

**ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK GRAF İŞLEMLERİ

Elif GÖKNER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÇANKIRI
2023**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Elif GÖKNER tarafından hazırlanan “**Bulanık Graf İşlemleri**” adlı tez çalışması 26/05/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Faruk KARAASLAN

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN
Matematik Anabilim Dalı
Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Faruk KARAASLAN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hamit ALYAR

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Bulanık Graf İşlemleri**” konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan “Bilimsel İntihal Tespit Programı”yla tarandığını, “intihal içermediğini” beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (26/05/2023).

Elif GÖKNER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BULANIK GRAF İŞLEMLERİ

Elif GÖKNER

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Faruk KARAASLAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür incelemesi, tezin motivasyonu ve katkısı hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde graf, bulanık kümeler ve bulanık bağıntılarla ilgili temel kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, bulanık graflarla ilgili temel kavramlar ve bulanık graf işlemleri sunulmuştur. Ayrıca bulanık graf işlemleri ile ilgili teoremler verilmiş ve örneklerle daha anlaşılır kılınmıştır. Beşinci bölümde tezin önemi ve sonuçları hakkında bilgiler sunulmuştur.

2023, 64 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER: Graf, Bulanık küme, Bulanık bağıntı, Bulanık graf, Bulanık graf işlemleri,

ABSTRACT

Master of Science Thesis

FUZZY GRAPH OPERATIONS

Elif GÖKNER

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Faruk KARAASLAN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, information about literature review, motivation and contribution of the thesis is given. In the second part, basic concepts about graph, fuzzy sets and fuzzy relations are presented. In the third chapter, basic concepts of fuzzy graphs and fuzzy graph operations are presented. In addition, theorems about fuzzy graph operations are given and made more understandable with examples. In the fifth chapter, information about the importance and results of the thesis is presented.

2023, 64 pages

Keywords: Graph, Fuzzy set, Fuzzy relation, Fuzzy graph, Fuzzy graph operations,

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında sabrı, anlayışı ve rehberliği için tez danışmanım Doç. Dr. Faruk KARAASLAN'a teşekkür ederim. Sayın Doç. Dr. Faruk KARAASLAN'ın, bu zorlu sürecin her aşamasında yanımda olduğunu ve ortaya çıkan bu çalışmanın en büyük destekçisi olduğunu da belirtmek isterim.

Canım Annem Aysel GÖKNER'e tüm eğitim sürecim boyunca ve her anımda yüce gönlü, sonsuz sevgisi, büyük sabrı ve her şeyden önce varlığıyla bu yolda ilerlediğimi belirtip teşekkürlerimi iletiyorum. Tüm gücüyle arkamda durup her türlü zorluğu aşmamda en büyük destekçilerimden biri olan biricik babam Şahin GÖKNER'e, tez sürecimde de gösterdiği sevgi, inanç ve yardımları için teşekkür ediyorum. Anne ve babamın yanında hayatımın her noktasını konuşup fikir alabileceğim ve bu süreçte her an varlıklarını hissettiğim için sevgili ablam Hatice GÖKNER, kardeşlerim Şeyma Nur GÖKNER ve Şeyda GÖKNER'e teşekkürlerimi iletiyorum. Ailemin her bir bireyi tüm kalbi duygularıyla iyi ki varlar.

Sevgili ailem ve öğretmenlerim, varlığınız ve desteklerinizle bana kazandırdığınız güç için sonsuz teşekkürler.

Ben de bir öğretmen olarak öğrencilerimle birlikte çıktığım bilgiye ulaşma serüveninin hem bana hem de onlara kendi bakış açımızdan öğrenmeler yaşattığını ve edindiğim bu tecrübelerin ışığında mutlu, umutlu, değerli, şanslı, güçlü, dinamik, çalışkan hissettiğimi belirterek tüm öğrencilerime teşekkürlerimi iletiyorum. Bilgiye ulaşmanın verdiği hazla ortaya çıkan ürünüm olan bu tez çalışmasının tüm eğitim camiasına fayda sağlamasını temenni ediyorum.

Elif GÖKNER

Çankırı, Mayıs 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	6
2.1 Bulanık Kümeler.....	7
2.2 Bulanık Küme İşlemleri	9
3. BULANIK GRAFLAR.....	20
3.1 Kenarların ve Yolların Çeşitleri	28
4. BULANIK GRAF İŞLEMLERİ	33
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	60
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ.....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{G}$	Bulanık graf
$\mathcal{G}^*$	Bulanık grafın temel grafı
$\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$	Tam Bulanık Graf
$\mathcal{K}_{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2}$	Tam İki Parçalı Bulanık Graf
$dışm(a)$	a 'nın dış merkezliliği
$çap(\mathcal{G})$	$\mathcal{G}$ 'nin çapı
$yçap(\mathcal{G})$	$\mathcal{G}$ 'nin yarıçapı
P	$\mathcal{G}$ 'de yol
$\tilde{P}$	$\mathcal{G}$ 'de yolun kuvveti
$BAG_{\mathcal{G}}(a, b)$	a ve b noktaları arasındaki bağlantılılığın kuvveti
$\mu^{\times}(a, b)$	a ve b noktaları arasındaki bağlantılılığın kuvveti
$der_{\mathcal{G}}(a)$	a noktasının derecesi
$\delta(\mathcal{G})$	$\mathcal{G}$ 'nin minimum derecesi
$\Delta(\mathcal{G})$	$\mathcal{G}$ 'nin maximum derecesi
$\mathcal{M}(\mathcal{G})$	$\mathcal{G}$ grafının mertebesi
$\mathcal{B}(\mathcal{G})$	$\mathcal{G}$ grafının boyutu
$td_{\mathcal{G}}(a)$	$a \in A$ noktasının toplam derecesi
$\mathcal{G}^c$	$\mathcal{G}$ grafının tümleyeni
$\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ graflarının birleşimi
$der_{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''}(u)$	$\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$ 'da bir $u \in \mathcal{A}'$ 'nin derecesi
$\mathcal{G}' + \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ graflarının toplamı
$der_{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}(u)$	$\mathcal{G}' + \mathcal{G}''$ 'da bir $u \in \mathcal{A}'$ 'nin derecesi
$\mathcal{G}'[\mathcal{G}'']$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının bileşkesi
$der_{\mathcal{G}'[\mathcal{G}'']}(a_1, b_1)$	$(a_1, b_1) \in A$ olmak üzere (a_1, b_1) noktasının derecesi
$\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının doğrudan çarpımı
$\mathcal{G}' \bullet \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının yarı güçlü bulanık çarpımı,
$\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının güçlü çarpımı
$\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının kartezyen çarpımı
$der_{\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$	A 'daki (a_1, b_1) noktasının derecesi
$\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının tensör çarpımı
$der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$	$\mathcal{A}'$ 'daki (a_1, b_1) noktasının derecesi
$\mathcal{G}' \bullet_n \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının normal çarpımı
$\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının modüler çarpımı
$der_{\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$	A 'daki (a_1, b_1) noktasının derecesi
$\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''$	$\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının homomorfik çarpımı
$der_{\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$	A 'daki (a_1, b_1) noktasının derecesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Königsberg'in yedi köprü problemi.....	1
Şekil 1.2 Durum 1	2
Şekil 1.3 Durum 2	2
Şekil 1.4 Durum 3	2
Şekil 1.5 İstanbul Raylı Sistemler Ağ Haritası	3
Şekil 2.1 Graf Örneği	6
Şekil 2.2 $G = (A, B)$ grafi	7
Şekil 2.3 Hava sıcaklığının klasik küme ile gösterimi	8
Şekil 2.4 Hava sıcaklığının bulanık küme ile gösterimi	9
Şekil 2.5 Bulanık kümelerin birleşimi	10
Şekil 2.6 Bulanık kümelerin kesişimi	11
Şekil 2.7 V bulanık kümesinin tümleyeni	12
Şekil 3.1 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ bulanık grafi.....	20
Şekil 3.2 Bulanık Graf.....	21
Şekil 3.3.a $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ bulanık grafi	22
Şekil 3.3.b $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ bulanık grafinin kısmi bulanık alt grafi	22
Şekil 3.3.c $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ ' nın bir bulanık alt grafi	23
Şekil 3.4 Güçlü bulanık graf	23
Şekil 3.5 Tam bulanık graf.....	24
Şekil 3.6 İki parçalı bulanık graf.....	25
Şekil 3.7 Tam ikiparçalı bulanık graf.....	25
Şekil 3.8 Graf örneği	26
Şekil 3.9 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$	27
Şekil 3.10 $\mathcal{G} = A, \Omega, \delta$ grafi	29
Şekil 3.11 $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}_c$ bulanık grafları	32
Şekil 3.12 $\mathcal{G}$ bulanık grafinin tümleyeninin tümleyeni	32
Şekil 4.1 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ grafları.....	34
Şekil 4.2 $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$	34
Şekil 4.3 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ grafları	37
Şekil 4.4 $\mathcal{G}' + \mathcal{G}''$ grafi.....	38
Şekil 4.5 $\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''$ grafi.....	39
Şekil 4.6 $\mathcal{G}', \mathcal{G}''$ bulanık grafları doğrudan çarpımı	42
Şekil 4.7 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının yarı güçlü çarpımı	44
Şekil 4.8 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının güçlü çarpımı	46
Şekil 4.9 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ grafları	50
Şekil 4.10 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının tensör çarpımı	50
Şekil 4.11 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ grafları	52
Şekil 4.12 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının normal çarpımı	53
Şekil 4.13 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları	56

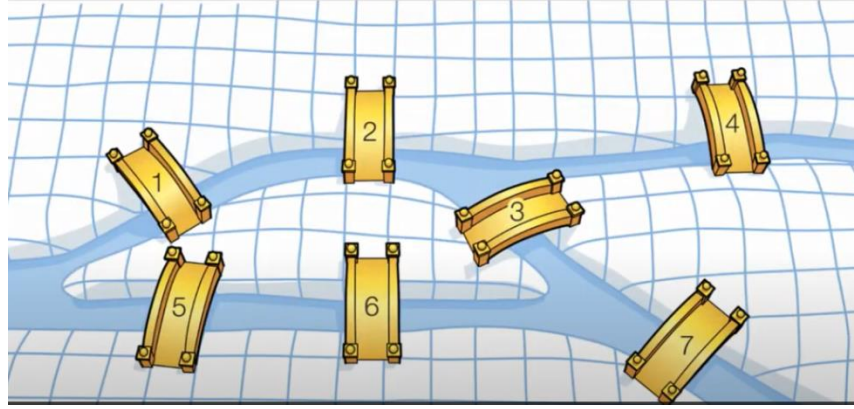
Şekil 4.14 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ 'nin modüler çarpımı	56
Şekil 4.15 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları	59
Şekil 4.16 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ graflarının homomorfik çarpımları	59



1. GİRİŞ

Graf Teorisi Königsberg'in yedi köprü problemi ile başlamıştır. İlk olarak köprü problemi yakından incelenerek graf teorisi diğer adı ile çizgi teorisinin ortaya çıkışı hakkında temel bilgiler verilecektir.

Rusya' da Pregel Nehri'nin kıyısında o zamanki adı ile Königsberg şehri dört bölümden oluşur ve bu bölümler birbirine 7 köprü ile bağlanmaktaydı. Şehir sakinlerinin aklında, köprülerin herbirinden bir defa geçerek hepsinden geçilip geçemeyeceği konusunda soru işareti oluşmuştur.

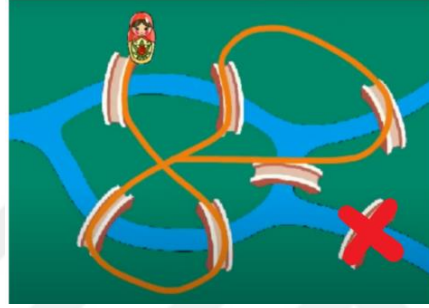


Şekil 1.1 Königsberg'in yedi köprü problemi

Şehirdeki İsveçli matematikçi Leonhard EULER'in dikkatini çeken bu problem, böyle bir yürüyüşün matematiksel olarak mümkün olamayacağının ispatlanmış ve bu problemin çözümünü "Solitua problematis ad geometriam situs pertinentis" başlıklı bir makale olarak yayınlamıştır. Böylece graf teorisinin temeli atılmıştır. Bu problemin çözümünün olmadığını gösteren bazı durumlar Şekil 1.2, Şekil 1.3 ve Şekil 1.4' te gösterilmiştir.



Şekil 1.2 Durum 1



Şekil 1.3 Durum 2

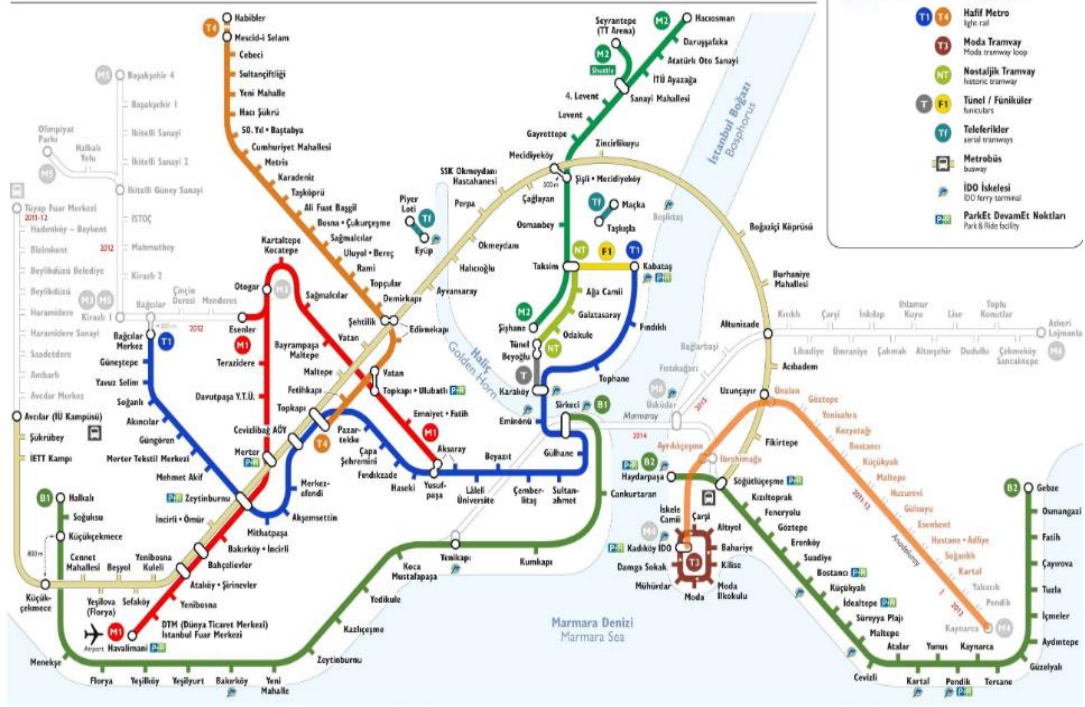


Şekil 1.4 Durum 3

Graf teorisi, nokta ve kenarları içeren birçok bilim alanındaki var olan gerçek problemleri modellemek için kullanılan matematiksel araçlardır. Noktalar arasındaki ilişkiyi veya kuralı göstermek için graf yapılarının kullanılması oldukça elverişli bir yöntem sunmaktadır.

Şekil 1.5'te gösterilen Tramvay duraklarının bağlı olduğu tramvay yolları graf yapısı için güzel bir örnektir.

İstanbul Raylı Sistemler Ağ Haritası Istanbul Rail Transit Network Map



Şekil 1.5 İstanbul Raylı Sistemler Ağ Haritası

Bulanık küme kavramı 1965 yılında Zadeh tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bir bulanık küme klasik kümelerin bir genellemesidir. Klasik kümelerde bir elemanın kümeye aitliği karakteristik fonksiyonla belirlenir. Karakteristik fonksiyon evrensel kümeden yalnızca 0 ve 1'i içeren bir kümeye tanımlanmış bir fonksiyondur. Bir elemanın evrensel kümenin bir A altkümesine aitliği belirlenirken, bu elemanın karakteristik fonksiyon altındaki görüntüsü 1 ise eleman A kümesine ait, eğer elemanın karakteristik fonksiyon altındaki görüntüsü 0 ise eleman A kümesine ait değildir denir. Karakteristik fonksiyonun değer kümesi, klasik önermelerde bir elemanın doğruluk değer kümesi ile ilişkilendirilir. Bir klasik kümede bir eleman kümeye ya aittir ya da ait değildir. Fakat bu yaklaşım günlük hayatta kullanılan birçok problem için geçerli bir durum değildir. Yani bir eleman bir kümeye biraz ait olabileceği gibi biraz da ait olmayabilir. Özellikle dilsel değişkenleri sıklıkla kullandığımız günlük dilde bu durumla karşılaşırız. Örneğin; “Bu araba biraz pahalı”, “ x öğrencisi matematik dersinde çok başarılı” gibi cümleler dilsel değişkenleri içeren ve klasik önerme olarak kabul edilmeyen ifadelerdir. İşte örnekteki ifadeleri önerme olarak kabul ederek ortaya atılan

küme yapısı bulanık küme olarak ifade edilir. Bulanık küme, karakteristik fonksiyonun daha genel bir hali olan ve evrensel kümeden $[0,1]$ kapalı aralığına tanımlanan üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Üyelik fonksiyonu sayesinde bir eleman bir kümeye 0.7 derece üye olabileceği gibi 0.1 derecede üye olabilir. Bu ise birçok problemin modellesine ve karar verme problemlerinin sonuçlarının daha doğru sonuçlar vermesini imkân sağlar.

Bir graf yapısı, yukarıda bahsedildiği üzere noktalardan ve bu noktalar arasındaki bağlantıları gösteren kenarlardan oluşan bir yapıdır. Bir klasik graf yapısında noktalara ve kenarlara genellikle sayısal değerler atanmaz. Atanması durumunda ise doğrudan sayı değerleri göz önüne alınarak hesaplamalar yapılır. Klasik kümelerin bulanık kümeler karşısında modellemedeki zayıflıkları klasik graflarda da karşımıza çıkmaktadır. Bu yüzden bulanık graf kavramına ihtiyaç duyulmuştur. Kaufman (1973) tarafından bulanık graf yapısı bir bulanık küme üzerinde tanımlı simetrik ve ikili bir bulanık bağıntı olarak ilk kez ortaya atılmıştır. Rosenfeld (1975) bulanık grafları bulanık bağıntılara dayanarak ele almıştır. Yeh ve Bang (1975) bulanık bağıntıların ve bulanık grafların kümeleme analizindeki uygulamalarını yapmıştır.

