
 \mu_3(z_3(\mathbf{x})) &= 36.57885 \cdot (d_{31}^+ + d_{31}^-) - 35.27567 \cdot (d_{32}^+ + d_{32}^-) + 18.1275 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 30.55711 - e_3^+ + e_3^- = \hat{\mu}_3 = 1 \\
 z_1(\mathbf{x}) - d_{11}^+ + d_{11}^- &= 2.08361, & z_1(\mathbf{x}) - d_{12}^+ + d_{12}^- &= 2.09572 \\
 z_2(\mathbf{x}) - d_{21}^+ + d_{21}^- &= 4.34636, & z_2(\mathbf{x}) - d_{22}^+ + d_{22}^- &= 4.52878 \\
 z_3(\mathbf{x}) - d_{31}^+ + d_{31}^- &= 1.71375, & z_3(\mathbf{x}) - d_{32}^+ + d_{32}^- &= 1.71541 \\
 x_{11} + x_{12} &\leq 150, & x_{21} + x_{22} &\leq 250, & x_{11} + x_{21} &\geq 50, & x_{12} + x_{22} &\geq 350 \\
 d_{qj}^+ &\geq 0, & d_{qj}^- &\geq 0, & e_q^+ &\geq 0, & e_q^- &\geq 0, & q=1,2,3; & j=1,2.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Burada $e_q^+ \geq 0$, $e_q^- \geq 0$ $q=1,2,3$ üyelik fonksiyonları ile ilgili, $d_{qj}^+ \geq 0$, $d_{qj}^- \geq 0$, $q=1,2,3$, $j=1,2$ de amaç fonksiyonları ile ilgili sapma değişkenlerini göstermektedir. (5.30) problemi GAMS paket programı ile çözülür. Elde edilen $\mathbf{x}^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (0, 150, 50, 200)$ zayıf Pareto-optimal noktası, Pareto-optimallik testi gereği, alternatif çözüm olmadığından, aynı zamanda Pareto-optimal noktadır. Ayrıca örnek problemin diğer sonuçları olarak: sapma değişkenleri $e_1^+ = 0$, $e_1^- = 0$, $e_2^+ = 0$, $e_2^- = 0$, $e_3^+ = 0$, $e_3^- = 0$, $d_{11}^+ = 0.027$, $d_{11}^- = 0$, $d_{12}^+ = 0.015$, $d_{12}^- = 0$, $d_{21}^+ = 0.495$, $d_{21}^- = 0.704$, $d_{22}^+ = 0$, $d_{22}^- = 0.391$, $d_{31}^+ = 0.014$, $d_{31}^- = 0.040$, $d_{32}^+ = 0$, $d_{32}^- = 0.028$; amaç fonksiyon değerleri $z_1(\mathbf{x}) = 2.110865$, $z_2(\mathbf{x}) = 4.137615$, $z_3(\mathbf{x}) = 1.686957$; amaçlardan sağlanan tatmin dereceleri $\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 0.99828$, $\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 0$, $\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 0$ elde edilmiştir. Dolayısıyla (5.29) problemi için $\lambda^* = 0$ dır.

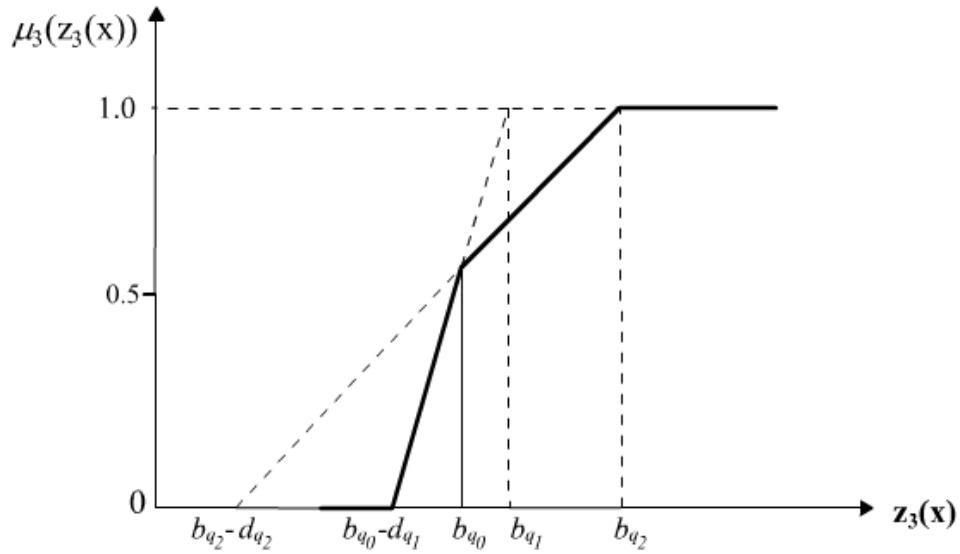
5.2.2.3.2 Yang ve diğerleri'nin Yaklaşımı (Yang vd., 1991)

Yang ve diğerleri (1991) bulanık çok amaçlı lineer programlama problemlerini çözmek için, non-lineer üyelik fonksiyonlarına parçalı lineer fonksiyonlarla yaklaşan; lineer ve/veya tamsayı programlama metotlarının üstünlüğünden yararlanan; Hannan'ın yaklaşımına göre daha avantajlı olan bir metot önermiştir. Bu metotta, bütün üyelik fonksiyonlarının tümü konkav ise dönüşmüş model bir LP modeli olur; eğer herhangi bir üyelik fonksiyonu non-

konkav (yani konveks ya da S -biçimli) ise bulanık çok amaçlı lineer programlama modeli hem sürekli hem de $\delta_q \in \{0,1\}$ binary değişkenlerine sahip bir tamsayı LP modeline dönüşür. Bir S -biçimli üyelik fonksiyonu, konveks ve konkav kısımlarına bölünebilir. Konkav kısımlarındaki doğru parçaları hiçbir δ_q ayrık değişken kullanımını gerektirmediğinden, modeldeki binary değişkenlerinin sayısı konveks kısımlarını birleştiren doğru parçalarının sayısıyla sınırlıdır.

