

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK ESNEK ELEMAN VE ONUN KARAR VERMEDE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BUSE ERDİNÇ

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. KEMAL TAŞKÖPRÜ

BİLECİK, 2025

10757251

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK ESNEK ELEMAN VE ONUN KARAR VERMEDE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BUSE ERDİNÇ

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. KEMAL TAŞKÖPRÜ

BİLECİK, 2025

10757251

BEYAN

‘Bulanık Esnek Eleman Ve Onun Karar Vermede Uygulaması’ adlı yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezi/dönem projesinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR
Destek alındı ise;	
Destekleyen kurum;	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
Diğer;.....	
ETİK KURUL onayı var ise;	
ETİK KURUL karar tarih/sayı:	/.....

Öğrenci Adı ve Soyadı

BUSE ERDİNÇ

Tarih

.....

İmza

.....

ÖN SÖZ

Tez çalışmam boyunca yönlendirmeleri, bilgi ve tecrübesi ile bana rehberlik eden, desteğini ve sabrını hiçbir zaman esirgemeyen değerli tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Kemal TAŞKÖPRÜ hocama teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte, bana her koşulda destek olan, moral ve motivasyon sağlayan, karşılaştığım zorluklarda yanımda olduklarını hissettiren aileme ve yakın çevreme çok teşekkür ederim.

Buse Erdiñ

2025



ÖZET

BULANIK ESNEK ELEMAN VE ONUN KARAR VERMEDE UYGULAMASI

Bu yüksek lisans tezi, alternatifleri niteliklere daha esnek bir şekilde atayarak geleneksel bulanık yumuşak nokta kavramını genişleten, bulanık yumuşak elemanlar adlı yeni bir kavram önermektedir. Bu kavram üzerinden bulanık esnek küme işlemlerini ele almak için yeni bir bakış açısı sunulmaktadır. Bu kapsamda, bulanık esnek küme işlemlerinin bazı özellikleri verilerek önceki tanımlar ile karşılaştırılmıştır. Son olarak önerilen yeni yaklaşım üzerinden uygulama adına bir karar verme algoritması ve bir karar verme örneği sunulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık esnek küme, Bulanık esnek eleman, Karar verme



ABSTRACT

FUZZY SOFT ELEMENT AND ITS APPLICATION IN DECISION MAKING

This master's thesis proposes a novel concept called fuzzy soft elements, which extends the traditional fuzzy soft point concept by assigning alternatives to attributes in a more flexible manner. A new perspective is presented for addressing fuzzy soft set operations through this concept. In this context, some properties of fuzzy soft set operations are given and compared with previous definitions. Finally, a decision-making algorithm and a decision-making example are presented for application purposes based on the proposed novel approach.

Keywords: Fuzzy soft set, Fuzzy soft element, Decision-making



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	v
TABLolar LİSTESİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Bulanık Küme ve Bulanık Kümeler ile İlgili İşlemler.....	3
2.2. Esnek Küme ve Esnek Küme İşlemleri.....	5
2.3. Esnek Eleman ve Elemanter Esnek Küme İşlemleri.....	7
2.4. Bulanık Esnek Küme ve Bulanık Esnek Kümelerdeki İşlemler.....	12
3.BULANIK ESNEK ELEMAN	15
3.1.Bulanık Esnek Eleman	15
3.2. Karar Verme Uygulaması.....	21
KAYNAKÇA	24

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

x^f : Bulanık nokta

Φ : Boş esnek küme

$\tilde{U}$: Mutlak esnek küme

$\tilde{C}$: Esnek alt küme

$\tilde{\supset}$: Esnek üst küme

$\tilde{\cup}$: Esnek birleşim

$\tilde{\cap}$: Esnek kesişim

$\tilde{\sim}$: Esnek fark

$\tilde{\in}$: Esnek elemanıdır

$\tilde{\notin}$: Esnek eleman değildir

$\tilde{x}$: Esnek eleman

$\mathbb{U}$: Esnek elemanter birleşim

$\mathbb{\cap}$: Esnek elemanter kesişim

G^c : Esnek elemanter tümleyen

$\tilde{\sim}$: Esnek elemanter fark

$\tilde{\Phi}$: Bulanık esnek boş küme

$\tilde{U}$: Mutlak bulanık esnek küme

$\tilde{x}$: Bulanık esnek eleman

TABLÖLER LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1. g_1 ve g_2 bulanık esnek kümelerinin tablo halinde gösterimi.....	14
Tablo 2.2. g_1 ve g_2 bulanık esnek kümelerinin kesişim, bileşimlerinin ve tümleyeninin tablo halinde gösterimi.....	14
Tablo 3.1. $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ ve $\tilde{x}_3$ bulanık esnek elemanlarının tablo halinde gösterimi.....	16
Tablo 3.2. g 'nin tablo halinde gösterimi.....	17
Tablo 3.3. $\tilde{x}_5$, $\tilde{x}_6$, $\tilde{x}_7$ bulanık esnek kümelerinin tablo gösterimi.....	17
Tablo 3.4. b tarafından üretilen h bulanık esnek kümesinin tablo halinde gösterimi.....	18

1. GİRİŞ

Belirsizlik, eksik bilgi ve dilsel ifadelerle tanımlanan durumlar, modern bilim ve mühendisliğin karşılaştığı en yaygın problemlerdendir. Klasik küme teorisi, elemanların yalnızca “ait” veya “ait değil” şeklinde kesin sınıflandırılmasına imkân verirken, gerçek dünyada bu katı yapı çoğu zaman yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, Zadeh tarafından ortaya konulan bulanık küme (fuzzy set) teorisi, elemanların bir kümeye belirli bir üyelik derecesi ile ait olabilmesini sağlayarak belirsizlik modellemesinde önemli bir paradigma değişimi yaratmıştır (Zadeh, 1965).

Bulanık kümeler, bulanıklığı üyelik fonksiyonları aracılığıyla ifade ederken, farklı belirsizlik türlerini kapsayacak şekilde geliştirilen yaklaşımlar literatürde hızla yerini almıştır. Bunlardan biri, Molodtsov tarafından tanımlanan esnek küme (soft set) teorisidir (Molodtsov, 1999). Esnek kümeler, parametre tabanlı tanımlama yaparak nesnelerin özelliklerini esnek biçimde ifade eder. Bu yapı, özellikle parametrelerin belirsiz veya değişken olduğu durumlarda güçlü bir temsil yeteneği sunar.

Bununla birlikte, birçok uygulama hem üyelik derecelerinin hem de parametre bazlı tanımların birlikte kullanılmasını gerektirir. Bu gereksinim, bulanık esnek küme kavramını doğurmuştur (Maji vd., 2001). Bulanık esnek kümeler hem bulanık küme teorisinin esnekliğini hem de esnek kümelerin parametre odaklı yapısını birleştirmektedir. Bulanık esnek kümeler, yalnızca bir elemanın kümeye ait olma derecesini değil; aynı zamanda farklı parametrelerin eleman üzerindeki etkisini, bu etkilerin ağırlıklarını ve aralarındaki bağımlılık ilişkilerini temsil edebilir. Bu yaklaşım, soyut matematiksel düzlemde parametrik bulanıklığın, esnek dönüşüm operatörleri ile zenginleştirilmiş bir biçimi olarak düşünülebilir.

Bulanık esnek kümeler üzerinde küme işlemleri gerçekleştirmek için, bulanık küme ve esnek küme teorilerinden esinlenen çeşitli yaklaşımlar bulunmaktadır. Ayrıca, bulanık esnek kümenin elemanları ile ilgili farklı yorumlar da mevcuttur. Bu yorumlar genellikle, belirli bir parametre (veya öznitelik) ile ilgili olarak, bir elemanın (veya alternatifin) söylem evrenindeki üyelik dereceleri aracılığıyla ifade edilir ve hem teorik hem de pratik uygulamalar buna göre geliştirilir (Majumdar ve Samanta, 2010; Varol, vd., 2014; Mockor, 2020; Alcantud, 2022). Birçok araştırmacı da esnek küme işlemlerini farklı şekillerde yorumlayarak geliştirmeye çalışmıştır. Bu çalışma, Das ve Samanta tarafından ortaya atılan esnek eleman kavramını temel alarak bulanık esnek eleman tanımına yeni bir yaklaşım önermektedir (Das ve Samanta, 2012). Esnek eleman ile ilgili daha ileri çalışmalar için (Das ve Samanta, 2013; Güler, vd., 2016;

Taşköprü, 2017; Demir, 2021; Taşköprü ve Altıntaş, 2021; Taşköprü ve Karaköse, 2023; Taşköprü, 2023) gibi çalışmalar incelenebilir. Esasında, önerilen model, her bir tanımlayıcı öznitelik için alternatiflerin duyarlılığını belirlemenin bir yolunu sunmaktadır. Bu nedenle, farklı değerlendirme stratejileri sağlayarak bu çerçevede karar verme problemlerinde daha doğru sonuçlar elde edilmesini kolaylaştıracaktır. Bu çalışmada tartışılan temel yöntem kullanılarak topoloji, metrik yapılar ve bazı uygulamalar üzerine araştırmalar (Jun ve Park, 2008; Çağman ve Enginoğlu, 2010; Kamacı, 2021; Altıntaş İ., vd., 2022; Costarelli ve Sambucini, 2024; Romaguera, 2024; Taşköprü ve Karaköse, 2023) gibi çalışmalara benzer şekilde geliştirilebilir. Ayrıca ele alınan yöntem bulanık esnek kümelerin genelleştirmeleri üzerinde de çeşitli araştırmalara konu olabilir.

