



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

BULANIK KÜMELERİN ESNEK KÜMELERE UYARLAMALARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Kübra AĞCAYAZI

Danışman
Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

TOKAT – 2024

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN danışmanlığında hazırlamış olduğum “Bulanık Kümelerin Esnek Kümelere Uyarlamaları” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

24/12/2024

Kübra AĞCAYAZI

İmza

JÜRİ KABUL VE ONAY

Kübra Ağcayazı tarafından hazırlanan “**Bulanık Kümelerin Esnek Kümelere Uyarlamaları**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 24/12/2024 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Unvanı, Adı Soyadı)

İmzası

Üye (Başkan) : Prof. Dr. İrfan DELİ

Üye : Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK

ONAY

...../...../.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez Çalışmasının her aşamasında bana yardımcı olan benden bilgi ve yardımları eksik etmeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN hocam başta olmak üzere, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen, beni bugünlere getiren her zaman destek olan aileme, her konuda beni cesaretlendiren ve kendisi de matematikçi olduğu için çok şanslı olduğum sevgili eşim Ertuğrul AĞCAYAZI' ya ve canım oğullarım Kuzey AĞCAYAZI ve Uraz AĞCAYAZI' ya teşekkür ederim.

KÜBRA AĞCAYAZI

24/12/2024

ÖZET

BULANIK KÜMELERİN ESNEK KÜMELERE UYARLAMALARI

Ağcayazı, Kübra

Yüksek Lisans, Matematik Ana Bilim Dalı

Tez danışmanı: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

Aralık 2024, vii+82 sayfa

Bu tez, bulanık mantık ve kümeler teorisinin karmaşık ve belirsiz sistemleri modellemede etkili bir araç olduğunu vurgulamaktadır. Temel olarak, bulanık ve esnek kümeler ile bu kümelerden türetilmiş kavramların özellikleri, literatürde yer alan çeşitli yazarların makalelerinden derlenmiştir. Tez, bulanık mantık ve kümeler teorisinin temel kavramlarına odaklanarak, bu kavramların birbirine nasıl entegre edildiğini göstermeyi amaçlamaktadır. Elde edilen sonuçlar, belirsizlik içeren problemlere çözüm arayan bilim insanları ve mühendisler için önemli bir kaynak olacaktır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Küme, Esnek Küme, Bulanık Esnek Küme, Bulanık Parametrelili Esnek Küme, Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Küme.

ABSTRACT

ADAPTATION OF FUZZY SETS TO SOFT SETS

Ağcayazı, Kübra

Master's Thesis, Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

December 2024, vii+82 pages

This thesis emphasizes the effectiveness of fuzzy logic and set theory as a tool in modeling complex and uncertain systems. Primarily, the features and operations of fuzzy and soft sets, along with concepts derived from these sets, are compiled from various articles in the literature. The thesis aims to spotlight the fundamental concepts of fuzzy logic and set theory and demonstrate how these concepts are integrated. The obtained results serve as a valuable resource for scientists and engineers seeking solutions to problems involving uncertainty.

Keywords: Fuzzy Set, Soft Set, Fuzzy Soft Set, Fuzzy Set, Soft Set, Fuzzy Parameterized Fuzzy Set, Fuzzy Parameterized Fuzzy Soft Set.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ETİK SÖZLEŞME	i
JÜRİ KABUL VE ONAY	ii
ÖNSÖZ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGE VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. BULANIK KÜMELER	7
3. ESNEK KÜMELER	18
4. BULANIK ESNEK KÜMELER	29
4.1 BULANIK ESNEK KÜMELER VE İŞLEMLERİ	29
4.2 BULANIK ESNEK KÜMELERDE KARAR VERME YÖNTEMİ	40
4.2.1 BE- Çıkarım Operatörü	40
4.3 BULANIK ESNEK KÜMELERDE KARAR VERME YÖNTEMİ UYGULAMASI	44
5. BULANIK PARAMETRELİ ESNEK KÜMELER	46
5.1 BULANIK PARAMETRELİ ESNEK KÜMELER VE İŞLEMLERİ	46
5.2. BULANIK PARAMETRELİ ESNEK KÜMELERDE KARAR VERME YÖNTEMİ	58
5.3. BULANIK PARAMETRELİ ESNEK KÜMELERDE KARAR VERME YÖNTEMİ UYGULAMASI	59
6. BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK KÜMELER	61
6.1 BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK KÜME VE İŞLEMLERİ	61
6.2 BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK KÜMELERDE KARAR VERME YÖNTEMİ	76
6.2.1 BPBE-Çıkarım Operatörü	76
6.3 BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK KÜMELERDE KARAR VERME YÖNTEMİ VE UYGULAMASI	77
KAYNAKÇA	80

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler

Açıklamalar

U	Evrensel kümedir.
X	Parametreler kümesidir.
$P(U)$	U ' nun kuvvet kümesidir.
$F(U)$	U üzerinde tanımlanan tüm bulanık kümelerdir.
μ_X	X bulanık kümesinin üyelik fonksiyonudur.
$F_A, F_B, F_C \dots$	Esnek kümelerdir.
$S(U)$	U üzerinde tanımlanan tüm esnek kümelerdir.
f_A	F_A esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonudur.
$\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \dots$	Bulanık esnek kümelerdir.
γ_A	Γ_A bulanık esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonudur.
$BE(U)$	U üzerinde tanımlanan tüm bulanık esnek kümelerdir.
$BPE(U)$	U üzerinde tanımlanan tüm bulanık parametrelili esnek kümelerdir.
$BPBE(U)$	U üzerinde tanımlanan tüm bulanık parametrelili bulanık esnek kümelerdir.
BE_{agg}	BE- Çıkarım operatörü
$BPBE_{agg}$	BPBE- Çıkarım operatörü

Kısaltmalar

Açıklamalar

BE -küme	Bulanık Esnek Küme
BP -esnek küme	Bulanık Parametrelili Esnek Küme
$BPBE$ -küme	Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Küme

1. GİRİŞ

Geleneksel matematikte kesinlik belirleyici bir ilkenin ötesine geçerken, çağdaş matematik anlayışında belirsizlik önemli bir rol oynamaktadır. Günlük yaşamın olağan süreçlerinde, kesinlik kavramı tam anlamıyla tanımlanamaz. Matematikte belirsizlik, bize sunulan ifadenin doğrudan değerini belirleyemediğimiz durumları ifade eder. Bu belirsiz ifadeler, elimizdeki verinin daha titiz bir şekilde incelenmesi sonucunda anlam kazanır. Özmantar ve ark. (2008) belirsizliğin, farklı olası sonuçların hangisinin geçerli olduğunu bilmediğimiz veya farklı yaklaşımların farklı sonuçlara yol açabileceği durumlarda ortaya çıktığını söylemişlerdir.

Günlük yaşamdan ekonomiye, mühendislik gibi alanlardaki kavramlar ve verilerin net bir şekilde ifade edilemediği durumlarda belirsizlik, büyük önem kazanmıştır. Bu nedenle birçok bilim insanı, özellikle ekonomistler ve sosyal bilimciler, çevresel belirsizlikle ilgili ortaya çıkan sorunlara çeşitli modeller geliştirmeye yönelik çabalar sarf etmişlerdir. Onlara göre, belirsizlik, geleceğin öngörülemediği ve doğru bir şekilde tahmin edilemediği bir durumu tanımlar (Sargut ve Ozen, 2007).

Matematik alanında, diğer disiplinlere kaynak oluşturan belirsizlikle ilgili gelişmeler şu şekildedir: Matematikğin netliğinde ve bütünlüğünde elde edilen başarı, Aristoteles'in ve öğrencilerinin katkılarıyla mümkün olmuştur. Bununla birlikte, dünyadaki bazı belirsizlikleri temsil etmek, her zaman Aristo mantığına dayanan matematiksel yöntemlerle gerçekleştirilememiştir.

Günlük hayatta çoğu insanın karşılaştığı belirsiz ifadeler vardır, örneğin soğuk hava, kısa saç, genç adam gibi. Zaman içinde çevremizdeki belirsizlikleri anlamak ve gidermek için bilinen yöntemlerin ötesinde bilimsel çalışmalara ihtiyaç duyulmuştur. Belirsizlik, biyolojiden ekonomiye, tıptan sosyal bilimlere kadar birçok bilim dalında karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle bilim insanları, belirsizliği anlamak ve yeni çözümler bulmak

amacıyla farklı teoriler geliştirmeye başlamışlardır.

1920'de Heisenberg, belirsizlik kavramını açıklayarak çok değerliliğe kapı açmıştır. 1930'ların başında, Lukasiewicz "olası" kavramını ortaya atmıştır. Aynı dönemde Planck, belirsizlik açıklığının ilk kavramlarını geliştirmiştir. 1965'te Zadeh, yayınladığı makale ile modern anlamda belirsizlik kavramını daha da açıklığa kavuşturmuştur (Zadeh, 1965).

Daha sonra Zadeh'in önerdiği teori yeterli görülmemiş ve bu alandaki çalışmalar, Atanassov (1986) tarafından geliştirilmiştir (Atanassov, 1986). 1999 yılında Molodtsov tarafından sunulan soft küme teorisi, literatüre kazandırılmıştır, bu da belirsizlik problemlerini ifade etmeyi kolaylaştırmıştır (Molodtsov, 1999).

Matematiksel belirsizlik modellemesinde önemli bir dönemeç, 1965 yılında Zadeh tarafından geliştirilen bulanık mantık ve küme teorisi matematiksel belirsizlik modellemesinde önemli bir dönemeç olmuştur. Zadeh'e göre, bulanık mantık gerçek hayatı daha etkili bir şekilde modelliyordu. Ayrıca, Mamdani'nin 1972'de bulanık mantık teorisini kullanarak bir buhar makinesi için kontrol sistemi tasarlaması, soyut bir kavramın günlük hayata uygulanabilir olduğunu göstererek bilim dünyasında ilgi uyandırmıştır.

Gösterdiği uygulanabilirlik sayesinde, bulanık kümeler matematiksel olarak günlük hayattaki belirsiz kavramları modelleme olanağı sunmaktadır. Bu kümeler, bulanık mantık prensiplerini uygulama algoritmalarına dönüştürmek için etkili araçlar olarak kullanılır. Bulanık mantık, makinelerin belirsiz kavramları anlama ve bu kavramlara uygun yanıtlar verme yeteneğini geliştirmede kullanıldığından, makinelerin insan gibi düşünme yeteneğini gerçekleştirmelerine olanak tanır.

Bulanık küme teorisi, belirsizliği modellemede sıkça kullanılan bir teori olmakla birlikte, üyelik fonksiyonunu belirleme zorluğu nedeniyle bilim insanları bu alanda farklı teorilere yönelmişlerdir. 1999 yılında Molodtsov, esnek küme teorisini ortaya koymuş ve bu teori,

üyelik fonksiyonuna ihtiyaç duymadan belirsizliği ele almayı amaçlamıştır. Belirsizlik kavramı, esnek kümelerde gerçek değerli üyelik fonksiyonları yerine, küme değerli fonksiyonların tercih edilmesiyle çözüme kavuşturulmaktadır. Bu yaklaşım, belirsizliği ele almanın yeni bir perspektifini sunar, üyelik fonksiyonlarına olan bağımlılığı azaltarak çeşitli uygulama alanlarında daha esnek bir modelleme sağlar.

Günümüzde mühendislikten ekonomiye, çevre biliminden sosyal bilimlere kadar birçok alanda kesin olmayan, göreceli kavramlarla karşılaşyoruz. Bu tür belirsiz durumları matematiksel olarak analiz etmek için klasik yöntemler çoğu zaman yetersiz kalıyor. Bu nedenle, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi gibi farklı matematiksel yaklaşımlar geliştirilerek bu belirsizliklerle başa çıkılmaya çalışılıyor.

Esnek küme teorisinde, üyelik fonksiyonunu oluşturma problemi ortaya çıkmaz; bu durum, teorinin çeşitli alanlara kolayca uygulanabilmesini sağlar. Molodtsov, bu teoriyi tanım kümesi parametreler ve değer kümesi seçeneklerin kuvvet kümesi olan bir fonksiyon ile oluşturduğu yapı ile belirsizlik içeren birçok alana katkı sağlayabileceği düşüncesini taşımıştır (Molodtsov, 1999).

Molodtsov, esnek küme teorisini kullanarak oyun teorisi, işlem araştırmaları, Riemann integrasyonu, olasılık, ölçüm teorisi gibi çeşitli alanlarda başarılı çalışmalar gerçekleştirmiştir.

Maji ve arkadaşları (2003), karar verme problemleri için esnek küme teorisini araştırmışlardır. Teorik olarak, esnek kümeler üzerine çeşitli işlemler tanımlayarak bu alandaki çalışmalarını sürdürmüşlerdir.

Ali ve arkadaşları (2009), esnek kümelerin bazı kavramlarını açıklamışlardır. Ayrıca, esnek

küme teorisinde belirli De Morgan yasalarının geçerli olduğunu kanıtlamışlardır.

Sezgin ve Atagün (2011), esnek küme üzerinde kesişim, genişletilmiş kesişim, kısıtlanmış birleşim, kısıtlanmış fark gibi kavramları tanımlamış ve her birinin kendi arasındaki ilişkileri göstermişlerdir.

Aktaş ve Çağman (2007), belirsizlik yönetimi alanında çalışmalara imza atarak, esnek kümelerin, bulanık kümelerin ve yaklaşımlı kümelerin teorik temelleri ve uygulamaları üzerine kapsamlı bir inceleme gerçekleştirmişlerdir. Bu kapsamda geliştirdikleri "Esnek Grup Teorisi", belirsizliğin matematiksel modellenmesinde önemli bir katkı sağlamıştır.

Çetkin ve arkadaşları (2016), esnek küme çalışmalarının yanı sıra ortak evrensel küme üzerinde ters esnek küme tanımlamışlardır.

Kamacı ve arkadaşları (2019), ters esnek matrisler üzerinde yeni işlemler tanımlayarak ters esnek kümeler üzerinde multi-kriterli grup karar verme metodunu geliştirmişlerdir.

Atagün ve Kamacı (2021), α -kümeleri kullanarak verilen probleme uygun olarak ters esnek kümeler üzerindeki sınırlandırma tanımları üzerinde çalışmışlardır.

Ek olarak, ters esnek kümeler için türetilen bazı işlemler kullanılarak ters esnek karar verme sistemi oluşturulması amaçlanmıştır. Bu yeni yöntem, sadece literatüre katkı sağlamakla kalmayıp aynı zamanda finans, sağlık, çevre, şehircilik, üretim gibi çeşitli alanlarda uyarlanabilir bir karar verme yöntemi olarak ülkemizin çeşitli sektörlerine katkıda bulunmayı hedeflemektedir.

Bulanık Mantık ve Kümeler Teorisi, karmaşık ve belirsiz sistemleri modellemede etkili bir araçtır. Bu tezde, bulanık ve esnek kümelerin ve onlardan türetilmiş kavramların temel

özellik ve işlemleri bölüm başlarında bahsi geçen yazarların makalelerinden derlenmiştir.

Tezimiz, temel olarak altı ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci Bölüm: Bulanık Kümeler

Bu bölümde, bulanık kümelerin temel kavramlarına odaklanılmıştır. Bulanık kümelerin nasıl tanımlandığı, bu kümelerin avantajları ve belirsizliğin nasıl ele alındığı bu bölümde incelenmiştir.

Üçüncü Bölüm: Esnek Kümeler

Bulanık kümelerin ardından, esnek kümelerin temel kavramları incelenmiştir. Bu bölüm, klasik kümelerin sınırlamalarını aşmak ve daha geniş bir uygulama alanına sahip olmak amacıyla esnek kümelerin nasıl tanımlandığını ve kullanıldığını açıklamaktadır.

Dördüncü Bölüm: Bulanık Esnek Kümeler

Bir önceki bölümde ele alınan kavramlar temel alınarak, bulanık esnek kümelerin nasıl oluşturulduğu açıklanmıştır. Ayrıca bu küme üzerinde karar verme yöntemleri ve uygulamalarına değinilmiştir.

Beşinci Bölüm: Bulanık Parametrelili Esnek Kümeler

Bu bölümde, bulanık parametrelili esnek kümelerin nasıl tanımlandığı ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu küme üzerinde karar verme yöntemleri ve uygulamalarına değinilmiştir.

Altıncı Bölüm: Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Kümeler

Son bölümde ise, önceki üç bölümdeki kavramların bir araya getirilerek bulanık parametrelili bulanık esnek kümelerin nasıl oluşturulduğu temel kavram ve özellikleri açıklanmıştır. Ayrıca bu küme üzerinde karar verme yöntemleri ve uygulamalarına değinilmiştir.

Bu tez, bulanık mantık ve kümeler teorisinin temel kavramlarına odaklanarak, bu kavramların birbiri üzerine nasıl inşa edildiğini ve ilgili kümeler üzerinde güncel problemlerin çözümüne nasıl katkı sağladığını göstermeyi amaçlamaktadır. Elde edilen sonuçlar, bilimsel ve mühendislik alanlarında belirsizlik içeren problemlere çözüm arayan araştırmacılar ve profesyoneller için değerli olabilir.



2. BULANIK KÜMELER

1965 yılında Zadeh tarafından geliştirilen bulanık küme teorisi, bu bölümde temel ilkeleri, özellikleri ve örneklerle birlikte ele alınacaktır.

Bu bölüm (Zadeh, 1965) , (Dubois ve Prade, 1980) (Zimmermann, 1991), (Klir ve Folger, 1988), (Elmas, 2003), (Şen, 2001) kaynaklarından yararlanılarak yazılmıştır.

Tanım 2.1. (Zadeh, 1965) U evrensel bir küme olarak tanımlansın. Bu küme üzerinde

$$\mu_X : U \rightarrow [0,1]$$

fonksiyonu aracılığıyla tanımlanan

$$X = \{(\mu_X(x)/x) : x \in U, \mu_X(x) \in [0,1]\}$$

kümesine bulanık küme denir. Buradaki μ_X fonksiyonu X kümesinin üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır. Ayrıca x elemanının X kümesine aitlik derecesi $\mu(x)$ değeri ile ifade edilir ve $0/x$ elemanı X de gösterilmez.

Tez boyunca $F(U)$, U 'da tanımlanan tüm bulanık kümeleri ifade edecektir.

Tanım 2.2. $X \in F(U)$ olmak üzere, her $x \in U$ için $\mu_X(x) = 0$ şartı sağlanıyorsa, bu durumda X kümesine boş bulanık küme adı verilir ve $X_\emptyset$ sembolü ile ifade edilir.