(i) Konkav Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonu

Yang ve diğerleri'nin yaklaşımında konkav bir μ_q üyelik fonksiyonuna N_q sayıda doğru parçaları ile yaklaşılmaktadır. Yöntemi açıklamak için Şekil 5.15'deki gibi μ_q parçalı lineer konkav üyelik fonksiyonunu μ_{q_1} ve μ_{q_2} gibi iki tane doğru parçasının birleşimi olarak alalım. Yani $[b_{q_1} - d_{q_1}, b_{q_2}]$ aralığında konkav üyelik fonksiyonu $\mu_1 = \mu_{q_1} \cap \mu_{q_2} = \min\{\mu_{q_1}, \mu_{q_2}\}$ ifadesi ile oluşturulur.



Şekil 5.15 Parçalı lineer konkav üyelik fonksiyonu

Bir parçalı lineer üyelik fonksiyonu ile bir bulanık hedef, basit lineer üyelik fonksiyonları ile birçok hedefe bölünebilir. Örneğin Şekil 5.15'deki gibi KV'nin q . amaç fonksiyonuna ait üyelik fonksiyonu $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$,

$$\mu_q(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & z_q(\mathbf{x}) \geq b_{q_2} \\ 1 - \frac{b_{q_2} - z_q(\mathbf{x})}{d_{q_2}}, & b_{q_0} \leq z_q(\mathbf{x}) \leq b_{q_2} \\ 1 - \frac{b_{q_1} - z_q(\mathbf{x})}{d_{q_1}}, & b_{q_1} - d_{q_1} \leq z_q(\mathbf{x}) < b_{q_0} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ise, $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$ 'in μ_{q_1} ve μ_{q_2} lineer parçalarına, hedeflerine göre bölünmesi

$$\mu_{q_1}(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & z_q(\mathbf{x}) \geq b_{q_1} \\ 1 - \frac{b_{q_1} - z_q(\mathbf{x})}{d_{q_1}}, & b_{q_1} - d_{q_1} \leq z_q(\mathbf{x}) < b_{q_1} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

$$\mu_{q_2}(z_q(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & z_q(\mathbf{x}) \geq b_{q_2} \\ 1 - \frac{b_{q_2} - z_q(\mathbf{x})}{d_{q_2}}, & b_{q_2} - d_{q_2} \leq z_q(\mathbf{x}) < b_{q_2} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde olur. Elde edilen formülasyon Zimmermann yaklaşımı ile:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $\mu_{q_1} \geq \lambda, \quad q \in K \subseteq \{1, \dots, Q\}$ (5.31)

$$\mu_{q_2} \geq \lambda, \quad q \in K \subseteq \{1, \dots, Q\}$$

$$\mu_t(z_t) \geq \lambda, \quad t \in \{1, \dots, Q\} - K$$

$$\mathbf{x} \in S, \lambda \geq 0$$

dır. Burada q indisi non-linear üyelik fonksiyonları ile, t indisi de lineer üyelik fonksiyonları ile ilişkilidir.

Genelleştirirsek, μ_{q_1} ve μ_{q_2} lineer fonksiyonları, Hannan'ın yaklaşımında ifade edildiği gibi,

t_{qr} ve s_{qr} ler sırasıyla $[g_{q,r-1}, g_{qr}]$ aralığında $\mu_{q_j}(z_q(\mathbf{x}))$ 'nun eğimini ve μ ekseninde

kestiği noktayı göstermek üzere $\mu_{qj} = t_{qj}z_q(\mathbf{x}) + s_{qj}$, $q = 1, \dots, Q$, $j = 1, \dots, N_q$ formunda da verilebilir. Bu durumda model şöyle yazılabilir:

Amaç: $\max \lambda$

$$\begin{aligned}
 \text{Kısıtlar: } \quad & \mu_{q1} = t_{q1}z_q(\mathbf{x}) + s_{q1} \geq \lambda, \quad q \in K \subseteq \{1, \dots, Q\} \\
 & \mu_{q2} = t_{q2}z_q(\mathbf{x}) + s_{q2} \geq \lambda, \quad q \in K \subseteq \{1, \dots, Q\} \\
 & \vdots \\
 & \mu_{qN_q} = t_{qN_q}z_q(\mathbf{x}) + s_{qN_q} \geq \lambda, \quad q \in K \subseteq \{1, \dots, Q\} \\
 & \mu_t(z_t) \geq \lambda, \quad t \in \{1, \dots, Q\} - K \\
 & \mathbf{x} \in S, \lambda \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Yang ve diğerlerinin bu yaklaşımında (5.32) problemi bir LP problemidir. ÇALKTP için (5.32) modeli ise, $z_q(\mathbf{x})$ fonksiyonları lineer kesirli yapıda olduklarından, non-lineer bir model olur. Non-lineer programlama problemini çözen herhangi bir paket program yardımıyla bu problem çözülebilir. Elde edilen $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ çözümünün Pareto-optimalliği için Pareto-optimallik testi yapılır ve her bir amaç için $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$, $q = 1, \dots, Q$ tatmin seviyeleri bulunur.

Açıklayıcı Örnek:

Kısım 5.2.1.3’de verilen **Temel Örnek Problem**’i tekrar ele alalım. KV tarafından sağlanan $z_1(\mathbf{x})$, $z_2(\mathbf{x})$, $z_3(\mathbf{x})$ amaç fonksiyonlarına ait g_{ij} , $i = 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2$ değerleri ve karşılık gelen üyelik fonksiyon dereceleri sırasıyla Çizelge 5.7, Çizelge 5.8 ve Çizelge 5.9’da verilmiş olsun.