Bu tez çalışmasının amacı, bulanık esnek eleman kavramının matematiksel temellerini incelemek, tanım ve özelliklerini detaylandırmak, ilgili kavramlarla ilişkilerini analiz etmek ve örnek uygulamalar üzerinden etkinliğini göstermektir. Ayrıca, literatürdeki mevcut yaklaşımlarla karşılaştırma yapılarak bulanık esnek elemanların avantaj ve sınırlılıkları ortaya konacaktır. Böylece bulanık esnek elemanların hem teorik hem de pratik yönlerini kapsayan bütüncül bir inceleme sunulmuş ve literatürde bu alandaki bilgi birikimine katkı sağlanmıştır.

Tezin yapısı şu şekilde organize edilmiştir: Tezin ikinci bölümünde tezde kullanılacak temel kavramlara ve notasyonlara değinilmiştir. Bulanık küme ve bulanık küme ile ilgili işlemler, esnek küme ve ilgili işlemler, esnek eleman ve elemanter esnek küme işlemleri ve ayrıca bulanık esnek küme ve ilgili işlemlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde tez çalışması kapsamında ortaya atılan bulanık esnek eleman kavramı tanıtılmış ve bazı açıklayıcı örnekler sunulmuştur. Bulanık esnek kümeler üzerindeki işlemler sunulan yeni bulanık esnek eleman yaklaşımı üzerinden yeniden ele alınmış ve daha önceki tanımlar ile kıyaslanmıştır. Son kısımda tezde sunulan yeni bulanık esnek eleman yaklaşımının uygulanabilirliğini göstermek adına bir karar verme uygulaması sunulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanacağımız temel bilgilere yer verilmiştir. Buradaki ifadeler ve notasyonlarda bulanık küme için (Zadeh, 1965; Zimmermann, 2011; Ross, 2016), esnek küme için (Molodtsov, 1999; Aktaş ve Çağman, 2007; Das ve Samanta, 2012; Dalkılıç, 2021; Taşköprü ve Altıntaş, 2021) ve bulanık esnek küme için (Maji, vd., 2001; Şimşekler ve Yüksel, 2013; Alcantud, 2022) kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.1. Bulanık Küme ve Bulanık Kümeler ile İlgili İşlemler

Tanım 2.1.1. U söylem evreni (universe of discourse) üzerinde bulunan bir bulanık küme, üyelik fonksiyonu olarak adlandırılan $\mu_A : U \rightarrow I$ fonksiyonu ile eşleştirilerek $A = (U, \mu_A)$ ikilisi ile tanımlanır. Burada $\mu_A(u)$ değeri her $u \in U$ 'nun A 'ya üyelik (ait olma) derecesini belirtir. U üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi $F(U)$ ile gösterilir.

Tezde U üzerinde bir bulanık küme için $A = \{u^{\mu_A(u)} : u \in U\}$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2. U evreni üzerinde, üyelik fonksiyonu $\mu_{x'} : U \rightarrow I$

$$\mu_{x'}(u) = \begin{cases} t \in (0,1], u = x \\ 0, u \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı x' bulanık kümesine U ' da bir bulanık nokta adı verilir. U 'daki tüm bulanık noktaların kümesi $FP(U)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. $x' \in FP(U)$ bir bulanık nokta ve $A \in F(U)$ bir bulanık küme olsun. Eğer her $u \in U$ için $\mu_{x'}(u) \leq \mu(u)$ ise x' bulanık noktası A bulanık kümesine aittir denir.

Tanım 2.1.4. $U, \emptyset$ kümeleri birer bulanık küme olup;

$$\forall u \in U \text{ için } \mu_U(u) = 1 \Rightarrow U = \{(u, 1) : u \in U\},$$

$$\forall u \in U \text{ için } \mu_{\emptyset}(u) = 0 \Rightarrow \emptyset = \{(u, 0) : u \in U\}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan her klasik kümenin bir bulanık küme olduğu sonucu çıkar.

Kümeler teorisinde bilinen kapsama ' $\subset$ ', eşitlik ' $=$ ', birleşim ' $\cup$ ', kesişim ' $\cap$ ' işlemleri bulanık kümelerde sırasıyla $\leq, =, \vee, \wedge$ işaretleri kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.5. U ’daki herhangi iki bulanık küme A ve B olsun. A ve B ’nin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olmak üzere, her $u \in U$ için;

1. $A \leq B \Leftrightarrow \mu_A(u) \leq \mu_B(u)$,
2. $A = B \Leftrightarrow \mu_A(u) = \mu_B(u) = 0$,
3. $A \vee B = C \Leftrightarrow \mu_C(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$,
4. $A \wedge B = D \Leftrightarrow \mu_D(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$,
5. $A^c \Leftrightarrow \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(u)$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.6. $U = \{a, b, c\}$ ve $I = [0,1]$ verilsin. $A, B \in F(U)$ bulanık kümeleri

$$A = \{a^{0.1}, b^{0.5}, c^{0.7}\} \text{ ve } B = \{a^{0.3}, b^{0.1}, c^1\}$$

olarak verilsin. Bu durumda

$$A \vee B = \{a^{0.3}, b^{0.5}, c^1\},$$

$$A \wedge B = \{a^{0.1}, b^{0.1}, c^{0.7}\},$$

$$A^C = \{a^{0.9}, b^{0.5}, c^{0.3}\} \text{ olur.}$$

Tanım 2.1.7. U ’daki bulanık kümelerin ailesi $\{A_i : A_i \in F(U)\}_{i \in I}$ olsun. Buna göre birleşim ve kesişim işlemlerinin genelleştirilmiş hali

1. $C = \bigvee_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \mu_C(u) = \sup_{i \in I} \{\mu_{A_i}(u)\}$,
2. $D = \bigwedge_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \mu_D(u) = \inf_{i \in I} \{\mu_{A_i}(u)\}$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.8. A ve B kümeleri U ’daki herhangi iki bulanık küme olmak üzere A ve B bulanık kümelerinin farkı $A - B = A \wedge B^c \Leftrightarrow \mu_{A-B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_{B^c}(u)\}$ bulanık kümesi olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.9. U ’da iki bulanık küme A ve B olmak üzere,

1. $A \vee B$ bulanık kümesi A ve B kümelerini kapsayan en küçük bulanık kümedir.

2. $A \wedge B$ bulanık kümesi A ve B kümeleri tarafından kapsanan en büyük bulanık kümedir.

Teorem 2.1.10. U kümesi üzerindeki herhangi bir bulanık küme A olsun.

1. $A \wedge A^C = \emptyset$ olmak zorunda değildir.
2. $A \vee A^C = U$ olmak zorunda değildir.

Örnek 2.1.11. $U = \{a, b\}$ olmak üzere $A \in F(U)$ bulanık kümesi $A = \{a^{0.2}, b^{0.9}\}$ olarak verilsin.

$$A \wedge A^C = \{a^{0.2}, b^{0.1}\} \neq \emptyset,$$

$$A \vee A^C = \{a^{0.8}, b^{0.9}\} \neq U \text{ olur.}$$

2.2. Esnek Küme ve Esnek Küme İşlemleri

Tanım 2.2.1. $U \neq \emptyset$ bir küme ve $P \neq \emptyset$ bir parametreler kümesi olsun. $G : P \rightarrow P(U)$ dönüşümüne U üzerinde esnek küme denir ve (G, P) ile gösterilir.

U kümesinin parametrelendirilmiş bir alt ailesine U üzerinde esnek küme denir. (G, P) esnek kümesi her $\alpha \in P$ için $G(\alpha) \subset U$ kümeleri U 'nun α - yaklaşımlı alt kümeleri olarak da alınabilir. U üzerindeki (G, P) esnek kümesi

$$(G, P) = \{(\alpha, G(\alpha)) : \alpha \in P, G(\alpha) \subset U\}$$

biçiminde ifade edilir.