Bhattacharya (1987) bulanık graflar üzerine bazı açıklamalar ve notlar vermiştir. McAllister (1988) bulanık kesişim graflarının matris temsillerinden elde edilen teorik ve hesapsal sonuçları ele aldılar. Bir bulanık grafin matris temsili Chen (1990) tarafından verildi. Kóczy (1992) iletişim ağlarının optimizasyonu ve değerlendirilmesinde bulanık grafların bir uygulamasını yaptı. Mordeson and Nair (1996) bulanık grafların devirliliği üzerine çalışmışlardır. Mordeson and Nair (1998) bulanık grafların ve bulanık hipergrafların bazı özellikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Sunitha ve Viyajakumar (2002) bir grafin tümleyenini tanımlamışlardır. Bhutani and Battou (2003) M-güçlü bulanık grafların bazı yeni kavramları üzerine çalışmışlardır. Gani ve Radha (2008) bulanık grafların " $\wedge$ " bileşimin tanımladılar. Gani ve Radha (2008, 2009) düzenli bulanık graf, tam düzenli bulanık graf, bir noktanın derecesini ve tam derecesi kavramlarını ortaya atmışlardır. Mathew ve Sunitha (2009) bir bulanık graftaki kenarların çeşitleri üzerine çalışmışlardır. Samanta ve diğ. (2016) bulanık grafların kenarları ile ilgili bazı kısıtlamalara dikkat çekerek genelleştirilmiş bulanık graf yapısını

ortaya atmışlar ve bu grafların tamlığı ve düzenliliği üzerine çalışmışlardır. Samanta and Sarkar (2018) genelleştirilmiş bulanık graf ve genelleştirilmiş yönlü bulanık grafların graf yapılarını ve genelleştirilmiş bulanık grafların r -kesiti ve $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -kesitlerini tanımlamışlardır.

Bulanık graflardan yeni graflar elde etmenin yollarından birisi bulanık çarpım işlemleridir. 1994 yılında Mordeson ve Peng (1994) iki bulanık graf arasında kartezyen çarpım, bileşim ve birleşim işlemlerini tanımlamışlardır. Ramaswamy and Poornima (2009) bulanık grafların doğrudan çarpımını, Radha ve Arugunam (2015) bulanık graflar arasında sözlük çarpımını, Dogra (2015) bulanık graflar arasında modüler, tensör, normal ve homomorfik çarpımlarını, Havary and Horani (2016) bulanık grafların güçlü ve yarı-güçlü çarpımlarını tanıtmışlardır.

Biz bu tezde bulanık küme ve bağıntıların özelliklerini açıkladıktan sonra bulanık çarpım işlemlerini literatürdeki kaynaklar ışığında derleyip, örneklerle açıklayarak anlaşılır kılmayı amaçlamaktayız. Bu tez bulanık graf işlemlerini literatürde var olan çalışmalar ışığında detaylı olarak sunan Türkçe bir kaynak olması açısından önem arz etmektedir.

2. ÖN BİLGİLER

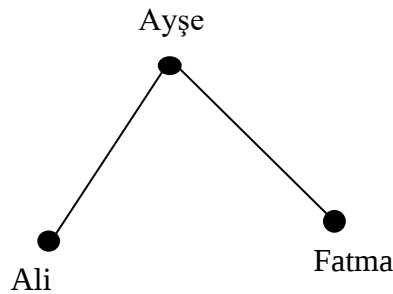
Bu bölümde graf, bulanık küme, bulanık küme işlemleri ve bulanık bağıntı kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 2.1 (Clark 1991) Bir graf, $G = (A, B)$ şeklinde iki kümeden oluşan bir matematiksel yapıdır. Burada $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ kümesinin elemanlarının herbirine nokta ve $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ kümesinin elemanlarının herbirine ise kenar denir. a_i ve a_j köşelerini birleştiren kenar b_k olmak üzere a_i ve a_j noktalarına kenarın bitiş noktaları denir ve (a_i, a_j) ya da $a_i a_j$ ile gösterilir. Bir kenarın (a_i, a_j) ya da $a_i a_j$ ile gösterilen bitiş noktalarına komşu noktalar denir.

Grafın tanımından görüldüğü üzere $A \times A$ 'nın her bir R alt kümesi, nokta kümesi A ve kenar kümesi B olan bir graftır. Grafın en yaygın temsili diyagramlardır. Diyagramda, bir cismin köşeleri noktalarla, kenarları ise çizgi ya da eğrilerle temsil edilir.

Graf yapısını basit bir örnekler açıklayalım.

Örnek 2.2 Sosyal medyada kişilerin birbirlerini takip etme durumları Şekil 2.1'deki gibi graf yardımıyla ifade edilebilir.

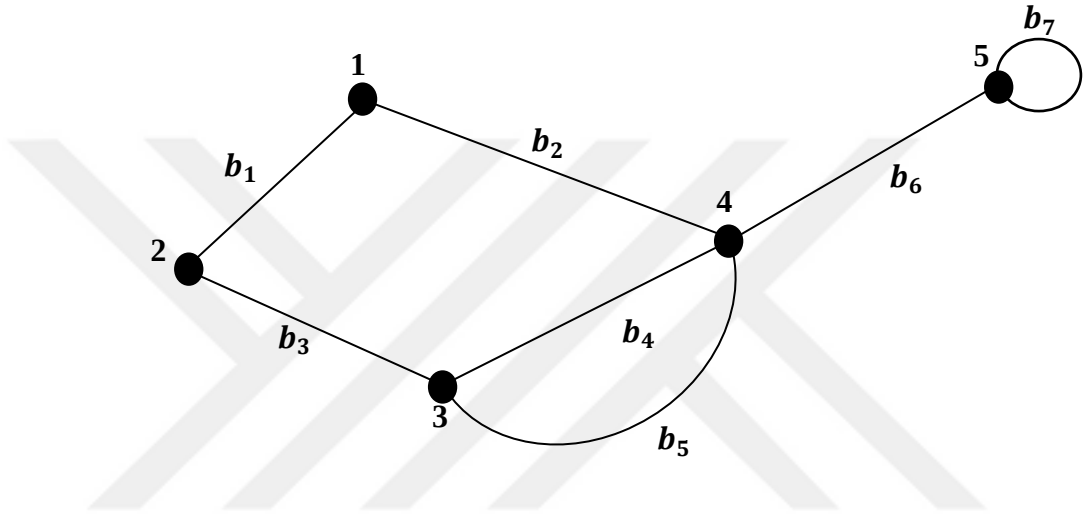


Şekil 2.1 Graf örneği

Ali, Ayşe ve Fatma köşe noktaları, köşeleri birbirine bağlayan çizgiler ise kenarlardır.

Bu grafta, Ayşe ve Fatma arasındaki kenar ikisinin sosyal medyada birbirini takip ettiğini göstermektedir. Aynı durum Ali ve Ayşe arasında da geçerlidir. Fatma ile Ali arasında kenar olmaması ise sosyal medyada birbirlerini takip etmediklerini göstermektedir.

Örnek 2.3 $A = \{1,2,3,4,5\}$ noktalar kümesi ve $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ kenarlar olmak üzere $G = (A, B)$ grafi aşağıdaki gibi çizilebilir



Şekil 2.2 $G = (A, B)$ grafi

2.1 Bulanık Kümeler

Tanım 2.4 (Zadeh 1965) X boştan farklı bir küme olmak üzere, X üzerinde bir bulanık A kümesi aşağıdaki gibi tanımlanan ikililerin bir kümesidir;

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

Burada, $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu denir. Üyelik fonksiyonu altında bir elemanın görüntüsü $\mu_A(x)$, x elemanın istenilen özelliği hangi ölçüde sağladığını ifade eder. $\mu_A(x) \in [0,1]$ değerine $x \in X$ elemanın üyelik derecesi denir.

$\mu_A(x) = 0$ ise x elemanın A kümesine ait olmadığını, $\mu_A(x) = 1$ olması ise x elemanın A bulanık kümesine tam olarak ait olduğunu ifade eder.

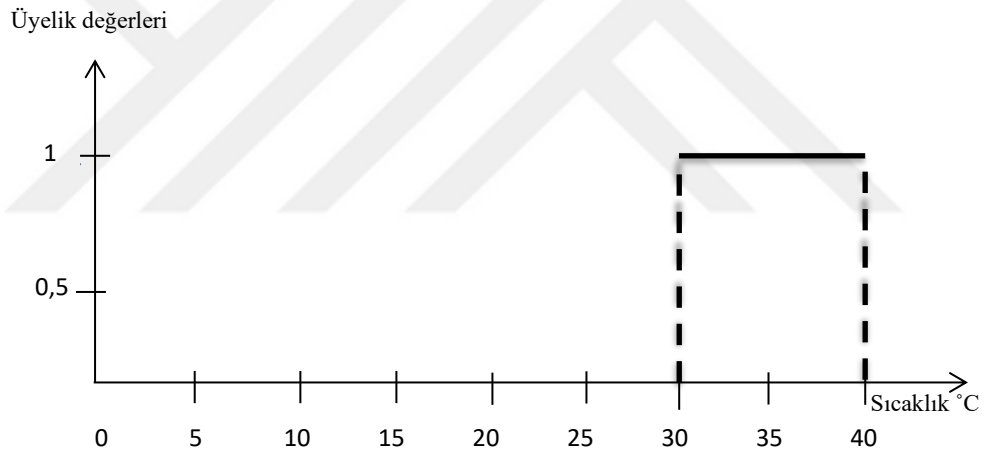
Bulanık kümelerin farklı gösterim şekilleri bulunmaktadır. Eğer X başlangıç evreni sürekli ise A bulanık kümesi

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

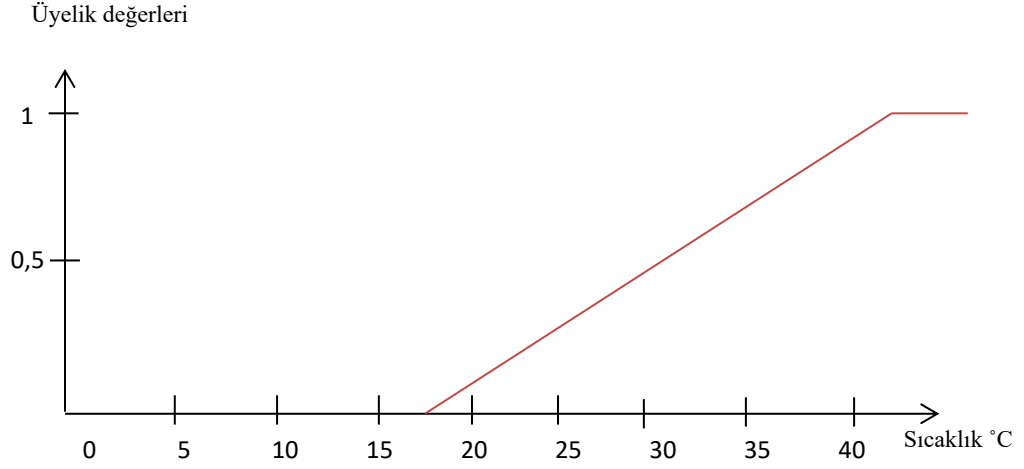
şeklinde gösterilir. Buradaki integral işareti ve bölüm işlemi yalnızca gösterim için kullanılmaktadır.

Bir klasik küme ve bulanık küme arasındaki ilişki aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.5



Şekil 2.3 Hava sıcaklığının klasik küme ile gösterimi



Şekil 2.4 Hava sıcaklığının bulanık küme ile gösterimi

Şekil 2.3' te klasik küme örneği verilmiştir. Klasik kümelerde hava sıcak ise 1 soğuk ise 0 değeri alınarak grafik oluşturulmuştur. Fakat gerçek hayatta sıcaklık kavramını bu kadar keskin çizgilerle ayıramayız. Şekil 2.4'te görüldüğü üzere hava sıcaklığı arttıkça üyelik değerleri de 0 ile 1 arasında değişmiştir.

2.2 Bulanık Küme İşlemleri

Bulanık kümeler üzerinde tanımlanan işlemler kapsama, kesişim, birleşim, tümleme olmak üzere dört tanedir (Ünal 2009).

Tanım 2.6 (Zadeh 1965) Bulanık Kümelerin Eşitliği: V ve W aynı X evreni üzerinde üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_V ve μ_W olan iki bulanık küme olsun. Eğer her $x \in X$ için $\mu_V(x) = \mu_W(x)$ oluyorsa, V ve W bulanık kümelerine eşittir denir.

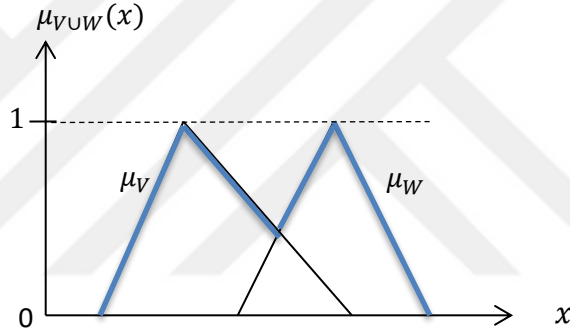
Tanım 2.7 (Zadeh 1965) Kapsama: V ve W aynı X evreni üzerinde üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_V ve μ_W olan iki bulanık küme olsun. Eğer her $x \in X$ için $\mu_V(x) \leq \mu_W(x)$ oluyorsa, V bulanık kümesine W bulanık kümesinin bulanık altkümesi denir.

Tanım 2.8 (Zadeh 1965) Birleşim İşlemi: V ve W aynı X evreni üzerinde üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_V ve μ_W olan iki bulanık küme olsun. V ve W bulanık kümelerinin $V \cup W$ ile gösterilen birleşim işlemi, ikililerin bir kümesi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$V \cup W = \{(x, \mu_{V \cup W}(x)) : \forall x \in X\}$$

Burada, $\mu_{V \cup W}(x) = \max(\mu_V(x), \mu_W(x))$ şeklinde tanımlanır.

Bulanık kümelerin birleşimi Şekil 2.2.1 deki gibi grafikte ifade edilebilir.



Şekil 2.5 Bulanık kümelerin birleşimi

Örnek 2.9 $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlı V ve W bulanık kümeleri aşağıdaki gibi verilsin:

$$V = \{(a, 0.8), (b, 0.6), (c, 1.0), (d, 0.1)\}$$

$$W = \{(a, 0.5), (b, 0.9), (c, 0.7), (d, 0.4)\}.$$

O halde, $V \cup W = \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 1.0), (d, 0.4)\}$ dir.

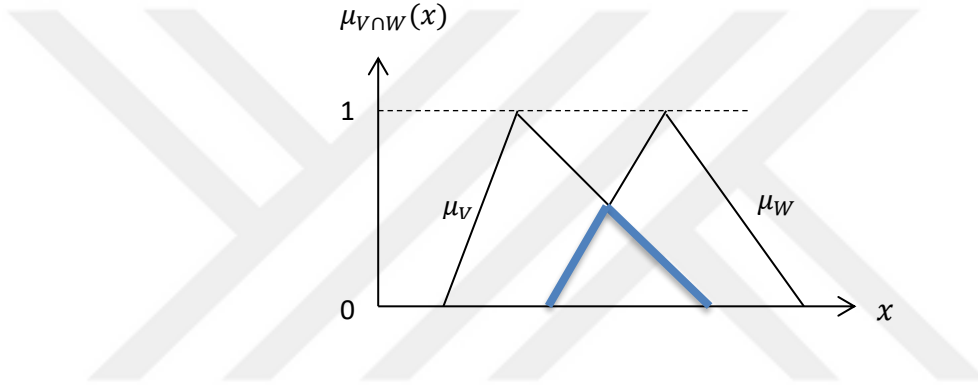
Tanım 2.10 (Zadeh 1965) Kesişim İşlemi: V ve W aynı X evreni üzerinde üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_V ve μ_W olan iki bulanık küme olsun. V ve W bulanık

kümelerinin $V \cap W$ ile gösterilen kesişim işlemi, ikililerin bir kümesi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$V \cap W = \{(x, \mu_{V \cap W}(x)) : \forall x \in X\}$$

Burada, $\mu_{V \cap W}(x) = \min(\mu_V(x), \mu_W(x))$ şeklinde tanımlanır.

Bulanık kümelerin birleşiminin grafiksel gösterimi Şekil 2.6 de verilmiştir.



Şekil 2.6 Bulanık kümelerin kesişimi

Örnek 2.11 $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlı V ve W bulanık kümeleri aşağıdaki gibi verilsin:

$$V = \{(a, 0.8), (b, 0.6), (c, 1), (d, 0.1)\}$$

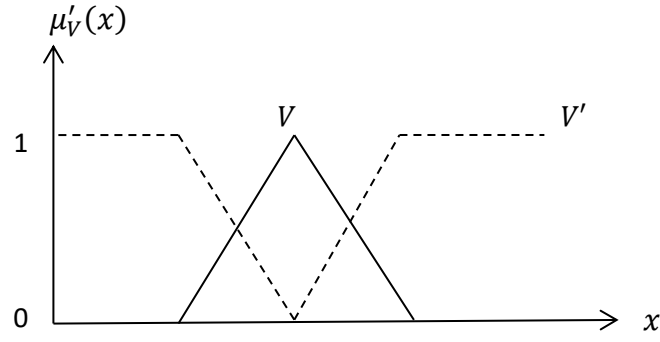
$$W = \{(a, 0.5), (b, 0.9), (c, 0.7), (d, 0.4)\}.$$

O halde $V \cap W = \{(a, 0.5), (b, 0.6), (c, 0.7), (d, 0.1)\}$ dir.

Tanım 2.12 (Zadeh 1965) Tümlenme işlemi: V , X evreni üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun. V' ile gösterilen V bulanık kümesinin tümlenmesi;

$$V' = \{(x, 1 - \mu_V(x)) : \forall x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 2.7 V bulanık kümesinin tümleyeni

Örnek 2.13 $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlı V bulanık kümesi $V = \{(a, 0.8), (b, 0.6), (c, 1.0), (d, 0.1)\}$ ile verilsin.