Tanım 2.3. $X \in F(U)$ olmak üzere, her $x \in U$ için $\mu_X(x) = 1$ şartı sağlanıyorsa, bu durumda X kümesine evrensel bulanık küme adı verilir ve X_U sembolü ile ifade edilir.

Örnek 2.4. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ kümesi için üyelik fonksiyonu olarak

$$\mu_X(x_1) = 0.7, \mu_X(x_2) = 1, \mu_X(x_3) = 0, \mu_X(x_4) = 0.3, \mu_X(x_5) = 0.5$$

alırsak, X bulanık kümesi

$$X = \{0.7/x_1, 1/x_2, 0.3/x_4, 0.5/x_5\}$$

şeklinde olur. Dikkat edersek $\mu_X(x_3) = 0$ olup bu elemanın kümeye aitliği 0 olduğundan kümeye dahil edilmemiştir.

Örnek 2.5. Bir yazılım projesi için değerlendirilmesi gereken adaylar kümesi ve her bir adayın farklı beceri seviyeleri bulanık olarak ifade edilmiştir. Adayların programlama becerisi ile ilgili bilgiler şu şekilde tanımlanmıştır.

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ adaylar kümesidir.

Her adayın programlama becerisini ifade eden üyelik fonksiyonu:

$$\mu_X(x_1) = 0.9, \mu_X(x_2) = 0.7, \mu_X(x_3) = 0.6, \mu_X(x_4) = 0.8, \mu_X(x_5) = 0.5$$

olmak üzere X bulanık kümesi

$$X = \{0.9/x_1, 0.7/x_2, 0.6/x_3, 0.8/x_4, 0.5/x_5\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.6. $X, Y \in F(U)$ olmak üzere, eğer her $x \in U$ için $\mu_X(x) = \mu_Y(x)$ oluyorsa X ve Y eşit bulanık kümelerdir ve $X = Y$ ile ifade edilir.

Tanım 2.7. $X, Y \in F(U)$ olmak üzere, eğer her $x \in U$ için $\mu_X(x) \leq \mu_Y(x)$ oluyorsa X bulanık kümesi Y bulanık kümesinin bir bulanık alt kümesi olur ve $X \subseteq Y$ ile gösterilir.

Örnek 2.8. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ kümesi için,

1) Eğer,

$$\mu_X(x_1) = 1, \mu_X(x_2) = 1, \mu_X(x_3) = 1, \mu_X(x_4) = 1, \mu_X(x_5) = 1$$

ise $X = \{1/x_1, 1/x_2, 1/x_3, 1/x_4\}$ olduğundan X kümesi evrensel bulanık kümedir.

2) Eğer,

$$\mu_X(x_1) = 0, \mu_X(x_2) = 0, \mu_X(x_3) = 0, \mu_X(x_4) = 0, \mu_X(x_5) = 0$$

ise $X_\emptyset = \{\}$ kümesi boş bulanık kümedir.

3) Eğer,

$$\mu_X(x_1) = 0.1, \mu_X(x_2) = 0.9, \mu_X(x_3) = 0.3, \mu_X(x_4) = 0.5, \mu_X(x_5) = 1$$

ve

$$\mu_Y(x_1) = 0.1, \mu_Y(x_2) = 0.9, \mu_Y(x_3) = 0.3, \mu_Y(x_4) = 0.5, \mu_Y(x_5) = 1$$

ise

$$\mu_X(x_1) = \mu_Y(x_1), \mu_X(x_2) = \mu_Y(x_2), \mu_X(x_3) = \mu_Y(x_3), \mu_X(x_4) = \mu_Y(x_4),$$

$$\mu_X(x_5) = \mu_Y(x_5)$$

oldüğundan X ile Y bulanık kümeleri eşit bulanık kümelerdir.

4) Eğer,

$$\mu_X(x_1) = 0.1, \mu_X(x_2) = 0.8, \mu_X(x_3) = 0.3, \mu_X(x_4) = 0.2, \mu_X(x_5) = 0.9$$

ve

$$\mu_Y(x_1) = 0.4, \mu_Y(x_2) = 0.9, \mu_Y(x_3) = 0.5, \mu_Y(x_4) = 0.2, \mu_Y(x_5) = 1$$

ise

$$\mu_Y(x_5) \leq \mu_Y(x_1), \mu_X(x_2) \leq \mu_Y(x_2), \mu_X(x_3) \leq \mu_Y(x_3), \mu_X(x_4) \leq \mu_Y(x_4),$$

$$\mu_X(x_5) \leq \mu_Y(x_5)$$

olduğundan X, Y kümesinin bir bulanık alt kümesidir.

Tanım 2.9. $X, Y \in F(U)$ olmak üzere $X \cup Y$ kümesinin üyelik fonksiyonu her $x \in U$ için

$$\mu_{X \cup Y} = \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu iki kümenin birleşimi

$$X \cup Y = \left\{ \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} / x : x \in U \right\}$$

olarak ifade edilir.

Teorem 2.10. $X \in F(U)$ olsun.

- i) $X \cup X = X$
- ii) $X \cup X_\emptyset = X$
- iii) $X \cup X_U = X_U$

İspat: U üzerinde tanımlı bir bulanık $X = \{(\mu_X(x)/x) : x \in U, \mu_X(x) \in [0,1]\}$ kümesi verilsin. Bu durumda

i)

$$\begin{aligned} X \cup X &= \left\{ \left(\max\{\mu_X(x), \mu_X(x)\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= \{ \mu_X(x) / x : x \in U \} \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad X \cup X_{\emptyset} &= \left\{ \left(\max\{\mu_X(x), 0\} / x \right) : x \in U \right\} \\
&= \{ \mu_X(x) / x : x \in U \} \\
&= X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii)} \quad X \cup X_U &= \left\{ \left(\max\{\mu_X(x), 1\} / x \right) : x \in U \right\} \\
&= \{ 1 / x : x \in U \} \\
&= X_U
\end{aligned}$$

Teorem 2.11. $X, Y \in F(U)$ olmak üzere,

- i) $X \cup Y = Y \cup X$ (Değişme Özelliği)
- ii) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (Birleşme Özelliği)

İspat: U üzerinde tanımlı bir $X = \{(\mu_X(x)/x) : x \in U, \mu_X(x) \in [0,1]\}$,
 $Y = \{(\mu_Y(x)/x) : x \in U, \mu_Y(x) \in [0,1]\}$ ve $Z = \{(\mu_Z(x)/x) : x \in U, \mu_Z(x) \in [0,1]\}$
bulanık kümeleri verilsin.

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad X \cup Y &= \left\{ \left(\max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} / x \right) : x \in U \right\} \\
X \cup Y &= \{(\max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} / x) : x \in U\} \\
&= \{(\max\{\mu_Y(x), \mu_X(x)\} / x) : x \in U\} \\
&= Y \cup X
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 X \cup (Y \cup Z) &= \left\{ \left(\max \left\{ \mu_X(x), \max \{ \mu_Y(x), \mu_Z(x) \} \right\} / x \right) : x \in U \right\} \\
 &= \left\{ \left(\max \left\{ \max \{ \mu_X(x), \mu_Y(x) \}, \mu_Z(x) \right\} / x \right) : x \in U \right\} \\
 &= (X \cup Y) \cup Z
 \end{aligned}$$

Tanım 2.12. X ve Y U üzerinde iki bulanık küme olsun. $X \cap Y$ kesişiminin üyelik fonksiyonu her $x \in U$ için

$$\mu_{X \cap Y} = \min \{ \mu_X(x), \mu_Y(x) \}$$

şeklinde tanımlanır ve bu iki kümenin kesişimi

$$X \cap Y = \left\{ \min \{ \mu_X(x), \mu_Y(x) \} / x : x \in U \right\}$$

olarak ifade edilir.

Teorem 2.13. $X \in F(U)$ olmak üzere,

- i) $X \cap X = X$
- ii) $X \cap X_\emptyset = X_\emptyset$
- iii) $X \cap X_U = X$

İspat: U üzerinde tanımlı bulanık bir $X = \{ (\mu_X(x)/x) : x \in U, \mu_X(x) \in [0,1] \}$ kümesi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 i) \quad X \cap X &= \left\{ \left(\min \{ \mu_X(x), \mu_X(x) \} / x \right) : x \in U \right\} \\
 &= \{ \mu_X(x)/x : x \in U \}
 \end{aligned}$$

$$= X$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad X \cap X_{\emptyset} &= \left\{ \left(\min\{\mu_X(x), 0\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= \{0/x : x \in U\} \\ &= X_{\emptyset} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad X \cap X_U &= \left\{ \left(\min\{\mu_X(x), 1\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= \{\mu_X(x)/x : x \in U\} \\ &= X \end{aligned}$$

Teorem 2.14. X, Y ve Z , U üzerinde tanımlı bulanık kümeler olsun.

- i) $X \cap Y = Y \cap X$ (Değişme Özelliği)
- ii) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ (Birleşme Özelliği)

İspat: U üzerinde tanımlı bir

$$X = \{(\mu_X(x)/x) : x \in U, \mu_X(x) \in [0,1]\},$$

$$Y = \{(\mu_Y(x)/x) : x \in U, \mu_Y(x) \in [0,1]\} \text{ ve}$$

$$Z = \{(\mu_Z(x)/x) : x \in U, \mu_Z(x) \in [0,1]\} \text{ bulanık kümeleri verilsin.}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad X \cap Y &= \left\{ \left(\min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \left(\min\{\mu_Y(x), \mu_X(x)\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= Y \cap X \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad X \cap (Y \cap Z) &= \left\{ \left(\min \left\{ \mu_X(x), \min\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\} \right\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \left(\min \left\{ \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}, \mu_Z(x) \right\} / x \right) : x \in U \right\} \end{aligned}$$

$= (X \cap Y) \cap Z$ bulunur.

Teorem 2.15. X, Y ve Z U üzerinde bulanık kümeler olsun.

i) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

ii) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

İspat: U üzerinde tanımlı bir $X = \{(\mu_X(x)/x) : x \in U, \mu_X(x) \in [0,1]\}$,

$Y = \{(\mu_Y(x)/x) : x \in U, \mu_Y(x) \in [0,1]\}$ ve

$Z = \{(\mu_Z(x)/x) : x \in U, \mu_Z(x) \in [0,1]\}$ bulanık kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} X \cup (Y \cap Z) &= \left\{ \left(\max \left\{ \mu_X(x), \min \{ \mu_Y(x), \mu_Z(x) \} \right\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \left(\min \left\{ \max \{ \mu_X(x), \mu_Y(x) \}, \max \{ \mu_X(x), \mu_Z(x) \} \right\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} X \cap (Y \cup Z) &= \left\{ \left(\min \left\{ \mu_X(x), \max \{ \mu_Y(x), \mu_Z(x) \} \right\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= \left\{ \left(\max \left\{ \min \{ \mu_X(x), \mu_Y(x) \}, \min \{ \mu_X(x), \mu_Z(x) \} \right\} / x \right) : x \in U \right\} \\ &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \end{aligned}$$

Tanım 2.16. $X \in F(U)$ olsun.

$$\mu_{X^c}(x) = 1 - \mu_X(x)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan X^c kümesine X kümesinin tümleyeni denir ve

$$X^c = \{(1 - \mu_X(x))/x : x \in U\}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 2.17. $X \in F(U)$ olsun.

- 1) $X \cup X^C \neq X_U$
- 2) $X \cap X^C \neq X_\emptyset$

Yukardaki notun doğruluğunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 2.18. X bulanık kümesi $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ üzerinde tanımlı olmak üzere

$X = \{0.2/x_1, 0.3/x_2, 0.9/x_3\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$X^C = \{0.8/x_1, 0.7/x_2, 0.1/x_3\}$ olur. Buradan da

$$\begin{aligned} X \cup X^C &= \left\{ \max\{\mu_X(x), 1 - \mu_X(x)\} / x : x \in U \right\} \\ &= \{0.8/x_1, 0.7/x_2, 0.9/x_3\} \\ &\neq X_U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cap X^C &= \left\{ \min\{\mu_X(x), 1 - \mu_X(x)\} / x : x \in U \right\} \\ &= \{0.2/x_1, 0.3/x_2, 0.1/x_3\} \\ &\neq X_\emptyset \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.19. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ üzerinde tanımlı X ve Y bulanık fonksiyonlarının üyelik fonksiyonlar sırasıyla $\mu_X(x)$ ve $\mu_Y(x)$ olmak üzere

$$\mu_X(x_1) = 0.2, \mu_X(x_2) = 0.4, \mu_X(x_3) = 0.7, \mu_X(x_4) = 1$$

ve

$$\mu_Y(x_1) = 0, \mu_Y(x_2) = 0.5, \mu_Y(x_3) = 0.6, \mu_Y(x_4) = 1$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$X \cap Y = \left\{ \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} / x : x \in U \right\}$$

$$= \{0.4/x_2, 0.6/x_3, 1/x_4\}$$

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{\max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}/x : x \in U\} \\ &= \{0.2/x_1, 0.5/x_2, 0.7/x_3, 1/x_4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y^C &= \{(1 - \mu_Y(x))/x : x \in U\} \\ &= \{1/x_1, 0.5/x_2, 0.4/x_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cap Y^C &= \{\min\{\mu_X(x), 1 - \mu_Y(x)\}/x : x \in U\} \\ &= \{0.2/x_1, 0.4/x_2, 0.4/x_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cup Y^C &= \{\max\{\mu_X(x), 1 - \mu_Y(x)\}/x : x \in U\} \\ &= \{1/x_1, 0.5/x_2, 0.7/x_3, 1/x_4\} \end{aligned}$$

Teorem 2.20. $X, Y \in F(U)$ olsun.

- i) $(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$
- ii) $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$

İspat: U üzerinde tanımlı bir $X = \{(\mu_X(x)/x) : x \in U, \mu_X(x) \in [0,1]\}$,
 $Y = \{(\mu_Y(x)/x) : x \in U, \mu_Y(x) \in [0,1]\}$ bulanık kümeleri verilsin.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad (X \cup Y)^C &= \left\{ \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}/x : x \in U \right\}^C \\ &= \left\{ \left(1 - \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \right) / x : x \in U \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left(\min\{1 - \mu_X(x), 1 - \mu_Y(x)\} \right) / x : x \in U \right\} \\
&= X^c \cap Y^c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad (X \cap Y)^c &= \left\{ \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} / x : x \in U \right\}^c \\
&= \left\{ \left(1 - \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \right) / x : x \in U \right\} \\
&= \left\{ \left(\max\{1 - \mu_X(x), 1 - \mu_Y(x)\} \right) / x : x \in U \right\} \\
&= X^c \cup Y^c
\end{aligned}$$

3. ESNEK KÜMELER

1999 yılında Molodtsov tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi, bu bölümde temel ilkeleri, özellikleri ve örnekleri ile birlikte ele alınacaktır.

Bu bölüm (Çağman ve Enginoğlu, 2010) ve (Çağman, 2014) makalelerinden yararlanılarak yazılmıştır.

Bölüm boyunca, U evrensel küme, $P(U)$, U evrensel kümesinin kuvvet kümesi, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olarak alınacaktır.

Tanım 3.1. (Molodtsov, 1999) U evrensel kümesi üzerinde bir F_A esnek kümesi $x \notin A$ iken $f_A(x) = \emptyset$ şartını sağlayan $f_A : E \rightarrow P(U)$ fonksiyonu aracılığıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E, f_A(x) \in P(U)\}$$

f_A fonksiyonu F_A esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonudur. $f_A(x) = \emptyset$ olduğunda F_A kümesinde $(x, \emptyset)$ elemanı gösterilmez. $S(U)$, U evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek kümeleri temsil eder.

Örnek 3.2. Bir esnek küme düşünelim. Bu esnek küme işe almayı düşündüğümüz kişilere ait bazı özellikleri değişkenler olarak kabul edecek şekilde tanımlansın. Farz edelim ki, U evrensel kümesinde iş başvurularına gelen beş adet kişi var.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ve $A = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ olsun.

$x_1 =$ Yüksek lisans mezunu olma

$x_2 =$ Deneyimli olma

$x_3 =$ İki yabancı dil bilme

$x_4 =$ Doktora mezunu olma

$x_5 =$ Lisans mezunu olma

kavramlarını ifade etsin. Burada $f_A(x_1)$ yüksek lisans yapmış kişilerin kümesini verir.

$$f_A(x_1) = \{u \in U : u, \text{yüksek lisans mezunu}\} = \{u_1, u_3\}$$

$$f_A(x_2) = \{u \in U : u, \text{deneyimli kişi}\} = \{u_1, u_2, u_4\}$$

$$f_A(x_4) = \{u \in U : u, \text{doktora mezunu}\} = \{\}$$

$$f_A(x_5) = \{u \in U : u, \text{lisans mezunu}\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} = U$$

olsun. Bu durumda F_A esnek kümesi

$$F_A = \{(x_1, \{u_1, u_3\}), (x_2, \{u_1, u_2, u_4\}), (x_5, U)\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 3.3. F_A , U ' da tanımlı bir esnek küme olsun. E kümesinin her x elemanı için $f_A(x) = U$ ise F_A kümesi evrensel esnek küme olarak adlandırılır. Bu durumda, F_E ile ifade edilir.

Tanım 3.4. F_A , U ' da tanımlı bir esnek küme olsun. E kümesinin her x elemanı için $f_A(x) = \emptyset$ ise F_A kümesi boş esnek küme olarak adlandırılır. Bu durumda, $F_\emptyset$ ile ifade edilir.

Tanım 3.5. F_A ve F_B , U ' da tanımlı iki esnek küme olsun. E kümesinin her x elemanı için $f_A(x) = f_B(x)$ ise F_A ile F_B kümelerine eşit esnek kümeler denir ve $F_A = F_B$ ile gösterilir.

Tanım 3.6. F_A ve F_B , U ' da tanımlı iki esnek küme olsun. Eğer, her $x \in E$ için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ oluyorsa, F_A esnek kümesine F_B esnek kümesinin alt esnek kümesi denir ve $F_A \subseteq F_B$ ile gösterilir.

Örnek 3.7. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel küme ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ise parametreler kümesi olsun.

Eğer,

$$f_A(x_1) = U$$

$$f_A(x_2) = U$$

$$f_A(x_3) = U$$

$$f_A(x_4) = U$$

ise

$$F_E = \{(x_1, U), (x_2, U), (x_3, U), (x_4, U)\}$$

kümesi evrensel esnek kümedir.