P parametreler kümesi ile parametrelendirilmiş U üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S_p(U)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. U evrensel kümesi üzerindeki bir (G, P) esnek kümesinin bir esnek noktası, bir $\alpha \in P$ ve bir $x \in U$ elemanı için $x \in F(\alpha)$ olması ile belirlenir ve e_α^x ile gösterilir. Bu durumda; e_α^x esnek noktası (F, P) esnek kümesinin esnek elemanıdır. $\Leftrightarrow e_\alpha^x = x \in F(\alpha)$.

Örnek 2.2.3. $P = \{\alpha, \beta\}$ parametreler kümesi ve $U = \{x, y, z\}$ evrensel kümesi verilsin.

$$(G, P) = \{(\alpha, \{x, y\}), (\beta, \{y, z\}), (\alpha, \emptyset), (\beta, \{x\})\}$$

kümesi P parametreler kümesi ile parametrelendirilmiş U üzerindeki bir esnek kümeyi göstermektedir.

Tanım 2.2.4. $(G, P) \in S_p(U)$ bir esnek küme olmak üzere her $\alpha \in P$ için

1. $G(\alpha) = \emptyset$ ise (G, P) kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.
2. $G(\alpha) = U$ ise (G, P) kümesine mutlak esnek küme denir ve $\tilde{U}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5. (G, P) ve (H, P) U üzerinde iki esnek küme olsun. Her $\alpha \in P$ için $G(\alpha) \subset H(\alpha)$ ise (G, P) 'ye (H, P) esnek kümesinin esnek alt kümesidir denir ve $(G, P) \subset (H, P)$ ile gösterilir. (H, P) esnek kümesine de (G, P) esnek kümesinin esnek üst kümesi denir ve $(H, P) \supset (G, P)$ ile gösterilir. (G, P) esnek kümesi, (H, P) esnek kümesinin esnek alt kümesi ve (G, P) esnek kümesinin esnek alt kümesi ise (G, P) ve (H, P) esnek kümelerine U üzerinde eşit esnek kümeler denir.

Tanım 2.2.6. (G, P) ve (H, P') , U kümesi üzerinde esnek kümeler, $E = P \cup P'$ ve $\alpha \in E$ olsun.

$$D(\alpha) := \begin{cases} G(\alpha), \alpha \in P - P' \\ H(\alpha), \alpha \in P' - P \\ G(\alpha) \cup H(\alpha), \alpha \in P \cap P' \end{cases}$$

olmak üzere (D, E) esnek kümesine (G, P) ve (H, P') kümelerinin esnek birleşimi denir ve $(D, E) \cong (G, P) \cup (H, P')$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. (G, P) ve (H, P') U kümesi üzerinde iki esnek küme ve $E = P \cap P'$ olsun. Her $\alpha \in U$ için $F(\alpha) = G(\alpha) \cap H(\alpha)$ biçiminde verilen (F, E) esnek kümesine (G, P) ve (H, P') kümelerinin esnek kesişimi denir ve $(F, E) \cong (G, P) \cap (H, P')$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8. (G, P) ve (H, P') , U kümesi üzerinde esnek iki küme ve $E = P / P'$ olsun. Her $\alpha \in U$ için $K(\alpha) = G(\alpha) / H(\alpha)$ olacak şekilde verilen (K, E) esnek kümesine (G, P) ve (H, P') kümesinin esnek farkı denir ve $(K, E) = (G, P) \setminus (H, P')$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.9. (G, P) , U kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. Her $\alpha \in P$ için $G^c(\alpha) = U - G(\alpha)$ koşulunu sağlayan $G^c : P \rightarrow P(U)$ dönüşümü ile verilen (G^c, P) esnek kümesine (G, P) kümesinin esnek tümleyeni denir ve $(G, P)^c = (G^c, P)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.10. (G, P) ve (H, P') , U kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı iki esnek küme olsun. $P = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ve $P' = \{\alpha, \beta, \delta\}$ olarak verilsin.

$$(G, P) = \{(\alpha, \{x, y\}), (\beta, \{y, z\}), (\gamma, \{y, t\})\},$$

$$(H, P') = \{(\alpha, \{y, z, t\}), (\beta, \{x, t\}), (\delta, \{z\})\}.$$

Bu durumda;

$$(D, E) = (G, P) \cup (H, P') = \{(\alpha, \{x, y, z, t\}), (\beta, \{x, y, z, t\}), (\gamma, \{y, t\}), (\delta, \{z\})\},$$

$$(F, E) = (G, P) \cap (H, P') = \{(\alpha, \{y\}), (\beta, \emptyset), (\gamma, \emptyset), (\delta, \emptyset)\},$$

$$G^C = \{(\alpha, \{z, t\}), (\beta, \{x, t\}), (\gamma, \{x, z\})\},$$

$$H^C = \{(\alpha, \{x\}), (\beta, \{y, z\}), (\delta, \{x, y, t\})\} \text{ olur.}$$

Önerme 2.2.11. $(G, P), (H, P), (K, P) \in S_p(U)$ esnek kümeleri verilsin.

$$1. \left((G, P) \tilde{\cap} (H, P) \right)^C = (G, P)^C \tilde{\cup} (H, P)^C.$$

$$2. \left((G, P) \tilde{\cup} (H, P) \right)^C = (G, P)^C \tilde{\cap} (H, P)^C.$$

$$3. \left((G, P) \tilde{\cup} (H, P) \tilde{\cap} (K, P) \right) = ((G, P) \tilde{\cap} (K, P)) \tilde{\cup} ((H, P) \tilde{\cap} (K, P)).$$

$$4. \left((G, P) \tilde{\cap} (H, P) \tilde{\cup} (K, P) \right) = ((G, P) \tilde{\cup} (K, P)) \tilde{\cap} ((H, P) \tilde{\cup} (K, P)).$$

2.3. Esnek Eleman ve Elemanter Esnek Küme İşlemleri

Tanım 2.3.1. $U \neq \emptyset$ ve P parametreler kümesi olsun. $\varepsilon: P \rightarrow U$ fonksiyonuna U üzerinde bir esnek eleman denir. Bir $(G, P) \in S_p(U)$ esnek kümesi verildiğinde her $\alpha \in P$ için $\varepsilon(\alpha) \in G(\alpha)$ ise ε esnek elemanı (G, P) kümesine aittir denir ve $\varepsilon \in (G, P)$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in P$ için $G(\lambda) \subset U$ tek elemanlı bir küme ise (G, P) kümesine tek elemanlı esnek küme denir. Dolayısıyla her tek elemanlı esnek küme bir esnek elemene karşılık gelir.

Her $\lambda \in P$ için $G(\lambda) \neq \emptyset$ olacak şekilde U üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler ile Φ boş esnek kümenin olduğu sınıf $S(\tilde{U})$ ile gösterilir. $(G, P) \in S(\tilde{U})$ esnek kümesinin tüm esnek

elemanlarının sınıfı da $SE((G, P))$ ile gösterilir. Bu kısımdan sonra kısalık adına bir esnek kümenin gösterimi için (G, P) yerine sadece G kullanılmıştır.

Tanım 2.3.2. Bir $G \in S(\tilde{U})$ esnek kümesinin esnek elemanlarının herhangi bir sınıfı, bu esnek kümenin bir esnek alt kümesini üretir. $\mathfrak{B}, \tilde{U}$ mutlak esnek kümesinin elemanlarının bir sınıfı olmak üzere $\mathfrak{B}$ sınıfının ürettiği esnek küme

$$SS(\mathfrak{B}) = \left\{ (\alpha, G(\alpha)) : \forall \alpha \in P, G(\alpha) = \bigcup_{\tilde{x} \in \mathfrak{B}}^n \{\tilde{x}(\alpha)\} \right\}.$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.3. Herhangi bir $G \in S(\tilde{U})$ esnek kümesi için $SS(SE(G)) = G$ olur. Ancak $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir $\mathfrak{B}$ sınıfı için $SS(SE(\mathfrak{B})) \supseteq \mathfrak{B}$ olur.

Uyarı 2.3.4. $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subset SE(\tilde{U})$ olmak üzere $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ olsun. Her $\lambda \in P$ için $\mathfrak{B}_1(\lambda) = \mathfrak{B}_2(\lambda)$ ise $SS(\mathfrak{B}) = \left\{ (\alpha, G(\alpha)) : \forall \alpha \in P, G(\alpha) = \bigcup_{\tilde{x} \in \mathfrak{B}}^n \{\tilde{x}(\alpha)\} \right\}$ olur.