Çizelge 5.7 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ konkav parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$	$z_1(\mathbf{x})$	$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = t_{1r} z_1(\mathbf{x}) + s_{1r}, \quad r = 1, 2$
0	$g_{10} = z_1^m = 2.059$	$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \frac{0.80 - 0}{2.09572 - 2.059} = 21.7865 \\ s_{11} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{11} z_1(\mathbf{x}) = -44.85840 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) = 21.7865 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 44.85840$
0.80	$g_{11} = 2.09572$	
0.80	$g_{11} = 2.09572$	$\left. \begin{aligned} t_{12} &= \frac{1 - 0.80}{2.111 - 2.09572} = 13.0890 \\ s_{12} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{12} z_1(\mathbf{x}) = -26.63088 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) = 13.0890 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 26.63088$
1	$g_{12} = z_1^* = 2.111$	

Çizelge 5.8 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçasının elde edilmesi
$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$	$z_2(\mathbf{x})$	$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = t_{2r} z_2(\mathbf{x}) + s_{2r}, \quad r = 1$
0	$g_{20} = z_2^m = 4.138$	$\left. \begin{aligned} t_{21} &= \frac{1 - 0}{4.972 - 4.138} = 1.19904 \\ s_{21} &= \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{21} z_2(\mathbf{x}) = -4.96163 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 1.19904 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 4.96163$
1	$g_{21} = z_2^* = 4.972$	

Çizelge 5.9 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ konkav parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$	$z_3(\mathbf{x})$	$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = t_{3r} z_3(\mathbf{x}) + s_{3r}, r = 1, 2$
0	$g_{30} = z_3^m = 1.687$	$\left. \begin{aligned} t_{31} &= \frac{0.60 - 0}{1.71541 - 1.687} = 21.11932 \\ s_{31} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{31} z_3(\mathbf{x}) = -35.62829 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) = 21.11932 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 35.62829$
0.60	$g_{31} = 1.71541$	
0.60	$g_{31} = 1.71541$	$\left. \begin{aligned} t_{32} &= \frac{1 - 0.60}{1.736 - 1.71541} = 19.42691 \\ s_{32} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{32} z_3(\mathbf{x}) = -32.72512 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) = 19.42691 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 32.72512$
1	$g_{32} = z_3^* = 1.736$	

Yukarıdaki verilerden yararlanarak elde edilen her bir amaca ait konkav parçalı lineer üyelik fonksiyonları:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_1(\mathbf{x}) \leq 2.059 \\ \mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) = 21.7865 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 44.85840, & 2.059 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.09572 \\ \mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) = 13.0890 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 26.63088, & 2.09572 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.111 \\ 1, & z_1(\mathbf{x}) > 2.111 \end{cases}$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_2(\mathbf{x}) \leq 4.138 \\ \mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 1.19904 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 4.96163, & 4.138 < z_2(\mathbf{x}) \leq 4.972 \\ 1, & z_2(\mathbf{x}) > 4.972 \end{cases}$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_3(\mathbf{x}) \leq 1.687 \\ \mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) = 21.11932 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 35.62829, & 1.687 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.71541 \\ \mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) = 19.42691 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 32.72512, & 1.71541 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.736 \\ 1, & z_3(\mathbf{x}) > 1.736 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ÇALKTP için Zimmermann'ın “min” operatör modeli aşağıdaki non-lineer programlama problemine dönüşür:

Amaç: $\max \lambda$

$$\begin{aligned}
 \text{Kısıtlar: } \mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) &= 21.7865 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 44.85840 \geq \lambda \\
 \mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) &= 13.0890 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 26.63088 \geq \lambda \\
 \mu_2(z_2(\mathbf{x})) &= 1.19904 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 4.96163 \geq \lambda \\
 \mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) &= 21.11932 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 35.62829 \geq \lambda \\
 \mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) &= 19.42691 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 32.72512 \geq \lambda
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Arz kısıtları: $x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250$

Talep kısıtları: $x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0,1\}, \quad \mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}, \quad \lambda \geq 0.$$

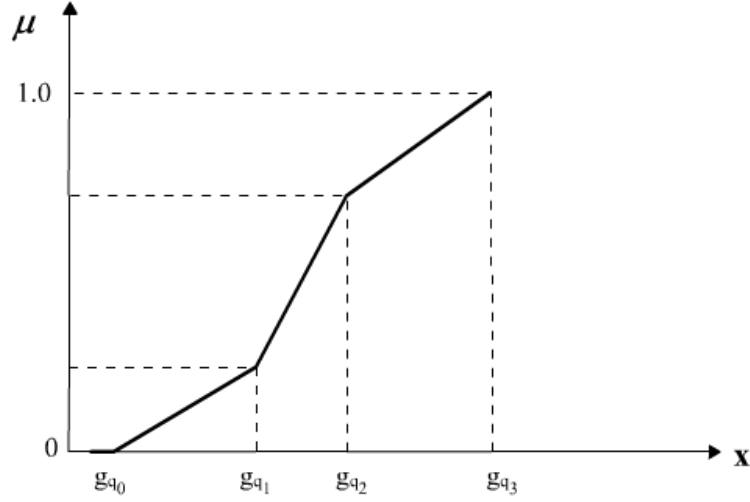
(5.33) problemi GAMS paket programı ile çözümlerse,

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (28.331, 121.669, 21.669, 228.331)$$

zayıf Pareto-optimal noktası bulunur. Pareto-optimallik testi yapıldığında, alternatif çözüm olmadığından, bu noktanın aynı zamanda Pareto-optimal nokta olduğu görülür. Ayrıca örnek problemin diğer sonuçları olarak: amaç fonksiyon değerleri $z_1(\mathbf{x}) = 2.082032$, $z_2(\mathbf{x}) = 4.55649$, $z_3(\mathbf{x}) = 1.71685$; amaçlardan sağlanan tatmin dereceleri $\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 0.50179$, $\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 0.50178$, $\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 0.62797$ ve örnekteki taşıma sistemi için en temel tatmin seviyesi $\lambda^* = 0.502$ olarak bulunmuştur.

(ii) Parçalı Lineer Non-Konkav Üyelik Fonksiyonu

Yaklaşımı açıklamak için, örneğin önce konveks ve sonra konkav doğru parçalarının birleşiminden oluşan S -biçimli bir μ_q üyelik fonksiyonunu ele alalım (Şekil 5.16). Görüldüğü gibi μ_q non-lineer üyelik fonksiyonuna μ_{q1} , μ_{q2} ve μ_{q3} doğru parçalarıyla yaklaşılmaktadır.