Benzer şekilde,

$$f_A(x_1) = \emptyset$$

$$f_A(x_2) = \emptyset$$

$$f_A(x_3) = \emptyset$$

$$f_A(x_4) = \emptyset$$

ise $F_\emptyset$, boş esnek kümedir.

Eğer,

$$f_A(x_1) = \{u_1\}$$

$$f_A(x_2) = \{u_2, u_4\}$$

$$f_A(x_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$f_A(x_4) = \{u_5\}$$

ve

$$f_B(x_1) = \{u_1\}$$

$$f_B(x_2) = \{u_2, u_4\}$$

$$f_B(x_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$f_B(x_4) = \{u_5\}$$

ise

$$f_A(x_1) = f_B(x_1)$$

$$f_A(x_2) = f_B(x_2)$$

$$f_A(x_3) = f_B(x_3)$$

$$f_A(x_4) = f_B(x_4)$$

olduğundan F_A ve F_B esnek kümeleri eşit esnek kümelerdir.

Eğer,

$$f_A(x_1) = \{u_1, u_5\}$$

$$f_A(x_2) = \{u_4\}$$

$$f_A(x_3) = \{u_1, u_3\}$$

$$f_A(x_4) = \{u_5\}$$

ve

$$f_B(x_1) = \{u_1, u_2, u_5\}$$

$$f_B(x_2) = \{u_2, u_4\}$$

$$f_B(x_3) = \{u_1, u_3\}$$

$$f_B(x_4) = \{u_5\}$$

ise

$$f_A(x_1) \subseteq f_B(x_1), f_A(x_2) \subseteq f_B(x_2), f_A(x_3) \subseteq f_B(x_3), f_A(x_4) \subseteq f_B(x_4)$$

olduğundan dolayı F_A esnek kümesi F_B esnek kümesinin bir esnek alt kümesi olur.

Tanım 3.8. F_A ve F_B , U ' da tanımlı iki esnek küme olsun.

$$F_A \tilde{\cup} F_B = \{(x, f_{A \cup B}(x)) : x \in E\} = \{(x, f_A(x) \cup f_B(x)) : x \in E\}$$

kümesi F_A ve F_B esnek kümelerinin birleşim kümesi olarak tanımlanır. Burada $f_{A \cup B}(x)$, $F_A \tilde{\cup} F_B$ kümesinin yaklaşım fonksiyonudur.

Teorem 3.9. F_A , U ' da tanımlı bir esnek küme olsun.

i) $F_A \tilde{\cup} F_A = F_A$

ii) $F_A \tilde{\cup} F_\emptyset = F_A$

iii) $F_A \tilde{\cup} F_{\bar{E}} = F_{\bar{E}}$

İspat: $F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E\}$ olmak üzere U üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun.

i)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cup} F_A &= \{(x, (f_A(x) \cup f_A(x))) : x \in E\} \\ &= \{(x, f_A(x)) : x \in E\} \\ &= F_A \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cup} F_\emptyset &= \{(x, (f_A(x) \cup \emptyset)) : x \in E\} \\ &= \{(x, f_A(x)) : x \in E\} \\ &= F_A \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cup} F_{\bar{E}} &= \{(x, (f_A(x) \cup U)) : x \in E\} \\ &= \{(x, U) : x \in E\} \\ &= F_{\bar{E}} \end{aligned}$$

Teorem 3.10. F_A , F_B ve F_C , U' da tanımlı birer esnek küme olsun.

i) $F_A \tilde{\cup} F_B = F_B \tilde{\cup} F_A$

ii) $F_A \tilde{\cup} (F_B \tilde{\cup} F_C) = (F_A \tilde{\cup} F_B) \tilde{\cup} F_C$

İspat: U üzerinde $F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E\}$, $F_B = \{(x, f_B(x)) : x \in E\}$ ve $F_C = \{(x, f_C(x)) : x \in E\}$ esnek kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cup} F_B &= \{(x, (f_A(x) \cup f_B(x))) : x \in E\} \\ &= \{(x, (f_B(x) \cup f_A(x))) : x \in E\} \\ &= f_B(x) \tilde{\cup} f_A(x) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cup} (F_B \tilde{\cup} F_C) &= \{(x, (f_A(x) \cup (f_B(x) \cup f_C(x)))) : x \in E\} \\ &= \{(x, ((f_A(x) \cup f_B(x)) \cup f_C(x))) : x \in E\} \\ &= (F_A \tilde{\cup} F_B) \tilde{\cup} F_C \end{aligned}$$

Tanım 3.11. F_A ve F_B , U' da tanımlı iki esnek küme olsun.

$$F_A \tilde{\cap} F_B = \{(x, f_{A \tilde{\cap} B}(x)) : x \in E\} = \{(x, f_A(x) \cap f_B(x)) : x \in E\}$$

kümesi F_A ve F_B esnek kümelerinin kesişim kümesi olarak tanımlanır.

Teorem 3.12. F_A , U' da tanımlı bir esnek küme olsun.

i) $F_A \tilde{\cap} F_A = F_A$

ii) $F_A \tilde{\cap} F_\Phi = F_\Phi$

iii) $F_A \tilde{\cap} F_{\bar{E}} = F_A$

İspat: $F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E\}$ olmak üzere U üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun.

i)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cap} F_A &= \{(x, (f_A(x) \cap f_A(x))) : x \in E\} \\ &= \{(x, f_A(x)) : x \in E\} \\ &= F_A \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cap} F_\emptyset &= \{(x, (f_A(x) \cap \emptyset)) : x \in E\} \\ &= \{(x, \emptyset) : x \in E\} \\ &= F_\emptyset \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cap} F_E &= \{(x, (f_A(x) \cap U)) : x \in E\} \\ &= \{(x, f_A(x)) : x \in E\} \\ &= F_A \end{aligned}$$

Teorem 3.13. F_A , F_B ve F_C , U 'da tanımlı birer esnek küme olsun. Bu durumda

i) $F_A \tilde{\cap} F_B = F_B \tilde{\cap} F_A$

ii) $F_A \tilde{\cap} (F_B \tilde{\cap} F_C) = (F_A \tilde{\cap} F_B) \tilde{\cap} F_C$

İspat: U üzerinde $F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E\}$, $F_B = \{(x, f_B(x)) : x \in E\}$ ve $F_C = \{(x, f_C(x)) : x \in E\}$ esnek kümeleri verilsin

i)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cap} F_B &= \{(x, (f_A(x) \cap f_B(x))) : x \in E\} \\ &= \{(x, (f_B(x) \cap f_A(x))) : x \in E\} \\ &= F_B \tilde{\cap} F_A \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cap} (F_B \tilde{\cap} F_C) &= \{(x, (f_A(x) \cap (f_B(x) \cap f_C(x)))) : x \in X\} \\ &= \{(x, ((f_A(x) \cap f_B(x)) \cap f_C(x))) : x \in X\} \\ &= (F_A \tilde{\cap} F_B) \tilde{\cap} F_C \end{aligned}$$

Teorem 3.14. F_A , F_B ve F_C , U 'da tanımlı birer esnek küme olsun. Bu durumda

i) $F_A \tilde{\cup} (F_B \tilde{\cap} F_C) = (F_A \tilde{\cup} F_B) \tilde{\cap} (F_A \tilde{\cup} F_C)$

ii) $F_A \tilde{\cap} (F_B \tilde{\cup} F_C) = (F_A \tilde{\cap} F_B) \tilde{\cup} (F_A \tilde{\cap} F_C)$

İspat: U üzerinde $F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E\}$, $F_B = \{(x, f_B(x)) : x \in E\}$ ve $F_C = \{(x, f_C(x)) : x \in E\}$ esnek kümeleri verilsin

i)

$$\begin{aligned} F_A \tilde{\cup} (F_B \tilde{\cap} F_C) &= \{(x, (f_A(x) \cup ((f_B(x) \cap f_C(x)))) : x \in E\} \\ &= \{(x, ((f_A(x) \cup (f_B(x))) \cap (f_A(x) \cup f_C(x))) : x \in E\} \\ &= (F_A \tilde{\cup} F_B) \tilde{\cap} (F_A \tilde{\cup} F_C) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
F_A \tilde{\cap} (F_B \tilde{\cup} F_C) &= \left\{ (x, (f_A(x) \cap ((f_B(x) \cup f_C(x)))) : x \in E \right\} \\
&= \left\{ (x, ((f_A(x) \cap (f_B(x)) \cup (f_A(x) \cap f_C(x)))) : x \in E \right\} \\
&= (F_A \tilde{\cap} F_B) \tilde{\cup} (F_A \tilde{\cap} F_C)
\end{aligned}$$

Tanım 3.15. F_A , U 'da tanımlı esnek küme olsun.

$$F_{A^c} = \left\{ (x, f_{A^c}(x)) : x \in E \right\} = \left\{ (x, U \setminus f_A(x)) : x \in E \right\}$$

esnek kümesi, F_A esnek kümesinin tümleyeni olarak tanımlanır. Burada $f_{A^c}(x)$ fonksiyonu F_{A^c} kümesinin yaklaşım fonksiyonudur.

Teorem 3.16. F_A U 'da tanımlı bir esnek kümesi olsun.

i) $F_A \tilde{\cup} F_{A^c} = F_{\bar{E}}$

ii) $F_A \tilde{\cap} F_{A^c} = F_{\Phi}$

İspat: $F_A = \left\{ (x, f_A(x)) : x \in E \right\}$ U üzerinde tanımlı olsun.

i)

$$\begin{aligned}
F_A \tilde{\cup} F_{A^c} &= \left\{ (x, (f_A(x) \cup U \setminus f_A(x))) : x \in E \right\} \\
&= \left\{ (x, U) : x \in E \right\} \\
&= F_{\bar{E}}
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
F_A \tilde{\cap} F_{A^c} &= \left\{ (x, (f_A(x) \cap U \setminus f_A(x))) : x \in X \right\} \\
&= \left\{ (x, \emptyset) : x \in X \right\} \\
&= F_{\Phi}
\end{aligned}$$

Teorem 3.17. F_A ve F_B , U ' da tanımlı iki esnek küme olsun.

$$i) (F_A \tilde{\cup} F_B)^C = F_{A^c} \tilde{\cap} F_{B^c}$$

$$ii) (F_A \tilde{\cap} F_B)^C = F_{A^c} \tilde{\cup} F_{B^c}$$

İspat: U üzerinde $F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E\}$, $F_B = \{(x, f_B(x)) : x \in E\}$ esnek kümeleri verilsin.

i)

$$\begin{aligned} (F_A \tilde{\cup} F_B)^C &= \{(x, (f_A(x) \cup f_B(x))^C) : x \in E\} \\ &= \{(x, (f_{A^c}(x) \cap f_{B^c}(x))) : x \in E\} \\ &= F_{A^c} \tilde{\cap} F_{B^c} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} (F_A \tilde{\cap} F_B)^C &= \{(x, (f_A(x) \cap f_B(x))^C) : x \in E\} \\ &= \{(x, (f_{A^c}(x) \cup f_{B^c}(x))) : x \in E\} \\ &= F_{A^c} \tilde{\cup} F_{B^c} \end{aligned}$$

Örnek 3.18. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel küme ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ise parametreler kümesi olsun

$$f_A(x_1) = \{u_3\}$$

$$f_A(x_2) = \{u_2, u_4\}$$

$$f_A(x_3) = \{u_1, u_2\}$$

$$f_A(x_4) = \{u_1, u_5\}$$

ve

$$f_B(x_1) = \{u_1, u_3\}$$

$$f_B(x_2) = \{u_2, u_4\}$$

$$f_B(x_3) = \{u_3\}$$

$$f_B(x_4) = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

olsun. Buna göre

$$F_A \tilde{\cup} F_B = \{(x_1, \{u_1, u_3\}), (x_2, \{u_2, u_4\}), (x_3, \{u_1, u_2, u_3\}), (x_4, U)\}$$

$$F_A \tilde{\cap} F_B = \{(x_1, \{u_3\}), (x_2, \{u_2, u_4\}), (x_4, \{u_5\})\}$$

$$F_{A\tilde{c}} = \{(x_1, \{u_1, u_2, u_4, u_5\}), (x_2, \{u_1, u_3, u_5\}), (x_3, \{u_3, u_4, u_5\}), (x_4, \{u_2, u_3, u_4\})\}$$

$$F_{B\tilde{c}} = \{(x_1, \{u_2, u_4, u_5\}), (x_2, \{u_1, u_3, u_5\}), (x_3, \{u_1, u_2, u_4, u_5\}), (x_4, \{u_1\})\}$$

4. BULANIK ESNEK KÜMELER

Bu bölümde, Maji ve arkadaşları (2001) tarafından ilk kez ortaya atılan bulanık esnek küme kavramının temel ilkeleri, özellikleri, örnekleri ile birlikte ele alınacaktır. Ardından bulanık esnek kümelerde karar verme yöntemi verilecektir.

Bu bölüm (Maji, Biswas ve Roy, 2001), (Çağman ve Enginoglu, 2010a) ve (Çağman, Çıtak, ve Enginoğlu, 2011) makalelerinden yararlanılarak yazılmıştır.

4.1 Bulanık Esnek Kümeler ve İşlemleri

Bu başlık altında, bulanık esnek kümelerin tanımları, temel özellikleri ve üzerinde gerçekleştirilebilecek işlemler detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

Tanım 4.1.1. U evrensel küme ve bu küme üzerinde bir E parametreler kümesi verilsin. $A \subset E$ için U üzerinde Γ_A bulanık esnek kümesi $x \notin A$ iken $\gamma_A(x) = \emptyset$ olmak üzere

$$\gamma_A : E \rightarrow F(U)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonu ile,

$$\Gamma_A = \{(x, \gamma_A(x)) : x \in E, \gamma_A(x) \in F(U)\}$$

olarak tanımlanır. U üzerinde tanımlanan bütün bulanık esnek kümelerin kümesi $BE(U)$ ile gösterilir. Ayrıca bulanık esnek küme BE-küme olarak da gösterilebilir.

Örnek 4.1.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olmak üzere bu evrensel küme üzerinde bir $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi verilsin. Eğer, $A = \{x_1, x_3, x_4\} \subseteq E$ için bulanık esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\gamma_A(x_1) = U$$

$$\gamma_A(x_3) = \{0.7/u_1, 0.1/u_3\}$$

$$\gamma_A(x_4) = \{0.9/u_2, 0.5/u_4, 0.8/u_5\}$$

olarak tanımlanırsa, Γ_A bulanık esnek kümesi

$$\Gamma_A = \{(x_1, U), (x_3, \{0.7/u_1, 0.1/u_3\}), (x_4, \{0.9/u_2, 0.5/u_4, 0.8/u_5\})\}$$

olur.

Örnek 4.1.3. Bir bulanık esnek küme düşünelim. Bu küme, tatil yerlerini seçerken göz önünde bulundurulacak bazı parametreleri değişkenler olarak kabul edecek şekilde tanımlansın. Farz edelim ki, U evrensel kümesinde dört adet tatil yeri var.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ve E parametre kümesi şöyle tanımlansın:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Burada parametreler şunlardır:

x_1 : Fiyat (bütçe dostu)

x_2 : Manzara (doğa güzelliği)

x_3 : Aktiviteler (sunulan aktiviteler)

x_4 : Temizlik (tesislerin durumu)

x_5 : Ulaşım Kolaylığı (ulaşım seçenekleri)

$A = \{x_1, x_2, x_5\} \subseteq E$ için bulanık esnek yaklaşım fonksiyonu

$$\gamma_A(x_1) = \{0.5/u_1, 0.1/u_2, 0.6/u_3, 0.7/u_4\}$$

$$\gamma_A(x_2) = \{0.3/u_1, 0.5/u_3, 0.2/u_4\}$$

$$\gamma_A(x_5) = \{0.1/u_1, 0.6/u_2, 0.6/u_3, 0.9/u_4\}$$

olarak tanımlanırsa Γ_A bulanık esnek kümesi

$$\Gamma_A = \{(x_1, \{0.5/u_1, 0.1/u_2, 0.6/u_3, 0.7/u_4\}), \\ (x_2, \{0.3/u_1, 0.5/u_3, 0.2/u_4\}), \\ (x_5, \{0.1/u_1, 0.6/u_2, 0.6/u_3, 0.9/u_4\})\}$$

olur.

Tanım 4.1.4. Γ_A , U üzerinde tanımlı bulanık esnek küme olsun. E kümesinin her elemanı için $\gamma_A(x) = \emptyset$ oluyorsa Γ_A kümesi boş bulanık esnek küme olarak adlandırılır. Γ_Φ sembolüyle gösterilir.

Tanım 4.1.5. Γ_A , U üzerinde tanımlı bulanık esnek küme olsun. E kümesinin her elemanı için $\gamma_A(x) = U$ oluyorsa Γ_A kümesi A – evrensel bulanık esnek küme olarak adlandırılır. $\Gamma_{\bar{A}}$ sembolüyle gösterilir.

$A = E$ olduğunda A – evrensel bulanık esnek kümesi $\Gamma_{\bar{E}}$ sembolüyle gösterilir ve bu kümeye evrensel bulanık esnek küme denir.

Örnek 4.1.6. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel kümesi ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tüm parametrelerin kümesi verilsin.

1) Eğer, $A = \{x_1, x_2, x_4\}$ ve

$$\gamma_A(x_1) = \{0.1/u_1, 0.5/u_3\}$$

$$\gamma_A(x_2) = U$$

$$\gamma_A(x_4) = \emptyset$$

ise

$$\Gamma_A = \{(x_1, \{0.1/u_1, 0.5/u_3\}), (x_2, U)\}$$

2) Eğer, $B = \{x_1, x_4\}$ ve

$$\gamma_B(x_1) = \emptyset$$

$$\gamma_B(x_4) = \emptyset$$

ise Γ_B kümesi boş bulanık esnek kümesidir ve $\Gamma_B = \Gamma_\emptyset$ olur.

3) Eğer, $C = \{x_1, x_3\}$ ve

$$\gamma_C(x_1) = U$$

$$\gamma_C(x_3) = U$$

ise Γ_C kümesi C – evrensel bulanık esnek kümesidir ve $\Gamma_C = \Gamma_{\bar{C}}$ olur.

4) Eğer, $D = E$ olmak üzere, her $x_i \in E$ ($i = 1, 2, 3, 4$) için $\gamma_D(x_i) = U$ ise Γ_D evrensel bulanık esnek kümesidir ve $\Gamma_D = \Gamma_{\bar{E}}$ olur.

Tanım 4.1.7. $\Gamma_A, \Gamma_B \in BE(U)$ olsun. E kümesinin her x elemanı için

$$\gamma_A(x) \subseteq \gamma_B(x)$$

sağlanıyorsa Γ_A kümesine Γ_B kümesinin bulanık esnek alt kümesi denir.