O halde, $V' = \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.0), (d, 0.9)\}$.

Tanım 2.14 (Tanaka 1996) Kartezyen Çarpım: $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı ve $A_1, A_2, \dots, A_n$ sırasıyla $X_1, X_2, \dots, X_n$ kümeleri üzerinde bulanık kümeler olsun. $A_1, A_2, \dots, A_n$ bulanık kümelerinin kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \int_{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) / (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Eğer bulanık kümeler sayılabilir sayıda ikililerden oluşuyorsa yukarıdaki formül aşağıdaki gibi özelleştirilebilir.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n))) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n\}$$

Örnek 2.15 $U_1 = \{1, 2\}$ ve $U_2 = \{x, y, z, t\}$ kümeleri üzerinde sırasıyla tanımlı, $V_1 = \{(1, 0.3), (2, 0.7)\}$ ve $V_2 = \{(x, 0.7), (y, 1), (z, 0.2), (t, 0.9)\}$ bulanık kümelerini göz önüne alalım. O halde;

$$V_1 \times V_2 = \{((1, x), 0.3), ((1, y), 0.3), ((1, z), 0.2), ((1, t), 0.3), ((2, x), 0.7), ((2, y), 0.7), ((2, z), 0.2), ((2, t), 0.7)\}$$

dır.

Tanım 2.16 (Sanches 1976) A ve B , E evrensel kümesinin iki altkümesi olsun. O halde $A \times B \subseteq E \times E$. A 'dan B 'ye tanımlı bir bulanık bağıntı ikililerin kümesi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{R} = \{((a, b), \mu_{\mathcal{R}}(a, b)) \mid (a, b) \subseteq A \times B\}$$

Burada $\mu_{\mathcal{R}}: A \times B \rightarrow [0,1]$ ile tanımlanan bir fonksiyondur. $\mu_{\mathcal{R}}(a, b)$ ise (a, b) sıralı ikilisinin $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısına üyelik derecesini gösterir.

Bulanık bağıntılar matris formunda gösterilebilir. Aşağıdaki örnekte bir bulanık bağıntı örneği matris formunda gösterilmiştir.

Örnek 2.17 Öğrenci ve öğrencinin ilgi duyduğu dersleri ifade eden bir bulanık bağıntı örneği verelim. Öğrencilerin kümesi $\ddot{O}_1, \ddot{O}_2, \ddot{O}_3$ ve derslerin kümesi D_1, D_2, D_3, D_4 olsun. O halde ilgi duyma bulanık bağıntısı matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ \begin{matrix} \ddot{O}_1 \\ \ddot{O}_2 \\ \ddot{O}_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 & 0.3 & 1 \\ 0.8 & 0.4 & 0 & 0.8 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Burada $\ddot{O}_1$ 'in D_1 dersine ilgi duyma derecesi 0.5 öğrencinin bu dersi orta düzeyde sevdiğini, aynı öğrencinin D_2 dersine olan ilgisi 0.9 dur. Öğrencinin bu derse çok ilgi duyduğu söylenir. $\ddot{O}_3$ 'ün D_2 dersine olan ilgisi ise 0 derecedir yani öğrencinin bu derse hiç ilgi duymamaktadır.

Yukarıdaki tanımda bulanık bağıntı, klasik iki kümenin kartezyen çarpımı üzerinde tanımlanmıştır. Bir bulanık bağıntı bulanık iki kümenin kartezyen çarpımı üzerinde de tanımlanabilir.

Tanım 2.18 (Tanaka 1996) Boştan farklı X ve Y kümeleri üzerinde tanımlı iki bulanık küme sırasıyla A ve B olsun. A ve B bulanık kümelerinin kartezyen çarpımının her bulanık altkümesine bir bulanık bağıntı denir.

Diğer bir ifadeyle $A = \{(x, \mu_A(x)) : \forall x \in X\}$ ve $B = \{(y, \mu_B(y)) : \forall y \in Y\}$ bulanık kümelerinin kartezyen çarpımı $A \times B = \{((x, y), \min(\mu_A(x), \mu_B(y))) : (x, y) \in X \times Y\}$ olmak üzere üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \leq \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

şartını sağlayan $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ bulanık kümesine A ve B bulanık kümeleri üzerinde bir bulanık bağıntıdır denir.

Örnek 2.19 $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ve $Y = \{b_1, b_2, b_3\}$ iki küme ve bu kümeler üzerinde tanımlı sırasıyla iki bulanık küme $A = \{(a_1, 0.7), (a_2, 1.0), (a_3, 0.4), (a_4, 0.9)\}$ ve $B = \{(b_1, 0.5), (b_2, 0.8), (b_3, 0.3)\}$ olsun. O halde $A \times B$ bulanık kartezyen çarpım kümesi üzerinde iki bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{R}_1 = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathcal{R}_2 = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Bulanık bağıntılar arasındaki eşitlik, kapsama, kesişim, birleşim işlemleri ve bir bulanık bağıntının tümleyeni bulanık kümelerdeki işlemlere benzer şekilde üyelik fonksiyonları ile tanımlıdır. Bulanık bağıntılardaki işlemlerde bulanık küme işlemlerine benzer yolla tanımlanır.

Tanım 2.20 (Tanaka 1996) $\mathcal{R}_1$ ve $\mathcal{R}_2$, A bulanık kümesinden B bulanık kümesine tanımlı iki bulanık bağıntı olsun. $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}^c$ ile gösterilen sırasıyla bulanık bağıntıların birleşim, kesişim ve tümleyen işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \left\{ \left((x, y), \max(\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)) \right) : (x, y) \in A \times B \right\},$$

$$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \left\{ \left((x, y), \min(\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)) \right) : (x, y) \in A \times B \right\}$$

$$\mathcal{R}_1^c = \left\{ \left((x, y), 1 - \mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) \right) : (x, y) \in A \times B \right\}$$

Örnek 2.21 Örnek 2.10' da verilen $\mathcal{R}_1$ ve $\mathcal{R}_2$ bulanık bağıntıların birleşim ve kesişimleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Birleşim İşlemi; $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \max(\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y))$

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ 0.8 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Kesişim İşlemi; $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \min(\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y))$

$$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tümleyen: $\mathcal{R}_1^c = 1 - \mu_{\mathcal{R}_1}(x, y)$

$$\mathcal{R}_1^c = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 1.0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.8 \\ 0.8 & 1.0 & 0.7 \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tanım 2.22 (Bede 2013) $\mathcal{R}_1: A \times B \rightarrow [0,1]$ ve $\mathcal{R}_2: B \times C \rightarrow [0,1]$ iki bulanık bağıntı olsun. O halde $A \times B$ üzerinde tanımlı $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ ile gösterilen ve

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2(a, c) = \max_{b \in B} (\min (\mathcal{R}_1(a, b), \mathcal{R}_2(b, c)))$$

ile tanımlana " $\circ$ " işlemine $\mathcal{R}_1$ ve $\mathcal{R}_2$ bulanık bağıntılarının *mak – min* bileşke işlemi denir.

Örnek 2.23 $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ve $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ kümeleri verilsin. $A \times B$ üzerinde bir $\mathcal{R}_1$ ve $B \times C$ üzerinde bir $\mathcal{R}_2$ bulanık bağıntısı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mathcal{R}_1 = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathcal{R}_2 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ *mak – min* bileşkesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tanım 2.24 X kümesi üzerinde bir bulanık bağıntı $\mathcal{R}$ olsun. O halde;

- $\forall x \in X, \mu_{\mathcal{R}}(x, x) = 1$ ise $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı yansıyan (yansıma özelliğini sağlar) bulanık bağıntı (Zadeh 1971).
- $\forall x \in X, \mu_{\mathcal{R}}(x, x) \geq \varepsilon$ ise $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı ε – yansımalıdır denir (Yeh and Bang 1975).

- $\forall x, y \in X$ ve $\begin{cases} \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \leq \mu_{\mathcal{R}}(x, x) \\ \mu_{\mathcal{R}}(y, x) \leq \mu_{\mathcal{R}}(x, x) \end{cases}$ ise $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı zayıf yansımalıdır denir (Yeh and Bang 1975).
- $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısında $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(y, x)$ ise $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısına simetrik denir (Kaufmann 1975).
- $\forall x, y \in X$ için $x \neq y$ olduğunda ya $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \neq \mu_{\mathcal{R}}(y, x)$ ya da $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(y, x) = 0$ ise $\mathcal{R}$ ye antisimetrik bulanık bağıntı denir (Kaufmann 1975).
- $\forall x, y \in X$ $\mu_{\mathcal{R}}(y, x) = 0$ ve $x \neq y$ için $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) > 0$ ise $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısına mükemmel antisimetrik bulanık bağıntı denir (Zadeh 1971).
- $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ şartını sağlıyorsa $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısına geçişme özelliğini sağlar denir.

Örnek 2.25 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0.3 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

$\mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_1) = 1$, $\mu_{\mathcal{R}}(a_2, a_2) = 1$, $\mu_{\mathcal{R}}(a_3, a_3) = 1$, $\mu_{\mathcal{R}}(a_4, a_4) = 1$ olduğundan $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı yansıyandır.

Örnek 2.26 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ve $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ kümeleri üzerinde tanımlı bir $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mathcal{R}(a, b) = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\mathcal{R}(a_1, b_2) = 0.5$ ve $\mathcal{R}^{-1}(b_2, a_1) = 0.5$ yani $\mathcal{R}(a_1, b_2) = \mathcal{R}^{-1}(b_2, a_1)$ dir. Aynı şekilde tüm ilişkiler incelenirse $\mathcal{R}$ ' nin bir simetrik bulanık bağıntı olduğu görülür.

Örnek 2.27 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı antisimetrik bulanık bağıntıdır.

Eğer $\mathcal{R}$ bağıntısı aşağıdaki gibi verilen bir bağıntı ise $\mathcal{R}$ bağıntısı bir mükemmel antisimetrik bulanık bağıntıdır.

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Örnek 2.28 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{R}$ bulanık bağıntısı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mathcal{R}(a, a) = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_3) = 0.4$ ve $\mu_{\mathcal{R}}(a_3, a_4) = 0 \rightarrow \min[0.4; 0] = 0$, $\mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_4) = 0.4$ şeklinde bulunur.

$$\mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_4) \geq \min[\mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_3); \mu_{\mathcal{R}}(a_3, a_4)]$$

$$0.4 \geq 0$$

Bu durum ikililer için sağlandığından $\mathcal{R}$ 'de geçişme özelliği vardır.



3. BULANIK GRAFLAR

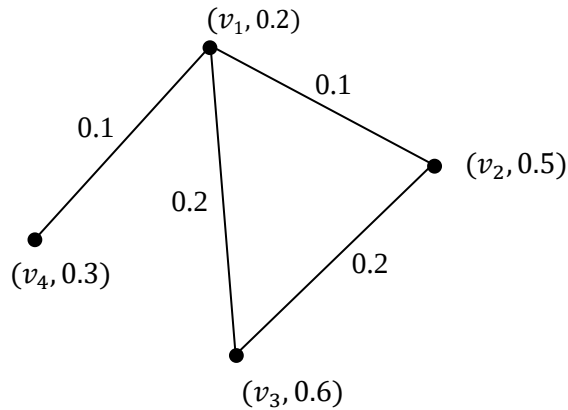
Bu bölümde bulanık graf kavramı, bulanık graflarla ilgili temel tanımlar ve bulanık graf işlemleri sunulacaktır. Bu bölüm boyunca $G^* = (A, B)$ klasik graf yapısını gösterecektir.

Tanım 3.1 (Kauffman 1973, Rosenfeld 1975) $G^* = (A, B)$, bir klasik graf, Ω A üzerinde bir bulanık küme ve $\aleph$ da $B \subseteq A \times A$ üzerinde bir bulanık küme olsun. Yani, $\Omega : A \rightarrow [0,1]$ ve $\aleph : A \times A \rightarrow [0,1]$ dönüşümleridir. Her $(a, b) \in B$ için

$$\aleph(a, b) \leq \min\{\Omega(a), \Omega(b)\}$$

ise $\mathcal{G} = (A, \Omega, \aleph)$ üçlüsüne bir bulanık graf denir. Burada $\aleph(a, b)$, a ve b kenarları arasındaki üyelik derecesini ve $\Omega(a)$ ' da a noktasının üyelik derecesini gösterir.

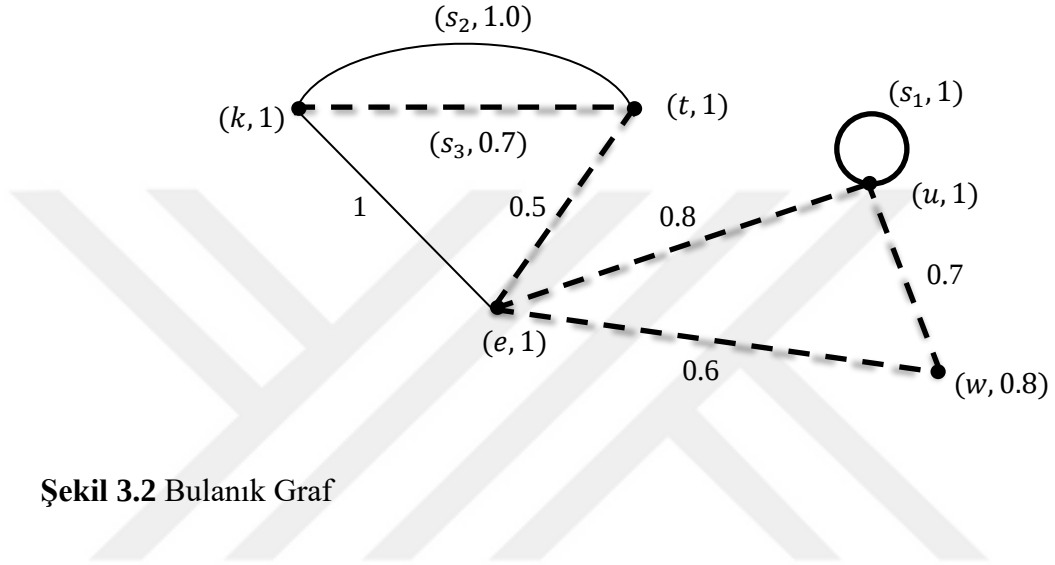
Örnek 3.2 $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kümesi üzerinde $\Omega = \{(v_1, 0.2), (v_2, 0.5), (v_3, 0.6), (v_4, 0.3)\}$ bulanık kümesi ve $B = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_1, v_4)\}$ üzerinde $\aleph$ bulanık kümesi $\aleph = \{((v_1, v_2), 0.1), ((v_1, v_3), 0.2), ((v_2, v_3), 0.2), ((v_1, v_4), 0.1)\}$ şeklinde verilmiş olsun. O halde $\mathcal{G} = (A, \Omega, \aleph)$ yapısı bir bulanık graftır. Bu graf Şekil 3.1 deki gibi gösterilir.



Şekil 3.1 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \aleph)$ bulanık grafı

Örnek 3.3 k, t, e, u, w üyelik değerleri sırasıyla $1; 1; 1; 0.8; 1$ olan noktalar ve $s_1, s_2, s_3, (k, e), (e, t), (e, w), (u, w), (u, e)$ üyelik dereceleri sırasıyla $1; 1; 0.7; 1; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8$ olan kenarlar olsun.

O halde bu bulanık graf aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 3.2 Bulanık Graf

Burada üyelik dereceleri 1 olan kenarlar düz çizgi ile 0 ile 1 arasındaki tam üye olmayan kenarlar kesikli çizgi ile gösterilebilir.

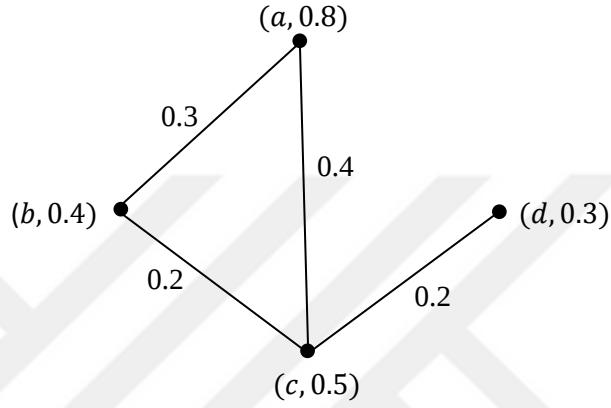
Eğer bir bulanık grafın bütün noktalarının ve kenarlarının üyelik dereceleri 1 ise bu graf klasik graftır.

$\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık grafi verildiğinde, $\Omega^* = \{a \in A : \Omega(a) > 0\}$ ve $\mathfrak{A}^* = \{(a, b) \in A \times A : \mathfrak{A}(a, b) > 0\}$ kümelerinin elemanları göz önüne alınarak $\mathcal{G}^* = (\mathcal{A}, \Omega^*, \mathfrak{A}^*)$ klasik grafi elde edilebilir.

Tanım 3.4 (Mordeson and Nair 2000) $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \Omega, \mathfrak{A})$ ve $\mathcal{H} = (\mathcal{A}_1, \tau, \gamma)$ iki graf olsun. Eğer $\tau \leq \Omega$ ve $\gamma \leq \mathfrak{A}$ ise $\mathcal{H}$ grafına $\mathcal{G}$ grafının kısmi bulanık alt grafi denir.

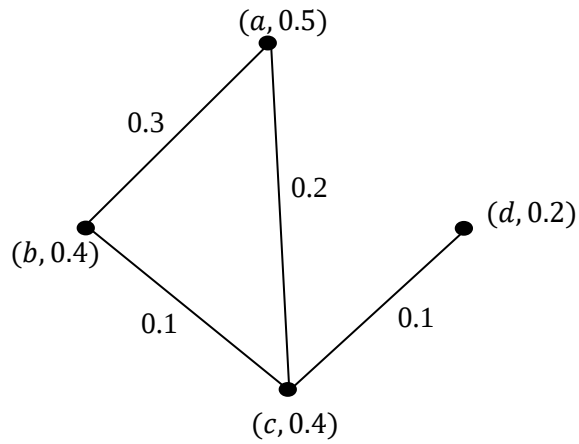
Özel olarak $A_1 \subseteq A$ olmak üzere her $a \in \mathcal{A}_1$ için $\tau(a) = \Omega(a)$ her $a, b \in A_1$ için $\mathfrak{A}(a, b) = \gamma(a, b)$ ise o halde $\mathcal{H}$ bulanık grafına $\mathcal{G}$ bulanık grafının bir bulanık alt grafı denir.