Şekil 5.16 S-biçimli μ_q üyelik fonksiyonu

Burada KV'nin q . amaç fonksiyonuna ait hedef değerleri g_{q1}, g_{q2} ve g_{q3} olsun. $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$ üyelik fonksiyonunun g_{q0} den g_{q2} 'e kadar kısmı konveks, g_{q1} 'den g_{q3} 'e kadar da konkavdır. Bu nedenle μ_q üyelik fonksiyonu, $[g_{q0}, g_{q3}]$ aralığında konveks ve konkav kısımlarının birleşiminden oluşur. O halde S-biçimli parçalı lineer μ_q üyelik fonksiyonunun birleşim ve kesişim işlemleri ile belirlenmesi, bu işlemlerinde sırasıyla maksimum ve minimum operatörleriyle tanımlanması halinde

$$\mu_q = \mu_{q1} \cup (\mu_{q2} \cap \mu_{q3}) = \max[\mu_{q1}, \min(\mu_{q2}, \mu_{q3})]$$

olur. μ_q üyelik fonksiyonundaki birleşim işleminin bir “ya - ya da” ilişkisi olarak yorumlanması gerektiği için, aşağıda ayrık 0-1 değişkenli tamsayı programlama problemi elde edilir:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $\mu_{q1}(z_q(\mathbf{x})) + M(1 - \delta_q) \geq \lambda$,

$$(\mu_{q2} \cap \mu_{q3}) + M\delta_q \geq \lambda, \quad q = 1, \dots, Q$$

$$\mathbf{x} \in S, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \leq 1, \quad \delta_q \in \{0, 1\}$$

veya eşdeğer olarak,

Amaç: $\max \lambda$

$$\begin{aligned}
 \text{Kısıtlar: } & \mu_{q1}(z_q(\mathbf{x})) + M(1 - \delta_q) \geq \lambda, \\
 & \mu_{q2}(z_q(\mathbf{x})) + M\delta_q \geq \lambda, \\
 & \mu_{q3}(z_q(\mathbf{x})) + M\delta_q \geq \lambda, \quad q = 1, \dots, Q \\
 & \mathbf{x} \in S, \quad \lambda \geq 0, \quad \delta_q \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

yazılabilir. Burada M oldukça büyük pozitif bir tamsayı olup $\mu_{qj} = t_{qj}z_q(x) + s_{qj}$, $q = 1, \dots, Q$, $j = 1, \dots, N_q$ denklemi ile tanımlanmaktadır.

Yang ve diğerlerinin (Yang vd., 1991) bu yaklaşımında (5.34) problemi sürekli ve binary değişkenler içeren tamsayılı LP problemidir. ÇAKLTP için (5.34) modeli ise, $z_q(x)$ fonksiyonları lineer kesirli yapıda olduklarından, nonlinear karma tamsayılı bir modeldir ve non-linear programlama problemini çözen herhangi bir paket programı yardımıyla çözülebilir. Elde edilen $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ çözümünün Pareto-optimalliği için Pareto-optimallik testi yapılır ve her bir amaç için $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$, $q = 1, \dots, Q$ tatmin seviyeleri bulunur.

Açıklayıcı Örnek:

Yang ve diğerlerinin parçalı lineer non-konkav üyelik fonksiyonları için önerdiği yaklaşımı Açıklayıcı Örnek 1'deki verileri yani (5.26), (5.27) ve (5.28) lineer üyelik fonksiyonlarını kullanarak uygulayalım.

μ_1, μ_2 ve μ_3 üyelik fonksiyonlarının S -biçimli yani önce konveks sonra konkav kısımlarının birleşiminden oluştuğu sırasıyla Şekil 5.12, Şekil 5.13, Şekil 5.14'den görülmektedir. Bu durumda $\mu_q = \mu_{q1} \cup (\mu_{q2} \cap \mu_{q3})$, $q = 1, 2, 3$ ifadesi ile amaçların üyelik fonksiyonları oluşturulursa, (5.11)'deki temel örnek problem (ÇALKTP) için:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $\mu_{11}(z_1) + M(1 - \delta_1) \geq \lambda$, $\mu_{12}(z_1) + M\delta_1 \geq \lambda$, $\mu_{13}(z_1) + M\delta_1 \geq \lambda$
 $\mu_{21}(z_2) + M(1 - \delta_2) \geq \lambda$, $\mu_{22}(z_2) + M\delta_2 \geq \lambda$, $\mu_{23}(z_2) + M\delta_2 \geq \lambda$
 $\mu_{31}(z_3) + M(1 - \delta_3) \geq \lambda$, $\mu_{32}(z_3) + M\delta_3 \geq \lambda$, $\mu_{33}(z_3) + M\delta_3 \geq \lambda$

Arz kısıtları: $x_{11} + x_{12} \leq 150$, $x_{21} + x_{22} \leq 250$ (5.35)

Talep kısıtları: $x_{11} + x_{21} \geq 50$, $x_{12} + x_{22} \geq 350$

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}, \mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}.$$

0-1 tamsayı programlama problemi kurulur ve üyelik fonksiyon verileri yerine yerleştirilirse taşıma modeli:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $18.28822238 \cdot (z_1(\mathbf{x}) - 2.059) + M(1 - \delta_1) \geq \lambda$,
 $28.8826539 \cdot (z_1(\mathbf{x}) - 2.083606) + 0.45 + M\delta_1 \geq \lambda$,
 $13.09243257 \cdot (z_1(\mathbf{x}) - 2.095724) + 0.80 + M\delta_1 \geq \lambda$
 $0.719921672 \cdot (z_2(\mathbf{x}) - 4.138) + M(1 - \delta_2) \geq \lambda$,
 $2.740897479 \cdot (z_2(\mathbf{x}) - 4.346356) + 0.15 + M\delta_2 \geq \lambda$,
 $0.789671992 \cdot (z_2(\mathbf{x}) - 4.528778) + 0.65 + M\delta_2 \geq \lambda$
 $16.82431675 \cdot (z_3(\mathbf{x}) - 1.687) + M(1 - \delta_3) \geq \lambda$,
 $89.9820036 \cdot (z_3(\mathbf{x}) - 1.713747) + 0.45 + M\delta_3 \geq \lambda$,
 $19.43068105 \cdot (z_3(\mathbf{x}) - 1.715414) + 0.60 + M\delta_3 \geq \lambda$

Arz kısıtları: $x_{11} + x_{12} \leq 150$, $x_{21} + x_{22} \leq 250$ (5.36)

Talep kısıtları: $x_{11} + x_{21} \geq 50$, $x_{12} + x_{22} \geq 350$

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}, \mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}.$$

olur. $M = 100000$ alınarak (5.36) problemi GAMS paket programı ile çözülürse, örnekteki taşıma sistemi için en temel tatmin seviyesi $\lambda^* = 0.489$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ ve

$$\mathbf{x}^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (25.553, 124.447, 24.447, 225.553)$$

zayıf Pareto-optimal noktası bulunur. Pareto-optimallik testi yapıldığında, alternatif çözüm olmadığından, bu noktanın aynı zamanda Pareto-optimal nokta olduğu görülür. Ayrıca örnek problemin diğer sonuçları olarak: amaç fonksiyon değerleri $z_1(\mathbf{x}) = 2.084942$, $z_2(\mathbf{x}) = 4.509966$, $z_3(\mathbf{x}) = 1.714175$; amaçlardan sağlanan tatmin dereceleri $\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 0.48848$, $\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 0.59843$, $\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 0.48824$ olarak bulunmuştur.