$\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ şeklinde gösterilir.

Sonuç 4.1.8. $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ ifadesi klasik alt küme tanımındaki gibi Γ_A daki her elemanın Γ_B nin bir eleman olduğu anlamına gelmez.

Örnek 4.1.9. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olmak üzere bu evrensel küme üzerinde bir

$E = \{x_1, x_2, x_3\}$ tüm parametrelerin kümesi verilsin.

Eğer, $A = \{x_2\}$, $B = \{x_2, x_3\}$ ve

$$\Gamma_A = \{(x_2, \{0.5/u_1\})\},$$

$\Gamma_B = \{(x_2, \{0.7/u_1, 0.3/u_4\}), (x_3, \{0.3/u_2, 0.5/u_5\})\}$ ise E kümesinin her x elemanı için

$\gamma_A(x) \subseteq \gamma_B(x)$ dir. Bu sebepten $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ olur ama $(x_2, \{0.5/u_1\}) \in \Gamma_A$ olup $(x_2, \{0.5/u_1\}) \notin \Gamma_B$ dir.

Teorem 4.1.10. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun.

- i) $\Gamma_A \subseteq \Gamma_E$
- ii) $\Gamma_\Phi \subseteq \Gamma_A$
- iii) $\Gamma_A \subseteq \Gamma_A$
- iv) $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ ve $\Gamma_B \subseteq \Gamma_C$ ise $\Gamma_A \subseteq \Gamma_C$

İspat: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun. Bu durumda

$$\Gamma_A = \{(x, \gamma_A(x)) : x \in E, \gamma_A(x) \in F(U)\}$$

$$\Gamma_B = \{(x, \gamma_B(x)) : x \in E, \gamma_B(x) \in F(U)\}$$

$$\Gamma_C = \{(x, \gamma_C(x)) : x \in E, \gamma_C(x) \in F(U)\}$$

olur.

- i) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_A(x) \subseteq U$ olduğundan $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_E(x)$ olup buradan da $\Gamma_A \subseteq \Gamma_E$ bulunur.
- ii) E kümesinin her x elemanı için $\emptyset \subseteq \Gamma_A$ olduğundan $\gamma_\Phi(x) \subseteq \gamma_A(x)$ olup buradan da $\Gamma_\Phi \subseteq \Gamma_A$ bulunur.
- iii) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_A(x)$ olup buradan da $\Gamma_A \subseteq \Gamma_A$ bulunur.
- iv) $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ ve $\Gamma_B \subseteq \Gamma_C$ olsun. Bu durumda her $x \in E$ için $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_B(x)$ ve $\gamma_B(x) \subseteq \gamma_C(x)$ olup buradan da $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_C(x)$ bulunur. Böylece $\Gamma_A \subseteq \Gamma_C$ olur.

Tanım 4.1.11. $\Gamma_A, \Gamma_B \in BE(U)$ olsun. $\Gamma_A = \Gamma_B$ ifadesi Γ_A ve Γ_B kümelerinin bulanık esnek eşitliğini ifade eder ve

$$\Gamma_A = \Gamma_B \Leftrightarrow E \text{ kümesinin her } x \text{ elemanı için } \gamma_A(x) = \gamma_B(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.12. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun.

- i) $\Gamma_A = \Gamma_B$ ve $\Gamma_B = \Gamma_C \Rightarrow \Gamma_A = \Gamma_C$
- ii) $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ ve $\Gamma_B \subseteq \Gamma_A \Rightarrow \Gamma_A = \Gamma_B$

İspat: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun.

i) $\Gamma_A = \Gamma_B$ ve $\Gamma_B = \Gamma_C$ ise E kümesinin her x elemanı için $\gamma_A(x) = \gamma_B(x)$ ve $\gamma_B(x) = \gamma_C(x)$ dir. Buradan da $\gamma_A(x) = \gamma_C(x)$ bulunur ki bu da $\Gamma_A = \Gamma_C$ olduğunu gösterir.

ii) $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ ve $\Gamma_B \subseteq \Gamma_A$ ise E kümesinin her x elemanı için $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_B(x)$ ve $\gamma_B(x) \subseteq \gamma_A(x)$ olup buradan $\gamma_A(x) = \gamma_B(x)$ bulunur. Bu da $\Gamma_A = \Gamma_B$ olduğunu gösterir.

Tanım 4.1.13. $\Gamma_A \in BE(U)$ olsun. E kümesinin her x elemanı için

$$\gamma_{A^c}(x) = \gamma_A^c(x) = U \setminus \gamma_A(x)$$

oluyorsa Γ_A^c a Γ_A nın bulanık esnek tümleyenidir denir. Burada $\gamma_{A^c}(x)$, Γ_A^c nın yaklaşım fonksiyonudur.

Teorem 4.1.14. $\Gamma_A \in BE(U)$ olsun.

- i) $(\Gamma_A^c)^c = \Gamma_A$
- ii) $\Gamma_\Phi^c = \Gamma_{\bar{E}}$

İspat: $\Gamma_A \in BE(U)$ olsun.

i) $\Gamma_B = \Gamma_A^{\tilde{C}}$ olsun $(\Gamma_A^{\tilde{C}})^{\tilde{C}} = (\Gamma_B)^{\tilde{C}}$ olur. E kümesinin her x elemanı için

$$\begin{aligned}\gamma_{B^{\tilde{C}}}(x) &= \gamma_B^C(x) \\ &= U \setminus \gamma_B(x) \\ &= U \setminus (U \setminus \gamma_A(x)) \\ &= \gamma_A(x)\end{aligned}$$

olup $(\Gamma_A^{\tilde{C}})^{\tilde{C}} = \Gamma_A$ olur.

ii) Her $x \in E$ için $\gamma_{\Phi^{\tilde{C}}}(x) = \gamma_{\Phi}^C(x) = (\emptyset)^C = E$ olup $\Gamma_{\Phi}^{\tilde{C}} = \Gamma_E$ olur.

Tanım 4.1.15. $\Gamma_A, \Gamma_B \in BE(U)$ olsun. Γ_A ve Γ_B kümelerinin bulanık esnek birleşimi $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B$ ile gösterilir ve $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B$ kümesinin yaklaşım fonksiyonu E kümesinin her x elemanı için

$$\gamma_{A \tilde{\cup} B}(x) = \gamma_A(x) \cup \gamma_B(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.16. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun.

- i) $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_A = \Gamma_A$
- ii) $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_{\Phi} = \Gamma_A$
- iii) $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_E = \Gamma_E$
- iv) $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B = \Gamma_B \tilde{\cup} \Gamma_A$
- v) $(\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B) \tilde{\cup} \Gamma_C = \Gamma_A \tilde{\cup} (\Gamma_B \tilde{\cup} \Gamma_C)$

İspat: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun.

- i) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_{A \cup A}(x) = \gamma_A(x) \cup \gamma_A(x) = \gamma_A(x)$ olup $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_A = \Gamma_A$ olur.
- ii) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_{A \cup \Phi}(x) = \gamma_A(x) \cup \gamma_\Phi(x) = \gamma_A(x)$ olup $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_\Phi = \Gamma_A$ olur.
- iii) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_{A \cup E}(x) = \gamma_A(x) \cup \gamma_E(x) = \gamma_E(x)$ olup $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_E = \Gamma_E$ olur.
- iv) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_{A \cup B}(x) = \gamma_A(x) \cup \gamma_B(x) = \gamma_B(x) \cup \gamma_A(x)$ olup $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B = \Gamma_B \tilde{\cup} \Gamma_A$ olur.
- v) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_{(A \cup B) \cup C}(x) = (\gamma_A(x) \cup \gamma_B(x)) \cup \gamma_C(x) = \gamma_A(x) \cup (\gamma_B(x) \cup \gamma_C(x))$ olup $(\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B) \tilde{\cup} \Gamma_C = \Gamma_A \tilde{\cup} (\Gamma_B \tilde{\cup} \Gamma_C)$ olur.

Tanım 4.1.17. $\Gamma_A, \Gamma_B \in BE(U)$ olsun. Γ_A ve Γ_B kümelerinin bulanık esnek kesişimi $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B$ ile gösterilir ve $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B$ kümesinin yaklaşım fonksiyonu E kümesinin her x elemanı için

$$\gamma_{A \tilde{\cap} B}(x) = \gamma_A(x) \cap \gamma_B(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.18. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun.

- i) $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_A = \Gamma_A$
- ii) $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_\Phi = \Gamma_\Phi$
- iii) $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_E = \Gamma_A$
- iv) $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B = \Gamma_B \tilde{\cap} \Gamma_A$
- v) $(\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B) \tilde{\cap} \Gamma_C = \Gamma_A \tilde{\cap} (\Gamma_B \tilde{\cap} \Gamma_C)$

İspat: $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun.

- i) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_{A\tilde{\cap}A}(x) = \gamma_A(x) \cap \gamma_A(x) = \gamma_A(x)$ olup $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_A = \Gamma_A$ olur.
- ii) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_{A\tilde{\cap}\Phi}(x) = \gamma_A(x) \cap \gamma_\Phi(x) = \gamma_\Phi(x)$ olup $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_\Phi = \Gamma_\Phi$ olur.
- iii) E kümesinin her x elemanı için $\gamma_{A\tilde{\cap}E}(x) = \gamma_A(x) \cap \gamma_E(x) = \gamma_A(x)$ olup $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_E = \Gamma_A$ olur.
- iv) E kümesinin her x elemanı için $x \in E$ için $\gamma_{A\tilde{\cap}B}(x) = \gamma_A(x) \cap \gamma_B(x) = \gamma_B(x) \cap \gamma_A(x)$ olup $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B = \Gamma_B \tilde{\cap} \Gamma_A$ olur.
- v) E kümesinin her x elemanı için $x \in E$ için $\gamma_{(A\tilde{\cap}B)\tilde{\cap}C}(x) = (\gamma_A(x) \cap \gamma_B(x)) \cap \gamma_C(x) = \gamma_A(x) \cap (\gamma_B(x) \cap \gamma_C(x))$ olup $(\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B) \tilde{\cap} \Gamma_C = \Gamma_A \tilde{\cap} (\Gamma_B \tilde{\cap} \Gamma_C)$ olur.

Sonuç 4.1.19. $\Gamma_A \in BE(U)$ olsun. Eğer $\Gamma_A \neq \Gamma_\Phi$ ve $\Gamma_A \neq \Gamma_E$ ise $\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_A^{\tilde{C}} \neq \Gamma_E$ ve $\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_A^{\tilde{C}} \neq \Gamma_\Phi$ dir.

Örnek 4.1.20. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesinin ve bir parametreler kümesi

$E = \{x_1, x_2\}$ verilsin. $\Gamma_A \in BE(U)$

$$\Gamma_A = \{(x_1, \{0.7/u_1, 0.2/u_3\}), (x_2, \{0.3/u_2\})\}$$

şeklinde tanımlandığında,

$$\Gamma_A^{\tilde{C}} = \{(x_1, \{0.3/u_1, 1/u_2, 0.8/u_3\}), (x_2, \{1/u_1, 0.7/u_2, 1/u_3\})\}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_A^{\tilde{C}} &= \{(x_1, \{0.3/u_1, 0.2/u_3\}), (x_2, \{0.3/u_2\})\} \\ &\neq \Gamma_\Phi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_A^{\tilde{C}} &= \{(x_1, \{0.7/u_1, 1/u_2, 0.8/u_3\}), (x_2, \{1/u_1, 0.7/u_2, 1/u_3\})\} \\ &\neq \Gamma_E \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.21. $\Gamma_A, \Gamma_B \in BE(U)$ olsun. De Morgan kuralları aşağıdaki gibidir.

i) $(\Gamma_A \cup \Gamma_B)^c = \Gamma_A^c \cap \Gamma_B^c$

ii) $(\Gamma_A \cap \Gamma_B)^c = \Gamma_A^c \cup \Gamma_B^c$

İspat: E kümesinin her x elemanı için

i)

$$\begin{aligned} \gamma_{(\Gamma_A \cup \Gamma_B)^c}(x) &= \gamma_{\Gamma_A^c \cap \Gamma_B^c}(x) \\ &= (\gamma_{\Gamma_A}(x) \cup \gamma_{\Gamma_B}(x))^c \\ &= (\gamma_{\Gamma_A}(x))^c \cap (\gamma_{\Gamma_B}(x))^c \\ &= \gamma_{\Gamma_A^c}(x) \cap \gamma_{\Gamma_B^c}(x) \\ &= \gamma_{\Gamma_A^c \cap \Gamma_B^c}(x) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \gamma_{(\Gamma_A \cap \Gamma_B)^c}(x) &= \gamma_{\Gamma_A^c \cup \Gamma_B^c}(x) \\ &= (\gamma_{\Gamma_A}(x) \cap \gamma_{\Gamma_B}(x))^c \\ &= (\gamma_{\Gamma_A}(x))^c \cup (\gamma_{\Gamma_B}(x))^c \\ &= \gamma_{\Gamma_A^c}(x) \cup \gamma_{\Gamma_B^c}(x) \\ &= \gamma_{\Gamma_A^c \cup \Gamma_B^c}(x) \end{aligned}$$

Teorem 4.1.22. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C \in BE(U)$ olsun.

i) $\Gamma_A \tilde{\cup} (\Gamma_B \tilde{\cap} \Gamma_C) = (\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_B) \tilde{\cap} (\Gamma_A \tilde{\cup} \Gamma_C)$

ii) $\Gamma_A \tilde{\cap} (\Gamma_B \tilde{\cup} \Gamma_C) = (\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_B) \tilde{\cup} (\Gamma_A \tilde{\cap} \Gamma_C)$

İspat: E kümesinin her x elemanı için

i)

$$\begin{aligned}\gamma_{A\tilde{\cup}(B\tilde{\cap}C)}(x) &= \gamma_A(x) \cup \gamma_{B\tilde{\cap}C}(x) \\ &= \gamma_A(x) \cup (\gamma_B(x) \cap \gamma_C(x)) \\ &= (\gamma_A(x) \cup \gamma_B(x)) \cap (\gamma_A(x) \cup \gamma_C(x)) \\ &= \gamma_{A\tilde{\cup}B}(x) \cap \gamma_{A\tilde{\cup}C}(x) \\ &= \gamma_{(A\tilde{\cup}B)\tilde{\cap}(A\tilde{\cup}C)}(x)\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\gamma_{A\tilde{\cap}(B\tilde{\cup}C)}(x) &= \gamma_A(x) \cap \gamma_{B\tilde{\cup}C}(x) \\ &= \gamma_A(x) \cap (\gamma_B(x) \cup \gamma_C(x)) \\ &= (\gamma_A(x) \cap \gamma_B(x)) \cup (\gamma_A(x) \cap \gamma_C(x)) \\ &= \gamma_{A\tilde{\cap}B}(x) \cup \gamma_{A\tilde{\cap}C}(x) \\ &= \gamma_{(A\tilde{\cap}B)\tilde{\cup}(A\tilde{\cap}C)}(x)\end{aligned}$$

4.2 Bulanık Esnek Kümelerde Karar Verme Yöntemi

Bulanık esnek kümeler, karar verme süreçlerinde belirsizlikle başa çıkmak için etkili bir yöntem sunar. Bu başlık altında, bulanık esnek kümeler kullanılarak nasıl karar verilebileceği ve bu sürecin matematiksel temelleri ele alınmaktadır.

Bu kısım (Çağman, Çıtak ve Enginoğlu, 2011) makalesinden yararlanılarak yazılmıştır.

4.2.1 BE- Çıkarım Operatörü

Bu bölümde, bir BE-kümesinden ve onun kardinal sayısından türetilen bir çıkarım bulanık küme üreten bir BE-çıkarım operatörünü tanımlıyoruz. Bir BE-kümesinin yaklaşım fonksiyonları bulanıktır. Bulanık kümeler üzerindeki bir BE-Çıkarım operatörü, bir BE-kümesinin çeşitli yaklaşım fonksiyonlarının, BE-kümesinin çıkarım bulanık kümesini oluşturan tek bir bulanık kümede birleştirildiği bir işlemdir. Bir çıkarım bulanık kümeye ulaşıldıktan sonra, bu kümeden en iyi alternatifini seçmek için kullanılır.

Tanım 4.2.2. $\Gamma_A \in BE(U)$ olsun. $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ olduğunu varsayalım.

$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A \subseteq E$ ise ozaman Γ_A aşağıdaki tablodaki gibi gösterilebilir.

Γ_A	x_1	x_2	$\dots$	x_n
u_1	$\mu_{\gamma_A(x_1)}(u_1)$	$\mu_{\gamma_A(x_2)}(u_1)$	$\dots$	$\mu_{\gamma_A(x_n)}(u_1)$
u_2	$\mu_{\gamma_A(x_1)}(u_2)$	$\mu_{\gamma_A(x_2)}(u_2)$	$\dots$	$\mu_{\gamma_A(x_n)}(u_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_m	$\mu_{\gamma_A(x_1)}(u_m)$	$\mu_{\gamma_A(x_2)}(u_m)$	$\dots$	$\mu_{\gamma_A(x_n)}(u_m)$

Burada $\mu_{\gamma_A(x)}$, γ_A fonksiyonunun üyelik fonksiyonudur.

Eğer $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = \mu_{\gamma_A(x_j)}(u_i)$ ise Γ_A kümesi aşağıdaki gibi

bir matris ile karakterize edilir.

$$[a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu matrise U üzerindeki Γ_A kümesinin $m \times n$ tipindeki BE – matris’ i denir.

Tanım 4.2.3. $\Gamma_A \in BE(U)$ olsun. $c\Gamma_A$ ile gösterilen Γ_A kümesinin kardinal kümesi

$$c\Gamma_A = \{\mu_{c\Gamma_A}(x)/x : x \in E\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu küme E üzerinde bulanık bir kümedir. $c\Gamma_A$ kümesinin üyelik fonksiyonu olan $\mu_{c\Gamma_A}$

$$\mu_{c\Gamma_A} : E \rightarrow [0,1], \quad \mu_{c\Gamma_A}(x) = \frac{|\gamma_A(x)|}{|U|}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|U|$, U evrensel kümesinin kardinalitesidir ve $|\gamma_A(x)|$ de $\gamma_A(x)$ in skaler eleman sayısını gösterir.

$cBE(U)$ gösterimi U ’daki bütün BE-kümelerinin kardinal kümelerinin kümesini ifade etmektedir. $cBE(U) \subseteq F(E)$ olduğu açıktır.