Örnek 2.3.5. $P = \{\lambda, \mu\}$ ve $U = \{x, y, z\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \{(\lambda, x), (\mu, x)\} & \tilde{x}_2 &= \{(\lambda, y), (\mu, y)\} & \tilde{x}_3 &= \{(\lambda, z), (\mu, z)\} \\ \tilde{x}_4 &= \{(\lambda, x), (\mu, y)\} & \tilde{x}_5 &= \{(\lambda, x), (\mu, z)\} & \tilde{x}_6 &= \{(\lambda, y), (\mu, x)\} \\ \tilde{x}_7 &= \{(\lambda, y), (\mu, z)\} & \tilde{x}_8 &= \{(\lambda, z), (\mu, x)\} & \tilde{x}_9 &= \{(\lambda, z), (\mu, y)\} \end{aligned}$$

olmak üzere $SE(\tilde{U}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_9\}$ olur. $\mathfrak{B}_1 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5\}$ ve $\mathfrak{B}_3 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_6\}$ eleman sınıfları ele alınır

$$G = SS(\mathfrak{B}_1) = SS(\mathfrak{B}_3) = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, \{x, y\})\}$$

$$H = SS(\mathfrak{B}_2) = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, \{x, y, z\})\}$$

olduğu görülür. $SE(G) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_6\}$ ve $SE(H) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7\}$ olup $\mathfrak{B}_1 \subset SE(G)$, $\mathfrak{B}_2 \subset SE(H)$ ve $\mathfrak{B}_3 \subset SE(G)$ elde edilir.

Önerme 2.3.6. Herhangi $G, H \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri için G esnek kümesinin her elemanı esnek H kümesinin de esnek elemanı ise $G \tilde{\subset} H$ olur.

Örnek 2.3.7. Örnek 2.3.5. üzerinden

$$W = \{(\lambda, \{x, z\}), (\mu, \{z\})\} \in S(\tilde{U}) \text{ ve } K = \{(\lambda, \{x, y, z\}), (\mu, \{y, z\})\} \in S(\tilde{U})$$

olacak şekilde U kümesi üzerinde iki esnek küme verilsin.

Buradan $K^c = \{(\lambda, \emptyset), (\mu, \{x\})\} \notin S(\tilde{U})$ olur ve $G \tilde{\cup} W = \{(\lambda, \{x, y, z\}), (\mu, \{x, y, z\})\}$ olup $x_7 \tilde{\in} G \tilde{\cup} W$ olmasına rağmen $x_7 \notin G$ ve $x_7 \notin W$ olur.

$$\text{Ayrıca } G \tilde{\cap} W = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \emptyset)\} \notin S(\tilde{U}) \text{ olur.}$$

Tanım 2.3.8. $G, H \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri verilsin. $\mathfrak{B} = \{\tilde{x} \tilde{\in} U : \tilde{x} \tilde{\in} G \text{ veya } \tilde{x} \tilde{\in} H\}$ olmak üzere $G \uplus H = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine G ve H esnek kümelerinin elemanter birleşimi denir. Farklı bir ifade ile $G \uplus H = SS(SE(G) \cup SE(H))$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.9. $G, H \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri verilsin. $\mathfrak{B} = \{\tilde{x} \tilde{\in} U : \tilde{x} \tilde{\in} G \text{ ve } \tilde{x} \tilde{\in} H\}$ olmak üzere $G \pitchfork H = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine G ve H esnek kümelerinin elemanter kesişimi denir. Farklı bir ifade ile $G \pitchfork H = SS(SE(G) \cap SE(H))$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.10. $\mathfrak{B} = \{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{U} : \tilde{x} \tilde{\in} G^c\}$ için $G^c = SS(\mathfrak{B})$ ifadesine $G \in S(\tilde{U})$ esnek kümesinin elemanter tümleyeni denir. Farklı bir ifade ile $G^c = SS(SE(G^c))$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.11. $G, H \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri verilsin. $\mathfrak{B} = \{\tilde{x} \tilde{\in} U : \tilde{x} \tilde{\in} G \tilde{\setminus} H\}$ olmak üzere $G \tilde{\setminus} H = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine $G, H \in S(\tilde{U})$ esnek kümesinin elemanter farkı denir. Farklı bir ifade ile $G \tilde{\setminus} H = SS(SE(G \tilde{\setminus} H))$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.3.12. $P = \{\lambda, \mu\}$ parametreler kümesi ile $U = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde

$$G = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, \{x, y, z\})\} \text{ ve } H = \{(\lambda, \{x, z\}), (\mu, \{y\})\} \in S(\tilde{U}) \text{ esnek kümeleri}$$

verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \{(\lambda, x), (\mu, x)\}, & \tilde{x}_4 &= \{(\lambda, y), (\mu, y)\}, & \tilde{x}_7 &= \{(\lambda, z), (\mu, z)\}, \\ \tilde{x}_2 &= \{(\lambda, x), (\mu, y)\}, & \tilde{x}_5 &= \{(\lambda, x), (\mu, z)\}, & \tilde{x}_8 &= \{(\lambda, y), (\mu, x)\}, \\ \tilde{x}_3 &= \{(\lambda, y), (\mu, z)\}, & \tilde{x}_6 &= \{(\lambda, z), (\mu, x)\}, & \tilde{x}_9 &= \{(\lambda, z), (\mu, y)\}. \end{aligned}$$

olmak üzere $SE(\tilde{U}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_9\}$, $SE(G) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_8\}$ ve $SE(H) = \{\tilde{x}_2, \tilde{x}_9\}$ olur.

Böylece G ve H kümelerinin elemanter esnek birleşimi;

$$\begin{aligned} G \uplus H &= SS(SE(G) \cup SE(H)) \\ &= SS(\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_8\} \cup \{\tilde{x}_2, \tilde{x}_9\}) \\ &= SS(\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_8, \tilde{x}_9\}) \\ &= \{(\lambda, \{x, y, z\}), (\mu, \{x, y, z\})\} \end{aligned}$$

olur. G ve H esnek kümelerinin elemanter esnek kesişimi;

$$\begin{aligned} G \cap H &= SS(SE(G) \cap SE(H)) \\ &= SS(\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_8\} \cap \{\tilde{x}_2, \tilde{x}_9\}) \\ &= SS(\{\tilde{x}_2\}) = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{y\})\} \end{aligned}$$

olur. G kümesinin elemanter esnek tümleyeni;

$$\begin{aligned} G^c &= SS(SE(G^c)) \\ &= SS\left(SE\left(\{(\lambda, \{y\}), (\mu, \{x, z\})\}\right)\right) \\ &= SS(\{\tilde{x}_3, \tilde{x}_8\}) = \{(\lambda, \{y\}), (\mu, \{x, z\})\}. \end{aligned}$$

olur. G ve H kümelerinin elemanter esnek farkı;

$$\begin{aligned} G \setminus H &= SS(SE(G \setminus H)) \\ &= SS\left(SE\left(\{(\lambda, \{z\}), (\mu, \emptyset)\}\right)\right) \\ &= SS(\emptyset) = \Phi \end{aligned}$$

olur.

Önerme 2.3.13. $G, H \in S(\tilde{U})$ iki esnek küme olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1. $G \uplus H = G \cup H$,

2. $G \cap H^c = \Phi$,

3. Her $i \in I$ için $G_i = SS(\mathfrak{B}_i)$ ise $\bigcup_{i \in I} G_i = SS(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i)$,

4. $G \cap H \subseteq G \tilde{\cap} H$,

5. $G^c \subseteq G^c$,

6. $G \setminus H \subseteq G \tilde{\setminus} H$,

7. $G \cap G^c \subseteq \tilde{U}$,

8. Her $i \in I$ için $G_i = SS(\mathfrak{B}_i)$ ise $\bigcap_{i \in I} G_i \subseteq SS(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i)$.

Uyarı 2.3.14. Herhangi $G, H \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri için $G \cap H = \Phi$ olması $G \subseteq H^c$ ve $H \subseteq G^c$ olmasını gerektirmez. Fakat $G \cap H = \Phi$ ve $G \tilde{\cap} H \in S(\tilde{U})$ ise $G \subseteq H^c$ ve $H \subseteq G^c$ olur.

Önerme 2.3.15. Herhangi $G, H \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

1. $SE(G \cap H) = SE(G) \cap SE(H)$,
2. $SE(G \cup H) \supset SE(G) \cup SE(H)$,
3. $(G \cup H) \cup W \subseteq (G \cup W) \cap (H \cup W)$,
4. $(G \cup H) \cup W \subseteq (G \cap W) \cup (H \cap W)$.

Önerme 2.3.16. Elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemleri aşağıdaki koşullarla dağılma özelliğine sahiptirler. $G, H, W \in S(\tilde{U})$ olmak üzere;

1. $G \tilde{\cap} H \in S(\tilde{U})$ ise $(G \cap H) \cup W = (G \cup W) \cap (H \cup W)$,
2. $G \tilde{\cap} H \in S(\tilde{U})$ ve $H \tilde{\cap} W \in S(\tilde{U})$ ise $(G \cup H) \cap W = (G \cap W) \cup (H \cap W)$ olur.