Açıklayıcı Örnek (Non-konkav (İki konkav) parçalı lineer üyelik fonksiyonu):

Kısım 5.2.1.3’de verilen **Temel Örnek Problem**’i tekrar ele alalım. KV tarafından sağlanan $z_1(\mathbf{x})$, $z_2(\mathbf{x})$, $z_3(\mathbf{x})$ amaç fonksiyonlarına ait g_{ij} , $i=1,2,3$; $j=0,1,2,3,4$ hedef değerleri ve karşılık gelen üyelik fonksiyon dereceleri sırasıyla Çizelge 5.10, Çizelge 5.11 ve Çizelge 5.12’de verilmiş olsun.

Aşağıdaki verilerden yararlanarak elde edilen herbir amaca ait iki konkav parçalı lineer üyelik fonksiyonları sırasıyla:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_1(\mathbf{x}) \leq 2.059 \\ \mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) = 19.42417 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 39.99436, & 2.059 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.08366 \\ \mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) = 12.06897 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 24.66863, & 2.08366 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.08540 \\ \mu_{13}(z_1(\mathbf{x})) = 44.77612 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 92.87612, & 2.08540 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.08875 \\ \mu_{14}(z_1(\mathbf{x})) = 15.65996 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 32.05818, & 2.08875 < z_1(\mathbf{x}) \leq 2.111 \\ 1, & z_1(\mathbf{x}) > 2.111 \end{cases}$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_2(\mathbf{x}) \leq 4.138 \\ \mu_{21}(z_2(\mathbf{x})) = 1.43954 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 5.95682, & 4.138 < z_2(\mathbf{x}) \leq 4.4506 \\ \mu_{22}(z_2(\mathbf{x})) = -0.62641 \cdot z_2(\mathbf{x}) + 3.2379, & 4.4506 < z_2(\mathbf{x}) \leq 4.53042 \\ \mu_{23}(z_2(\mathbf{x})) = 187.5 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 849.05375, & 4.53042 < z_2(\mathbf{x}) \leq 4.53122 \\ \mu_{24}(z_2(\mathbf{x})) = 1.02092 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 4.07601, & 4.53122 < z_2(\mathbf{x}) \leq 4.972 \\ 1, & z_2(\mathbf{x}) > 4.972 \end{cases}$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, & z_3(\mathbf{x}) \leq 1.687 \\ \mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) = 23.33475 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 39.36572, & 1.687 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.71057 \\ \mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) = -6.25 \cdot z_3(\mathbf{x}) + 11.24106, & 1.71057 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.71537 \\ \mu_{33}(z_3(\mathbf{x})) = 3250 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 5574.4325, & 1.71537 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.71541 \\ \mu_{33}(z_3(\mathbf{x})) = 16.99854 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 28.50947, & 1.71541 < z_3(\mathbf{x}) \leq 1.736 \\ 1, & z_3(\mathbf{x}) > 1.736 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Çizelge 5.10 $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ non-konkav (iki konkav) parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$	$z_1(\mathbf{x})$	$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = t_{1r} z_1(\mathbf{x}) + s_{1r}, r = 1, 2, 3$
0	$g_{10} = z_1^m = 2.059$	$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \frac{0.479 - 0}{2.08366 - 2.059} = 19.42417 \\ s_{11} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{11} z_1(\mathbf{x}) = -39.99436 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) = 19.42417 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 39.99436$
0.479	$g_{11} = 2.08366$	
0.479	$g_{11} = 2.08366$	$\left. \begin{aligned} t_{12} &= \frac{0.50 - 0.479}{2.08540 - 2.08366} = 12.06897 \\ s_{12} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{12} z_1(\mathbf{x}) = -24.66863 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) = 12.06897 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 24.66863$
0.50	$g_{12} = 2.08540$	
0.50	$g_{12} = 2.08540$	$\left. \begin{aligned} t_{13} &= \frac{0.65 - 0.50}{2.08875 - 2.08540} = 44.77612 \\ s_{13} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{13} z_1(\mathbf{x}) = -92.87612 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{13}(z_1(\mathbf{x})) = 44.77612 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 92.87612$
0.65	$g_{13} = 2.08875$	
0.65	$g_{13} = 2.08875$	$\left. \begin{aligned} t_{14} &= \frac{1 - 0.65}{2.111 - 2.08865} = 15.65996 \\ s_{14} &= \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{14} z_1(\mathbf{x}) = -32.05818 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{14}(z_1(\mathbf{x})) = 15.65996 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 32.05818$
1	$g_{14} = z_1^* = 2.111$	

Çizelge 5.11 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ non-konkav (iki konkav) parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$	$z_2(\mathbf{x})$	$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = t_{2r} z_2(\mathbf{x}) + s_{2r}, r = 1, 2, 3$
0	$g_{20} = z_2^m = 4.138$	$\left. \begin{aligned} t_{21} &= \frac{0.45 - 0}{4.4506 - 4.138} = 1.43954 \\ s_{21} &= \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{21} z_2(\mathbf{x}) = -5.95682 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{21}(z_2(\mathbf{x})) = 1.43954 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 5.95682$
0.45	$g_{21} = 4.4506$	
0.45	$g_{21} = 4.4506$	$\left. \begin{aligned} t_{22} &= -\frac{0.45 - 0.40}{4.53042 - 4.4506} = -0.62641 \\ s_{22} &= \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{22} z_2(\mathbf{x}) = 3.2379 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{22}(z_2(\mathbf{x})) = -0.62641 \cdot z_2(\mathbf{x}) + 3.2379$
0.40	$g_{22} = 4.53042$	
0.40	$g_{22} = 4.53042$	$\left. \begin{aligned} t_{23} &= \frac{0.55 - 0.40}{4.53122 - 4.53042} = 187.5 \\ s_{23} &= \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{23} z_2(\mathbf{x}) = -849.05375 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{23}(z_2(\mathbf{x})) = 187.5 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 849.05375$
0.55	$g_{23} = 4.53122$	
0.55	$g_{23} = 4.53122$	$\left. \begin{aligned} t_{24} &= \frac{1 - 0.55}{4.972 - 4.53122} = 1.02092 \\ s_{24} &= \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{24} z_2(\mathbf{x}) = -4.07601 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{24}(z_2(\mathbf{x})) = 1.02092 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 4.07601$
1	$g_{24} = z_2^* = 4.972$	