Tanım 4.2.4. $\Gamma_A \in BE(U)$, $c\Gamma_A \in cBE(U)$ ve $A \subseteq E$ olmak üzere $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. Bu durumda $c\Gamma_A$ aşağıdaki tablo ile gösterilebilir.

E	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mu_{c\Gamma_A}$	$\mu_{c\Gamma_A}(x_1)$	$\mu_{c\Gamma_A}(x_2)$	$\dots$	$\mu_{c\Gamma_A}(x_n)$

$j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{1j} = \mu_{c\Gamma_A}(x_j)$ ise $c\Gamma_A$ kardinal kümesi aşağıdaki gibi bir matris ile karakterize edilebilir.

$$[a_{1j}]_{1 \times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

Buna E üzerindeki $c\Gamma_A$ kardinal kümesinin kardinal matrisi denir.

Tanım 4.2.5. $\Gamma_A \in BE(U)$ ve $c\Gamma_A \in cBE(U)$ olsun. BE-Çıkarım operatörü BE_{agg} ile gösterilmek üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$BE_{agg}: cBE(U) \times BE(U) \rightarrow F(U)$$

$$BE_{agg}(c\Gamma_A, \Gamma_A) = \Gamma_A^*$$

$\Gamma_A^* = \{\mu_{\Gamma_A^*}(u)/u : u \in U\}$ kümesi burada U üzerinde bulanık kümedir. Γ_A^* kümesine Γ_A bulanık esnek kümesinin çıkarım kümesi denir ve Γ_A^* kümesinin $\mu_{\Gamma_A^*}$ üyelik kümesi:

$$\mu_{\Gamma_A^*}: U \rightarrow [0,1]$$

$$\mu_{\Gamma_A^*}(u) = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu_{c\Gamma_A}(x) \mu_{\Gamma_A}(x)(u)$$

şeklindedir. Burada $|E|$, E kümesinin kardinalitesini ifade eder.

Tanım 4.2.6. $\Gamma_A \in BE(U)$ ve Γ_A^* bir çıkarım bulanık kümesi olsun. $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ olmak üzere Γ_A^* aşağıdaki tablodaki gibi ifade edilebilir.

Γ_A	$\mu_{\Gamma_A^*}$
u_1	$\mu_{\Gamma_A^*}(u_1)$
u_2	$\mu_{\Gamma_A^*}(u_2)$
$\vdots$	$\vdots$
u_m	$\mu_{\Gamma_A^*}(u_m)$

Eğer $i = 1, 2, \dots, m$ için $a_{i1} = \mu_{\Gamma_A^*}(u_i)$ için Γ_A^* kümesi aşağıdaki karakteristik matrisle benzersiz olarak ifade edilebilir.

$$[a_{i1}]_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Buna U üzerinden Γ_A^* kümesinin çıkarım matrisi denir.

Teorem 4.2.7. $\Gamma_A \in BE(U)$ ve $A \subseteq E$ olsun. Eğer M_{Γ_A} , $M_{c\Gamma_A}$ ve $M_{\Gamma_A^*}$ sırasıyla Γ_A , $c\Gamma_A$ ve Γ_A^* kümelerinin temsil matrisleri olmak üzere

$$|E| \times M_{\Gamma_A^*} = M_{\Gamma_A} \times M_{c\Gamma_A}^T$$

dir. Burada $M_{c\Gamma_A}^T$ matrisi $M_{c\Gamma_A}$ matrisinin transpozudur ve $|E|$, E nin kardinalitesidir.

$$[a_{i1}]_{m \times 1} = [a_{ij}]_{m \times n} \times [a_{1j}]_{1 \times n}^T$$

olduğunu düşünmek yeterlidir.

Bu teorem bir bulanık esnek kümenin çıkarım bulanık kümesinin hesaplanmasına uygulanabilir.

4.3 Bulanık Esnek Kümelerde Karar Verme Yöntemi Uygulaması

Çıkarım bir bulanık küme elde edildikten sonra, bu kümeden en iyi alternatifi seçmek gerekebilir. Bu nedenle, aşağıdaki algoritmayı kullanarak bir karar verebiliriz.

- 1. Adım:** U üzerinde bir Γ_A bulanık esnek küme oluşturulur.
- 2. Adım:** Γ_A kümesinin $c\Gamma_A$ kardinal kümesi bulunur.
- 3. Adım:** Γ_A kümesinin Γ_A^* çıkarım bulanık kümesi bulunur.
- 4. Adım:** $\max \mu_{\Gamma_A^*}(u)$ tarafından oluşturulan üyelik derecelerini inceleyerek en yüksek üyelik derecesine sahip alternatif seçilir.

Örnek 4.3.1. Bir aile yeni bir araba almak istiyor. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olmak üzere beş araç alternatifleri var. $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametre kümesini göz önünde bulundurarak seçim yapacaklardır. $i=1,2,3,4$ olmak üzere x_i ler sırayla "yakıt verimliliği", "güvenlik", "fiyat" ve "konfor" anlamına gelsin.

1.Adım: Aile $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ alt kümesini seçerek U üzerinde Γ_A bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned}\Gamma_A = & \{(x_1, \{0.7/u_1, 0.8/u_2, 0.6/u_3, 0.9/u_4\}), \\ & (x_2, \{0.9/u_1, 0.7/u_2, 0.8/u_3, 0.6/u_4, 0.5/u_5\}), \\ & (x_3, \{0.2/u_1, 0.8/u_3, 0.1/u_4, 0.4/u_5\})\}\end{aligned}$$

2.Adım: Kardinal hesaplanır.

$$\begin{aligned}\mu_{c\Gamma_A}(x_1) &= \frac{0.7 + 0.8 + 0.6 + 0.9}{5} = 0.6 \\ \mu_{c\Gamma_A}(x_2) &= \frac{0.9 + 0.7 + 0.8 + 0.6 + 0.5}{5} = 0.7 \\ \mu_{c\Gamma_A}(x_3) &= \frac{0.2 + 0.8 + 0.1 + 0.4}{5} = 0.3\end{aligned}$$

$$c\Gamma_A = \{0.6/x_1, 0.7/x_2, 0.3/x_3\}$$

3.Adım: Çıkarım bulanık kümesi bulunur:

$$M_{\Gamma_A^*} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0.7 & 0.9 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0.6 \\ 0.7 \\ 0.3 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.278 \\ 0.280 \\ 0.290 \\ 0.248 \\ 0.118 \end{vmatrix}$$

olur. Bunun anlamı

$$\Gamma_A^* = \{0.278/u_1, 0.280/u_2, 0.290/u_3, 0.248/u_4, 0.118/u_5\}$$

şeklindedir.

4. Adım: Son olarak en yüksek üyelik derecesi

$$\text{Max}\mu_{\Gamma_A^*}(u) = 0.290$$

olduğundan yeni araba olarak u_3 seçilebilir.

5. BULANIK PARAMETRELİ ESNEK KÜMELER

Bu bölümde Çağman ve arkadaşları (2011) tarafından ilk kez ortaya atılan bulanık parametrelili esnek kümeler kavramıyla ilgili temel tanım ve özellikleri, ardından bulanık parametrelili esnek kümelerde karar verme yöntemi verilecektir.

5.1 Bulanık Parametrelili Esnek Kümeler ve İşlemleri

Bu başlık altında, bulanık parametrelili esnek kümelerin temel tanımları, özellikleri ve bu kümeler üzerinde gerçekleştirilebilecek işlemler açıklanmaktadır.

Bu kısım (Çağman, Çıtak ve Enginoğlu, 2011) makalesinden yararlanılarak yazılmıştır.

Tanım 5.1.1. $P(U)$, U evrensel kümesinin kuvvet kümesi, E tüm parametrelerin kümesi ve X kümesi E üzerinde bulanık küme olsun. U üzerinde tanımlanan ve F_X ile gösterilen aşağıdaki şartlar sağlayan aşağıdaki sıralı ikililer kümesine bulanık parametrelili esnek küme denir. Kısaca BP-esnek küme olarak gösterilir.

$$F_X = \{(\mu_X(x)/x, f_X(x)) : x \in E, f_X(x) \in P(U), \mu_X(x) \in [0,1]\}$$

Yukarıdaki $f_X : E \rightarrow P(U)$ fonksiyonuna F_X bulanık parametrelili esnek kümenin yaklaşım fonksiyona denir ve $\mu_X(x) = 0$ ise $f_X(x) = \emptyset$ olur. $\mu_X : E \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna F_X bulanık parametrelili esnek kümenin üyelik fonksiyonu denir ve $\mu_X(x)$ x parametresinin önem derecesidir.

U evrensel kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık parametrelili esnek kümeleri $BPE(U)$ ile göstereceğiz.

Tanım 5.1.2. $F_X \in BPE(U)$ olsun. E kümesinin her x elemanı için $f_X(x) = \emptyset$ ise F_X e X – boş bulanık parametrelili esnek küme denir ve F_{Φ_X} ile gösterilir.

$X = \emptyset$ ise F_X e boş bulanık parametrelili esnek küme denir ve F_{Φ} sembolüyle gösterilir.

Tanım 5.1.3. F_X bulanık parametrelili esnek küme olsun. X, E nin kesin alt kümesi ve E kümesinin her x elemanı için $f_X(x) = U$ oluyorsa F_X kümesine X – evrensel bulanık parametrelili esnek küme denir ve $F_{\bar{X}}$ sembolüyle gösterilir.

$X = E$ ise F_X e evrensel bulanık parametrelili esnek küme denir. $F_{\bar{E}}$ sembolüyle gösterilir.

Örnek 5.1.4. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel küme ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bir parametreler kümesi olsun.

1) Eğer, $X = \{0.9/x_1, 0.4/x_2, 1/x_4\}$, $f_X(x_1) = \{u_2, u_3\}$, $f_X(x_2) = \emptyset$ ve $f_X(x_4) = U$ ise

$$F_X = \{(0.9/x_1, \{u_2, u_3\}), (0.4/x_2, \emptyset), (1/x_4, U)\}$$

olur.

2) Eğer, $Y = \{0.1/x_2, 0.6/x_3\}$, $f_Y(x_2) = \emptyset$ ve $f_Y(x_3) = \emptyset$ ise $F_Y = F_{\Phi_Y}$

3) Eğer, $Z = \emptyset$ ise $F_Z = F_{\Phi}$

4) Eğer, $T = \{1/x_2, 1/x_3\}$, $f_T(x_2) = U$ ve $f_T(x_3) = U$ ise $F_T = F_{\bar{T}}$

5) Eğer, $K = E = \{1/x_1, 1/x_2, 1/x_3, 1/x_4\}$, $f_K(x_1) = U$, $f_K(x_2) = U$, $f_K(x_3) = U$, $f_K(x_4) = U$ ise $F_K = F_{\bar{E}}$ olur.

Örnek 5.1.5. Bir bulanık parametrelili esnek küme düşünelim. Bu küme, araştırma projeleri için uygun veri setlerini seçerken göz önünde bulundurulacak bazı parametreleri değişkenler olarak kabul edecek şekilde tanımlansın. Farz edelim ki, U evrensel kümesinde

sekiz veri seti olsun.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ ve E parametre kümesi şöyle tanımlansın:

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

Burada parametreler şunlardır:

x_1 : Veri kalitesi

x_2 : Kapsam

x_3 : Güncellik

x_4 : Erişilebilirlik

x_5 : Analiz potansiyeli

$X = \{0.6/x_1, 0.8/x_2, 0.6/x_4\}$ için

$$f_X(x_1) = \{u_1, u_2, u_6\},$$

$$f_X(x_2) = \{u_1, u_3, u_5, u_8\},$$

$$f_X(x_4) = \{u_4, u_6, u_7\}$$

ise bu bulanık parametrelili esnek küme

$$F_X = \{(0.6/x_1, \{u_1, u_2, u_6\}), (0.8/x_2, \{u_1, u_3, u_5, u_8\}), (0.6/x_4, \{u_4, u_6, u_7\})\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.1.6. $F_X, F_Y \in BPE(U)$ olsun. E kümesinin her x elemanı için $\mu_X(x) \leq \mu_Y(x)$ ve $f_X(x) \subseteq f_Y(x)$ oluyorsa F_X e F_Y kümesinin bulanık parametrelili esnek alt kümesidir denir. $F_X \subseteq F_Y$ şeklinde gösterilir.

Sonuç 5.1.7. $F_X \subseteq F_Y$ ifadesi klasik alt kümedeki gibi F_X in her elemanının F_Y nin de elemanı olacağı anlamı taşımaz.

Örnek 5.1.8. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel küme ve $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ bir parametreler kümesi olsun.

Eğer, $X = \{0.3/x_2\}$, $Y = \{0.5/x_2, 0.6/x_3\}$ ve

$F_X = \{(0.3/x_2, \{u_3, u_4\})\}$,

$F_Y = \{(0.5/x_2, \{u_1, u_3, u_4\}), (0.6/x_3, \{u_1, u_5\})\}$ alırsak

her $x \in E$ için $\mu_X(x) \leq \mu_Y(x)$ ve $f_X(x) \subseteq f_Y(x)$ oluyor.

Fakat $(0.3/x_2, \{u_3, u_4\}) \in F_X$ olmasına rağmen $(0.3/x_2, \{u_3, u_4\}) \notin F_Y$ dir.

Teorem 5.1.9. F_X ve F_Y U üzerinde bulanık parametrelili esnek kümeler olsun. Bu durumda

- i) $F_X \subseteq F_{\bar{E}}$
 - ii) $F_{\emptyset} \subseteq F_X$
 - iii) $F_X \subseteq F_X$
 - iv) $F_X \subseteq F_Y$ ve $F_Y \subseteq F_Z \Rightarrow F_X \subseteq F_Z$
- olur.

İspat: Her $x \in E$ için

- i) $X \subseteq E$ olduğundan tanım gereği $\mu_X(x) \leq 1$ ve $f_X(x) \subseteq U$ olduğu açıktır. Bundan dolayı $F_X \subseteq F_{\bar{E}}$ olur.
- ii) $\emptyset \subseteq X$ olduğundan $\mu_{\emptyset}(x) \leq \mu_X(x)$ ve $f_{\emptyset}(x) \subseteq f_X(x)$ olduğu için $F_{\emptyset} \subseteq F_X$ olur.
- iii) $X \subseteq X$ olduğundan $\mu_X(x) \leq \mu_X(x)$ ve $f_X(x) \subseteq f_X(x)$ olduğu için $F_X \subseteq F_X$ olur.
- iv) $F_X \subseteq F_Y$ ve $F_Y \subseteq F_Z$ olsun bu durumda

$$\mu_X(x) \leq \mu_Y(x), f_X(x) \subseteq f_Y(x)$$

ve

$$\mu_Y(x) \leq \mu_Z(x), f_Y(x) \subseteq f_Z(x)$$

olduğundan

$$\mu_X(x) \leq \mu_Z(x) \text{ ve } f_X(x) \subseteq f_Z(x)$$

bulunur. Buradan $F_X \subseteq F_Z$ olur.

Tanım 5.1.10. F_X, F_Y U üzerinde bulanık parametrelili esnek kümeler olsun. F_X ve F_Y kümelerinin bulanık parametrelili esnek küme eşitliği $F_X = F_Y$ ile gösterilir ve E kümesinin her x elemanı için

$$F_X = F_Y \Leftrightarrow \mu_X(x) = \mu_Y(x) \text{ ve } f_X(x) = f_Y(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.1.11. F_X, F_Y ve F_Z U üzerinde bulanık parametrelili esnek kümeler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) $F_X = F_Y$ ve $F_Y = F_Z \Rightarrow F_X = F_Z$
- ii) $F_X \subseteq F_Y$ ve $F_Y \subseteq F_X \Leftrightarrow F_X = F_Y$

İspat:

- i) $F_X = F_Y$ ve $F_Y = F_Z$ olsun. E nin her x elemanı için

$$\mu_X(x) = \mu_Y(x), f_X(x) = f_Y(x)$$

ve

$$\mu_Y(x) = \mu_Z(x), f_Y(x) = f_Z(x)$$

olur buradan da

$$\mu_X(x) = \mu_Z(x) \text{ ve } f_X(x) = f_Z(x)$$

bulunur. $F_X = F_Z$ olur.

- ii) $(\Rightarrow:)$ $F_X \subseteq F_Y$ ve $F_Y \subseteq F_X$ olsun bu durumda her $x \in E$ için

$$\mu_X(x) \leq \mu_Y(x), f_X(x) \subseteq f_Y(x)$$

ve

$$\mu_Y(x) \leq \mu_X(x), f_Y(x) \subseteq f_X(x)$$

buradan da $\mu_X(x) = \mu_Y(x)$ ve $f_X(x) = f_Y(x)$ bulunur. Yani $F_X = F_Y$ olur.

$(\Leftarrow:)$ $F_X = F_Y$ her $x \in E$ için $\mu_X(x) = \mu_Y(x)$ ve $f_X(x) = f_Y(x)$ olur. Buradan da

$$\mu_X(x) \leq \mu_Y(x) , f_X(x) \subseteq f_Y(x)$$

ve

$$\mu_Y(x) \leq \mu_X(x) , f_Y(x) \subseteq f_X(x)$$

bulunur ki $F_X \subseteq F_Y$ ve $F_Y \subseteq F_X$ olur.

Tanım 5.1.12. F_X bulanık parametrelili esnek küme olsun. F_X in tümleyeni $F_X^{\tilde{c}}$ ile gösterilir, yaklaşım ve üyelik fonksiyonu sayesinde

$$\mu_{X^{\tilde{c}}}(x) = 1 - \mu_X(x) \text{ ve } f_{X^{\tilde{c}}}(x) = U \setminus f_X(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.1.13. F_X bulanık parametrelili esnek küme olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) $(F_X^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = F_X$
- ii) $F_{\Phi}^{\tilde{c}} = F_{\bar{E}}$

İspat:

- i) $F_Y = F_X^{\tilde{c}}$ olarak tanımlarsak $F_Y^{\tilde{c}}$ için ve

$$f_{Y^{\tilde{c}}}(x) = U \setminus f_Y(x)$$

$$\begin{aligned} \mu_{Y^{\tilde{c}}}(x) &= 1 - \mu_Y(x) \\ &= 1 - (1 - \mu_X(x)) \\ &= \mu_X(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{Y^{\tilde{c}}}(x) &= U \setminus f_Y(x) \\ &= U \setminus (U \setminus f_X(x)) \\ &= f_X(x) \end{aligned}$$

bulunur yani $(F_X^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = F_X$ olur.

ii) $\mu_{\Phi^c}(x) = 1 - \mu_{\Phi}(x) = 1 - 0 = 1$ ve $f_{\Phi^c}(x) = U \setminus f_{\Phi}(x) = U \setminus \emptyset = U$ buradan $F_{\Phi}^c = F_{\tilde{E}}$ bulunur.