Örnek 3.5 Aşağıdaki gibi verilen $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık grafını göz önüne alalım.

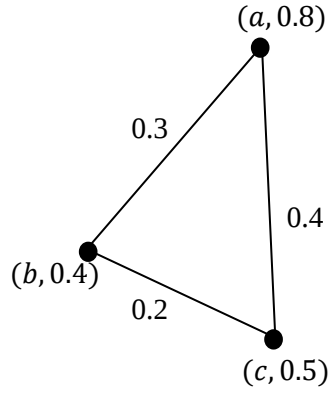


Şekil 3.3.a $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık grafı

O halde şekil 3.3.b’ da $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık grafının kısmi bulanık alt grafını ve şekil 3.3.c’ de verilen bulanık grafı ise $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})'$ nın bir bulanık alt grafını göstermektedir.



Şekil 3.3.b $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık grafının kısmi bulanık alt grafı



Şekil 3.3.c $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ ' nın bir bulanık alt grafi

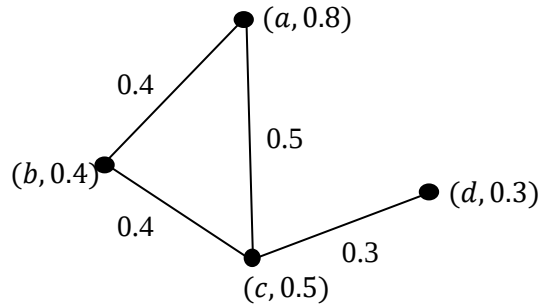
Tanım 3.6 (Mordeson and Nair 2000) $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ ' nın bir bulanık grafi ve $\mathcal{H} = (A_1, \tau, \gamma)$ ' da $\mathcal{G}$ 'nin bir kısmi bulanık alt grafi olsun. Eğer $\Omega = \tau$ ise $\mathcal{H}$ bulanık grafına $\mathcal{G}$ bulanık grafının gereni denir. Bu durumda $\mathcal{H}$ kısmi bulanık alt grafına $\mathcal{G}$ bulanık grafının bir geren bulanık alt grafi denir.

Tanım 3.7 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ bir bulanık graf olsun. Eğer her $(a, b) \in A \times A$ için,

$$\delta(a, b) = \min\{\Omega(a), \Omega(b)\}$$

ise $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ grafına güçlü bulanık graf denir.

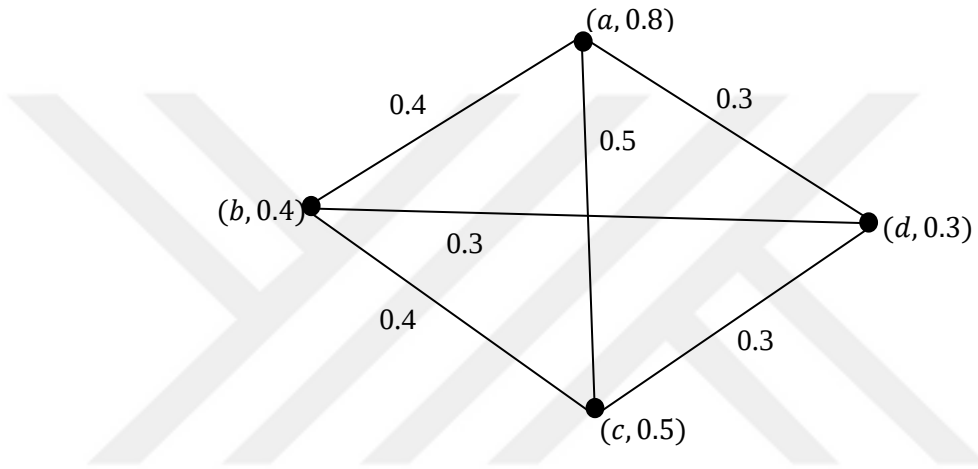
Örnek 3.8



Şekil 3.4 Güçlü bulanık graf

Tanım 3.9 (Bhutani 1989) $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{J})$ bir bulanık graf olsun, eğer her $a, b \in A$ için $\mathfrak{J}(a, b) = \min\{\Omega(a), \Omega(b)\}$ ise $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{J})$ bulanık grafına tam bulanık graf denir ve $\mathcal{K}_{\mathfrak{J}}$ ile gösterilir

Örnek 3.10 $A = \{a, b, c, d\}$ noktalar kümesi ve $E = \{(a, b), (a, d), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d)\} \subseteq A \times A$ kenarların kümesi olmak üzere aşağıdaki gibi verilen bulanık graf bir tam bulanık graftır.

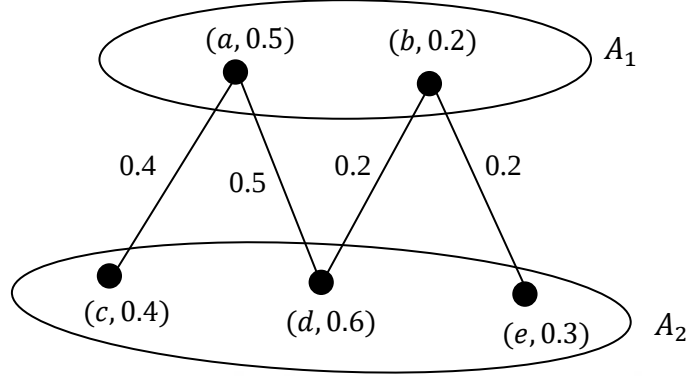


Şekil 3.5 Tam bulanık graf

Tanım 3.11 (Nagoorgani 2006) $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{J})$ bir bulanık graf olsun. A nokta kümesi $a_1, a_2 \in A_1$ ya da $a_1, a_2 \in A_2$ için $\mathfrak{J}(a_1, a_2) = 0$ olacak şekilde boştan farklı iki kümeye ayrılıyorsa $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{J})$ bulanık grafına ikiparçalı bulanık graf denir.

Eğer her $a_1 \in A_1$ ve $a_2 \in A_2$ için $\mathfrak{J}(a_1, a_2) = \min\{\Omega(a_1), \Omega(a_2)\}$ ise $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{J})$ bulanık grafına tam iki parçalı bulanık graf denir. $\mathcal{K}_{\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2}$ ile gösterilir.

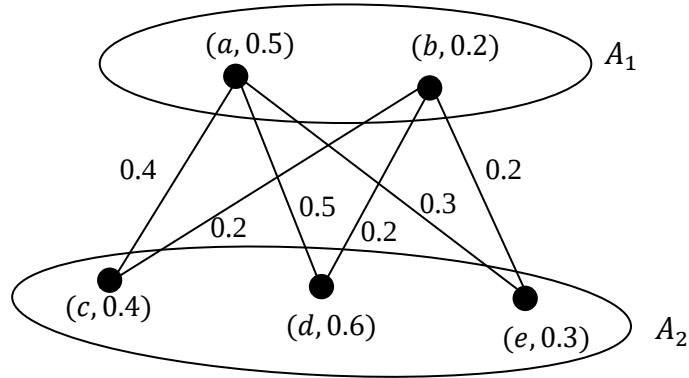
Örnek 3.12 $A = \{a, b, c, d, e\}$ nokta kümesi ve $E = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$ kenar kümesi üzerinde aşağıdaki gibi verilen graf yapısı bir iki parçalı graftır.



Şekil 3.6 İki parçalı bulanık graf

Şekil 3.6'da dikkat edilirse A kümesi iki ayrık alt kümeye ayrılmış ve bu kümelerin her birindeki elemanlar arasındaki kenar üyelik dereceleri 0'dır.

Örnek 3.13



Şekil 3.7 Tam ikiparçalı bulanık graf

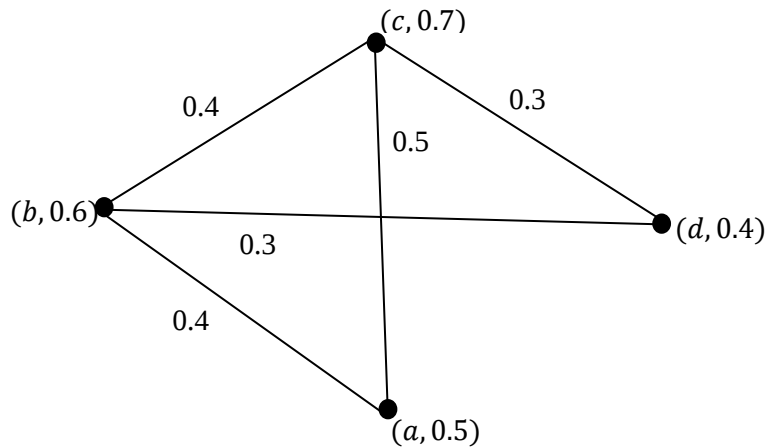
Tanım 3.14 (Rosenfeld 1975) $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ bir bulanık graf olsun. $n \geq 2$ olmak üzere $x_1 \neq x_n$ için $\mu(x_i, x_j) > 0$ olacak şekildeki $x_1, x_2, \dots, x_n$ ayrık noktalar dizisine bir yol denir ve P ile gösterilir.

Ardışık ikililer yolun kenarlarıdır. Klasik grafta bir yoldaki kenarların sayısına yolun uzunluğu denir ve $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterilir. Eğer $n \geq 3$ için $x_1 = x_n$ ise P yoluna bir devir denir. Yani $P = (A, \Omega, \delta)$, $\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ üzerinde bir devir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{G}$ grafinin temel grafi G üzerinde bir devir olmasıdır. Eğer $P = (A, \Omega, \delta)$ deviri birden fazla zayıf kenar içeriyorsa $P = (A, \Omega, \delta)$ bir bulanık devirdir denir.

Bir bulanık grafta P yolunun uzunluğu ise $\sum_{i=1,2,\dots,n-1} \Omega(x_i, x_{i+1})$ şeklinde tanımlanır. Bir bulanık grafin temel grafi göz önüne alındığında x_i noktası ile x_n noktası arasında birden fazla yol olabilir. Bu yollardan en kısa uzunluğa sahip yolun uzunluğuna x_i noktası ile x_n arasındaki yolun uzunluğu denir ve $u(x_i, x_n)$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle $u(x_i, x_n) = \min\{\sum_{i=1,2,\dots,n-1} \Omega(x_i, x_{i+1})\}$

$\mathcal{G} = (A, \Omega, \delta)$ bir bulanık graf ve $a \in A$ olsun. O halde a noktasının dışmerkezliği $dışm(a)$ ile gösterilir ve $dışm(a) = \max_{b \in A} u(a, b)$ ile tanımlanır. Ayrıca $\max\{dışm(u) : u \in A\}$ ya $\mathcal{G}$ bulanık grafinin çapı denir ve $çap(\mathcal{G})$ ile gösterilir. $\mathcal{G}$ bulanık grafinin yarıçapı ise $\min\{dışm(u) : u \in A\}$ şeklinde tanımlanır ve $yçap(\mathcal{G})$ ile gösterilir.

Örnek 3.15 Aşağıda verilen bulanık grafi göz önüne alalım.



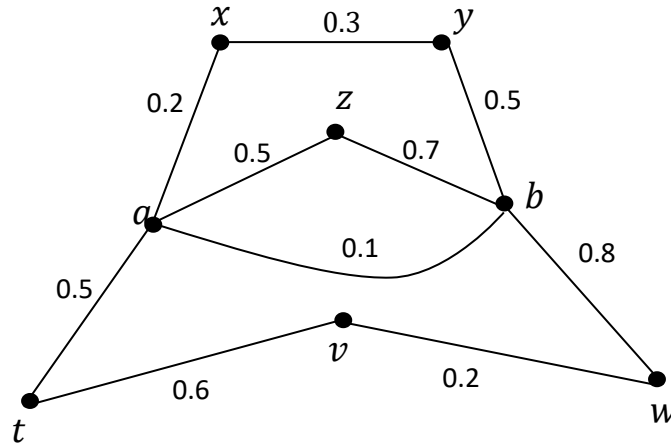
Şekil 3.8 Graf örneği

Burada $u(a, b) = \min\{0.4, 0.9, 0.8\} = 0.4$, $u(a, c) = \min\{0.5, 0.8, 1, 1\} = 0.5$ ve $u(a, d) = \min\{0.8, 0.7, 1, 1\} = 0.7$ dir. O halde $dışm(a) = mak\{0.4, 0.5, 0.7\} = 0.7$. Benzer şekilde $dışm(b) = 0.4$, $dışm(c) = 0.5$ ve $dışm(d) = 0.7$. O halde $çap(G) = 0.7$ ve $yçap(G) = 0.4$ olduğu görülür.

Tanım 3.16 (Rosenfeld 1975) $G = (A, \Omega, \delta)$ grafında $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bir yol olsun. $\min\{\mu(x_i, x_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\}$ ye $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yolunun kuvveti denir ve $\tilde{P}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.17 (Rosenfeld 1975) $G = (A, \Omega, \delta)$ bulanık grafında x_1 ve x_n noktaları arasındaki bütün yolların kuvvetinin maximumuna x_1 ve x_n noktaları arasındaki bağlantılılığın kuvveti denir ve $BAG_G(x_1, x_n)$ ya da $\mu^\alpha(a, b)$ ile gösterilir. Eğer $\tilde{P}(x_1, x_2, \dots, x_n) = BAG_G(x_1, x_n)$ ise $x_1, x_2, \dots, x_n$ yoluna en kuvvetli yol denir.

Örnek 3.18 $G = (A, \Omega, \delta)$ bulanık grafi aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 3.9 $G = (A, \Omega, \delta)$

Şekil 3.9'daki grfta a ile b arasındaki $a - x - y - b$, $a - z - b$, $a - t - v - w - b$ ve $a - b$ olmak üzere dört yol vardır.

$$\tilde{P}(a, x, y, b) = \min\{0.2, 0.3, 0.5\} = 0.2$$

$$\tilde{P}(a, z, b) = \min\{0.5, 0.7\} = 0.5$$

$$\tilde{P}(a, t, v, w, b) = \min\{0.5, 0.6, 0.2, 0.8\} = 0.2$$

$$\tilde{P}(a, b) = \min\{0.1\} = 0.1$$

Burada $BAG(a, b) = \max\{0.2; 0.5; 0.1; 0.2\} = 0.5$ ve a ile b arasındaki en kuvvetli yol $a - z - b$ yoludur.

3.1 Kenarların ve Yolların Çeşitleri

Bu bölümdeki tanımlar Bhutani ve Rosenfeld (2003a, 2003b, 2003c) makalelerinden derlenmiştir.

Tanım 3.19 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık graf olsun. Eğer; $\forall(a, b) \in A \times A$ için $BAG_{\mathcal{G}}(a, b) > 0$ ise $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ grafına bulanık bağlantılı graf denir.

Bir $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık grafta (a, b) kenarına 0 üyelik derecesi atayarak (a, b) graftan kaldırılabilir. Bu $\mathcal{G} - (a, b)$ olarak gösterilir.

Tanım 3.20 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bir bulanık graf olsun. Eğer; $\mu(a, b) > 0$ ve $\mu(a, b) \geq BAG_{\mathcal{G}-(a,b)}(a, b)$ ise (a, b) kenarına $\mathcal{G}'$ de kuvvetli kenar denir. Eğer; her $1 \leq i \leq n - 1$ için (z_i, z_{i+1}) kuvvetli ise z_1 ' den z_n 'e $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ yolu kuvvetli bir yol diye isimlendirilir.

Şekil 3.9' da $a - z$ yolunun üyelik değerini 0 yaparsak; $\tilde{P}(a, x, y, b) = \min\{0.2, 0.3, 0.5\} = 0.2$, $\tilde{P}(a, b, z) = 0.1$ ve $\tilde{P}(t, v, w, b, z) = 0.2$ bulunur. Buradan $BAG_{\mathcal{G}-(a,z)}(a, z) = 0.2$ dir. $\mu_{(a,z)} = 0.5 \geq BAG_{\mathcal{G}-(a,b)}(a, b) = 0.2$ olduğu için (a, z) yolu kuvvetlidir.

Tanım 3.21 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık grafindaki bir a noktasının derecesi $der_{\mathcal{G}}(a)$ ile gösterilir ve

$$der_{\mathcal{G}}(a) = \sum_{b \neq a} \mathfrak{A}(a, b)$$

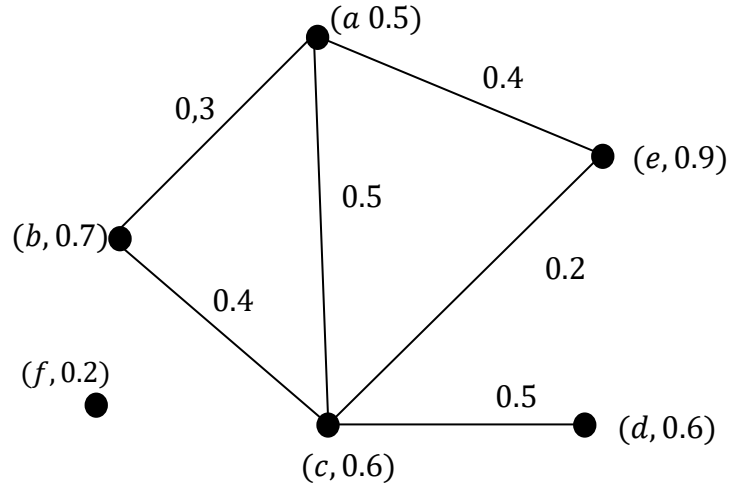
$\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bulanık grafinın minimum derecesi $\delta(\mathcal{G})$ ve maximum derecesi $\Delta(\mathcal{G})$ ile gösterilir ve

$$\delta(\mathcal{G}) = \min\{der_{\mathcal{G}}(a): a \in \mathcal{A}\}$$

$$\Delta(\mathcal{G}) = \max\{der_{\mathcal{G}}(a): a \in \mathcal{A}\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.22 Şekil 3.10 da verilen $\mathcal{G}$ grafinı göz önüne alalım.