Çizelge 5.12 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ non-konkav (iki konkav) parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$	$z_3(\mathbf{x})$	$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = t_{3r} z_3(\mathbf{x}) + s_{3r}, r = 1, 2, 3$
0	$g_{30} = z_3^m = 1.687$	$\left. \begin{aligned} t_{31} &= \frac{0.55 - 0}{1.71057 - 1.687} = 23.33475 \\ s_{31} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{31} z_3(\mathbf{x}) = -39.36572 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) = 23.33475 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 39.36572$
0.55	$g_{31} = 1.71057$	
0.55	$g_{31} = 1.71057$	$\left. \begin{aligned} t_{32} &= -\frac{0.55 - 0.52}{1.71537 - 1.71057} = -6.25 \\ s_{32} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{32} z_3(\mathbf{x}) = 11.24106 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) = -6.25 \cdot z_3(\mathbf{x}) + 11.24106$
0.52	$g_{32} = 1.71537$	
0.52	$g_{32} = 1.71537$	$\left. \begin{aligned} t_{33} &= \frac{0.65 - 0.52}{1.71541 - 1.71537} = 3250 \\ s_{33} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{33} z_3(\mathbf{x}) = -5574.4325 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{33}(z_3(\mathbf{x})) = 3250 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 5574.4325$
0.65	$g_{33} = 1.71541$	
0.65	$g_{33} = 1.71541$	$\left. \begin{aligned} t_{34} &= \frac{1 - 0.65}{1.736 - 1.71541} = 16.99854 \\ s_{34} &= \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{34} z_3(\mathbf{x}) = -28.50947 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\mu_{34}(z_3(\mathbf{x})) = 16.99854 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 28.50947$
1	$g_{34} = z_3^* = 1.736$	

μ_1 , μ_2 ve μ_3 üyelik fonksiyonlarının iki konkav kısmının birleşiminden oluştuğu görülmektedir, yani $\mu_q = (\mu_{q1} \cap \mu_{q2}) \cup (\mu_{q3} \cap \mu_{q4})$, $q=1,2,3$ yazılabilir.

O halde ÇALKTP için taşıma modeli:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $(\mu_{11} \cap \mu_{12}) + M(1 - \delta_1) \geq \lambda$, $(\mu_{13} \cap \mu_{14}) + M\delta_1 \geq \lambda$,
 $(\mu_{21} \cap \mu_{22}) + M(1 - \delta_2) \geq \lambda$, $(\mu_{23} \cap \mu_{24}) + M\delta_2 \geq \lambda$,
 $(\mu_{31} \cap \mu_{32}) + M(1 - \delta_3) \geq \lambda$, $(\mu_{33} \cap \mu_{34}) + M\delta_3 \geq \lambda$,
 $\mathbf{x} \in S$,
 $\mathbf{x}, \lambda \geq 0$, $\lambda \leq 1$, $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0,1\}$

eşdeğer olarak,

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $\mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) + M(1 - \delta_1) \geq \lambda$, $\mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) + M(1 - \delta_1) \geq \lambda$
 $\mu_{13}(z_1(\mathbf{x})) + M\delta_1 \geq \lambda$, $\mu_{14}(z_1(\mathbf{x})) + M\delta_1 \geq \lambda$
 $\mu_{21}(z_2(\mathbf{x})) + M(1 - \delta_2) \geq \lambda$, $\mu_{22}(z_2(\mathbf{x})) + M(1 - \delta_2) \geq \lambda$
 $\mu_{23}(z_2(\mathbf{x})) + M\delta_2 \geq \lambda$, $\mu_{24}(z_2(\mathbf{x})) + M\delta_2 \geq \lambda$
 $\mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) + M(1 - \delta_3) \geq \lambda$, $\mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) + M(1 - \delta_3) \geq \lambda$
 $\mu_{33}(z_3(\mathbf{x})) + M\delta_3 \geq \lambda$, $\mu_{34}(z_3(\mathbf{x})) + M\delta_3 \geq \lambda$

Arz kısıtları: $x_{11} + x_{12} \leq 150$, $x_{21} + x_{22} \leq 250$ (5.37)

Talep kısıtları: $x_{11} + x_{21} \geq 50$, $x_{12} + x_{22} \geq 350$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0,1\}$, $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$

olur. Çizelge 5.10, Çizelge 5.11 ve Çizelge 5.12 kullanılarak (5.37) problemi aşağıdaki 0-1 karma tamsayı non-lineer probleme dönüşür:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar:

$$19.42417 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 39.99436 + M(1 - \delta_1) \geq \lambda, \quad 12.06897 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 24.66863 + M(1 - \delta_1) \geq \lambda$$

$$44.77612 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 92.87612 + M\delta_1 \geq \lambda, \quad 15.65996 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 32.05818 + M\delta_1 \geq \lambda$$

$$1.43954 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 5.95682 + M(1 - \delta_2) \geq \lambda, \quad -0.62641 \cdot z_2(\mathbf{x}) + 3.2379 + M(1 - \delta_2) \geq \lambda$$

$$187.5 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 849.05375 + M\delta_2 \geq \lambda, \quad 1.02092 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 4.07601 + M\delta_2 \geq \lambda$$

$$23.33475 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 39.36572 + M(1 - \delta_3) \geq \lambda, \quad -6.25 \cdot z_3(\mathbf{x}) + 11.24106 + M(1 - \delta_3) \geq \lambda$$

$$3250 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 5574.4325 + M\delta_3 \geq \lambda, \quad 16.99854 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 28.50947 + M\delta_3 \geq \lambda$$

$$\text{Arz kısıtları: } x_{11} + x_{12} \leq 150, \quad x_{21} + x_{22} \leq 250 \quad (5.38)$$

$$\text{Talep kısıtları: } x_{11} + x_{21} \geq 50, \quad x_{12} + x_{22} \geq 350$$