Tanım 5.1.14. F_X ve F_Y bulanık parametrelili esnek küme olsun. F_X ve F_Y nin birleşimi $F_X \tilde{\cup} F_Y$ şeklinde gösterilir ve E nin her x elemanı için

$$\mu_{X \tilde{\cup} Y}(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \text{ ve } f_{X \tilde{\cup} Y}(x) = f_X(x) \cup f_Y(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.1.15. F_X, F_Y ve F_Z bulanık parametrelili esnek küme olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) $F_X \tilde{\cup} F_X = F_X$
- ii) $F_X \tilde{\cup} F_{\Phi} = F_X$
- iii) $F_X \tilde{\cup} F_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}}$
- iv) $F_X \tilde{\cup} F_Y = F_Y \tilde{\cup} F_X$
- v) $(F_X \tilde{\cup} F_Y) \tilde{\cup} F_Z = F_X \tilde{\cup} (F_Y \tilde{\cup} F_Z)$

İspat: Her $x \in E$ için;

- i) $\mu_{X \tilde{\cup} X}(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_X(x)\} = \mu_X(x)$ ve $f_{X \tilde{\cup} X}(x) = f_X(x) \cup f_X(x) = f_X(x)$ olup $F_X \tilde{\cup} F_X = F_X$ dir.
- ii) $\mu_{X \tilde{\cup} \Phi}(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_{\emptyset}(x)\} = \max\{\mu_X(x), 0\} = \mu_X(x)$ ve $f_{X \tilde{\cup} \Phi}(x) = f_X(x) \cup f_{\emptyset}(x) = f_X(x) \cup \emptyset = f_X(x)$ olup $F_X \tilde{\cup} F_{\Phi} = F_X$ dir.
- iii) $\mu_{X \tilde{\cup} \tilde{E}}(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_{\tilde{E}}(x)\} = \max\{\mu_X(x), 1\} = 1$ ve $f_{X \tilde{\cup} \tilde{E}}(x) = f_X(x) \cup f_{\tilde{E}}(x) = f_X(x) \cup U = U$ olup $F_X \tilde{\cup} F_{\tilde{E}} = F_{\tilde{E}}$ dir.
- iv) $\mu_{X \tilde{\cup} Y}(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} = \max\{\mu_Y(x), \mu_X(x)\} = \mu_{Y \tilde{\cup} X}(x)$ ve $f_{X \tilde{\cup} Y}(x) = f_X(x) \cup f_Y(x) = f_Y(x) \cup f_X(x)$ olup $F_X \tilde{\cup} F_Y = F_Y \tilde{\cup} F_X$ dir.

v)

$$\begin{aligned}
 \mu_{X \cup (Y \cup Z)}(x) &= \max\{\mu_X(x), \mu_{Y \cup Z}(x)\} \\
 &= \max\left\{\mu_X(x), \max\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}\right\} \\
 &= \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x), \mu_Z(x)\} \\
 &= \max\left\{\max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}, \mu_Z(x)\right\} \\
 &= \mu_{(X \cup Y) \cup Z}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{X \cup (Y \cup Z)}(x) &= f_X(x) \cup (f_Y(x) \cup f_Z(x)) \\
 &= f_X(x) \cup f_Y(x) \cup f_Z(x) \\
 &= (f_X(x) \cup f_Y(x)) \cup f_Z(x) \\
 &= f_{(X \cup Y) \cup Z}(x)
 \end{aligned}$$

Tanım 5.1.16. F_X ve F_Y bulanık parametrelili esnek küme olsun. F_X ve F_Y nin kesişimi $F_X \tilde{\cap} F_Y$ şeklinde gösterilir ve E nin her x elemanı için

$$\mu_{X \tilde{\cap} Y}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \text{ ve } f_{X \tilde{\cap} Y}(x) = f_X(x) \cap f_Y(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.1.17. F_X, F_Y ve F_Z bulanık parametrelili esnek küme olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) $F_X \tilde{\cap} F_X = F_X$
- ii) $F_X \tilde{\cap} F_\Phi = F_\Phi$
- iii) $F_X \tilde{\cap} F_E = F_X$
- iv) $F_X \tilde{\cap} F_Y = F_Y \tilde{\cap} F_X$
- v) $(F_X \tilde{\cap} F_Y) \tilde{\cap} F_Z = F_X \tilde{\cap} (F_Y \tilde{\cap} F_Z)$

İspat:

i) $\mu_{X \tilde{\cap} X}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_X(x)\} = \mu_X(x)$ ve $f_{X \tilde{\cap} X}(x) = f_X(x) \cap f_X(x) = f_X(x)$ olup $F_X \tilde{\cap} F_X = F_X$ dir.

ii) $\mu_{X \tilde{\cap} \emptyset}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_{\emptyset}(x)\} = \min\{\mu_X(x), 0\} = 0$ ve

$$f_{X \tilde{\cap} \emptyset}(x) = f_X(x) \cap f_{\emptyset}(x) = f_X(x) \cap \emptyset = \emptyset \text{ olup } F_X \tilde{\cap} F_{\emptyset} = F_{\emptyset} \text{ dir.}$$

iii) $\mu_{X \tilde{\cap} E}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_E(x)\} = \min\{\mu_X(x), 1\} = \mu_X(x)$ ve

$$f_{X \tilde{\cap} E}(x) = f_X(x) \cap f_E(x) = f_X(x) \cap U = f_X(x) \text{ olup } F_X \tilde{\cap} F_E = F_X \text{ dir.}$$

iv) $\mu_{X \tilde{\cap} Y}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} = \min\{\mu_Y(x), \mu_X(x)\} = \mu_{Y \tilde{\cap} X}(x)$ ve

$$f_{X \tilde{\cap} Y}(x) = f_X(x) \cap f_Y(x) = f_Y(x) \cap f_X(x) \text{ olup } F_X \tilde{\cap} F_Y = F_Y \tilde{\cap} F_X \text{ dir.}$$

v)

$$\begin{aligned} \mu_{X \tilde{\cap} (Y \tilde{\cap} Z)}(x) &= \min\{\mu_X(x), \mu_{Y \tilde{\cap} Z}(x)\} \\ &= \min\left\{\mu_X(x), \min\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}\right\} \\ &= \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x), \mu_Z(x)\} \\ &= \min\left\{\min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}, \mu_Z(x)\right\} \\ &= \mu_{(X \tilde{\cap} Y) \tilde{\cap} Z}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{X \tilde{\cap} (Y \tilde{\cap} Z)}(x) &= f_X(x) \cap (f_Y(x) \cap f_Z(x)) \\ &= f_X(x) \cap f_Y(x) \cap f_Z(x) \\ &= (f_X(x) \cap f_Y(x)) \cap f_Z(x) \\ &= f_{(X \tilde{\cap} Y) \tilde{\cap} Z}(x) \end{aligned}$$

Sonuç 5.1.18. F_X bulanık parametrelili esnek küme olsun. $F_X \neq F_\Phi$ ve $F_X \neq F_E$ ise $F_X \tilde{\cup} F_X^{\tilde{c}} \neq F_E$ ve $F_X \tilde{\cap} F_X^{\tilde{c}} \neq F_\Phi$ dir.

Örnek 5.1.19. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesinde $E = \{x_1, x_2\}$ parametrelerin kümesi verilsin.

$$X = \{0.8/x_1, 0.4/x_2\}$$

olmak üzere $F_X \in \text{BPE}(U)$ kümesi

$$F_X = \{(0.8/x_1, \{u_1, u_3\}), (0.4/x_2, \{u_2, u_3\})\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$F_X^{\tilde{c}} = \{(0.2/x_1, \{u_2\}), (0.6/x_2, \{u_1\})\}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} F_X \tilde{\cup} F_X^{\tilde{c}} &= \{(0.8/x_1, \{u_1, u_2, u_3\}), (0.6/x_2, \{u_1, u_2, u_3\})\} \\ &= \{(0.8/x_1, U), (0.6/x_2, U)\} \\ &= F_{\tilde{X}} \\ &\neq F_E \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_X \tilde{\cap} F_X^{\tilde{c}} &= \{(0.2/x_1, \emptyset), (0.4/x_2, \emptyset)\} \\ &= F_{\Phi_X} \\ &\neq F_\Phi \end{aligned}$$

Teorem 5.1.20. $F_X, F_Y \in \text{BPE}(U)$ olsun. De Morgan kuralları aşağıdaki gibi sağlanır.

- i) $(F_X \tilde{\cup} F_Y)^{\tilde{c}} = F_X^{\tilde{c}} \tilde{\cap} F_Y^{\tilde{c}}$
- ii) $(F_X \tilde{\cap} F_Y)^{\tilde{c}} = F_X^{\tilde{c}} \tilde{\cup} F_Y^{\tilde{c}}$

İspat: E nin her x elemanı için

i)

$$\mu_{(F_X \tilde{\cup} F_Y)^{\tilde{c}}}(x) = 1 - \mu_{F_X \tilde{\cup} F_Y}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \\
&= \min\{1 - \mu_X(x), 1 - \mu_Y(x)\} \\
&= \min\{\mu_{X^c}(x), \mu_{Y^c}(x)\} \\
&= \mu_{X^c \cap Y^c}(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_{(X \cup Y)^c}(x) &= U \setminus f_{X \cup Y}(x) \\
&= U \setminus (f_X(x) \cup f_Y(x)) \\
&= (U \setminus f_X(x)) \cap (U \setminus f_Y(x)) \\
&= f_{X^c}(x) \cap f_{Y^c}(x) \\
&= f_{X^c \cap Y^c}(x)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\mu_{(X \cap Y)^c}(x) &= 1 - \mu_{X \cap Y}(x) \\
&= 1 - \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \\
&= \max\{1 - \mu_X(x), 1 - \mu_Y(x)\} \\
&= \max\{\mu_{X^c}(x), \mu_{Y^c}(x)\} \\
&= \mu_{X^c \cup Y^c}(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_{(X \cap Y)^c}(x) &= U \setminus f_{X \cap Y}(x) \\
&= U \setminus (f_X(x) \cap f_Y(x)) \\
&= (U \setminus f_X(x)) \cup (U \setminus f_Y(x)) \\
&= f_{X^c}(x) \cup f_{Y^c}(x) \\
&= f_{X^c \cup Y^c}(x)
\end{aligned}$$

Teorem 5.1.21. F_X, F_Y ve F_Z bulanık parametrelili esnek kümeler olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) $F_X \tilde{\cup} (F_Y \tilde{\cap} F_Z) = (F_X \tilde{\cup} F_Y) \tilde{\cap} (F_X \tilde{\cup} F_Z)$
- ii) $F_X \tilde{\cap} (F_Y \tilde{\cup} F_Z) = (F_X \tilde{\cap} F_Y) \tilde{\cup} (F_X \tilde{\cap} F_Z)$

İspat: Her $x \in E$ için

i)

$$\begin{aligned}
 \mu_{X \tilde{\cup} (Y \tilde{\cap} Z)}(x) &= \max\{\mu_X(x), \mu_{Y \tilde{\cap} Z}(x)\} \\
 &= \max\left\{\mu_X(x), \min\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}\right\} \\
 &= \min\left\{\max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}, \max\{\mu_X(x), \mu_Z(x)\}\right\} \\
 &= \min\{\mu_{X \tilde{\cup} Y}(x), \mu_{X \tilde{\cup} Z}(x)\} \\
 &= \mu_{(X \tilde{\cup} Y) \tilde{\cap} (X \tilde{\cup} Z)}(x)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 f_{X \tilde{\cup} (Y \tilde{\cap} Z)}(x) &= f_X(x) \cup f_{Y \tilde{\cap} Z}(x) \\
 &= f_X(x) \cup (f_Y(x) \cap f_Z(x)) \\
 &= (f_X(x) \cup f_Y(x)) \cap (f_X(x) \cup f_Z(x)) \\
 &= f_{X \tilde{\cup} Y}(x) \cap f_{X \tilde{\cup} Z}(x) \\
 &= f_{(X \tilde{\cup} Y) \tilde{\cap} (X \tilde{\cup} Z)}(x)
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 \mu_{X \tilde{\cap} (Y \tilde{\cup} Z)}(x) &= \min\{\mu_X(x), \mu_{Y \tilde{\cup} Z}(x)\} \\
 &= \min\left\{\mu_X(x), \max\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}\right\} \\
 &= \max\left\{\min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}, \min\{\mu_X(x), \mu_Z(x)\}\right\} \\
 &= \max\{\mu_{X \tilde{\cap} Y}(x), \mu_{X \tilde{\cap} Z}(x)\} \\
 &= \mu_{(X \tilde{\cap} Y) \tilde{\cup} (X \tilde{\cap} Z)}(x)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 f_{X \tilde{\cap} (Y \tilde{\cup} Z)}(x) &= f_X(x) \cap f_{Y \tilde{\cup} Z}(x) \\
 &= f_X(x) \cap (f_Y(x) \cup f_Z(x)) \\
 &= (f_X(x) \cap f_Y(x)) \cup (f_X(x) \cap f_Z(x)) \\
 &= f_{X \tilde{\cap} Y}(x) \cup f_{X \tilde{\cap} Z}(x) \\
 &= f_{(X \tilde{\cap} Y) \tilde{\cup} (X \tilde{\cap} Z)}(x)
 \end{aligned}$$

5.2. Bulanık Parametrelili Esnek Kümelerde Karar Verme Yöntemi

Bu kısımda, bir bulanık parametrelili esnek kümenin bulanık karar kümesini tanımlayarak, her bir alternatiflerin değerlendirilmesi için kullanılabilecek tek bir bulanık küme üretmek üzere esnek bir kümenin yaklaşım fonksiyonlarının birleştirildiği bir karar yöntemi oluşturulacaktır.

Bu kısım (Çağman, Çıtak ve Enginoğlu, 2011) makalesinden yararlanılarak yazılmıştır.

Tanım 5.2.1. $F_X \in BPE(U)$ olsun. F_X kümesinin bulanık karar kümesi F_X^d olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_X^d = \{ \mu_{F_X^d}(u)/u : u \in U \}$$

Bu F_X^d U üzerinde bulanık bir kümedir ve üyelik fonksiyonu olan $\mu_{F_X^d}$ şu şekilde tanımlanır:

$$\mu_{F_X^d} : U \rightarrow [0,1], \quad \mu_{F_X^d}(u) = \frac{1}{|\text{supp}(X)|} \sum_{x \in \text{supp}(X)} \mu_X(x) \chi_{f_X(x)}(u)$$

Burada $\text{supp}(X)$ ifadesi X in destek kümesidir. $f_X(x)$, x parametresi tarafından belirlenen kesin alt kümedir ve

$$\chi_{f_X(x)}(u) = \begin{cases} 1, & u \in f_X(x), \\ 0, & u \notin f_X(x). \end{cases}$$

5.3. Bulanık Parametrelili Esnek Kümelerde Karar Verme Yöntemi Uygulaması

Bir bulanık parametrelili esnek kümenin bulanık karar kümesini elde ettikten sonra, alternatifler arasından en iyi alternatifini seçmek gerekli olabilir. Bu nedenle, aşağıdaki algoritma ile karar verilebilir.

- 1. Adım:** U üzerinde bir F_X esnek kümesi oluşturulur.
- 2. Adım:** Bulanık karar kümesi olan F_X^d bulanık karar kümesi hesaplanır.
- 3. Adım:** $\max \mu_{F_X^d}(u)$ en yüksek üyelik derecesi seçilir.

Örnek 5.3.1. Bir şirket yeni bir yazılım projesi için bir yazılımcı işe almak istiyor.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$ adaylar kümesi olmak üzere on aday arasından seçim yapılacaktır. Adaylar değerlendirmek için $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ beş parametre var olsun. $i=1,2,3,4,5$ için parametreler sırasıyla "programlama becerisi", "tecrübe", "takım çalışması", "problem çözme yeteneği" ve "iletişim becerisi" anlamına gelmektedir. Komite sadece "programlama becerisi", "tecrübe", "takım çalışması" ve "iletişim becerisi" olan dört parametreyi, sırasıyla 0.7, 0.8, 0.6 ve 0.5 dereceleriyle dikkate alıyor. Yani parametreler

$$X = \{0.7/e_1, 0.8/e_2, 0.6/e_4, 0.5/e_5\}$$

olarak ifade edilir. Şimdi uygun bir yazılımcı bulalım.

- 1. Adım:** Hedef kısıtlamalar açısından alternatifler değerlendirilir ve E nin seçilen bir alt kümesi X 'e göre bulanık parametrelili esnek küme oluşturulur.

$$F_X = \{(0.7/e_1, \{u_2, u_4, u_6\}), (0.8/e_2, \{u_1, u_3, u_4, u_8, u_{10}\}), (0.6/e_3, \{u_2, u_7, u_8\}), (0.5/e_5, \{u_3, u_7, u_9\})\}$$

- 2. Adım:** Bulanık karar kümesini bulalım.

$$\mu_{F_X^d}(u_1) = \frac{0.8}{4} = 0.2$$

$$\mu_{F_X^d}(u_2) = \frac{1.3}{4} = 0.33$$

$$\mu_{F_X^d}(u_3) = \frac{1.3}{4} = 0.33$$

$$\mu_{F_X^d}(u_4) = \frac{1.5}{4} = 0.38$$

$$\mu_{F_X^d}(u_5) = 0$$

$$\mu_{F_X^d}(u_6) = \frac{0.7}{4} = 0.18$$

$$\mu_{F_X^d}(u_7) = \frac{1.1}{4} = 0.28$$

$$\mu_{F_X^d}(u_8) = \frac{1.4}{4} = 0.35$$

$$\mu_{F_X^d}(u_9) = \frac{0.5}{4} = 0.13$$

$$\mu_{F_X^d}(u_{10}) = \frac{0.8}{4} = 0.33$$

olduğundan

$$F_X^d = \{0.2/u_1, 0.33/u_2, 0.33/u_3, 0.38/u_4, 0.18/u_6, 0.28/u_7, 0.35/u_8, 0.13/u_9, 0.33/u_{10}\}$$

olarak bulunur.

3. Adım: Üyelik derecesi en yüksek olan

$$\max \mu_{F_X^d}(u_4) = 0.38$$

olduğundan u_4 yazılımcısı seçilebilir.