Önerme 2.3.17. Herhangi $F, G \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

1. $G^c \cap H^c \neq \Phi$ ise $(G \cup H)^c = G^c \cap H^c$,
2. $(G \cap H)^c \neq \Phi$ ise $(G \cap H)^c = G^c \cup H^c$,
3. $G^c \cap H^c \neq \Phi$, $G^c \neq \Phi$ ve $H^c \neq \Phi$ ise $(G \cup H)^c = G^c \cap H^c$ olur.

Uyarı 2.3.18. Yukarıdaki verilen önermelerde görüldüğü gibi elemanter işlemler dağılma özelliğini ve De Morgan kurallarını genelde sağlamaz. Eğer verilen esnek kümelerin esnek kesişimleri, esnek tümleyenleri ve esnek tümleyenlerinin esnek kesişimleri $S(\tilde{U})$ sınıfına ait ise dağılma özelliği ve De Morgan kuralları elemanter işlemler için de sağlanır.

2.4. Bulanık Esnek Küme ve Bulanık Esnek Kümelerdeki İşlemler

Tanım 2.4.1. U evrensel küme, P parametreler kümesi olsun ve $g : P \rightarrow F(U)$ olsun. (g, P) ikilisine bulanık esnek küme denir. P parametre kümesi ile U üzerindeki tüm bulanık esnek kümeleri $FS_P(U)$ ile ya da kısaca $FS(U)$ ile gösterilir.

Bulanık esnek kümelerin özel bir türü olan bulanık esnek nokta ρ_x^λ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$x \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ değeri için $\rho_x^\lambda = (g, P) \in FS(U)$ olacak şekilde her $\alpha \in P$ için

$$\mu_{g(\alpha)}(u) = \begin{cases} \lambda, & u = x \\ 0, & u \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, bir bulanık esnek küme $(g, P) \in FS(U)$ için, ρ_x^λ , her $\alpha \in P$ için $\lambda \leq \mu_{g(\alpha)}(u)$ şartını sağlıyorsa bu bulanık esnek kümeye ait bir bulanık esnek nokta olur.

Örnek 2.4.2. $P = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $U = \{u, v, w\}$ olsun.

Bu durumda

$$(g, P) = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.7}, v^1, w^{0.3}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.4}, w^{0.5}\} \right), \left(\gamma, \{u^{0.8}, v^{0.2}, w^{0.9}\} \right) \right\}$$

bir bulanık esnek küme örneğidir.

$$\rho_\beta^{0.4} = \left\{ \left(\beta, u^{0.4} \right) \right\} \text{ noktası için } \lambda = 0.4 \text{ ve } \mu_{g(\beta)}(u) = 0.4 \text{ olduğundan } \lambda \leq \mu_{g(\beta)}(u)$$

koşulu sağlanır. Dolayısıyla $\rho_\beta^{0.4}$ bulanık esnek noktası (g, P) bulanık esnek kümesine aittir.

$$\rho_\beta^{0.6} = \left\{ \left(\beta, u^{0.6} \right) \right\} \text{ noktası için } \lambda = 0.6 \text{ ve } \mu_{g(\beta)}(u) = 0.4 \text{ } \lambda \leq \mu_{g(\beta)}(u) \text{ koşulu sağlanmaz.}$$

Bu nedenle $\rho_\beta^{0.6}$ bulanık esnek noktası (g, P) bulanık esnek kümesine ait değildir.

Tanım 2.4.3. Her $\alpha \in P$ için $g(\alpha) = \emptyset$ olacak şekilde U üzerinde tanımlı bulanık esnek kümeye (g, P) boş bulanık esnek küme denir ve $\tilde{\Phi}$ ile gösterilir.

Her $\alpha \in P$ için $g(\alpha) = U$ olacak şekilde U üzerinde tanımlı bulanık esnek kümeye (g, P) mutlak (evrensel) bulanık esnek küme denir ve $\tilde{U}$ ile gösterilir.

Bu kısımdan sonra kısalık adına bir bulanık esnek küme için (g, P) yerine sadece g kullanılacaktır.

Tanım 2.4.4. $g, h \in FS(U)$ olsun. $\forall \alpha \in P$,

1. $\mu_g(\alpha) \subseteq \mu_h(\alpha)$ ise g bulanık esnek kümesine h 'nin bulanık esnek alt kümesi denir ve $g \subseteq h$ ile gösterilir.
2. $\mu_g(\alpha) = \mu_h(\alpha)$ ise g ve h bulanık esnek kümelerine eşit küme denir ve $g = h$ ile gösterilir.
3. $\mu_{g \cup h}(\alpha) = \mu_g(\alpha) \cup \mu_h(\alpha)$ şeklinde tanımlanan bulanık esnek kümeye g ve h 'nin bulanık esnek birleşimi denir ve $g \cup h$ ile gösterilir.
4. $\mu_{g \cap h}(\alpha) = \mu_g(\alpha) \cap \mu_h(\alpha)$ şeklinde tanımlanan bulanık esnek kümeye g ve h 'nin bulanık esnek kesişimi denir ve $g \cap h$ ile gösterilir.
5. $\mu_{g \setminus h}(\alpha) = \mu_g(\alpha) \setminus \mu_h(\alpha)$ şeklinde tanımlanan bulanık esnek kümeye g fark h denir ve $g \setminus h$ ile gösterilir.

Örnek 2.4.5. $P = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $U = \{u, v, w\}$ olsun.

$$g = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.7}, v^1, w^{0.3}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.6}, w^{0.5}\} \right), \left(\gamma, \{u^{0.8}, v^{0.1}, w^{0.9}\} \right) \right\},$$

$$h = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.8}, v^1, w^{0.3}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.6}, v^{0.6}, w^{0.7}\} \right), \left(\gamma, \{u^{0.9}, v^{0.3}, w^{0.9}\} \right) \right\}$$

bulanık esnek kümelerdir. Bu durumda $g \subseteq h$ olduğu açıktır.

Örnek 2.4.6. $P = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ parametreler kümesi ve $U = \{u, v, w\}$ kümesi verilsin.

$$g_1 = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.2}, v^{0.7}, w^{0.4}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.9}, v^{0.3}, w^{0.7}\} \right), \left(\gamma, \{u^{0.8}, v^{0.5}, w^{0.1}\} \right) \right\},$$

$$g_2 = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.6}, w^{0.4}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.2}, v^{0.3}, w^{0.4}\} \right), \left(\gamma, \{v^{0.6}\} \right) \right\} \text{ bulanık esnek kümeler olsun.}$$

$$g_1 \tilde{\vee} g_2 = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.6}, v^{0.7}, w^{0.4}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.9}, v^{0.3}, w^{0.7}\} \right), \left(\gamma, \{u^{0.8}, v^{0.6}, w^{0.1}\} \right) \right\},$$

$$g_1 \tilde{\wedge} g_2 = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.2}, w^{0.4}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.2}, v^{0.3}, w^{0.4}\} \right), \left(\gamma, \{v^{0.5}\} \right) \right\},$$

$$g_1^C = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.8}, v^{0.3}, w^{0.6}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.1}, v^{0.7}, w^{0.3}\} \right), \left(\gamma, \{u^{0.2}, v^{0.5}, w^{0.9}\} \right) \right\} \text{ olur.}$$

Tablo 2.1. g_1 ve g_2 bulanık esnek kümelerinin tablo halinde gösterimi

g_1	α	β	γ		g_2	α	β	γ
u	0.2	0.9	0.8		u	0.6	0.2	0
v	0.7	0.3	0.5		v	0	0.3	0.6
w	0.4	0.7	0.1		w	0.4	0.4	0

Tablo 2.2. g_1 ve g_2 bulanık esnek kümelerinin kesişim, bileşimlerinin ve tümleyeninin tablo halinde gösterimi

$g_1 \tilde{\vee} g$	α	β	γ		$g_1 \tilde{\wedge} g$	α	β	γ		g_1^C	α	β	γ
u	0.6	0.9	0.8		u	0.2	0.2	0		u	0.8	0.1	0.2
v	0.7	0.3	0.6		v	0	0.3	0.5		v	0.3	0.7	0.5
w	0.4	0.7	0.1		w	0.4	0.4	0		w	0.6	0.3	0.9

Önerme 2.4.8. Bulanık esnek kümelerde De Morgan kuralları sağlanır.