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}, \quad \mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}.$$

$M=100000$ alınarak (5.38) problemi çözülürse, örnekteki taşıma sistemi için en temel tatmin seviyesi $\lambda^* = 0.450$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \delta_3 = 1$ ve

$$\mathbf{x}^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (21.888, 128.112, 28.112, 221.888),$$

zayıf Pareto-optimal noktası bulunur. Pareto-optimallik testi yapıldığında, alternatif çözüm olmadığından, bu noktanın aynı zamanda Pareto-optimal nokta olduğu görülür. Ayrıca örnek problemin diğer sonuçları olarak: amaç fonksiyon değerleri $z_1(\mathbf{x}) = 2.088752$, $z_2(\mathbf{x}) = 4.4506$, $z_3(\mathbf{x}) = 1.710566$; amaçlardan sağlanan tatmin dereceleri $\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 0.65009$, $\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 0.44999$, $\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 0.54991$ olarak bulunmuştur.

SONUÇ

“Bulanık Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma problemine Çözüm Önerisi” isimli tezimizde öncelikle bulanık karar verme ile ÇALKP ve taşıma problemleri altyapısı hazırlanarak bu üç temel konu arasında bir bağ kurulmuştur. Literatürde taşıma problemi ile ilgili çok sayıda çalışma olmasına rağmen kesirli yapıda amaçlara sahip taşıma problemlerinin çözümü için geliştirilmiş yöntemlere hemen hemen hiç rastlanmamaktadır. Bajalinov (Bajalinov, 2003) tarafından tek amaçlı lineer kesirli taşıma problemi için tablo yöntemi geliştirilmiştir. Bilindiği gibi bulanık karar verme yaklaşımı, belirsizlik içeren kavramları üyelik dereceleriyle belirli hale getirerek, gerçek yaşam problemlerini daha iyi modellemektedir. Bu nedenle taşıma sistemlerindeki problemler de bulanık yaklaşımlarla ele alınabilir. Üstelik kesirli taşıma problemlerinin bulanık yaklaşımlarla çözümüne de literatürde rastlanmamıştır. Çalışmamızda özel yapıda bir vektör-minimum (veya maksimum) problemi olan ÇALKTP’nin formülasyonu yapılarak çözülebilirliği için teoremler verilmiş ve bulanık yaklaşımlarla çözüm önerileri yapılmıştır. Dolayısıyla çalışmamızın, literatürdeki önemli bir boşluğu dolduracağına inanmaktayız.

Önerdiğimiz çözüm yöntemleri gerçek hayat problemlerine uygulandığında ve bilgisayar programları yapıldığında daha da etkinleşecektir. Farklı iteratif yöntemler (örneğin altın oran gibi), dengeleyici operatörlerin kullanımı, bulanık parametrelili çok amaçlı/çok seviyeli lineer/non-lineer kesirli taşıma problemleri ve bu problemlerin solid taşıma problemlerine genişletilmeleri v.s bütün bunlar gelecekte araştırmacılara gösterebileceğimiz birer hedeftir.

KAYNAKLAR

- Abd El-Wahed, W.F. (2001), "A multi-objective transportation problem under fuzziness", *Fuzzy Sets and Systems*, 117:27–33.
- Abd El-Wahed, W.F. ve Lee, S.M. (2006), "Interactive fuzzy goal programming for multi-objective transportation problems", *Omega*, 34:158-166.
- Aenaida, R.S. ve Kwak N.W. (1994), "A linear goal programming for transshipment problems with flexible supply and demand constraints", *Journal of Operational Research Society*, 45 (2):215-24.
- Ahlatcioglu, M. ve Tiryaki, F. (2007), "Interactive fuzzy programming for decentralized two-level linear fractional programming (DTLLFP) problems", *Omega*, 35: 432-450.
- Aksoy, Y., Özkan, E.M. ve Karanfil, S. (2003), *Bulanık Mantığa Giriş*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, 4, İstanbul.
- Ammar, E.E. ve Youness, E.A. (2005), "Study on multiobjective transportation problem with fuzzy numbers", *Applied Mathematics and Computation*, 166 (2): 241-253.
- Bajalinov, E.B. (2003), *Linear Fractional Programming: Theory, Methods, Applications and Software*, Kluwer Academic Publishers, London.
- Benson, H.P. (1985), "Finding certain weakly-efficient vertices in MOLFP", *Management Science*, 31(2):240-245.
- Bit A.K., Biswal M.P., Alam S.S. (1992), "Fuzzy programming approach to multicriteria decision making transportation problem", *Fuzzy sets and Systems*, 50:35-41.
- Borde, J. ve Crouzeix, J.P. (1987), "Convergence of a Dinkelbach-type Algorithm in Generalized Fractional Programming", *Zeitschrift fur Operations Research*, 31:31-54.
- Charnes, A. ve Cooper, W.W. (1962), "Programming with linear fractional functionals", *Naval Research Logistics Quarterly*, 9:181-186.
- Chen, S-J. ve Hwang, C-L. (1992), *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Climaco J.N. and Antunes C.H. and Alves M.J. (1993), "Interactive decision support for multiple-objective transportation problems", *European Journal of Operations Research*, 65 : 58–67.
- Das S.K., Goswami A. ve Alam S.S. (1999), Multiobjective transportation problem with interval cost, source and destination parameters. *European Journal of Operations Research*, 117:100–112.
- Hannan, E.L. (1981), "Linear programming with multiple fuzzy goals", *Fuzzy Sets and Systems*, 6: 235-248.
- Kara İ., (1991), *Doğrusal programlama*, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir.
- Kasana H.S., Kumar K.D. (2000), An efficient algorithm for multi-objective transportation problems. *Asia-Pacific Operational Research* 17 : 27-40.
- Katagiri, H., Sakawa, M. ve Ishii, H. (2001), "Multiobjective fuzzy random linear programming using E-model and possibility measure", *Annual Conference of the North American Fuzzy Informations Processing Society- NAFIPS 4*, Sayfa 2295-2300.
- Kaufmann, A. ve Gupta, M.M, (1988), *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Elsevier Science Publishers B.V., Netherlands.