Şekil 3.10 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ grafi

O halde; $der_{\mathcal{G}}(a) = 0.3 + 0.5 + 0.4 = 1.2$, $der_{\mathcal{G}}(b) = 0.3 + 0.4 = 0.7$

$der_{\mathcal{G}}(c) = 0.5 + 0.2 + 0.5 + 0.4 = 1.6$, $der_{\mathcal{G}}(d) = 0.5$, $der_{\mathcal{G}}(e) = 0.4 + 0.2 = 0.6$

$der_{\mathcal{G}}(f) = 0$. O halde $\delta(\mathcal{G}) = 0$, $\Delta(\mathcal{G}) = 1.6$ dır.

Tanım 3.23 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bir bulanık graf olsun. $\mathcal{G}$ grafının mertebesi ve boyutu sırasıyla $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ ve $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \sum_{a \in A} \Omega(a)$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}) = \sum_{(a,b) \in A \times A} \mathfrak{A}(a,b)$$

Örnek 3.24 Örnek 3.10' daki grafi göz önüne alalım ve grafın mertebesini ve boyutunu bulalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{G}) &= \Omega(a) + \Omega(b) + \Omega(c) + \Omega(d) + \Omega(e) + \Omega(f) \\ &= 0.5 + 0.7 + 0.6 + 0.9 + 0.2 \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathcal{G}) &= \mathfrak{A}(a,b) + \mathfrak{A}(b,c) + \mathfrak{A}(a,c) + \mathfrak{A}(c,e) + \mathfrak{A}(c,d) \\ &= 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.4 + 0.2 + 0.5 \\ &= 2.3 \end{aligned}$$

Tanım 3.25 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bir bulanık graf olsun. Bir $\alpha \in \mathcal{A}$ noktasının toplam derecesi $td_{\mathcal{G}}(a)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$td_{\mathcal{G}}(a) = \sum_{a \neq b} \mathfrak{A}(a,b) + \sum_{c \neq d} \mathfrak{A}(c,b) - \mathfrak{A}(a,b) = der_{\mathcal{G}}(a,b) + \mathfrak{A}(a,b)$$

Tanım 3.26 $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$, $\mathcal{G}^* = (A, E)$ grafi üzerinde bir bulanık graf olsun. Bir $(a,b) \in E$ kenarının derecesi $der_{\mathcal{G}}(a,b)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$der_{\mathcal{G}}(a, b) = \sum_{c \neq a} \mathfrak{A}(a, b) + \sum_{c \neq b} \mathfrak{A}(c, b) - 2\mathfrak{A}(a, b)$$

Örnek 3.27 Örnek 3.10'daki grafın a noktasının toplam derecesini ve (a, b) kenarının derecesini hesaplayalım.

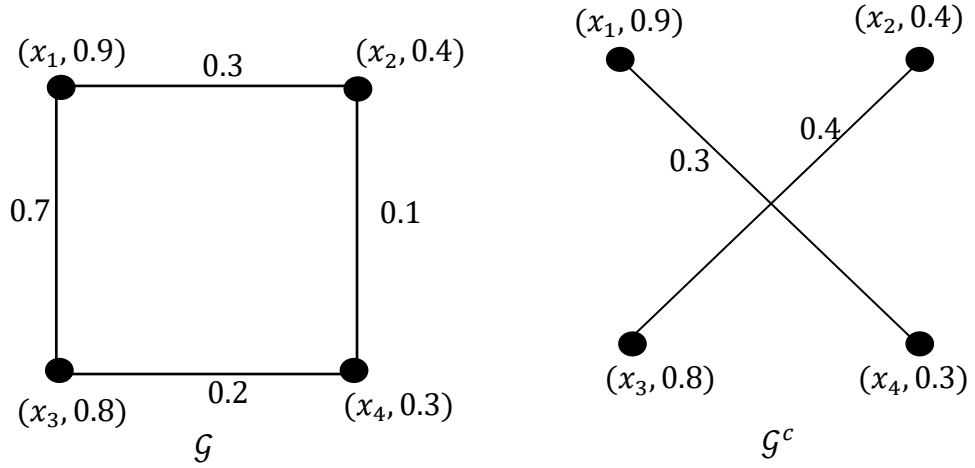
$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}}(a, b) &= \mathfrak{A}(a, b) + \mathfrak{A}(a, c) + \mathfrak{A}(a, e) + \mathfrak{A}(c, b) + \mathfrak{A}(a, b) - 2\mathfrak{A}(a, b) \\ &= \mathfrak{A}(a, c) + \mathfrak{A}(a, e) + \mathfrak{A}(c, b) \\ &= 0.5 + 0.4 + 0.4 \\ &= 1.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} td_{\mathcal{G}}(a) &= der_{\mathcal{G}}(a, b) + \mathfrak{A}(a, b) \\ &= 1.3 + 0.3 \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

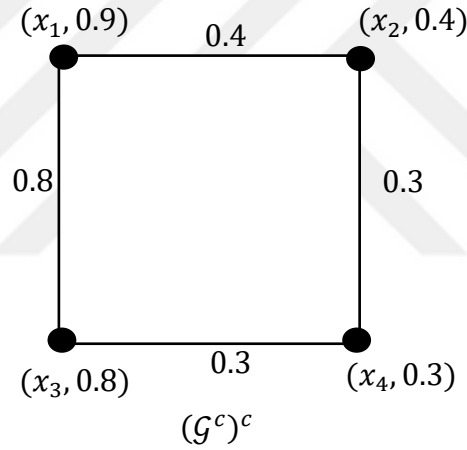
Tanım 3.28 (Bulanık Graf Tümleyeni): $\mathcal{G} = (A, \Omega, \mathfrak{A})$ bir bulanık graf olsun. $\mathcal{G}$ grafının $\mathcal{G}^c = (A, \Omega^c, \mathfrak{A}^c)$ ile gösterilen tümleyeni aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathfrak{A}^c = \begin{cases} 0 & , \mathfrak{A}(a, b) > 0 \\ \min \{\Omega(a), \Omega(b)\} & , diğ er \end{cases}$$

Burada $\Omega^c(a) = \Omega(a)$, $\forall a \in A$.



Şekil 3.11 G ve G^c bulanık grafları



Şekil 3.12 G bulanık grafinin tümleyeninin tümleyeni

Bu tanım klasik graflardaki tümleyen tanımına yakındır. Fakat bu tanım bulanık grafların tümleyenine ait ortak birçok özelliği sağlamaz. Şekil 3.12’de görüldüğü üzere $(G^c)^c \neq G$. Bu özelliğin geçerli olması için bulanık grafin güçlü graf olması gerekir. Tümleyen tanımındaki zayıflığı ortadan kaldırmak için Sunitha ve Vijayakumar (Sunitha and Vijayakumar) tarafından tümleyen tanımı revize edilerek yeniden tanımlandı.

4. BULANIK GRAF İŞLEMLERİ

Bu bölümde bulanık graf işlemleri tanıtılacak ve bazı özellikleri sunulacaktır. Ayrıca bulanık graf işlemleri ile ilgili örnekler sunulacaktır. Bu bölüm, Mordeson and Peng (1994), Ramaswamy and Poornima (2009), Radha and Arugunam (2015), Dogra (2015) ve Havary and Haroni (2016) kaynaklarının bir derlemesidir.

Tanım 4.1 (Mordeson and Peng 1994) **(Bulanık Grafların Birleşimi):** $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık graf olsun. $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ 'nin birleşimi $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cup \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \cup \Omega'', \mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')$ ile tanımlanır.

Burada, $A = (A' \cup A'')$ ve $E = (E' \cup E'')$ olmak üzere;

$$(\Omega' \cup \Omega'')(u) = \begin{cases} \Omega'(u), & u \in A' - A'' \\ \Omega''(u), & u \in A'' - A' \\ \max\{\Omega'(u), \Omega''(u)\}, & u \in A' \cap A'' \end{cases}$$

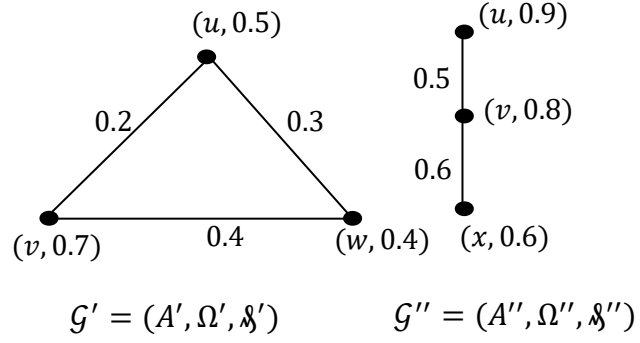
ve

$$(\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(u, v) = \begin{cases} \mathfrak{J}'(u, v), & (u, v) \in E' - E'' \\ \mathfrak{J}''(u, v), & (u, v) \in E'' - E' \\ \max\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\}, & (u, v) \in E' \cap E'' \end{cases}$$

Tanım 4.2 $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cup \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \cup \Omega'', \mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')$, $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ bulanık graflarının birleşimi olsun. O halde $u \in A'$ 'nin derecesi,

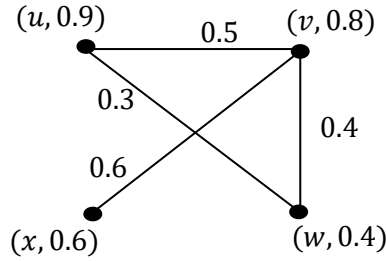
$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''}(u) &= \sum_{(v, u) \in E} (\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(u, v) \\ &= \sum_{(u, v) \in E' - E''} \mathfrak{J}'(u, v) + \sum_{(u, v) \in E'' - E'} \mathfrak{J}''(u, v) + \sum_{(u, v) \in E' \cap E''} \max\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\} \end{aligned}$$

Örnek 4.3 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ Şekil 4.1' de verilen iki bulanık graf olsun. $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$ işlemi Şekil 4.1'de verilmiştir.



Şekil 4.1 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ grafları

$(\Omega' \cup \Omega'')(u) = 0.9$	$(\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(u, v) = 0.5$
$(\Omega' \cup \Omega'')(v) = 0.8$	$(\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(u, w) = 0.3$
$(\Omega' \cup \Omega'')(w) = 0.4$	$(\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(v, w) = 0.4$
$(\Omega' \cup \Omega'')(x) = 0.6$	$(\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(v, x) = 0.6$



Şekil 4.2 $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''$

$$der_{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''}(u) = 0.5 + 0.3 = 0.8$$

$$der_{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''}(v) = 0.5 + 0.4 + 0.6 = 1.5$$

$$der_{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''}(w) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

$$der_{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''}(x) = 0.6$$

Teorem 4.4 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık graf olsun. O halde,

$$der_{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''}(u) = der_{\mathcal{G}'}(u) + der_{\mathcal{G}''}(u) - \sum_{(u,v) \in E' \cap E''} \min\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\}$$

İspat:

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}''}(u) &= \sum_{(v,u) \in E} (\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(u, v) \\ &= \sum_{(u,v) \in E' - E''} \mathfrak{J}'(u, v) + \sum_{(u,v) \in E'' - E'} \mathfrak{J}''(u, v) + \sum_{(u,v) \in E' \cap E''} \max\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\} \\ &= \sum_{(u,v) \in E' - E''} \mathfrak{J}'(u, v) + \sum_{(u,v) \in E'' - E'} \mathfrak{J}''(u, v) + \sum_{(u,v) \in E' \cap E''} \max\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\} \\ &\quad + \sum_{(u,v) \in E' \cap E''} \min\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\} - \sum_{(u,v) \in E' \cap E''} \min\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\} \\ &= \sum_{(u,v) \in E'} \mathfrak{J}'(u, v) + \sum_{(u,v) \in E''} \mathfrak{J}''(u, v) - \sum_{(u,v) \in E' \cap E''} \min\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\} \\ &= der_{\mathcal{G}'}(u) + der_{\mathcal{G}''}(u) - \sum_{(u,v) \in E' \cap E''} \min\{\mathfrak{J}'(u, v), \mathfrak{J}''(u, v)\}. \end{aligned}$$

Tanım 4.5 (Mordeson and Peng 1994) **(Bulanık Grafların Toplamı):** $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık graf olsun. $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ 'nin toplamı $\mathcal{G} = \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' = (A, \Omega' + \Omega'', \mathfrak{J}' + \mathfrak{J}'')$ ile tanımlanır. Burada $A = A' \cup A''$ ve $E = E' \cup E'' \cup E^*$ da A'' 'daki noktalarla A' 'nin noktalarını birleştiren bütün kenarların kümesini gösterir. Ayrıca $\Omega' + \Omega''$ ve $\mathfrak{J}' + \mathfrak{J}''$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\Omega' + \Omega'')(u) = (\Omega' \cup \Omega'')(u)$$

ve

$$(\mathfrak{J}' + \mathfrak{J}'')(u, v) = \begin{cases} (\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(u, v), & (u, v) \in E' \cup E'' \\ \min\{\Omega'(u), \Omega''(u)\}, & (u, v) \in E^* \end{cases}$$

Tanım 4.6 $\mathcal{G} = \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' = (A, \Omega' + \Omega'', \aleph' + \aleph'')$, $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \aleph')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \aleph'')$ 'nın toplamı olsun. O halde $u \in A$ 'nın " $der_{\mathcal{G}'+\mathcal{G}''}(u)$ " ile gösterilen derecesi aşağıdaki eşitlikle bulunur.

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}'+\mathcal{G}''}(u) &= \sum_{(v,u) \in E} (\aleph' + \aleph'')(u, v) = \sum_{(u,v) \in E' \cup E''} (\aleph' \cup \aleph'')(u, v) \\ &+ \sum_{(u,v) \in E^*} \aleph'(u) \cap \aleph''(u) \end{aligned}$$

Teorem 4.7 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \aleph')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \aleph'')$ iki bulanık graf olsun.

1. Eğer $\Omega' \geq \Omega''$ olursa,

$$der_{\mathcal{G}'+\mathcal{G}''}(u) = \begin{cases} der_{\mathcal{G}'}(u) + o(\mathcal{G}''), & u \in A' \\ der_{\mathcal{G}''}(u) + p_1\Omega''(u), & u \in A'' \end{cases}$$

2. Eğer $\Omega' \leq \Omega''$ olursa,

$$der_{\mathcal{G}'+\mathcal{G}''}(u) = \begin{cases} der_{\mathcal{G}'}(u) + p_2\Omega'(u), & u \in A' \\ der_{\mathcal{G}''}(u) + o(\mathcal{G}'), & u \in A'' \end{cases}$$

İspat: Eğer $\Omega' \geq \Omega''$ ve $u \in A'$ ise tanımdan,

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}'+\mathcal{G}''}(u) &= \sum_{(v,u) \in E} (\aleph' + \aleph'')(u, v) \\ &= \sum_{(u,v) \in E' \cup E''} (\aleph' \cup \aleph'')(u, v) + \sum_{(u,v) \in E^*} \min \{\Omega'(u), \Omega''(v)\} \\ &= \sum_{(u,v) \in E'} \aleph''(u, v) + \sum_{v \in A''} \min \{\Omega'(u), \Omega''(v)\} \\ &= der_{\mathcal{G}'}(u) + \sum_{v \in A''} \Omega''(v) \\ &= der_{\mathcal{G}'}(u) + o(\mathcal{G}''). \end{aligned}$$

Yine $\Omega' \geq \Omega''$ ve $u \in A''$ ise tanımdan,

$$der_{\mathcal{G}'+\mathcal{G}''}(u) = \sum_{(v,u) \in E} (\aleph' + \aleph'')(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(u,v) \in E' \cup E''} (\mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}'')(u,v) + \sum_{(u,v) \in E^*} \min \{ \Omega'(u), \Omega''(v) \} \\
&= \sum_{(u,v) \in E''} \mathfrak{J}'(u,v) + \sum_{v \in \mathcal{A}'} \min \{ (\Omega'(u), \Omega''(v)) \} \\
&= der_{\mathcal{G}''}(u) + \sum_{v \in \mathcal{A}'} \Omega'(u) \\
&= der_{\mathcal{G}''}(u) + p_1 \Omega''(u).
\end{aligned}$$

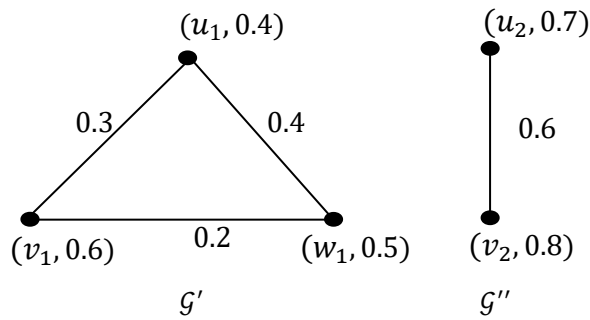
Dolayısıyla eğer $\Omega' \geq \Omega''$ dan sonra,

$$der_{\mathcal{G}'+\mathcal{G}''}(u) = \begin{cases} der_{\mathcal{G}'}(u) + o(\mathcal{G}''), & u \in \mathcal{A}' \\ der_{\mathcal{G}''}(u) + p_1 \mathfrak{J}''(u), & u \in \mathcal{A}'' \end{cases}$$

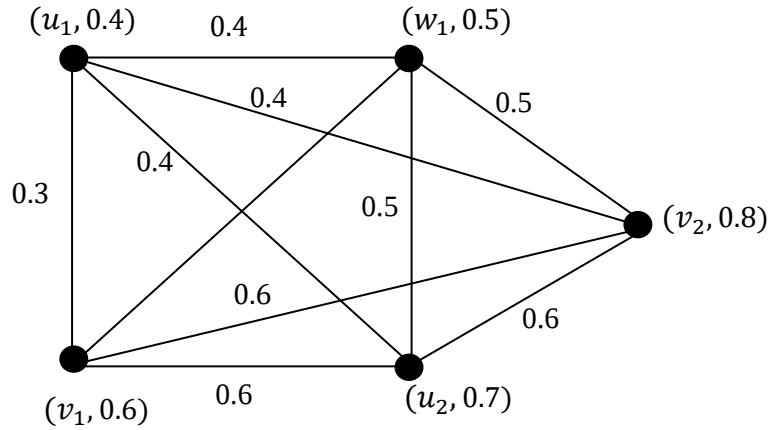
Benzer şekilde $\Omega' \leq \Omega''$ olduğunu ispatlayabiliriz.

$$der_{\mathcal{G}'+\mathcal{G}''}(u) = \begin{cases} der_{\mathcal{G}'}(u) + p_2 \mathfrak{J}'(u), & u \in \mathcal{A}' \\ der_{\mathcal{G}''}(u) + o(\mathcal{G}'), & u \in \mathcal{A}'' \end{cases}$$

Örnek 4.8 $\mathcal{G}' = (\mathcal{A}', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (\mathcal{A}'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ aşağıdaki gibi iki bulanık graf olsun. $E' = \{((u_1, v_1), (v_1, w_1), (u_1, w_1))\}$ ve $E'' = \{((u_2, v_2))\}$ 'dir. $\mathcal{G}' + \mathcal{G}''$ işlemini gösterelim.