1. $(g \vee h)^C = g^C \wedge h^C.$

2. $(g \wedge h)^C = g^C \vee h^C.$

3.BULANIK ESNEK ELEMAN

3.1.Bulanık Esnek Eleman

Tanım 3.1.1. U evrensel küme, P parametreler kümesi olsun. Bulanık esnek bir eleman, her bir parametreyi U kümesi üzerinde bir bulanık nokta ile ilişkilendiren bir fonksiyondur. Yani $\tilde{x}: P \rightarrow FP(U)$ şeklinde tanımlanır. Bir $\tilde{x}$ bulanık esnek elemanın bir $g \in FS(U)$ bulanık esnek kümesine ait olması $\tilde{x} \in g$ ile gösterilir ve bu üyelik, her $\alpha \in P$ ve $u \in U$ için

$$\mu_{\tilde{x}(\alpha)}(u) \leq \mu_{g(\alpha)}(u)$$

ile tanımlanır. Yani her $u \in U$ için $\tilde{x}(\alpha)$ 'nın üyelik derecesinin $g(\alpha)$ 'daki karşılık gelen dereceden büyük olmaması gerekir.

$g \in FS(U)$ bulanık esnek kümesinin tüm bulanık esnek elemanların sınıfı $FSE(g)$ ile gösterilir.

Eğer, bir $\tilde{x} \in g$ bulanık esnek elemanı, her $\alpha \in P$ ve $u \in U$ için $\mu_{\tilde{x}(\alpha)}(u) = 1$ ve her $u' \in U \setminus \{u\}$ için $\mu_{\tilde{x}(\alpha)}(u') = 0$ sağlanıyorsa, bu eleman sabit bulanık esnek eleman olarak adlandırılır. $g \in FS(U)$ 'nin sabit bulanık esnek elemanların sınıfı c_g ile gösterilir. Sabit bulanık esnek elemanlar, tüm nitelikleri en yüksek düzeyde karşılayan, en yetkin, en uygun elemanlar olarak düşünülebilir.

Örnek 3.1.2. $P = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $U = \{u, v, w\}$ olsun.

$$g_1 = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.1}, v^{0.7}, w^{0.5}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.8}, v^{0.2}, w^{0.6}\} \right), \left(\gamma, \{u^{0.9}, v^{0.8}, w^{0.1}\} \right) \right\}$$

bulanık esnek kümesinin bazı bulanık esnek elemanları ve bunların tablo halinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$\tilde{x}_1 = \left\{ \left(\alpha, v^{0.7} \right), \left(\beta, u^{0.5} \right), \left(\gamma, u^{0.2} \right) \right\},$$

$$\tilde{x}_2 = \left\{ \left(\alpha, u^{0.1} \right), \left(\beta, v^{0.2} \right), \left(\gamma, w^{0.1} \right) \right\},$$

$$\tilde{x}_3 = \left\{ \left(\alpha, w^{0.2} \right), \left(\beta, w^{0.3} \right), \left(\gamma, w^{0.1} \right) \right\}.$$

Tablo 3.1. $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ ve $\tilde{x}_3$ bulanık esnek elemanlarının tablo halinde gösterimi

$\tilde{x}_1$	α	β	γ		$\tilde{x}_2$	α	β	γ		$\tilde{x}_3$	α	β	γ
u	0	0.5	0.1		u	0.1	0	0		u	0	0	0
v	0.7	0	0		v	0	0.2	0		v	0	0	0
w	0	0	0		w	0	0	0.1		w	0.2	0.3	0.1

Örnek 3.1.3. Bir teknoloji şirketinin bilişim destek taleplerini teknisyenlere dağıtmak istediğini varsayalım.

$$U = \{u = \text{teknisyen1}, v = \text{teknisyen2}, w = \text{teknisyen3}, x = \text{teknisyen4}\}$$

teknisyenler kümesi olsun.

$$P = \{\alpha = \text{Güvenlik açığı}, \beta = \text{Ağ sorunları}, \gamma = \text{Yazılım hataları}\}$$

destek talepleri kümesi olarak tanımlansın.

Her teknisyen, farklı taleplerde belirli bir dereceye kadar uzmanlaşmış olabilir ve bu bir bulanık esnek küme ile aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$g = \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.7}, v^1, w^{0.2}, x^{0.4}\} \right), \left(\beta, \{u^1, v^1, w^{0.3}, x^{0.5}\} \right), \left(\gamma, \{v^1, w^1\} \right) \right\}.$$

Burada her teknisyen için her destek talebindeki hizmet kapasitesinin derecesi $\mu_{g(\alpha)}(u)$ ile gösterilir.

g 'nin her bir bulanık esnek elemanı destek taleplerinin önceliklendirilme, iş yükü dengesi vb. gibi kriterlere göre teknisyenlere dağıtıldığı senaryoları temsil eder. Burada

$$\mathbf{c}_{\tilde{U}} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 = \{(\alpha, u^1), (\beta, u^1), (\gamma, u^1)\}, \tilde{x}_3 = \{(\alpha, w^1), (\beta, w^1), (\gamma, w^1)\}, \\ \tilde{x}_2 = \{(\alpha, v^1), (\beta, v^1), (\gamma, v^1)\}, \tilde{x}_4 = \{(\alpha, x^1), (\beta, x^1), (\gamma, x^1)\} \end{array} \right\},$$

$$\mathbf{c}_g = \{ \tilde{x}_2 = \{(\alpha, v^1), (\beta, v^1), (\gamma, v^1)\} \}$$

bulanık esnek eleman sınıfları destek taleplerinin hepsine en üst düzeyde kapasite ile aynı teknisyenin görevlendirildiği senaryoları temsil etmektedir. g 'nin bazı bulanık esnek elemanları ve bu elemanların tablo biçiminde gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$\tilde{x}_5 = \{(\alpha, v^{0.6}), (\beta, u^{0.3}), (\gamma, w^{0.1})\},$$

$$\tilde{x}_6 = \{(\alpha, u^{0.3}), (\beta, x^{0.5}), (\gamma, v^{0.2})\},$$

$$\tilde{x}_7 = \{(\alpha, x^{0.2}), (\beta, w^{0.2}), (\gamma, w^{0.6})\}.$$

Tablo 3.2. g 'nin tablo halinde gösterimi

g	α	β	γ
u	0.7	1	0
v	1	1	1
w	0.2	0.3	1
x	0.4	0.5	0

Tablo 3.3. $\tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7$ bulanık esnek elemanlarının tablo gösterimi

$\tilde{x}_5$	α	β	γ		$\tilde{x}_6$	α	β	γ		$\tilde{x}_7$	α	β	γ
u	0	0.3	0		u	0.3	0	0		u	0	0	0
v	0.6	0	0		v	0	0	0.2		v	0	0	0
w	0	0	0.1		w	0	0	0		w	0	0.2	0.6
x	0	0	0		x	0	0.5	0		x	0.2	0	0

Tanım 3.1.4. $b, \tilde{U}$ 'nın bulanık esnek elemanlarının bir sınıfı olsun. b bulanık esnek elemanlar sınıfı tarafından üretilen bir bulanık esnek küme $FSS(b)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$g = FSS(b) = \left\{ (\alpha, g(\alpha)) : \forall \alpha \in P, g(\alpha) = \bigvee_{\tilde{x} \in b} \tilde{x}(\alpha) \right\}.$$

Örnek 3.1.5. Örnek 3.1.3.'den, $b = \{\tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7\}$ kümesinin $\tilde{U}$ 'nun bulanık esnek elemanlarının bir sınıfı olduğunu varsayalım. O zaman b tarafından üretilen bulanık esnek küme şu şekilde elde edilir:

$$h = FSS(b) = \left\{ (\alpha, \{u^{0.3}, v^{0.6}, x^{0.2}\}), (\beta, \{u^{0.3}, w^{0.2}, x^{0.5}\}), (\gamma, \{v^{0.2}, w^{0.6}\}) \right\}.$$

Tablo 3.4. b tarafından üretilen h bulanık esnek kümesinin tablo halinde gösterimi

h	α	β	γ
u	0.3	0.3	0
v	0.6	0	0.2
w	0	0.2	0.6
x	0.2	0.5	0

Örnek 3.1.3.'den $h \tilde{\subset} g$ olduğu açıktır. Ayrıca $b \subset FSE(FSS(b))$ 'dir. Yani b ve $FSE(FSS(b))$ 'nin aynı olmadığına dikkat ediniz.

Tanım 3.1.6. $g, h \in FS(U)$ iki bulanık esnek küme olsun. Bulanık esnek kümeler,

$$g \sqcup h = FSS(FSE(g) \cup FSE(h))$$

ve

$$g \sqcap h = FSS(FSE(g) \cap FSE(h))$$

sırasıyla g ve h 'nin ξ -birleşimi ve ξ -kesişimi olarak adlandırılır. Ayrıca g 'nin ξ -tümleyeni

$$g^c = FSS(FSE(g)^c)$$
 'dir.