- Kornbluth, J.S.H. ve Steuer, R.E. (1981a), "Goal programming with linear fractional criteria", *European Journal of Operational Research*, 8:58-65.
- Kornbluth J.S.H. ve Steuer R.E. (1981b), "Multiple objective linear fractional programming", *Management Science*, 27:1024-1039.
- Leberling, H. (1981), "On finding compromise solutions in multicriteria problems using the fuzzy min-operator", *Fuzzy Sets and Systems*, 6:105-118.
- Li, R.J. ve Lee, E. S. (1991), "An exponential membership function for fuzzy multiple objective linear programming", *Computers Math. Applic*, 22 (12):55-60.
- Li L. ve Lai K.K. (2000), A fuzzy approach to the multiobjective transportation problem. *Computers and Operations Research*, 27:43–57.
- Mohamed, R.H. (1997), "The relationship between goal programming and fuzzy programming", *Fuzzy Sets and Systems*, 89: 215-222.
- Nykowski, I. ve Zolkiewski, Z. (1985), "A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem", *European Journal of Operational Research*, 19: 91-97.
- Öğütlü, S.A., (2002), Bulanık Doğrusal Programlama ve Bir Yem Karışım Problemine Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi.
- Özkan, M.M. (2003), Bulanık Hedef Programlama, Ekin Kitabevi, İstanbul.
- Öztürk, A. (2001), Yöneylem Araştırması, Ekin Kitabevi Yayınları, Bursa.
- Pal, B.B., Moitra, B.N. ve Maulik U. (2003), "A goal programming procedure for fuzzy multiobjective linear fractional programming problem", *Fuzzy Sets and Systems*, 139:395-405.
- Papamantou C., Paparrizos K. ve Samaras N. (2004), "Computational experience with exterior point algorithms for the transportation problem", *Applied Mathematics and Computation* 158 459–475.
- Rosenthal R.E., *GAMS-A User's Guide*, GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA, 2007.
- Sakawa, M. ve Yumine, T. (1983), "Interactive fuzzy decision-making for multiobjective linear fractional programming problems", *Large Scale Systems*, 5:105-114.
- Sakawa, M. ve Yano, H. (1988), "An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear fractional programming problems", *Fuzzy Sets and Systems*, 28:129-144.
- Sakawa, M. (1993), *Fuzzy Sets And Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, Newyork,.
- Sakawa, M. ve Nishizaki, I. (2002), "Interactive fuzzy programming for decentralized two-level linear programming problems", *Fuzzy sets and Systems*, 125:301-15.
- Schaible, S. (1981), "Fractional Programming: Applications and Algorithms", *European Journal of Operation Research*, 7:111-120.
- Sezginman, İ. (1993), *Lineer Programlama Teori ve Problemleri*, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
- Stancu-Minasian, I.M. (1981), "Bibliography of fractional programming: 1960-1976", *Pure and Applied Mathematika Sciences* 13 1-2 : 35-69.
- Stancu-Minasian, I.M. (1983), "A second bibliography of fractional programming: 1977-1981", *Pure and Applied Mathematika Sciences* 17 1-2 : 87-102.

- Stancu-Minasian, I.M. (1985), "A third second bibliography of fractional programming", *Pure and Applied Matematika Sciences* 22 (1-2):109-122.
- Stancu-Minasian, I.M. (1992), "A fourth bibliography of fractional programming", *Optimization* 23 (1):53-71.
- Stancu-Minasian, I.M. (1999), "A fifth bibliography of fractional programming", *Optimization* 45 (1-4): 343-367.
- Stancu-Minasian, I.M. (2006), "A sixth bibliography of fractional programming", *Optimization* 55 (4): 405-428.
- Steuer, R.E. (1986), *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*, Newyork: John Wiley and Sons.Inc..
- Taha, H.A. (2000), *Yöneylem Araştırması (6.Basımdan Çeviri)*, Literatür Yayıncılık, İstanbul.
- Tiryaki, F. (1993), *Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi İçin Çözüm Önerileri*, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Tiryaki, F. (2006), "Interactive compensatory fuzzy programming for decentralized multi-level linear programming (DMLLP) problems", *Fuzzy Sets and Systems*, 157:3072 – 3090.
- Tiryaki, F. ve Cetin, N., (2005), "Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemine (ÇALKTP) Bulanık Matematik Programlama Yaklaşımı", *YA/EM 2005 25. Ulusal Kongresi*, 04-06 Temmuz, Koç Üniversitesi Rumeli Feneri Kampüsü, Sarıyer, İSTANBUL.
- Tiryaki, F. ve Cetin, N., (2006), "A Compensatory Fuzzy Approach to Multiple-Objective Linear Fractional Transportation Problem (MOLFTP)", *Mathematical Methods In Engineering International Symposium*, Ankara, TURKEY.
- Topuz, V., Akbaş A. ve Tektaş M. (2002), "Boğaz Köprüsü Yoluna Katılım Noktalarında Trafik Akımlarının Bulanık Mantık Yaklaşımı ile Kontrolü ve Bir Uygulama Örneği", *Uluslararası Trafik ve Yol Güvenliği Kongresi ve Fuarı*, Ankara.
- Yang T., Ignizio J.P. ve Kim H-J. (1991), "Fuzzy programming with nonlinear membership functions: Piecewise linear approximation", *Fuzzy Sets and Systems*, 41:39-53.
- Yenilmez K. (2001), *Bulanık doğrusal programlama problemleri için yeni çözüm yaklaşımları ve duyarlılık analizi*, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Zimmermann, H.J. (1978), "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions", *Fuzzy Sets and Systems*, 1:45-55.
- Zimmermann, H.J. (1987), *Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Zimmermann, H. J. (1993), *Fuzzy Set Theory-and Its Applications*, Second, Revised Edition, Sixth Printing, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 07.10.1977

Doğum yeri Isparta

Lise 1991-1994 Tınaztepe Lisesi

Lisans 1994-1998 Ankara Üniversitesi Fen Fak. Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 1998-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik BölümüDoktora 2002-Devam ediyor Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü**Çalıştığı kurum(lar)**

1999-2005 Deniz Lisesi Komutanlığı Matematik Öğretmeni

2005-Devam ediyor Deniz Harp Okulu Komutanlığı Matematik
Öğretim Elemanı