Şekil 4.3 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ grafları



Şekil 4.4 $\mathcal{G}' + \mathcal{G}''$ grafi

$\mathcal{G}' + \mathcal{G}''$ şeklinde gösterilir. Tüm noktaların dereceleri;

$$\text{der}_{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}(u_1) = 0.4 + 0.4 + 0.4 + 0.3 = 1.5$$

$$\text{der}_{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}(v_1) = 0.3 + 0.2 + 0.6 + 0.6 = 1.7$$

$$\text{der}_{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}(w_1) = 0.4 + 0.2 + 0.5 + 0.5 = 1.6$$

$$\text{der}_{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}(u_2) = 0.6 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1$$

$$\text{der}_{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}(v_2) = 0.5 + 0.4 + 0.6 + 0.6 = 2.1 \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Tanım 4.9 (Mordeson and Peng 1994) (**Bulanık Grafların Bileşkesi**): $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graf olsun. $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının bileşkesi;

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}'[\mathcal{G}''] = (A, \Omega' \circ \Omega'', \mathfrak{A}' \circ \mathfrak{A}'')$$

Şeklinde tanımlanır. Burada $A = (A' \times A'')$ ve $E = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) : a_1 = a_2, (b_1 = b_2) \in E'' \text{ veya } b_1 = b_2, (a_1, a_2) \in E'\} \cup \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) \mid b_1 \neq b_2\}$ dir Burada;

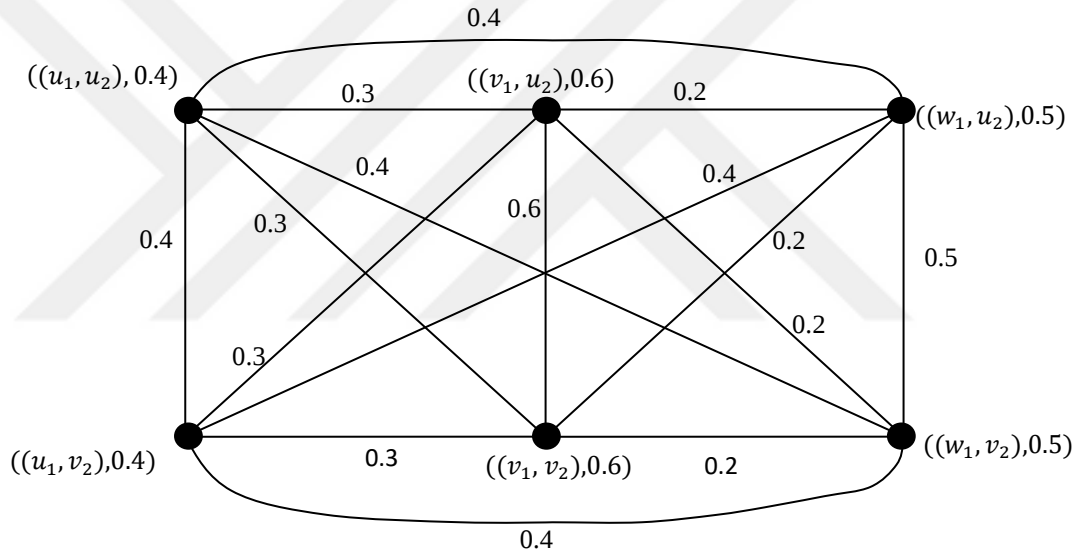
$$(\Omega' \circ \Omega'')(x, y) = \Omega'(x) \wedge \Omega''(y)$$

ve her $(a_1, b_1) \in A' \times A''$ için,

$$(\mathfrak{J}' \circ \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \begin{cases} \min \{\Omega'(a_1), \mathfrak{J}''(b_1, b_2)\}, & a_1 = a_2, (b_1, b_2) \in E'' \\ \min \{\mathfrak{J}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1)\}, & b_1 = b_2, (a_1, a_2) \in E' \\ \min \{\mathfrak{J}'(a_1, a_2), \min \{\Omega'(b_1) \wedge \Omega''(b_2)\}\}, & b_1 \neq b_2, (a_1, a_2) \in E' \end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek 4.10 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık grafi örnek 4.2, şekil 4.3'teki bulanık grafları göz önüne alım. $\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''$ bulanık grafi aşağıdaki gibi elde edilir



Şekil 4.5 $\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''$ grafi

Tanım 4.11 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık graf olsun. Daha sonra $(a_1, b_1) \in A$ noktasının $\mathcal{G}'[\mathcal{G}'']$ bulanık grafindaki derecesi $der_{\mathcal{G}'[\mathcal{G}'']}(a_1, b_1)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$der_{\mathcal{G}'[\mathcal{G}'']}(a_1, b_1) = \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{J}' \circ \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a_1=a_2, (b_1, b_2) \in E''} \min \{ \Omega'(a_1), \aleph''(b_1, b_2) \} \\
&\quad + \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \min \{ \aleph'(a_1, a_2), \Omega''(b_1) \} \\
&\quad + \sum_{b_1 \neq b_2, (a_1, a_2) \in E'} \min \{ \aleph'(a_1, a_2), \Omega'(b_1), \Omega''(b_2) \}.
\end{aligned}$$

Teorem 4.12 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \aleph')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \aleph'')$ iki bulanık graf olsun. Eğer, $\Omega' \geq \aleph''$ ve $\Omega'' \geq \aleph'$ olursa, $der_{\mathcal{G}'[\mathcal{G}'']}(a_1, b_1) = |A''| der_{\mathcal{G}'}(a_1) + der_{\mathcal{G}''}(b_1)$ ' dir.

İspat: Tanımdan,

$$\begin{aligned}
der_{\mathcal{G}'[\mathcal{G}'']}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\aleph' \circ \aleph'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\
&= \sum_{a_1=a_2, (b_1, b_2) \in E''} \min \{ \Omega'(a_1), \aleph''(b_1, b_2) \} \\
&\quad + \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \min \{ \aleph'(a_1, a_2), \Omega''(b_1) \} \\
&\quad + \sum_{b_1 \neq b_2, (a_1, a_2) \in E'} \min \{ \aleph'(a_1, a_2), \Omega'(b_1), \Omega''(b_2) \}. \\
&= \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \aleph'(a_1, a_2) + \sum_{b_1 \neq b_2, (a_1, a_2) \in E'} \aleph'(a_1, a_2) + \sum_{(b_1, b_2) \in E''} \aleph''(b_1, b_2) \\
&= |A''| der_{\mathcal{G}'}(a_1) + der_{\mathcal{G}''}(b_1).
\end{aligned}$$

Buradan, $der_{\mathcal{G}'[\mathcal{G}'']}(a_1, b_1) = |A''| der_{\mathcal{G}'}(a_1) + der_{\mathcal{G}''}(b_1)$ bulunur.

Örnek 4.13 Şekil 4.5'te verilmiş $\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''$ şeklinde gösterilen grafta tüm noktaların dereceleri;

$$der_{\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''}(u_1, u_2) = 0.4 + 0.3 + 0.4 + 0.4 + 0.3 = 2.1$$

$$der_{\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''}(u_1, v_2) = 0.4 + 0.3 + 0.4 + 0.3 + 0.4 = 1.8$$

$$der_{\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''}(v_1, u_2) = 0.3 + 0.4 + 0.6 + 0.2 + 0.2 = 1.7$$

$$der_{\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''}(v_1, v_2) = 0.3 + 0.3 + 0.6 + 0.2 + 0.2 = 1.6$$

$$der_{\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''}(w_1, u_2) = 0.2 + 0.4 + 0.2 + 0.5 = 1.3$$

$$der_{\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}''}(w_1, v_2) = 0.2 + 0.2 + 0.5 + 0.4 = 1.3 \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Tanım 4.14 (Ramaswamy and Pornima 2009) **(Bulanık Grafların Doğrudan Çarpımı):** $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graf ve $A' \cap A'' = \emptyset$ olsun. $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ nün çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \sqcap \Omega'', \mathfrak{A}' \sqcap \mathfrak{A}'')$$

Burada $A = A' \times A''$ 'dir. $E = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) : (a_1, a_2) \in (b_1, b_2) \in E''\}$.

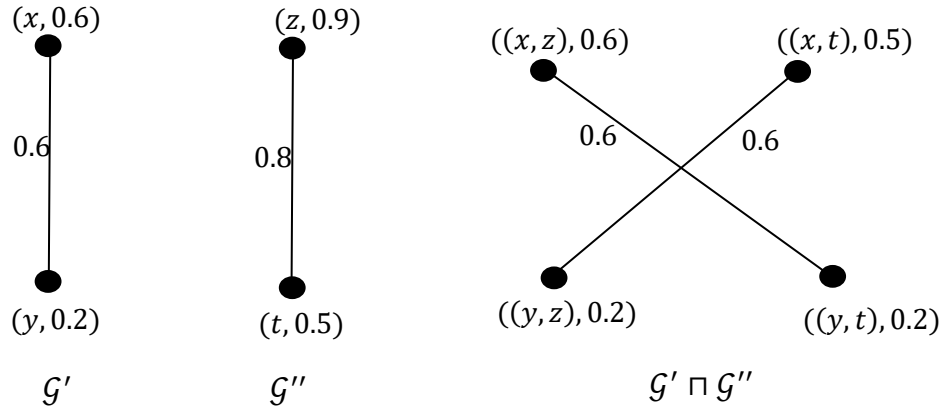
Ortaya çıkan $\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}''$ grafinin (x, y) noktasının üyelik değeri şu şekildedir;

$$(\Omega' \sqcap \Omega'')(x, y) = \Omega'(x) \wedge \Omega''(y)$$

Ve $\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}''$ grafinde $((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ bir kenarının üyelik değeri;

$$(\mathfrak{A}' \sqcap \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\}$$

Örnek 4.15 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graf $A' = \{x, y\}$, $A'' = \{z, t\}$, $E' = \{(x, y)\}$, $E'' = \{(z, t)\}$ aşağıdaki gibi verilsin. $\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}''$ işlemi;



Şekil 4.6 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları doğrudan çarpımı

Teorem 4.16 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları güçlü graf ise, $\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}''$ da güçlü bulanık graftır.

İspat: $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \aleph')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \aleph'')$ iki güçlü bulanık graf, $\aleph'(a_1, a_2) = \min\{\Omega'(a_1), \Omega'(a_2)\}$ ve $\aleph''(b_1, b_2) = \min\{\Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\}$ her $(a_1, a_2) \in E'$ ve $(b_1, b_2) \in E''$ için geçerlidir.

$$\begin{aligned}
 (\aleph' \sqcap \aleph'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) &= \min\{\aleph'(a_1, a_2), \aleph''(b_1, b_2)\} \\
 &= \min\{\min\{\Omega'(a_1), \Omega'(a_2)\}, \min\{\Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\}\} \\
 &= \min\{\min\{\Omega'(a_1), \Omega''(b_1)\}, \min\{\Omega'(a_2), \Omega''(b_2)\}\} \\
 &= \min\{(\Omega' \sqcap \Omega'')(a_1, b_1), (\Omega' \sqcap \Omega'')(a_2, b_2)\}
 \end{aligned}$$

Buradan $\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}''$ güçlü bulanık graf olduğu görülür.

Teorem 4.17 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ iki bulanık graf olsun. Eğer $\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}''$ güçlü bulanık graf ise $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ den en az biri güçlü bulanık graftır.

İspat: $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ iki bulanık graf ve her ikisinde grafta güçlü bulanık graf olmasın. O zaman $(a_1, a_2) \in E'$, $(b_1, b_2) \in E''$ $\aleph'(a_1, a_2) < \min\{\Omega'(a_1), \Omega'(a_2)\}$ ve $\aleph''(b_1, b_2) < \min\{\Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\}$ koşullarını sağlayan en bir kenarı vardır. Şimdi;

$$\begin{aligned}
(\aleph' \sqcap \aleph'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) &= \min \{ \aleph'(a_1, a_2), \aleph''(b_1, b_2) \} \\
&< \min \{ \min \{ \Omega'(a_1), \Omega'(a_2) \}, \min \{ \Omega''(b_1), \Omega''(b_2) \} \} \\
&= \min \{ \min \{ \Omega'(a_1), \Omega''(b_1) \}, \min \{ \Omega'(a_2), \Omega''(b_2) \} \} \\
&= \min \{ (\Omega' \sqcap \Omega'')(a_1, b_1), (\Omega' \sqcap \Omega'')(a_2, b_2) \}
\end{aligned}$$

Öyleyse,

$$(\aleph' \sqcap \aleph'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) < \min \{ (\Omega' \sqcap \Omega'')(a_1, b_1), (\Omega' \sqcap \Omega'')(a_2, b_2) \}.$$

Bu durum $\mathcal{G}' \sqcap \mathcal{G}''$ 'nin güçlü olmadığını gösterir. Bu bir çelişkidir. O halde ise $\mathcal{G}'$ veya $\mathcal{G}''$ den en az biri güçlü bulanık graftır.

Tanım 4.18 (Havary and Haroni 2016) **(Bulanık Grafların Yarı Güçlü Çarpımları):** $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \aleph')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \aleph'')$ iki bulanık graf ve $A' \cap A'' = \emptyset$ olsun. $A = A' \times A''$, ve $E = \{(x, b_1), (x, b_2) \mid x \in A', (b_1 = b_2) \in E''\} \cup \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid ((a_1, a_2) \in E' (b_1, b_2) \in E''\}$ olmak üzere $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafların yarı güçlü çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{G}' \bullet \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \bullet \Omega'', \aleph' \bullet \aleph'')$$

Burada $\mathcal{G}' \bullet \mathcal{G}''$ 'bulanık grafindaki (x, y) noktasının üyelik değeri;

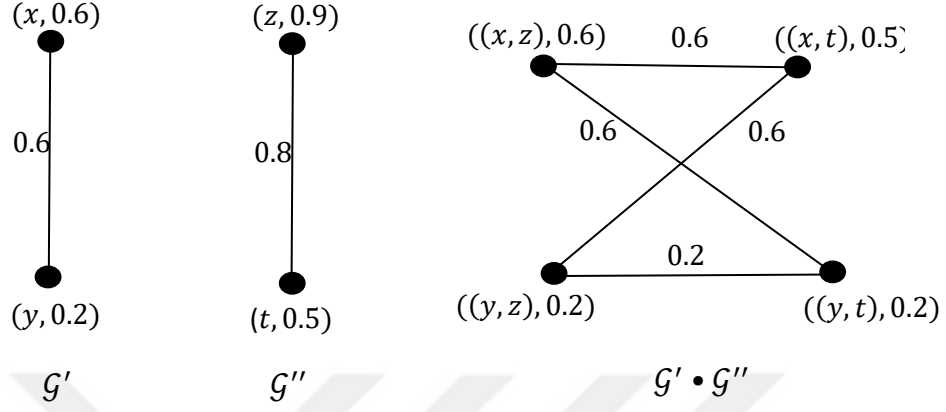
$$(\Omega' \bullet \Omega'')(x, y) = \min \{ \Omega'(x), \Omega''(y) \}$$

ve $\mathcal{G}' \bullet \mathcal{G}''$ bulanık grafindeki kenarların üyelik değeri;

$$\begin{cases}
(\aleph' \bullet \aleph'')((x, b_1), (x, b_2)) = \min \{ \Omega'(x), \aleph''(b_1, b_2) \} \\
(\aleph' \bullet \aleph'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \min \{ \aleph'(a_1, a_2), \aleph''(b_1, b_2) \}
\end{cases}$$

ile hesaplanır.

Örnek 4.19 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları ve bu grafların yarı güçlü çarpımı aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.7 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının yarı güçlü çarpımı

Teorem 4.20 İki bulanık grafin yarı güçlü çarpımı güçlü bulanık graftır.

İspat: Eğer $((x, b_1), (x, b_2)) \in E$,

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{S}' \bullet \mathfrak{S}'')((x, b_1), (x, b_2)) &= \min \{ \Omega'(x), \mathfrak{S}''(b_1, b_2) \} \\
 &= \min \{ \Omega'(x), \min \{ \Omega''(b_1), \Omega''(b_2) \} \} \\
 &= \min \{ \min \{ \Omega'(x), \Omega''(b_1) \}, \min \{ \Omega'(x), \Omega''(b_2) \} \} \\
 &= (\Omega' \bullet \Omega'')(x, b_1) \wedge (\Omega' \bullet \Omega'')(x, b_2).
 \end{aligned}$$

Eğer, $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E$, ise

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{S}' \bullet \mathfrak{S}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) &= \min \{ \mathfrak{S}'(a_1, a_2), \mathfrak{S}''(b_1, b_2) \} \\
 &= \min \{ \min \{ \Omega'(a_1), \Omega'(a_2) \}, \min \{ \Omega''(b_1), \Omega''(b_2) \} \} \\
 &= \min \{ \min \{ \Omega'(a_1), \Omega''(b_1) \}, \min \{ \Omega'(a_2), \Omega''(b_2) \} \} \\
 &= \min \{ (\Omega' \bullet \Omega'')(a_1, b_1), (\Omega' \bullet \Omega'')(a_2, b_2) \}.
 \end{aligned}$$

Buradan $\mathcal{G}' \bullet \mathcal{G}''$ de güçlü bulanık olduğu görülür.

Teorem 4.21 Eğer $\mathcal{G}' \bullet \mathcal{G}''$ güçlü bulanık graf ise $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarından en az biri güçlüdür.