6. BULANIK PARAMETRELİ BULANIK ESNEK KÜMELER

Bu kısımda, Çağman ve arkadaşları (2010) tarafından ilk kez ortaya atılan bulanık parametrelili bulanık esnek kümeler kavramıyla ilgili temel tanımlar, işlemler ve örnekler verilecektir. Ardından bulanık parametrelili bulanık esnek kümelerde karar verme yöntemi verilip örneklendirilecektir.

Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Küme kısaca BPBE-küme ile gösterilir.

6.1 Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Küme ve İşlemleri

Bu başlık altında, bulanık parametrelili bulanık esnek kümelerin temel tanımları, özellikleri ve işlemleri detaylandırılmaktadır.

Bu kısım (Çağman, Çıtak ve Enginoğlu, 2010) makalesinden yararlanılarak yazılmıştır.

Tanım 6.1.1. U , evrensel küme ve E , tüm parametrelerin kümesi, X , E üzerinde bulanık küme olsun. X in üyelik fonksiyonu $\mu_X : E \rightarrow [0,1]$ ve her $x \in E$ için $\gamma_X(x)$, U üzerinde bulanık küme olsun. U üzerindeki bulanık parametrelili bulanık esnek küme Γ_X ile gösterilir ve $\mu_X(x) = 0$ iken $\gamma_X(x) = \emptyset$ olmak üzere $\gamma_X : E \rightarrow F(U)$ fonksiyonu vasıtasıyla tanımlanır.

Burada γ_X fonksiyonu Γ_X bulanık parametrelili bulanık esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonudur. $\gamma_X(x)$ değeri ise E 'nin her x elemanı için bulanık parametrelili bulanık esnek kümesinin x -eleman olarak adlandırılan bulanık bir kümedir. Böylece U üzerinde bir Γ_X BPBE-kümesi aşağıdaki sıralı ikililerle tanımlanır:

$$\Gamma_X : \{(\mu_X(x)/x, \gamma_X(x)) : x \in E, \gamma_X(x) \in F(U), \mu_X(x) \in [0,1]\}$$

U üzerindeki bütün bulanık parametrelili bulanık esnek kümeslerinin kümesi BPBE(U) ile gösterilir.

Örnek 6.1.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel küme ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bir parametreler kümesi olsun. Bu durumda eğer,

$X = \{0.1/x_1, 0.4/x_3, 1/x_4\}$ ve $\gamma_X(x_1) = \emptyset$, $\gamma_X(x_3) = \{0.6/u_2, 0.3/u_3\}$,
 $\gamma_X(x_4) = U$ ise buradan

$$\Gamma_X = \{(0.4/x_3, \{0.6/u_2, 0.3/u_3\}), (1/x_4, U)\}$$

olur. Dikkat edersek burada $(0.1/x_1, \emptyset) \in \Gamma_X$ eleman kümede gösterilmemiştir.

Örnek 6.1.3. Bir belediye, yeni bir park tasarımı için en uygun mimarı seçmek istiyor. Alternatif mimar adayları kümesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

Bu kümeye göre, altı mimar arasından seçim yapılacaktır.

E parametre kümesi şöyle tanımlansın:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Burada parametreler şunlardır:

x_1 : Tasarım kalitesi

x_2 : Yaratıcılık

x_3 : Deneyim süresi

x_4 : Çevre dostu malzeme kullanımı

x_5 : Maliyet

Eğer, $X = \{0.8/x_1, 0.4/x_2, 0.3/x_4, 0.7/x_5\}$ için

$$\gamma_X(x_1) = \{0.6/u_1\}$$

$$\gamma_X(x_2) = \{0.1/u_3, 0.7/u_6\},$$

$$\gamma_X(x_4) = \{0.5/u_2, 0.6/u_3, 0.1/u_4\},$$

$$\gamma_X(x_5) = \{0.1/u_4, 0.9/u_5\}$$

ise bu bulanık parametrelili bulanık esnek küme

$$\Gamma_X = \{(0.8/x_1, \{0.6/u_1\}), (0.4/x_2, \{0.1/u_3, 0.7/u_6\}), \\ (0.3/x_4, \{0.5/u_2, 0.6/u_3, 0.1/u_4\}), (0.7/x_5, \{0.1/u_4, 0.9/u_5\})\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 6.1.4. $\Gamma_X \in \text{BPBE}(U)$ olsun. E nin her x elemanı için $\gamma_X(x) = \emptyset$ ise bu durumda Γ_X e X -boş bulanık parametrelili bulanık esnek küme denir. Γ_{Φ_X} sembolüyle gösterilir.

Eğer, $X = \emptyset$ ise bu durumda X -boş bulanık parametrelili bulanık esnek kümesine boş bulanık parametrelili bulanık esnek küme denir. Γ_{Φ} sembolüyle gösterilir.

Tanım 6.1.5. $\Gamma_X \in \text{BPBE}(U)$ olsun. E nin her x elemanı için $\gamma_X(x) = U$ ve $\mu_X(x) = 1$ ise bu durumda Γ_X kümesine X -evrensel bulanık parametrelili bulanık esnek küme denir. $\Gamma_{\bar{X}}$ sembolüyle gösterilir.

Eğer, $X = E$ ise bu durumda X -evrensel bulanık parametrelili bulanık esnek kümesine evrensel bulanık parametrelili bulanık esnek küme denir. $\Gamma_{\bar{E}}$ sembolüyle ifade edilir.

Örnek 6.1.6. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel küme ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ bir parametreler kümesi olsun.

- 1) Eğer, $X = \{0.1/x_1, 0.4/x_3, 1/x_4\}$ ve $\gamma_X(x_1) = \emptyset$, $\gamma_X(x_3) = \{0.6/u_2, 0.3/u_3\}$, $\gamma_X(x_4) = U$ ise buradan $\Gamma_X = \{(0.4/x_3, \{0.6/u_2, 0.3/u_3\}), (1/x_4, U)\}$ olur.
- 2) Eğer, $Y = \{0.1/x_1, 0.8/x_3\}$ ve $\gamma_Y(x_1) = \emptyset$, $\gamma_Y(x_3) = \emptyset$ ise Γ_Y Y-Boş bulanık parametrelili bulanık esnek kümesidir. $\Gamma_Y = \Gamma_{\Phi_Y}$ olur.
- 3) Eğer, $Z = \{1/x_1, 1/x_3\}$ ve $\gamma_Z(x_1) = U$, $\gamma_Z(x_3) = U$ ise Γ_Z Z-Evrensel bulanık parametrelili bulanık esnek kümesidir. $\Gamma_Z = \Gamma_{\bar{Z}}$ olur.
- 4) Eğer, $X = \emptyset$ ise Γ_X boş bulanık parametrelili bulanık esnek küme olur ve $\Gamma_X = \Gamma_{\Phi}$ olur.
- 5) Eğer, $X = E$ ve $i=1,2,3,4$ olmak üzere her $x_i \in E$ için $\gamma_X(x_i) = U$ ise Γ_X Evrensel bulanık parametrelili bulanık esnek kümedir ve $\Gamma_X = \Gamma_{\bar{E}}$ olur.

Tanım 6.1.7. $\Gamma_X, \Gamma_Y \in \text{BPBE}(U)$ olsun. E nin her x elemanı için

$$\mu_X(x) \leq \mu_Y(x) \text{ ve } \gamma_X(x) \subseteq \gamma_Y(x)$$

ise bu durumda Γ_X kümesine Γ_Y kümesinin bulanık parametrelili bulanık esnek alt kümesidir denir. $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Y$ ile ifade edilir.

Teorem 6.1.8. $\Gamma_X, \Gamma_Y \in \text{BPBE}(U)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i) $\Gamma_X \subseteq \Gamma_{\bar{E}}$
- ii) $\Gamma_{\Phi_X} \subseteq \Gamma_X$
- iii) $\Gamma_{\Phi} \subseteq \Gamma_X$
- iv) $\Gamma_X \subseteq \Gamma_X$
- v) $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Y$ ve $\Gamma_Y \subseteq \Gamma_Z$ ise $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Z$

İspat: $\Gamma_X, \Gamma_Y \in \text{BPBE}(U)$ olsun. E nin her x elemanı için

i) $\mu_X(x) \leq 1$ ve $\gamma_X(x) \subseteq U$ olduğundan $\Gamma_X \subseteq \Gamma_E$ dir.

ii) $\mu_{\Phi_X}(x) = \mu_X(x)$ olup $\mu_{\Phi_X}(x) \leq \mu_X(x)$ ve $\gamma_{\Phi}(x) = \emptyset$ olup $\gamma_{\Phi}(x) \subseteq \gamma_X(x)$ dir.

Buradan $\Gamma_{\Phi_X} \subseteq \Gamma_X$ bulunur.

iii) $\mu_{\Phi}(x) = 0$ olup $0 \leq \mu_X(x)$ ve $\gamma_{\Phi}(x) = \emptyset$ olup $\gamma_{\Phi}(x) \subseteq \gamma_X(x)$ dir. Buradan $\Gamma_{\Phi} \subseteq \Gamma_X$ bulunur.

iv) $\mu_X(x) \leq \mu_X(x)$ ve $\gamma_X(x) \subseteq \gamma_X(x)$ olup $\Gamma_X \subseteq \Gamma_X$ olur.

v) $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Y$ ve $\Gamma_Y \subseteq \Gamma_Z$ olsun bu durumda

$$\mu_X(x) \leq \mu_Y(x), \gamma_X(x) \subseteq \gamma_Y(x)$$

ve

$$\mu_Y(x) \leq \mu_Z(x), \gamma_Y(x) \subseteq \gamma_Z(x)$$

olup buradan

$$\mu_X(x) \leq \mu_Z(x) \text{ ve } \gamma_X(x) \subseteq \gamma_Z(x)$$

bulunur. $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Z$ olur.

Tanım 6.1.9. $\Gamma_X, \Gamma_Y \in \text{BPBE}(U)$ olsun. Γ_X, Γ_Y kümelerinin bulanık parametrelili bulanık esnek eşitliği aşağıdaki gibi tanımlanır ve $\Gamma_X = \Gamma_Y$ ile gösterilir.

$$\Gamma_X = \Gamma_Y \Leftrightarrow \text{E'nin her x elemanı için } \mu_X(x) = \mu_Y(x), \gamma_X(x) = \gamma_Y(x)$$

Teorem 6.1.10. $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in \text{BPBE}(U)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) $(\Gamma_X = \Gamma_Y \text{ ve } \Gamma_Y = \Gamma_Z) \Leftrightarrow \Gamma_X = \Gamma_Z$

ii) $(\Gamma_X \subseteq \Gamma_Y \text{ ve } \Gamma_Y \subseteq \Gamma_X) \Leftrightarrow \Gamma_X = \Gamma_Y$

İspat: $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in \text{BPBE}(U)$ olsun.

i) $\Gamma_X = \Gamma_Y$ ve $\Gamma_Y = \Gamma_Z$ olsun her $x \in E$ için

$$\mu_X(x) = \mu_Y(x), \gamma_X(x) = \gamma_Y(x)$$

ve

$$\mu_Y(x) = \mu_Z(x), \gamma_Y(x) = \gamma_Z(x)$$

olup

$$\mu_X(x) = \mu_Z(x), \gamma_X(x) = \gamma_Z(x)$$

olur $\Gamma_X = \Gamma_Z$ bulunur. Bu eşitlik iki taraflı da sağlandığından teoremin karşıtı da doğrudur.

ii) $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Y$ ve $\Gamma_Y \subseteq \Gamma_X$ olsun E'nin her x elemanı için

$$\mu_X(x) \leq \mu_Y(x), \gamma_X(x) \subseteq \gamma_Y(x)$$

ve

$$\mu_Y(x) \leq \mu_X(x), \gamma_Y(x) \subseteq \gamma_X(x)$$

olup

$$\mu_X(x) = \mu_Y(x), \gamma_X(x) = \gamma_Y(x)$$

olur $\Gamma_X = \Gamma_Y$ bulunur. $\Gamma_X = \Gamma_Y$ olduğu durumda aşağıdan yukarı ifadeler doğru olacağından teoremin karşıtı da doğrudur.

Tanım 6.1.11. $\Gamma_X \in \text{BPBE}(U)$ olsun. Γ_X in tümleyeni Γ_X^c ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu ile yaklaşım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır. Her $x \in E$ için

$$\mu_{X^c}(x) = 1 - \mu_X(x), \gamma_{X^c}(x) = \gamma_X^c(x) = U \setminus \gamma_X(x)$$

Teorem 6.1.12. $\Gamma_X \in \text{BPBE}(U)$ olsun.

i) $(\Gamma_X^c)^c = \Gamma_X$

ii) $\Gamma_\Phi^c = \Gamma_E$

İspat: $\Gamma_X \in \text{BPBE}(U)$ olsun.

i) $\Gamma_X^c = \Gamma_Y$ olsun E nin her x elemanı için

$$\mu_{Y^c}(x) = 1 - \mu_Y(x)$$

$$= 1 - (1 - \mu_X(x))$$

$$= \mu_X(x)$$

ve

$$\gamma_{Y^c}(x) = U \setminus \gamma_Y(x)$$

$$= U \setminus (U \setminus \gamma_X(x))$$

$$= \gamma_X(x)$$

olup $(\Gamma_X^c)^c = \Gamma_X$ bulunur.

ii) E nin her x elemanı için

$$\mu_{\Phi^c}(x) = 1 - \mu_{\Phi}(x)$$

$$= \mu_E(x)$$

ve

$$\gamma_{\Phi^c}(x) = U \setminus \gamma_{\Phi}(x)$$

$$= \gamma_E(x)$$

olup buradan $\Gamma_{\Phi^c}^c = \Gamma_E$ olur.

Tanım 6.1.13. $\Gamma_X, \Gamma_Y \in \text{BPBE}(U)$ olsun. Γ_X ve Γ_Y kümelerinin bulanık parametrelili bulanık esnek birleşimi $\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu ile yaklaşım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır. E nin her x elemanı için

$$\mu_{X \tilde{\cup} Y}(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$$

ve

$$\gamma_{X \tilde{\cup} Y}(x) = \gamma_X(x) \cup \gamma_Y(x)$$

olur.

Teorem 6.1.14. $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z \in \text{BPBE}(U)$ olsun.

- i) $\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_X = \Gamma_X$
- ii) $\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\cup} \Gamma_X = \Gamma_X$

- iii) $\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_\Phi = \Gamma_X$
- iv) $\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_{\bar{E}} = \Gamma_{\bar{E}}$
- v) $\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y = \Gamma_Y \tilde{\cup} \Gamma_X$
- vi) $\Gamma_X \tilde{\cup} (\Gamma_Y \tilde{\cup} \Gamma_Z) = (\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y) \tilde{\cup} \Gamma_Z$

İspat: E nin her x elemanı için

i)

$$\begin{aligned}\mu_{X \tilde{\cup} X}(x) &= \max\{\mu_X(x), \mu_X(x)\} \\ &= \mu_X(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_{X \tilde{\cup} X}(x) &= \gamma_X(x) \cup \gamma_X(x) \\ &= \gamma_X(x)\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\mu_{\Phi_X \tilde{\cup} X}(x) &= \max\{\mu_{\Phi_X}(x), \mu_X(x)\} \\ &= \max\{\mu_X(x), \mu_X(x)\} \\ &= \mu_X(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_{\Phi_X \tilde{\cup} X}(x) &= \gamma_{\Phi_X}(x) \cup \gamma_X(x) \\ &= \emptyset \cup \gamma_X(x) \\ &= \gamma_X(x)\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\mu_{\Phi \tilde{\cup} X}(x) &= \max\{\mu_\Phi(x), \mu_X(x)\} \\ &= \max\{0, \mu_X(x)\} \\ &= \mu_X(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\Phi \cup X}(x) &= \gamma_{\Phi}(x) \cup \gamma_X(x) \\
 &= \emptyset \cup \gamma_X(x) \\
 &= \gamma_X(x)
 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
 \mu_{X \cup E}(x) &= \max\{\mu_X(x), \mu_E(x)\} \\
 &= \max\{\mu_X(x), 1\} \\
 &= 1 \\
 &= \mu_E(x)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \gamma_{X \cup E}(x) &= \gamma_X(x) \cup \gamma_E(x) \\
 &= \gamma_X(x) \cup U \\
 &= U
 \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
 \mu_{X \cup Y}(x) &= \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \\
 &= \max\{\mu_Y(x), \mu_X(x)\} \\
 &= \mu_{Y \cup X}(x)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \gamma_{X \cup Y}(x) &= \gamma_X(x) \cup \gamma_Y(x) \\
 &= \gamma_Y(x) \cup \gamma_X(x) \\
 &= \gamma_{Y \cup X}(x)
 \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned}
 \mu_{X \cup (Y \cup Z)}(x) &= \max\{\mu_X(x), \mu_{Y \cup Z}(x)\} \\
 &= \max\left\{\mu_X(x), \max\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \{ \max \{ \mu_X(x), \mu_Y(x) \}, \mu_Z(x) \} \\
&= \max \{ \mu_{X \cup Y}(x), \mu_Z(x) \} \\
&= \mu_{(X \cup Y) \cup Z}(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_{X \cup (Y \cup Z)}(x) &= \gamma_X(x) \cup (\gamma_Y(x) \cup \gamma_Z(x)) \\
&= (\gamma_X(x) \cup \gamma_Y(x)) \cup \gamma_Z(x) \\
&= \gamma_{(X \cup Y) \cup Z}(x)
\end{aligned}$$

Tanım 6.1.15. Γ_X ve Γ_Y U üzerinde bulanık parametrelili bulanık esnek küme olsun. Γ_X ve Γ_Y kümelerinin bulanık parametrelili bulanık esnek kesişimi $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu ile yaklaşım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır. Her $x \in E$ için

$$\mu_{X \tilde{\cap} Y}(x) = \min \{ \mu_X(x), \mu_Y(x) \}$$

ve

$$\gamma_{X \tilde{\cap} Y}(x) = \gamma_X(x) \cap \gamma_Y(x)$$

olur.