Örnek 3.1.7. Örnek 2.4.6.'dan $g_3 = \left\{ \left(\alpha, \{v^{0.4}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.4}, v^{0.1}, w^{0.5}\} \right), \left(\gamma, U \right) \right\}$ kümesinin $FS(U)$ 'da bulanık esnek küme olduğunu varsayalım.

$$g_1 \sqcup g_2 = g_1 \tilde{\vee} g_2$$

$$= \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.5}, v^{0.7}, w^{0.5}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.8}, v^{0.2}, w^{0.6}\} \right), \left(\gamma, \{u^{0.9}, v^{0.8}, w^{0.1}\} \right) \right\},$$

$$g_1 \sqcap g_2 = g_1 \tilde{\wedge} g_2$$

$$= \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.1}, w^{0.5}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.1}, v^{0.2}, w^{0.3}\} \right), \left(\gamma, v^{0.5} \right) \right\},$$

$$g_1^c = g_1^c$$

$$= \left\{ \left(\alpha, \{u^{0.9}, v^{0.3}, w^{0.5}\} \right), \left(\beta, \{u^{0.2}, v^{0.8}, w^{0.4}\} \right), \left(\gamma, u^{0.1}, v^{0.2}, w^{0.9} \right) \right\}.$$

Ancak ,

$$g_2 \sqcap g_3 = \tilde{\Phi},$$

$$g_2 \tilde{\wedge} g_3 = \left\{ \left(\alpha, \emptyset \right), \left(\beta, \{u^{0.1}, v^{0.1}, w^{0.3}\} \right), \left(\gamma, \{v^{0.5}\} \right) \right\} \text{ ve}$$

$$g_3^c = \tilde{\Phi},$$

$$g_3^c = \left\{ \left(\alpha, \{u^1, v^{0.6}, w^1\} \right), \left(\beta, \{u^{0.6}, v^{0.9}, w^{0.5}\} \right), \left(\gamma, \emptyset \right) \right\}.$$

Yani;

$$g_2 \sqcap g_3 \neq g_2 \tilde{\wedge} g_3 \text{ ve } g_3^c \neq g_3^c \text{ 'dir.}$$

Uyarı 3.1.8. g ve h 'nin ξ -birleşimi Tanım 3.1.7.'deki bulanık esnek kümelerin birleşimi tanımı ile aynıdır. g ve h 'nin ξ -kesişimi, her $\alpha \in P$ ve $u \in U$ için $\mu_{g(\alpha)}(u) \neq 0$ ve $\mu_{h(\alpha)}(u) \neq 0$ veya $\mu_{g(\alpha)}(u) = 0$ ve $\mu_{h(\alpha)}(u) = 0$ ise Tanım 3.1.7.'deki bulanık esnek kümelerin kesişim tanımı ile aynıdır. Ancak en az bir $\alpha \in P$ parametresi ve her $u \in U$ için $\mu_{g(\alpha)}(u) \neq 0$ ve $\mu_{h(\alpha)}(u) = 0$ veya tam tersi ise o zaman bu tanımlar farklıdır. g 'nin ξ -tümleyeni her $\alpha \in P$ ve $u \in U$ için $\mu_{g(\alpha)}(u) \neq 1$ ise Tanım 3.1.7.'deki bulanık esnek kümelerin tümleyen tanımı ile aynıdır.

Önerme 3.1.9. $g, h \in FS(\tilde{U})$ olsun.

1. $g \vee h = g \sqcup h$.
2. $g \sqcap h \tilde{\subseteq} g \tilde{\wedge} h$ ve eğer $g \tilde{\wedge} h \in FS(\tilde{U})$, o zaman $g \sqcap h = g \tilde{\wedge} h$.
3. $g^c \tilde{\subseteq} g^C$ ve eğer $g^C \in FS(\tilde{U})$ ise $g^c = g^C$.
4. $g \sqcup g^c \tilde{\subseteq} \tilde{U}$ ve eğer $g^C \in FS(\tilde{U})$ ise $g \sqcup g^c = \tilde{U}$.
5. $g \sqcap g^c = \tilde{\Phi}$.
6. $(g \sqcup h)^c \tilde{\supseteq} g^C \sqcap h^C$ ve $(g \sqcap h)^c \tilde{\supseteq} g^C \sqcup h^C$.
7. Eğer $g \wedge h$, $g^C \wedge h^C$, g^C , $h^C \in FS(\tilde{U})$ ise $(g \sqcup h)^c = g^c \sqcap h^c$ ve $(g \sqcap h)^c = g^c \sqcup h^c$.
8. Eğer $g_i = FSS(b_i)$, $i \in I$ ise o zaman $\sqcup_{i \in I} g_i = FSS(\cup_{i \in I} b_i)$ ve $\sqcap_{i \in I} g_i \tilde{\supseteq} FSS(\cap_{i \in I} b_i)$.

İspat : 4,5,6 ve 8 numaralı ifadelerin doğruluğu 1,2 ve 3 numaralı ifadelerden elde edilir.

$$1. (g \sqcup h)(\alpha) = \bigvee_{\tilde{x} \in FSE(g) \cup FSE(h)} \tilde{x}(\alpha) = \bigvee_{\tilde{x} \in FSE(g)} \tilde{x}(\alpha) \vee \bigvee_{\tilde{x} \in FSE(h)} \tilde{x}(\alpha) = g(\alpha) \vee h(\alpha).$$

2. Eğer $g(\alpha) \wedge h(\alpha) = \emptyset$ her $\alpha \in P$ için sağlanıyorsa, $g \tilde{\wedge} h \in FS(\tilde{U})$ olur ve $g \tilde{\wedge} h = g \sqcup h$ eşitliği geçerlidir. Eğer bazı $\alpha \in P$ için, $g(\alpha) \wedge h(\alpha) \neq \emptyset$ ve diğerlerinde ise $g(\alpha) \wedge h(\alpha) = \emptyset$ oluyorsa bu durumda, $g \tilde{\wedge} h \neq \tilde{\Phi}$ ve $g \tilde{\wedge} h \notin FS(\tilde{U})$ iken $g \sqcap h = \tilde{\Phi}$ olur. Dolayısıyla $g \sqcap h \tilde{\subseteq} g \tilde{\wedge} h$ elde edilir.

3. Eğer $g^C(\alpha) = \emptyset$ veya $g^C(\alpha) \neq \emptyset$ her $\alpha \in P$ için sağlanıyorsa, $g^C \in FS(\tilde{U})$ olur ve dolayısıyla $g^c = g^C$ eşitliği geçerlidir. Eğer bazı $\alpha \in P$ için $g^C \neq \emptyset$ ve diğerlerinde $g^C = \emptyset$ ise, bu durumda $g^C \neq \Phi$ ve $g^C \notin FS(\tilde{U})$ iken $g^c = \Phi$ olur. Öyleyse, $g^c \tilde{\subseteq} g^C$ sağlanır.

$$\begin{aligned} 7. (g \sqcup h)^c &= FSS \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{U} : \tilde{x} \tilde{\in} (g \sqcup h)^c \right\} \\ &= FSS \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{U} : \tilde{x} \tilde{\in} (g \tilde{\vee} h)^c \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= FSS \left\{ \tilde{x} \in \tilde{U} : \tilde{x} \in g^c \wedge h^c \right\} \\
&= FSS \left\{ \tilde{x} \in \tilde{U} : \tilde{x} \in g^c \wedge \tilde{x} \in h^c \right\} \\
&= g^c \sqcap h^c .
\end{aligned}$$

3.2. Karar Verme Uygulaması

Bu kısımda bulanık esnek elemanlar üzerinden bir karar verme uygulaması verilerek tezde sunulan yaklaşımın uygulanabilirliği adına bir örnek sunulmuştur. Örnek 3.1.3. bağlamında, yetenek ve iş yükü arasında denge kurmak amacıyla teknisyenler ve destek talepleri konusunda bir karar verme yöntemi önerilmektedir.

Buna matematiksel bir çerçeve sağlamak adına aşağıdaki algoritma verilmiştir:

Teknisyen Atamalarını Belirleyen Algoritma:

Adım 1. Teknisyen kümesini $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, destek taleplerinin kümesini $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ ve her talebin önceliğini belirten parametrelerin ağırlığını da $\omega_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$ ile göster.

Adım 2. Teknisyenlerin destek taleplerine olan yeteneklerini/kapasitelerini temsil etmek adına bir $g \in FS_p(U)$ esnek küme tanımla.

Adım 3. Daha yüksek uzmanlığa sahip teknisyenlere öncelik vermek için yetenek uzmanlığı eşiği T , uzmanlaşma teşviki için uzmanlık bonusu B , iş yükü ve yetenek dengelemesini kontrol etmek için iş yükü denge faktörü ξ çarpanı belirle.

Adım 4. $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k\} \subset FSE(g)$ bulanık esnek elemanlarını belirle. Buradaki her bir bulanık esnek eleman bu teknisyenlerin destek taleplerine atamasını temsil etmiş olur.