Tanım 4.22 (Havary and Haroni 2016) (**Bulanık Grafların Güçlü Çarpımları**) $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graf ve $A' \cap A'' = \emptyset$ olsun. $A = A' \times A''$ 'dır. $E = \{(x, b_1), (x, b_2): x \in A', (b_1, b_2) \in E''\} \cup \{(a_1, y), (a_2, y): (a_1, a_2) \in E', y \in E''\} \cup \{(a_1, b_1), (a_2, b_2): (a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E''\}$ olmak $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının güçlü çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \odot \Omega'', \mathfrak{A}' \odot \mathfrak{A}'')$$

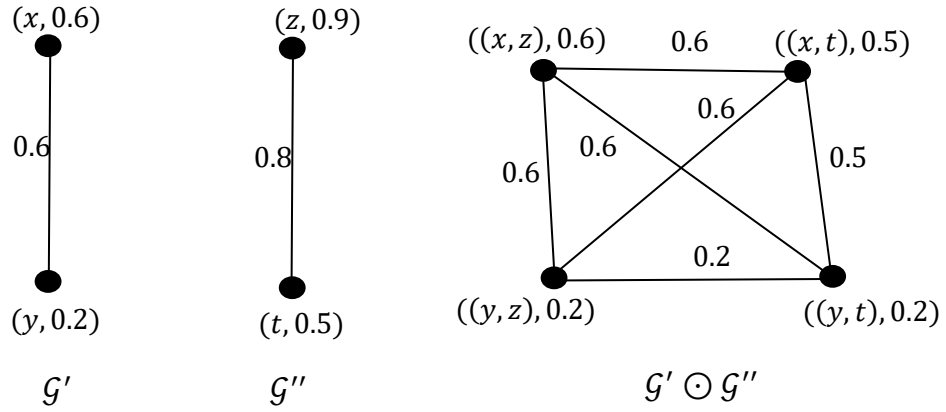
Burada, $\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$ bulanık grafında (x, y) noktasının üyelik değeri aşağıdaki gibi elde edilir

$$(\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}'')(x, y) = \min \{\Omega'(x), \Omega''(y)\}$$

$\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$ bulanık grafındaki kenarların üyelik değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{cases} (\mathfrak{A}' \odot \mathfrak{A}'')((x, b_1), (x, b_2)) = \min \{\Omega'(x), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} \\ (\mathfrak{A}' \odot \mathfrak{A}'')((a_1, y), (a_2, y)) = \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \Omega''(y)\} \\ (\mathfrak{A}' \odot \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} \end{cases}$$

Örnek 4.23 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graf $A' = \{x, y\}$, $A'' = \{z, t\}$, $E' = \{(x, y)\}$, $E'' = \{(z, t)\}$ olmak üzere $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları ve $\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$ bulanık grafı aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.8 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının güçlü çarpımı

Teorem 4.24 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları güçlü bulanık graf ise, $\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$ da güçlü bulanık graftır.

İspat: Bulanık grafların güçlü çarpımının bir bulanık graf olduğunu biliyoruz. Şimdi eğer $((x, b_1), (x, b_2)) \in E$,

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{A}' \odot \mathfrak{A}'')((x, b_1), (x, b_2)) &= \min \{ \Omega'(x), \mathfrak{A}''(b_1, b_2) \} \\
 &= \min \{ \Omega'(x), \min \{ \Omega''(b_1), \Omega''(b_2) \} \} \\
 &= \min \{ \min \{ \Omega'(x), \Omega''(b_1) \}, \min \{ \Omega'(x), \Omega''(b_2) \} \} \\
 &= \min \{ (\Omega' \odot \Omega'')(x, b_1), (\Omega' \odot \Omega'')(x, b_2) \}.
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{A}_2' \odot \mathfrak{A}_2'')((x, b_1), (x, b_2)) &= \max \{ \Omega_2'(x), \mathfrak{A}_2''(b_1, b_2) \} \\
 &= \max \{ \Omega_2'(x), \max \{ \Omega_2''(b_1), \Omega_2''(b_2) \} \} \\
 &= \max \{ \max \{ \Omega_2'(x), \Omega_2''(b_1) \}, \max \{ \Omega_2'(x), \Omega_2''(b_2) \} \} \\
 &= \max \{ (\Omega_2' \odot \Omega_2'')(x, b_1), (\Omega_2' \odot \Omega_2'')(x, b_2) \}.
 \end{aligned}$$

Eğer $((a_1, y), (a_2, y)) \in E$,

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}' \odot \mathfrak{A}'')((a_1, y), (a_2, y)) &= \min \{ \mathfrak{A}'(a_1, a_2), \Omega''(y) \} \\
&= \min \{ \min \{ \Omega'(a_1), \Omega'(a_2) \}, \Omega''(y) \} \\
&= \min \{ \min \{ \Omega'(a_1), \Omega''(y) \}, \min \{ \Omega'(a_2), \Omega''(y) \} \} \\
&= \min \{ (\Omega' \odot \Omega'')(a_1, y), (\Omega' \odot \Omega'')(a_2, y) \}.
\end{aligned}$$

Eğer $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E$,

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}' \odot \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) &= \min \{ \mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2) \} \\
&= \min \{ \min \{ \Omega'(a_1), \Omega'(a_2) \}, \min \{ \Omega''(b_1), \Omega''(b_2) \} \} \\
&= \min \{ \min \{ \Omega'(a_1), \Omega''(b_1) \}, \min \{ \Omega'(a_2), \Omega''(b_2) \} \} \\
&= \min \{ (\Omega' \odot \Omega'')(a_1, b_1), (\Omega' \odot \Omega'')(a_2, b_2) \}.
\end{aligned}$$

Böylece, $\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$ işlemininde güçlü bulanık graf olduğu görülmüştür.

Aşağıdaki teorem yukarıdaki sonuçtan çıkar.

Teorem 4.25 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graftır. Eğer $\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$ güçlü bulanık graf ise $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ den en az biri güçlü bulanık graftır.

Tanım 4.26 (Mordeson and Peng 1994) **(Bulanık Grafların Kartezyen Çarpımı)** $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graf olsun. $A = A' \times A''$ ve $E = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)): a_1 = a_2, (b_1, b_2) \in E'' \text{ veya } b_1 = b_2, (a_1, a_2) \in E'\}$ olmak üzere, $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \times \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'')$$

Burada $\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$ bulanık grafindaki (x, y) noktasının üyelik değeri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\Omega' \times \Omega'')(x, y) = \min \{ \Omega'(x), \Omega''(y) \}$$

$\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$ bulanık grafindaki $(a_1, b_1) \in A' \times A''$ kenarının üyelik derecesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(\mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \begin{cases} \min \{\Omega'(a_1), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\}, & \text{eğer } a_1 = a_2, (b_1, b_2) \in E'' \\ \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1)\}, & \text{eğer } b_1 = b_2, (a_1, a_2) \in E' \end{cases}$$

Tanım 4.27 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık grafinin kartezyen çarpımı $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \times \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'')$ olsun. $\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$ bulanık kartezyen çarpımındaki (a_1, b_1) noktasının derecesi $der_{\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\ &= \sum_{a_1=a_2, (b_1, b_2) \in E''} \min \{\Omega'(a_1), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} + \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1)\} \end{aligned}$$

Teorem 4.28 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graf olsun. Eğer $\Omega' \geq \mathfrak{A}''$ ve $\Omega'' \geq \mathfrak{A}'$ ise, $der_{\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = der_{\mathcal{G}'}(a_1) + der_{\mathcal{G}''}(b_1)$. Burada $a_1 \in A'$ ve $b_1 \in A''$ 'dir.

İspat: Tanımdan,

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\ &= \sum_{a_1=a_2, (b_1, b_2) \in E''} \min \{\Omega'(a_1), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} + \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1)\} \\ &= \sum_{(b_1, b_2) \in E''} \mathfrak{A}''(b_1, b_2) + \sum_{(a_1, a_2) \in E'} \mathfrak{A}'(a_1, a_2) \quad (\Omega' \geq \mathfrak{A}'' \text{ ve } \Omega'' \geq \mathfrak{A}') \\ &= \sum_{(a_1, a_2) \in E'} \mathfrak{A}'(a_1, a_2) + \sum_{(b_1, b_2) \in E''} \mathfrak{A}''(b_1, b_2) \end{aligned}$$

$$= der_{\mathcal{G}'}(a_1) + der_{\mathcal{G}''}(b_1) \text{ dir.}$$

Tanım 4.29 (Dogra 2015) (**Bulanık Grafların Tensör Çarpımı**) $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ iki bulanık graf olsun. $A = A' \times A''$ ve $E = \left\{ \left((a_1, b_1), (a_2, b_2) \right) \mid (a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E'' \right\}$ olmak üzere $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları arasında $\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''$ ile gösterilen tensör çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}'' = (\mathcal{A}, \Omega' \otimes \Omega'', \mathfrak{J}' \otimes \mathfrak{J}'')$$

Burada, $\mathcal{G}' \times \mathcal{G}''$ bulanık grafindaki (x, y) noktasının üyelik derecesi aşağıdaki gibi

$$(\Omega' \otimes \Omega'')(x, y) = \min \{ \Omega'(x), \Omega''(y) \}$$

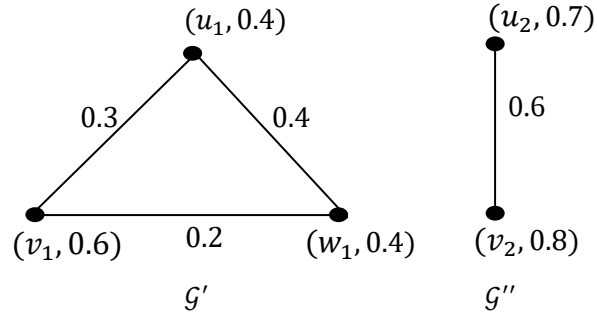
$\left((a_1, b_1), (a_2, b_2) \right)$ kenarının üyelik derecesi ise aşağıdaki gibi elde edilir

$$(\mathfrak{J}' \otimes \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \min \{ \mathfrak{J}'(a_1, a_2), \mathfrak{J}''(b_1, b_2) \}.$$

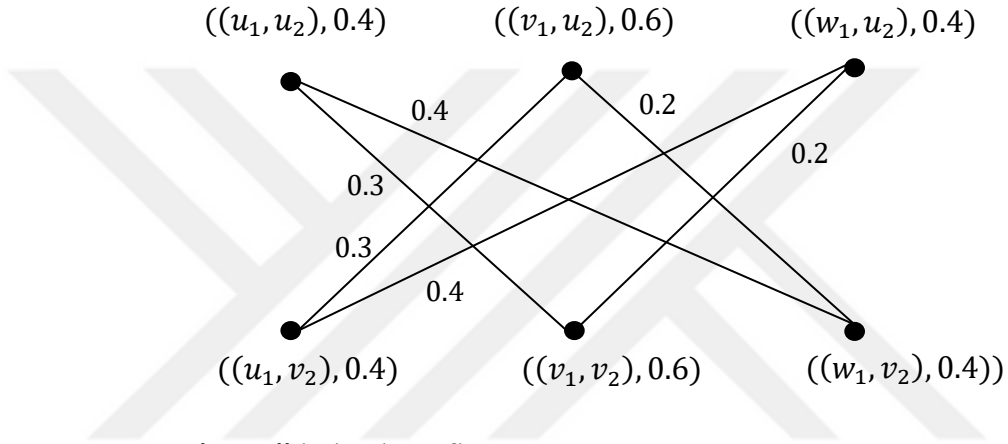
Tanım 4.30 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ iki bulanık grafının tensör çarpımı $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \otimes \Omega'', \mathfrak{J}' \otimes \mathfrak{J}'')$ olsun. $\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''$ bulanık grafindaki $(a_1, b_1) \in A' \times A''$ noktasının $der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$ ile gösterilen derecesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{J}' \otimes \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\ &= \sum_{(a_1, a_2) \in E'} \min \{ \mathfrak{J}'(a_1, a_2), \mathfrak{J}''(b_1, b_2) \} \end{aligned}$$

Örnek 4.31 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ Şekil 4.9'daki gibi verilen iki bulanık graf olsun. Şekil 4.9'da $E' = \{((u_1, v_1), (v_1, w_1), (u_1, w_1))\}$ ve $E'' = \{((u_2, v_2))\}$ 'dir. $\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''$ çarpımı Şekil 4.10'daki gibi elde edilir.



Şekil 4.9 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ grafları



Şekil 4.10 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının tensör çarpımı

$\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''$ bulanık tensör çarpımındaki noktaların dereceleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(u_1, v_2) &= \min\{\mathfrak{J}'(u_1, v_1), \mathfrak{J}''(v_2, u_2)\} + \min\{\mathfrak{J}'(u_1, w_1), \mathfrak{J}''(v_2, u_2)\} \\ &= 0.3 + 0.4 = 0.7 \end{aligned}$$

$$der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(u_1, u_2) = 0.7$$

$$der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(w_1, v_2) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

$$der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(v_1, v_2) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(v_1, u_2) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

$$der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(w_1, u_2) = 0.2 + 0.4 = 0.6 \text{ şeklinde bulunur.}$$

Teorem 4.32 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık grafi olsun. Eğer $\mathfrak{A}'' \geq \mathfrak{A}'$ ise, $der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = der_{\mathcal{G}'}(a_1)$ ve $\mathfrak{A}' \geq \mathfrak{A}''$ ise $der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = der_{\mathcal{G}''}(b_1)$.

İspat: Eğer $\mathfrak{A}'' \geq \mathfrak{A}'$ ise,

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\ &= \sum_{(a_1, a_2) \in E'} \min\{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} \\ &= \sum_{(a_1, a_2) \in E'} \mathfrak{A}'(a_1, a_2) = der_{\mathcal{G}'}(a_1) \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = der_{\mathcal{G}'}(a_1)$.

Benzer şekilde, eğer $\mathfrak{A}' \geq \mathfrak{A}''$ ise $der_{\mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = der_{\mathcal{G}''}(b_1)$ olduğu görülür.

Tanım 4.33 (Dogra 2015) **(Bulanık Grafların Normal Çarpımı)** $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık graf olsun $A = A' \times A''$ ve $E = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) \mid a_1 = a_2, (b_1, b_2) \in E'' \text{ veya } b_1 = b_2, (a_1, a_2) \in E'\} \cup \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid (a_1, a_2) \in E' \text{ (} b_1, b_2) \in E'' \}$ olmak üzere $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının $\mathcal{G}' \bullet_n \mathcal{G}''$ ile gösterilen normal çarpımı çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \bullet_n \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \bullet_n \Omega'', \mathfrak{A}' \bullet_n \mathfrak{A}'')$$

Burada, $\mathcal{G}' \bullet_n \mathcal{G}''$ bulanık grafindaki (x, y) noktasının üyelik derecesi aşağıdaki gibi elde edilir

$$(\Omega' \bullet_n \Omega'')(x, y) = \min \{\Omega'(x), \Omega''(y)\}$$

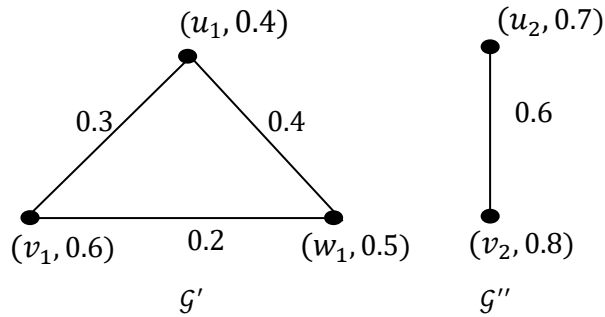
Ayrıca $\mathcal{G}' \bullet \mathcal{G}''$ bulanık grafindaki $((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ kenarının üyelik derecesi aşağıdaki gibi elde edilir

$$(\mathfrak{A}' \bullet_n \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \begin{cases} \min\{\Omega'(a_1), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\}, & a_1 = a_2, (b_1, b_2) \in E'' \\ \min\{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1)\}, & b_1 = b_2, (a_1, a_2) \in E' \\ \min\{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\}, & (a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E'' \end{cases}$$

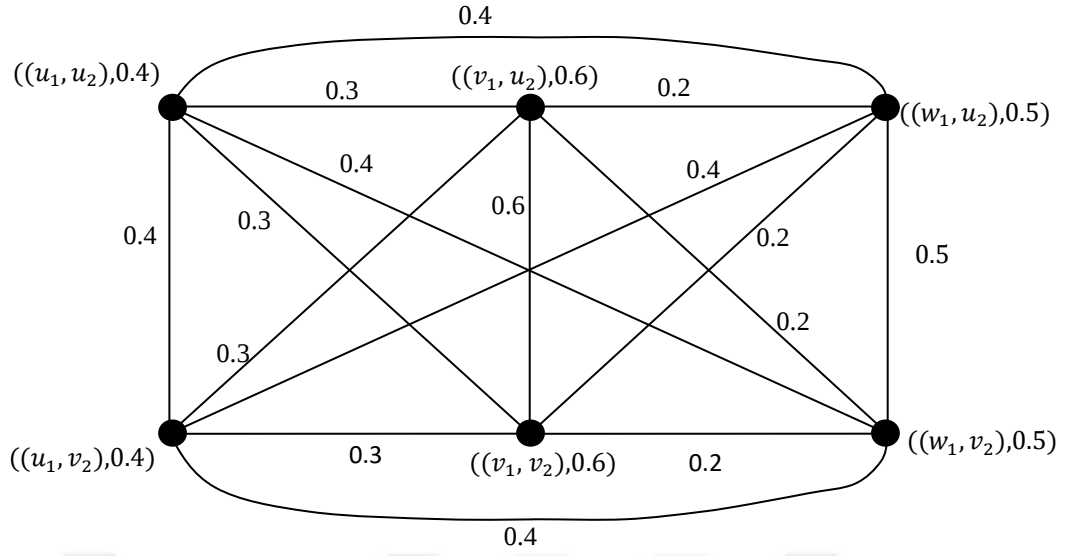
Tanım 4.34 $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \bullet_n \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \bullet_n \Omega'', \mathfrak{A}' \bullet_n \mathfrak{A}'')$, $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının normal çarpımı olsun. A' daki (a_1, b_1) noktasının $der_{\mathcal{G}' \bullet_n \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$ ile gösterile derecesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \bullet_n \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{A}' \bullet_n \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\ &= \sum_{a_1=a_2, (b_1, b_2) \in E''} \min\{\Omega'(a_1), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} + \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \min\{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1)\} \\ &\quad + \sum_{(a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E''} \min\{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\}. \end{aligned}$$

Örnek 4.35 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ Şekil 4.11'deki gibi iki bulanık graf olsun. $E' = \{(u_1, v_1), (v_1, w_1), (u_1, w_1)\}$ ve $E'' = \{(u_2, v_2)\}$ 'dir. $\mathcal{G}' \bullet_n \mathcal{G}''$ bulanık grafi Şekil 4.12'deki gibi elde edilir.