Teorem 6.1.16. Γ_X , Γ_Y ve Γ_Z U üzerinde bulanık parametrelili bulanık esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_X = \Gamma_X$
- ii) $\Gamma_{\Phi_X} \tilde{\cap} \Gamma_X = \Gamma_{\Phi_X}$
- iii) $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_\Phi = \Gamma_\Phi$
- iv) $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_{\bar{E}} = \Gamma_X$
- v) $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y = \Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_X$
- vi) $(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y) \tilde{\cap} \Gamma_Z = \Gamma_X \tilde{\cap} (\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_Z)$

İspat: Her $x \in E$ için

i)

$$\begin{aligned}\mu_{X\tilde{X}}(x) &= \min\{\mu_X(x), \mu_X(x)\} \\ &= \mu_X(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_{X\tilde{X}}(x) &= \gamma_X(x) \cap \gamma_X(x) \\ &= \gamma_X(x)\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\mu_{\Phi_X\tilde{X}}(x) &= \min\{\mu_{\Phi_X}(x), \mu_X(x)\} \\ &= \min\{\mu_X(x), \mu_X(x)\} \\ &= \mu_X(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_{\Phi_X\tilde{X}}(x) &= \gamma_{\Phi_X}(x) \cap \gamma_X(x) \\ &= \emptyset \cap \gamma_X(x) \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\mu_{\Phi\tilde{X}}(x) &= \min\{\mu_{\Phi}(x), \mu_X(x)\} \\ &= \min\{0, \mu_X(x)\} \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_{\Phi\tilde{X}}(x) &= \gamma_{\Phi}(x) \cap \gamma_X(x) \\ &= \emptyset \cap \gamma_X(x) \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

iv)

$$\mu_{X\tilde{E}}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_E(x)\}$$

$$= \min\{\mu_X(x), 1\}$$

$$= \mu_X(x)$$

ve

$$\gamma_{X\tilde{\cap}E}(x) = \gamma_X(x) \cap \gamma_E(x)$$

$$= \gamma_X(x) \cap U$$

$$= \gamma_X(x)$$

v)

$$\mu_{X\tilde{\cap}Y}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}$$

$$= \min\{\mu_Y(x), \mu_X(x)\}$$

$$= \mu_{Y\tilde{\cap}X}(x)$$

ve

$$\gamma_{X\tilde{\cap}Y}(x) = \gamma_X(x) \cap \gamma_Y(x)$$

$$= \gamma_Y(x) \cap \gamma_X(x)$$

$$= \gamma_{Y\tilde{\cap}X}(x)$$

vi)

$$\mu_{X\tilde{\cap}(Y\tilde{\cap}Z)}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_{Y\tilde{\cap}Z}(x)\}$$

$$= \min\left\{\mu_X(x), \min\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}\right\}$$

$$= \min\left\{\min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}, \mu_Z(x)\right\}$$

$$= \min\{\mu_{X\tilde{\cap}Y}(x), \mu_Z(x)\}$$

$$= \mu_{(X\tilde{\cap}Y)\tilde{\cap}Z}(x)$$

ve

$$\gamma_{X\tilde{\cap}(Y\tilde{\cap}Z)}(x) = \gamma_X(x) \cap (\gamma_Y(x) \cap \gamma_Z(x))$$

$$= (\gamma_X(x) \cap \gamma_Y(x)) \cap \gamma_Z(x)$$

$$= \gamma_{(X \tilde{\cap} Y) \tilde{\cap} Z}(x)$$

Sonuç 6.1.17. Γ_X , U üzerinde bulanık parametrelili bulanık esnek küme olsun. Eğer, $\Gamma_X \neq \Gamma_{\tilde{E}}$ veya $\Gamma_X \neq \Gamma_{\Phi}$ ise $\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_X^{\tilde{c}} \neq \Gamma_{\tilde{E}}$ ve $\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_X^{\tilde{c}} \neq \Gamma_{\Phi}$ dir.

Teorem 6.1.18. Γ_X ve Γ_Y U üzerinde bulanık parametrelili bulanık esnek küme olsun. Bu durumda De Morgan kuralları aşağıdaki gibi sağlanır.

- i) $(\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y)^{\tilde{c}} = \Gamma_X^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \Gamma_Y^{\tilde{c}}$
- ii) $(\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y)^{\tilde{c}} = \Gamma_X^{\tilde{c}} \tilde{\cup} \Gamma_Y^{\tilde{c}}$

İspat: E nin her x elemanı için

i)

$$\begin{aligned} \mu_{(X \tilde{\cup} Y)^c}(x) &= 1 - \mu_{X \tilde{\cup} Y}(x) \\ &= 1 - \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \\ &= \min\{1 - \mu_X(x), 1 - \mu_Y(x)\} \\ &= \min\{\mu_X^c(x), \mu_Y^c(x)\} \\ &= \mu_{X^c \tilde{\cap} Y^c}(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_{(X \tilde{\cup} Y)^c}(x) &= \gamma_{X \tilde{\cup} Y}^c(x) \\ &= (\gamma_X(x) \cup \gamma_Y(x))^c \\ &= (\gamma_X(x))^c \cap (\gamma_Y(x))^c \\ &= \gamma_X^c(x) \cap \gamma_Y^c(x) \\ &= \gamma_{X^c \tilde{\cap} Y^c}(x) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 \mu_{(X \tilde{\cap} Y)^c}(x) &= 1 - \mu_{X \tilde{\cap} Y}(x) \\
 &= 1 - \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\} \\
 &= \max\{1 - \mu_X(x), 1 - \mu_Y(x)\} \\
 &= \max\{\mu_{X^c}(x), \mu_{Y^c}(x)\} \\
 &= \mu_{X^c \tilde{\cup} Y^c}(x)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \gamma_{(X \tilde{\cap} Y)^c}(x) &= \gamma_{(X \tilde{\cap} Y)}^c(x) \\
 &= (\gamma_X(x) \cap \gamma_Y(x))^c \\
 &= (\gamma_X(x))^c \cup (\gamma_Y(x))^c \\
 &= \gamma_X^c(x) \cup \gamma_Y^c(x) \\
 &= \gamma_{X^c}(x) \cup \gamma_{Y^c}(x) \\
 &= \gamma_{X^c \tilde{\cup} Y^c}(x)
 \end{aligned}$$

Teorem 6.1.19. Γ_X ve Γ_Y U üzerinde bulanık parametrelili bulanık esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) $\Gamma_X \tilde{\cup} (\Gamma_Y \tilde{\cap} \Gamma_Z) = (\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Y) \tilde{\cap} (\Gamma_X \tilde{\cup} \Gamma_Z)$
- ii) $\Gamma_X \tilde{\cap} (\Gamma_Y \tilde{\cup} \Gamma_Z) = (\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Y) \tilde{\cup} (\Gamma_X \tilde{\cap} \Gamma_Z)$

İspat: E nin her x elemanı

i)

$$\begin{aligned}
 \mu_{X \tilde{\cup} (Y \tilde{\cap} Z)}(x) &= \max\{\mu_X(x), \mu_{Y \tilde{\cap} Z}(x)\} \\
 &= \max\left\{\mu_X(x), \min\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}\right\} \\
 &= \min\left\{\max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}, \max\{\mu_X(x), \mu_Z(x)\}\right\}
 \end{aligned}$$

$$= \min\{\mu_{X \cup Y}(x), \mu_{X \cup Z}(x)\}$$

$$= \mu_{(X \cup Y) \cap (X \cup Z)}(x)$$

ve

$$\gamma_{X \cup (Y \cap Z)}(x) = \gamma_X(x) \cup \gamma_{Y \cap Z}(x)$$

$$= \gamma_X(x) \cup (\gamma_Y(x) \cap \gamma_Z(x))$$

$$= (\gamma_X(x) \cup \gamma_Y(x)) \cap (\gamma_X(x) \cup \gamma_Z(x))$$

$$= \gamma_{X \cup Y}(x) \cap \gamma_{X \cup Z}(x)$$

$$= \gamma_{(X \cup Y) \cap (X \cup Z)}(x)$$

ii)

$$\mu_{X \cap (Y \cup Z)}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_{Y \cup Z}(x)\}$$

$$= \min\left\{\mu_X(x), \max\{\mu_Y(x), \mu_Z(x)\}\right\}$$

$$= \max\left\{\min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\}, \min\{\mu_X(x), \mu_Z(x)\}\right\}$$

$$= \max\{\mu_{X \cap Y}(x), \mu_{X \cap Z}(x)\}$$

$$= \mu_{(X \cap Y) \cup (X \cap Z)}(x)$$

ve

$$\gamma_{X \cap (Y \cup Z)}(x) = \gamma_X(x) \cap \gamma_{Y \cup Z}(x)$$

$$= \gamma_X(x) \cap (\gamma_Y(x) \cup \gamma_Z(x))$$

$$= (\gamma_X(x) \cap \gamma_Y(x)) \cup (\gamma_X(x) \cap \gamma_Z(x))$$

$$= \gamma_{X \cap Y}(x) \cup \gamma_{X \cap Z}(x)$$

$$= \gamma_{(X \cap Y) \cup (X \cap Z)}(x)$$

6.2 Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Kümelerde Karar Verme Yöntemi

Bulanık parametrelili bulanık esnek kümeler, karar verme süreçlerinde daha karmaşık ve çok yönlü problemlerin çözümü için etkili bir yöntem sağlar. Bu başlık altında, bu kümeleri kullanarak karar verme algoritmalarının nasıl oluşturulacağı ve uygulanacağı açıklanmaktadır. Ayrıca, karar verme süreçlerinde kullanılan matematiksel operatörler ve yöntemler detaylı bir şekilde incelenmektedir.

Bu kısım (Çağman, Çıtak ve Enginoğlu, 2010) makalesinden yararlanılarak yazılmıştır.

6.2.1 BPBE-Çıkarım Operatörü

Bu kısımda, bir BPBE- kümesinin bir çıkarım bulanık kümesi tanımlanıyor. Ayrıca, bir BPBE- kümesinin ve onun bulanık parametre kümesinden bir çıkarım bulanık küme üreten bir BPBE- Çıkarım operatörü tanımlanıyor.

Tanım 6.2.1.1 $\Gamma_X \in \text{BPBE}(U)$ olsun. O zaman BPBE- Çıkarım operatörü, BPBE_{agg} tarafından aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\text{BPBE}_{\text{agg}} : F(E) \times \text{BPBE}(U) \rightarrow F(U),$$

$$\text{BPBE}_{\text{agg}}(X, \Gamma_X) = \Gamma_X^*$$

Burada

$$\Gamma_X^* = \{\mu_{\Gamma_X^*}(u) / u : u \in U\}$$

kümesi U üzerinde bulanık kümedir. Γ_X^* değeri Γ_X in çıkarım bulanık kümesi olarak adlandırılır.

Burada $\mu_{\Gamma_X^*}(u)$ üyelik derecesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_{\Gamma_X^*}(u) = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu_X(x) \mu_{\gamma_X(x)}(u)$$

Burada $|E|$ E nin kardinalitesidir.

6.3 Bulanık Parametrelili Bulanık Esnek Kümelerde Karar Verme Yöntemi ve Uygulaması

Bir BPBE- kümesinin yaklaşım fonksiyonu bulanıktır. Bulanık kümeler üzerinde $BPBE_{agg}$ işlemi, bir BPBE-kümesinin birkaç yaklaşım fonksiyonunu birleştirerek BPBE- kümesinin çıkarım bulanık kümesi olan tek bir bulanık küme oluşturma işlemidir. Bir çıkarım bulanık küme elde ettikten sonra, bu kümelerden en iyi alternatifi seçmek gerekebilir. Bu nedenle, aşağıdaki algoritma ile bir BPBE- karar verme yöntemi oluşturabiliriz.

- 1. Adım:** U üzerinde bir Γ_X BPBE- kümesi oluşturulur.
- 2. Adım:** Γ_X 'in çıkarım kümesi olan Γ_X^* bulanık kümesi bulunur.
- 3. Adım:** En yüksek üyelik derecesi yani $\max \mu_{\Gamma_X^*}(u)$ değerini bulunur.

Örnek 6.3.1. Bir üniversite bir pozisyonu doldurmak için bir aday seçmek istiyor.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olmak üzere beş aday var. Seçim komitesi $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ parametrelerini göz önünde bulunduruyor. Parametreler x_i ($i=1,2,3$) sırasıyla "akademik başarı", "araştırma tecrübesi" ve "liderlik yeteneği" anlamına gelmektedir. Her aday, E 'nin seçilen $X = \{0.7/x_1, 0.8/x_2, 0.6/x_3\}$ alt kümesi dikkate alınarak değerlendirilir. Sonunda komite U üzerinde aşağıdaki BPBE-kümesini oluşturur.

- 1. Adım:** Oluşturulan Γ_X BPBE- kümesi aşağıdaki gibi olsun:

$$\begin{aligned}\Gamma_X = \{ & (0.7/x_1, \{0.4/u_1, 0.8/u_3, 0.2/u_4\}), \\ & (0.8/x_2, \{0.6/u_1, 0.5/u_3, 0.9/u_4, 0.4/u_5\}), \\ & (0.6/x_3, \{0.5/u_1, 0.6/u_2, 0.4/u_3, 0.8/u_5\}) \}\end{aligned}$$

- 2. Adım:** Çıkarım bulanık kümesi şu şekilde oluşturulabilir:

$$\mu_{\Gamma_X^*}(u_1) = \frac{0.7 * 0.4 + 0.8 * 0.6 + 0.6 * 0.5}{3} = 0.35$$

$$\mu_{\Gamma_X^*}(u_2) = \frac{0.7 * 0 + 0.8 * 0 + 0.6 * 0.6}{3} = 0.12$$

$$\mu_{\Gamma_X^*}(u_3) = \frac{0.7 * 0.8 + 0.8 * 0.5 + 0.6 * 0.4}{3} = 0.40$$

$$\mu_{\Gamma_X^*}(u_4) = \frac{0.7 * 0.2 + 0.8 * 0.9 + 0.6 * 0}{3} = 0.29$$

$$\mu_{\Gamma_X^*}(u_5) = \frac{0.7 * 0.0 + 0.8 * 0.4 + 0.6 * 0.8}{3} = 0.27$$

Buradan

$$\Gamma_X^* = \{0.35/u_1, 0.12/u_2, 0.40/u_3, 0.29/u_4, 0.27/u_5\}$$

olarak bulunur.

3. Adım: Son olarak en yüksek derecesi $\max \mu_{\Gamma_X^*}(u) = 0.40$ seçilebilir. Bu da u_3 adayının ilgili pozisyona seçilebileceği anlamına gelir.

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, bulanık mantık ve kümeler teorisinin karmaşık ve belirsiz sistemleri modellemedeki rolü ve etkinliği detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bulanık ve esnek kümeler ile bu kümelerden türetilen kavramların özellikleri ve işlemleri analiz edilerek, bu yapıların belirsizlik içeren problemlerde nasıl bir çözüm aracı sunduğu ortaya konmuştur.

Araştırma sürecinde elde edilen bulgular, belirsizliğin hakim olduğu problemlerin çözümünde bulanık mantığın ve kümeler teorisinin bilimsel bir rehber olabileceğini göstermektedir. Literatürden derlenen bilgiler ve gerçekleştirilen analizler, bu alanda çalışan araştırmacılar ve uygulayıcılar için sağlam bir teorik temel oluşturmakta ve yeni çalışma alanlarına kapı aralamaktadır.

Tezde sunulan sonuçların, belirsizlik odaklı problemlere yönelik çözüm yaklaşımlarına katkı sağlaması ve bu alanda yapılan çalışmaların gelişimine ivme kazandırması ümit edilmektedir.

Bu çalışma, bilimsel bilgi birikiminin genişletilmesi yolunda atılmış bir adım olup, daha kapsamlı ve detaylı araştırmalar için bir başlangıç noktası teşkil etmektedir.

KAYNAKÇA

- Çağman, N. (2014). Contributions to the Theory of Soft Sets. *Journal of New Results*, 4, 33-41.
- Çağman, N. ve Aktaş, H. (2007). Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177 (1), 2726 - 2735.
- Çağman, N. ve Enginoglu, S. (2010a). Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, DOI: 10.16/j.ejor.2010.05.004.
- Çağman, N. ve Enginoğlu, S. (2010). Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 207, 848-855.
- Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S. (2010). Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*, Vol.1, No.1, pp. 21-35,.
- Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S. (2011). Fuzzy soft set theory and its applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 8 (3) pp. 137-147.
- Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S. (2011). FP-soft set theory and its applications. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, pp. 219- 226.
- Çetkin, V., Aygünoğlu, A. ve Aygün, H. (2016). A new approach in handling soft decision making problems. *The Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9(1):231-239.
- Özmantar, M., Bingölbalı , E. ve Akkoç, H. (2008). Sonsuzluk Kavramı: Tarihsel Gelişimi, Öğrenci Zorlukları ve Çözüm Önerileri. *Pegem Akademi*, s. 151-180.
- Ali, M., Feng, F., Lis, X., Min, W. ve Shabir, M. (2009). On Some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9) 1547-1553.
- Atagün ve Özgür, A. (2019, mayıs 12). esnek kümeler ve işlemleri. *Matematik Dergisi*, s. 145-198.
- Atagün, A. ve Kamacı, H. (2021). Decompositions of soft sets and soft matrices with applications. *Faculty of Science and Arts*.
- Atanassov, K. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1)87-96.
- Dubois, D. ve Prade, H. (1980). Fuzzy Set and Systems: Theory and Applications. *Academic Press*.
- Elmas, Ç. (2003). *Bulanık Mantık Denetleyiciler*. Seçkin Yayıncılık.
- Galbraith, J. (1973). Power and the Useful Economist. *The American Economic Review* (s. Vol.63,No.1,pp.1-11). içinde
- Kamacı, H. ve Petchimuthu, S. (2019, Mayıs). The row-products of inverse soft matrices in multicriteria decision making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(6),6425 - 6441.

- Klir, G. ve Folger, T. (1988). Fuzzy Sets, Uncertainty and Information. *Prentice-Hall International Editions*.
- Maji, P., Biswas, R. ve Roy, A. (2001). Fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 203 (2), 589-602.
- Maji, P., Biswas, R. ve Roy, A. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(1),555- 562.
- Molodtsov, D. (1999). Soft set theory—First results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Petchimuthu, S. ve Kamacı, H. (2019). The row-products of inverse soft matrices in multicriteria decision making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* , 36(6):6425-6441.
- Roy, S. ve Samanta, T. (2011). A note on fuzzy soft topological spaces,. *Ann. Fuzzy Math. Inform*, 305-311.
- Sargut, A. ve Ozen, S. (2007). Örgüt kuramlarına genel bir bakış: Karşılaştırmalı bir çözümleme. *Örgüt Kuramları* (s. 11-34). içinde Ankara: İmge Kitabevi Yayınları.
- Sezgin, A. ve Atagün, A. (2011). On operations of soft sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5) 1457-1467.
- Şen, Z. (2001). *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*. İstanbul: Bilge Kültür Sanat.
- Yano, H. ve Nishizaki, I. (1980). Fuzzy Set and Systems: Theory and Applications. *Academic Press*.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 338-353.
- Zimmermann, H.-J. (1991). Fuzzy Set Theory and Its Applications. *Kluwer Academic Publishers*.