Adım 5. Ağırlıklı yetenek skorunu her bir $\tilde{x}_k$ için şu şekilde tanımla:

$$WCS_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mu_{\tilde{x}_k(\alpha_i)}(u_j) \cdot \mu_{g(\alpha_i)}(u_j) \cdot \omega_i \cdot (1 + \delta_{ij}),$$

Adım 6. Her bi parametre için ağırlıklı iş yüklerini aşağıdaki şekilde belirle:

$$WWI_k = \max_{j \in J} L_{k_j} - \min_{j \in J} L_{k_j},$$

$$L_{k_j} = \sum_{i=1}^m \mu_{\tilde{x}_k(\alpha_i)}(u_j) \cdot \omega_i.$$

Adım 7. Her bir $\tilde{x}_k$ için ağırlıklı yetenek puanı ile ağırlıklı iş yükü eşliğini çarpıp çıkararak aşağıdaki şekilde sıralama için bir skor elde et.

$$S_k = WCS_k - \xi \cdot WWI_k.$$

Adım 8. Son olarak skorların sıralamasından en yüksek olan senaryoyu seç.

Bu algoritma, her bir teknisyenin yetkinliğini ve uygunluğunu değerlendirirken, destek taleplerinin aciliyetini ve karmaşıklığını göz önünde bulundurarak kaynakların daha verimli tahsis edilmesini ve genel hizmet kalitesinin artırılmasını sağlar. Bu yöntemin uygulanmasıyla teknisyen performansı optimize edilebilir ve destek taleplerine verilen yanıt süreleri iyileştirilebilir.

Örnek 3.1.3. ‘den $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_2, \gamma = \alpha_3$ ve $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w, u_4 = x$ olsun. Uzmanlaşma eşiği $T = 0.65$, uzmanlık bonusu $B = 0.3$ ve iş yükü denge faktörü $\xi = 0.4$ olarak alınsın. Şirketin destek taleplerine verilen ağırlıkları $\omega_1 = 0.7, \omega_2 = 0.5, \omega_3 = 0.3$ olsun.

$\tilde{x}_6$ için yapılan örnek bir hesaplama:

$$L_{6_1} = \mu_{\tilde{x}_6(\alpha_1)}(u_1) \cdot \omega_1 = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21,$$

$$L_{6_3} = 0,$$

$$L_{6_2} = \mu_{\tilde{x}_6(\alpha_3)}(u_2) \cdot \omega_3 = 0.2 \cdot 0.3 = 0.6,$$

$$L_{6_4} = \mu_{\tilde{x}_6(\alpha_2)}(u_4) \cdot \omega_2 = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25.$$

Buradan $WWI_6 = 0.25 - 0 = 0.25$ olur. Daha sonra uzmanlaşma eşiği kontrol edilir ve 0.65’den büyük ise yetenek bonusu eklenir.

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{g(\alpha_1)}(u_1) = 0.7 \geq 0.65, \\ \mu_{g(\alpha_2)}(u_2) = 0.5 < 0.65, \\ \mu_{g(\alpha_3)}(u_3) = 1 \geq 0.65. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \delta_{11} = 0.3, \\ \delta_{24} = 0, \\ \delta_{32} = 0.3. \end{array}$$

Sırasıyla karşılık gelen elemanlar hesaplanır.

$$\mu_{g(\alpha_1)}(u_1) \cdot \mu_{g(\alpha_3)}(u_1) \cdot \omega_1 \cdot (1 + \delta_{11}) = 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 1.3 = 0.1911,$$

$$\mu_{g(\alpha_2)}(u_4) \cdot \mu_{g(\alpha_2)}(u_4) \cdot \omega_2 \cdot (1 + \delta_{24}) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 = 0.125,$$

$$\mu_{g(\alpha_3)}(u_2) \cdot \mu_{g(\alpha_3)}(u_2) \cdot \omega_3 \cdot (1 + \delta_{32}) = 0.2 \cdot 1 \cdot 0.3 \cdot 1.3 = 0.078.$$

Buradan $WCS_6 = 0.3941$ olarak bulunur.

$\tilde{x}_6$ 'nın skoru $S_6 = WCS_6 - \xi.WWI_6 = 0.3941 - 0.4.0.25 = 0.2941$ olarak hesaplanır.

Benzer şekilde $S_5 = 0.6120$ ve $S_7 = 0.2080$ olarak hesaplanır. Sonuç olarak $\tilde{x}_5$ en büyük skora sahip olduğu için şirketin belirlediği kriterlere göre en uygun senaryo olur. Bu şekilde karar verme işlemi bulanık esnek elemanlar yardımıyla yapılmış olur.



KAYNAKÇA

- Aktaş, H., & Çağman, N.** (2007). Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177(13), 2726-2735.
- Alcantud, J. C. R.** (2022). The relationship between fuzzy soft and soft topologies. *Int. J. Fuzzy Syst.*, 24, 1653-1668.
- Altıntaş, İ., Taşköprü, K., & Esengul kyzy, P.** (2022). Soft partial metric spaces. *Soft Comput.*, 26, 8997-9010.
- Costarelli, D., & Sambucini, A. R.** (2024). A comparison among a fuzzy algorithm for image rescaling with other methods of digital image processing. *Constr. Math. Anal.*, 7 (2), 45-68.
- Atanassov, K. T.** (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87-96.
- Aygün, E., & Kamacı, H.** (2019). Some generalized operations in soft set theory and their role in similarity and decision making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(6), 6537-6547.
- Çağman, N., & Enginoğlu, S.** (2010). Soft matrix theory and its decision making. *Computers & Mathematics with Application*, 59(10), 3308-3314.
- Dalkılıç, O.** (2021). Relations on neutrosophic soft set and their application in decision making. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 67, 257-273.
- Das, S., & Samanta, S. K.** (2012). Soft real sets, soft real numbers and their properties. *J. Fuzzy Math.*, 20 (3), 551-576.
- Das, S., & Samanta, S. K.** (2013). On soft metric spaces. *J. Fuzzy Math.*, 21 (3), 707-734.
- Demir, İ.** (2021). Some soft topological properties and fixed soft element results in soft complex valued metric spaces. *Turkish J. Math.*, 45 (2), 971-987.
- Güler, A. C., Yıldırım, E. D., & Özbakır, O. B.** (2016). A fixed point theorem on soft G-metric spaces. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9(3), 885-894.
- Jun, Y. B., & Park, C. H.** (2008). Applications of soft sets in ideal theory of bck/bci-algebras. *Information Sciences: an International Journal*, 178(11), 2466-2475.
- Kamacı, H.** (2021). Linguistic single-valued neutrosophic soft sets with applications in game theory. *International Journal of Intelligent Systems*, 36(8), 3917-3960.
- Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R.** (2001). Fuzzy soft sets. *J. Fuzzy Math.*, 9 (3), 589-602.

- Majumdar, P., & Samanta, S.** (2010). Generalised fuzzy soft sets. *Comput. Math. Appl.*, 59 (4), 1425-1432.
- Mockor, J.** (2020). Powerset theory of fuzzy soft sets. *Int. J. Fuzzy Log. Intell. Syst.*, 20 (4), 298-315.
- Molodtsov, D.** (1999). Soft set theory—first results. *Comput. Math. Appl.*, 37 (4), 19-31.
- Romaguera S.** (2024). The relationship between modular metrics and fuzzy metrics revisited. *Constr. Math. Anal.*, 7(3), 90-97.
- Ross, T. J.** (2016). *Fuzzy Logic with Engineering Applications, 4th Edition*. Wiley, United Kingdom.
- Sezgin A., & Atagün A. O.** (2011). On operations of soft sets. *Computers & Mathematics with Application*, 61(5), 1457-1467.
- Şimşekler, T., & Yüksel, S.,** (2013). Fuzzy soft topological spaces. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 5(1), 87-96.
- Taşköprü, K.** (2017). *Elemanter esnek topolojik uzaylara giriş*. (Yayınlanmış Doktora Tezi). Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- Taşköprü, K., & Altıntaş İ.** (2021). A new approach for soft topology and soft function via soft element. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 44(9), 7556-7570.
- Taşköprü, K., & Karaköse, E.** (2023). A soft set approach to relations and its application to decision making. *Math. Sci. Appl. E-Notes*, 11(1), 1-13.
- Taşköprü, K.** (2023). Soft order topology and graph comparison based on soft order. *AIMS Math.*, 8 (4), 9761-9781.
- Varol, B. P., Aygünoğlu, A., & Aygün, H.** (2014). Neighborhood structures of fuzzy soft topological spaces. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 27(4), 2127-2135.
- Zadeh, L. A.** (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control*, 8(3), 338-353.
- Zimmermann, H.-J.** (2011). *Fuzzy Set Theory—and Its Applications*. Springer, New York.