Şekil 4.11 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ grafları



Şekil 4.12 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının normal çarpımı

Teorem 4.36 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık grafi verilsin. Eğer $\Omega' \geq \mathfrak{A}''$, $\Omega'' \geq \mathfrak{A}'$ ve $\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A}''$ ise $der_{\mathcal{G}' \cdot \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = |\mathcal{A}''| der_{\mathcal{G}'}(a_1) + der_{\mathcal{G}''}(b_1)$, burada $a_1 \in A'$ ve $b_1 \in A''$ 'dir.

İspat: $\Omega' \geq \mathfrak{A}''$, $\Omega'' \geq \mathfrak{A}'$ ve $\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A}''$, tanımdan

$$\begin{aligned}
 der_{\mathcal{G}' \cdot \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{A}' \cdot_n \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\
 &= \sum_{a_1=a_2, (b_1, b_2) \in E''} \min \{ \Omega'(a_1), \mathfrak{A}''(b_1, b_2) \} \\
 &\quad + \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \min \{ \mathfrak{A}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1) \} \\
 &\quad + \sum_{(a_1, a_2) \in (b_1, b_2) \in E''} \min \{ \mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2) \}. \\
 &= \sum_{(b_1, b_2) \in E''} \mathfrak{A}''(b_1, b_2) + \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \mathfrak{A}'(a_1, a_2) + \sum_{(a_1, a_2) \in E'} \mathfrak{A}'(a_1, a_2) \\
 &= \sum_{b_1=b_2, (a_1, a_2) \in E'} \mathfrak{A}'(a_1, a_2) + \sum_{(a_1, a_2) \in E'} \mathfrak{A}'(a_1, a_2) + \sum_{(b_1, b_2) \in E''} \mathfrak{A}''(b_1, b_2)
 \end{aligned}$$

$$= |A''|der_{1\mathcal{G}'}(a_1) + der_{1\mathcal{G}''}(b_1).$$

Buradan, $der_{\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = |A''|der_{\mathcal{G}'}(a_1) + der_{\mathcal{G}''}(b_1)$ bulunur.

Tanım 4.37 (Dogra 2015) **(Bulanık Grafların Modüler Çarpımı)** $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık grafi verilsin. $A = A' \odot A'' = \{(a_1, b_1) : a_1 \in A' \text{ ve } b_1 \in A''\}$ ve $E = E' \odot E'' = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) : (a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E'' \text{ ya da } (a_1, a_2) \notin E', (b_1, b_2) \notin E''\}$ olmak üzere $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının $\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$ ile gösterilen modüler çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \odot \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \odot \Omega'', \mathfrak{J}' \odot \mathfrak{J}'')$$

Burada her $(a_1, b_1) \in A$ için

$$(\Omega' \odot \Omega'')(a_1, b_1) = \min \{\Omega'(a_1), \Omega''(b_1)\}$$

ve $\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''$ 'deki her $((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ kenarının üyelik derecesi

$$(\mathfrak{J}' \odot \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \begin{cases} \min \{\mathfrak{J}'(a_1, a_2), \mathfrak{J}''(b_1, b_2)\} & , (a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E'' \\ \min \{\Omega'(a_1), \Omega'(a_2), \Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\} & , (a_1, a_2) \notin E', (b_1, b_2) \notin E'' \end{cases}$$

ile hesaplanır.

Tanım 4.38 $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \odot \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \odot \Omega'', \mathfrak{J}' \odot \mathfrak{J}'')$, $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık grafinin modüler çarpımı olmak üzere $(a_1, b_1) \in A$ noktasının derecesi $der_{\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$der_{\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{J}' \odot \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E''} \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} \\
&\quad + \sum_{(a_1, a_2) \notin E', (b_1, b_2) \notin E''} \min \{\Omega'(a_1), \Omega'(a_2), \Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\}
\end{aligned}$$

Teorem 4.39 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki tam bulanık graf olsun. Eğer $\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A}''$ ise, $der_{\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = der_{\mathcal{G}'}(a_1)$ olur.

İspat: Modüler çarpımda bir köşe noktasının derecesi tanımından;

$$\begin{aligned}
der_{\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{A}' \odot \mathfrak{A}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\
&= \sum_{(a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E''} \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} \\
&\quad + \sum_{(a_1, a_2) \notin E', (b_1, b_2) \notin E''} \min \{\Omega'(a_1), \Omega'(a_2), \Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\} \\
&= \sum_{(a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E''} \min \{\mathfrak{A}'(a_1, a_2), \mathfrak{A}''(b_1, b_2)\} \quad (\text{Her iki bulanık grafta tamdır}) \\
&= \sum_{(a_1, a_2) \in E'} \mathfrak{A}'(a_1, a_2) \quad (\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A}'' \text{ olduğundan}) \\
&= der_{\mathcal{G}'}(a_1).
\end{aligned}$$

Buradan, $der_{\mathcal{G}' \odot \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = der_{\mathcal{G}'}(a_1)$ bulunur.

Örnek 4.40 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{A}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{A}'')$ iki bulanık grafi Şekil 4.13' teki gibi verilsin. $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ 'nin modüler çarpımını Şekil 4.14'teki gibi elde edilir.

$(a_1, 0.9)$

0.3

$(a_2, 0.4)$

$\mathcal{G}'$

$(b_2, 0.3)$

0.1

$(b_1, 0.2)$

$(b_4, 0.4)$

0.2

0.1

$(b_3, 0.9)$

$\mathcal{G}''$

Şekil 4.13 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları

$((a_1, b_1), 0.2)$

0.2

0.1

$((a_2, b_1), 0.2)$

0.1

0.1

0.2

$((a_1, b_2), 0.3)$

0.3

$((a_2, b_2), 0.3)$

0.3

$((a_1, b_3), 0.9)$

$((a_2, b_3), 0.4)$

$((a_1, b_4), 0.4)$

0.3

0.3

$((a_2, b_4), 0.4)$

Şekil 4.14 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ 'nin modüler çarpımı

Tanım 4.41 (Dogra 2015) **(Bulanık Grafların Homomorfik Çarpımı)** $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık grafi verilsin. $A = A' \diamond A'' = \{(a_1, b_1) \mid a_1 \in A' \text{ ve } b_1 \in A''\}$ ve $E = E' \diamond E'' = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) : (a_1 = a_2, (b_1, b_2) \in E'' \text{ ya da } (a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \notin E'')\}$ olmak üzere $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ 'bulanık graflarının $\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''$ ile gösterilen homomorfik çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}'' = (A, \Omega' \diamond \Omega'', \mathfrak{J}' \diamond \mathfrak{J}'')$$

Burada, $\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''$ homomorfik çarpımdaki her $(a_1, b_1) \in A$ noktasının üyelik derecesi

$$(\Omega' \diamond \Omega'')(a_1, b_1) = \min \{\Omega'(a_1), \Omega''(b_1)\}$$

ile elde edilir. Ayrıca, $((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ kenarının üyelik derecesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$(\mathfrak{J}' \diamond \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \begin{cases} \min \{\Omega'(a_1), \mathfrak{J}''(b_1, b_2)\} & , a_1 = a_2, (b_1, b_2) \in E'' \\ \min \{\mathfrak{J}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\} & , (a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \notin E'' \end{cases}$$

Tanım 4.42 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık grafi verilsin. $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ 'nin homomorfik çarpımındaki $(a_1, b_1) \in A$ noktasının $der_{\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''}(a_1, b_1)$ ile gösterilen derecesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} der_{\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{J}' \diamond \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\ &= \sum_{(a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \in E''} \min \{\Omega'(a_1), \mathfrak{J}''(b_1, b_2)\} \\ &\quad + \sum_{(a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \notin E''} \min \{\mathfrak{J}'(a_1, a_2), \Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\} \end{aligned}$$

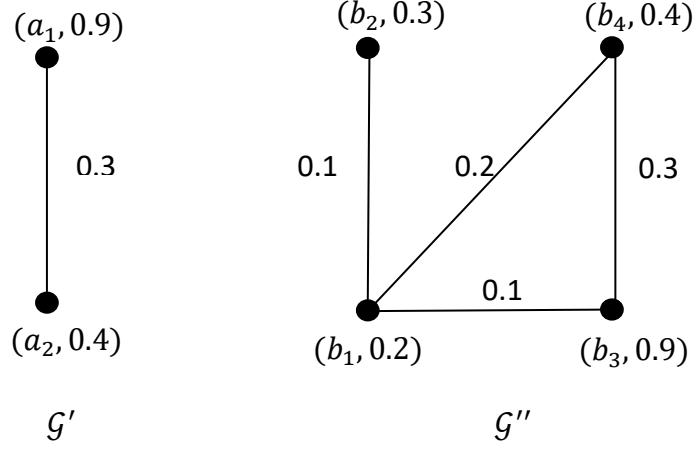
Teorem 4.43 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$ iki bulanık graf olsun. Eğer $\mathcal{G}''$ tam bulanık graf ve $\Omega' \leq \mathfrak{J}''$ ise $der_{\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = (|A''| - 1)\Omega'(a_1)$ dir.

İspat: Homomorfik çarpımda bir köşe noktasının derecesi tanımdan yazılabilir,

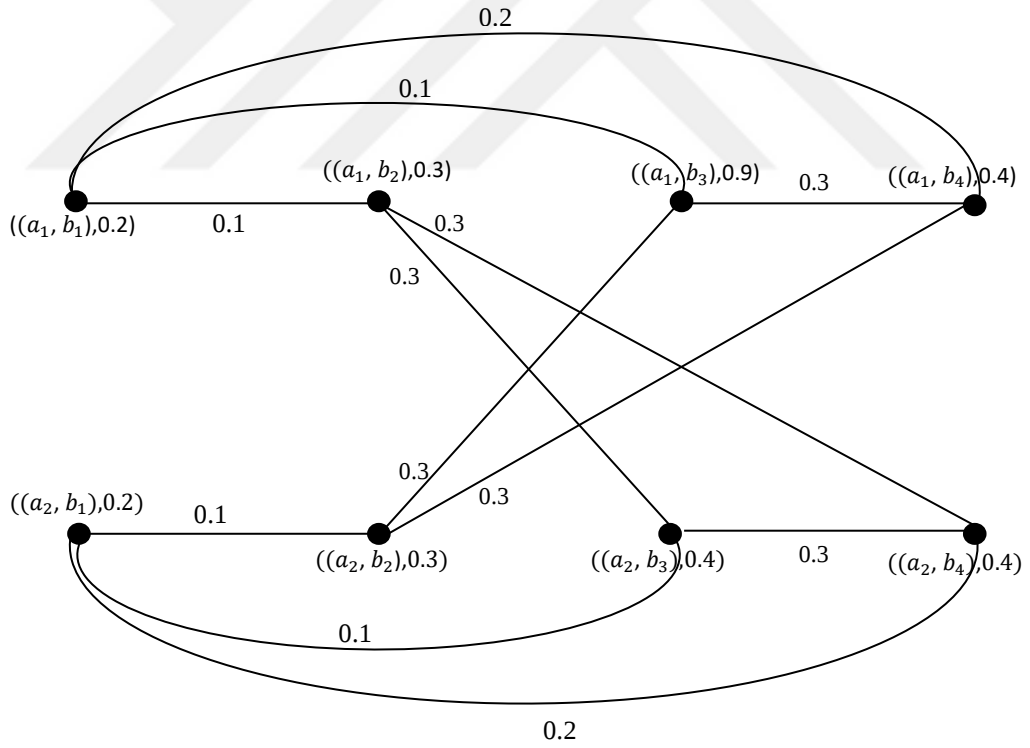
$$\begin{aligned}
 der_{\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''}(a_1, b_1) &= \sum_{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in E} (\mathfrak{J}' \diamond \mathfrak{J}'')((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \\
 &= \sum_{a_1=a_2, (b_1, b_2) \in E''} \min \{\Omega'(a_1), \mathfrak{J}''(b_1, b_2)\} \\
 &\quad + \sum_{(a_1, a_2) \in E', (b_1, b_2) \notin E''} \min \{\mathfrak{J}'(a_1, b_1), \Omega''(b_1), \Omega''(b_2)\} \\
 &= \sum_{a_1=a_2, (b_1, b_2) \in E''} \Omega'(a_1) \wedge \mathfrak{J}''(b_1, b_2) \quad (\mathcal{G}'' \text{ bir tam bulanık graf olduğundan}) \\
 &= \sum_{a_1=a_2} \Omega'(a_1) \quad (\Omega' \leq \mathfrak{J}'' \text{ olduğundan}) \\
 &= (|A''| - 1)\Omega'(a_1).
 \end{aligned}$$

Buradan, $der_{\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''}(a_1, b_1) = (|A''| - 1)\Omega'(a_1)$ bulunur.

Örnek 4.44 $\mathcal{G}' = (A', \Omega', \mathfrak{J}')$ ve $\mathcal{G}'' = (A'', \Omega'', \mathfrak{J}'')$, Şekil 4.15'teki gibi verilen iki bulanık graf olsun. $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık graflarının homomorfik çarpımını $\mathcal{G}' \diamond \mathcal{G}''$ Şekil 4.16' daki gibi elde edilir.



Şekil 4.15 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ bulanık grafları



Şekil 4.16 $\mathcal{G}'$ ve $\mathcal{G}''$ graflarının homomorfik çarpımları

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde bulanık küme işlemleri, bulanık bağıntılar, bulanık graflarla ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca bulanık graf işlemleri ve bu işlemler ilgili bazı sonuçlar literatürdeki kaynaklar ışığında derlenmiş ve örneklerle zenginleştirilmiştir. Bulanık graf yapılarının bilimin birçok alanında uygulamaları mevcuttur. Bu tezde gerçek hayattaki uygulamalara yer verilmemiş bulanık graf kavramının ve işlemlerini daha anlaşılır kılmak amaçlanmıştır. Ayrıca Türkçe literatürde bulanık graf işlemleri ile ilgili bir kaynak bulunmamaktadır. Bu tezle bulanık graf işlemlerinin anlatıldığı düzenli bir Türkçe kaynak ortaya konulmuştur.



KAYNAKLAR

- Al-Hawary, T. and Horani, B. 2016. On product fuzzy graphs. *Annals of fuzzy mathematics and Informatics*, 12(2): 279-294.
- Bede, B. 2013. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*.-Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Bhattacharya, P. 1987. Some remarks on fuzzy graphs. *Pattern recognition letters*, 6(5): 297-302.
- Bhutani, K. R. 1989. On automorphisms of fuzzy graphs, *Pattern Recognition Letters*, 9: 159-162.
- Bhutani, K.R., Rosenfeld, A. 2003a. Fuzzy end vertices in fuzzy graphs. *Inf. Sci.*, 152: 323-326.
- Bhutani, K.R., Rosenfeld, A. 2003b. Geodesics in fuzzy graphs. *Electron. Notes Discret. Math.* 15:51–54.
- Bhutani, K.R., Rosenfeld, A. 2003c. Strong arcs in fuzzy graphs. *Inf. Sci.* 152: 319-322.
- Bhutani, K. R. and Battou, A. 2003. On M-strong fuzzy graphs, *Information Sciences*, 155(1-2): 103-109.
- Chen, Q. J. 1990. Matrix representation of fuzzy graphs, *Information Sciences*, 1: 41-46.
- Clark, J. and Holton, D. A. *A First Look at Graph Theory*, Allied Publishers Limited, Berlin, Germany, 1991.
- Dogra, S. 2015. Different types of product of fuzzy graphs. *Progress in Nonlinear Dynamics and Chaos*, 3(1): 41-56.
- Kauffmann, A. 1973. *Introduction to the Theory of Fuzzy Sets*, Vol. 1, Academic Press, Inc., Orlando, Florida.
- Kóczy, L. 1992. Fuzzy graphs in the evaluation and optimization of networks. *Fuzzy sets and systems*, 46(3): 307-319.
- Mathew, S. and Sunitha, M. S. 2009. Types of arcs in a fuzzy graph, *Information Sciences*, 179(11): 1760-1768.
- McAllister, M. L. N. 1988. Fuzzy intersection graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, 15(10): 871-886.

- Mordeson, J. N. and Chang-Shyh, P. 1994. Operations on fuzzy graphs, *Information Sciences*, 79(3-4): 159–170.
- Mordeson J. N. and Nair, P. S. *Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs*, Physica Verlag, Heidelberg, 1998.
- Mordeson, J. N. and Nair, P. S. 1996. Cycles and cocycles of fuzzy graphs. *Information Sciences*, 90(1-4): 39-49.
- Mordeson, J. N., and Nair, P. S. 2000. *Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs* (Vol. 46). Physica.
- Nagoorgani, A. and Radha, K. 2008. On regular fuzzy graphs, *Journal of Physical Sciences*, 12: 33–40.
- Nagoorgani, A. and Radha, K. 2009. The degree of a vertex in some fuzzy graphs, *International Journal of Algorithms, Computing and Mathematic*, 2(3): 107-116.
- Radha, K., Arumugam, S. 2015. On Lexicographic products of two fuzzy graphs. *International Journal of Fuzzy Mathematical Archive*, 7(2): 169-176.
- Ramaswamy, V. and Poornima, B. 2009. Product fuzzy graphs, *International journal of computer science and network security*, 9 (1): 114-11.
- Rosenfeld, A. 1975. *Fuzzy graphs, fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes*. Acad. Press, New York, 77-95.
- Sunitha, M. S. and Vijayakumar, A. 2002. Complement of a fuzzy graph, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33(9): 1451-1464.
- Samanta, S., Sarkar, B., Shin, D. and Pal, M. 2016. Completeness and regularity of generalized fuzzy graphs, *SpringerPlus*, 5(1): 1979-1990.
- Samanta, S. and Sarkar, B. 2018. A study on generalized fuzzy graphs, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 35(3): 3405-3412.
- Tanaka, K. *An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications*, Springer-Verlag, New York 1996
- Yeh, R. T. and Bang, S. Y. 1975. Fuzzy relations, fuzzy graphs, and their applications to clustering analysis. In *Fuzzy sets and their applications to Cognitive and Decision Processes* (pp. 125-149). Academic Press.
- Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3): 338-353.

Zadeh, L. A. 1971. Similarity relations and fuzzy orderings. Information sciences, 3(2): 177-200.



