

AĞUSTOS 2021

Doktora Tezi - Matematik

AYKUT EMNİYET

**TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BULANIK NÖRMLÜ HALKALAR

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ**

AYKUT EMNİYET

AĞUSTOS 2021

BULANIK NORMLU HALKALAR

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman

Prof. Dr. Memet ŞAHİN

Aykut EMNİYET

Ağustos 2021



©2021[Aykut EMNİYET]

BULANIK NORMLU HALKALAR

başlıklı bu çalışma, **Aykut EMNİYET** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü'nde** Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet İshak YÜCE
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Matematik Bölüm Başkanı
Gaziantep Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Danışman, Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Mezuniyet Tarihi:

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Danışman, Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Matematik
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Necati OLGUN
Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Dr. Öğretim Üyesi Basri ÇALIŞKAN
Matematik
Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Aykut EMNİYET

ABSTRACT

FUZZY NORMED RINGS

EMNİYET, Aykut

Ph.D. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Memet ŞAHİN

August 2021

66 pages

This thesis consists of six chapters. The first part of the thesis is devoted to the introduction. In this section, the concept of *uncertainty*, the historical background and development of our subjects, past studies and the deficiencies we aim to eliminate, the purpose and motivation of our study and the flow of our thesis are included. In the second chapter, basic concepts and theorems about fuzzy logic, semigroup theory and normed rings are given. The third section consists of fuzzy semigroups. Here, some fuzzy transformation semigroups are defined and examined and a notation that will provide convenience is proposed. The fourth chapter is the most comprehensive part of our study. In this section, by using fuzzy sets, fuzzy normed rings are defined using continuous t-norms and s-norms, some related algebraic structures are examined, and examples are given. At the same time, some fuzzy subrings and ideals on normed rings are studied. Finally, fuzzy prime and fuzzy maximal ideals are defined, exemplified and various theorems are stated and proven in this section. The fifth chapter of our thesis consists of our studies on level ideals on fuzzy normed rings, fuzzy semiprime ideals and fuzzy normed cosets. In this section, auxiliary lemmas and theorems are proven and necessary definitions are put forward. The sixth chapter is devoted to the discussion of the results and the suggestion of possible future work and is the final part of our thesis.

Key Words: Normed Ring, Fuzzy Set, Fuzzy Transformation Semigroup, Fuzzy Ideal, Fuzzy Normed Coset.

ÖZET

BULANIK NORMLU HALKALAR

EMNİYET, Aykut

Doktora Tezi, Matematik

Danışman: Prof. Dr. Memet ŞAHİN

Ağustos 2021

66 sayfa

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, *belirsizlik* kavramı, konularımızın tarihsel arka planı ve gelişimi, geçmiş çalışmalar ve gidermeyi amaçladığımız eksiklikleri, çalışmamızın amacı ve motivasyonumuz ile tezimizin akışı yer almaktadır. İkinci bölümde, tezimizde yer alan bulanık mantık, yarıgrup teorisi ve normlu halkalar hakkında temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölüm, bulanık yarıgruplara ayrılmıştır. Burada bazı bulanık dönüşüm yarıgrupları tanımlanarak incelenmiş ve kolaylık sağlayacak bir notasyon önerilmiştir. Dördüncü bölüm, çalışmamızın en kapsamlı bölümüdür. Bu bölümde sürekli t-norm ve s-normlar kullanılarak, bulanık kümeler üzerinde bulanık normlu halkalar tanımlanmış ve bazı ilgili cebirsel yapılar incelenmiş ve örnekler verilmiştir. Aynı zamanda, normlu halkalar üzerinde bazı bulanık althalkalar ve idealler incelenmiştir. Bu bölümde son olarak bulanık asal ve bulanık maksimal idealler tanımlanmış, örneklendirilmiş ve çeşitli teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Tezimizin beşinci bölümü, bulanık normlu halkalarda seviye idealleri, bulanık yarıasal idealler ve bulanık normlu eşkümeler üzerindeki çalışmalarımızdan oluşmaktadır. Bu bölümde yardımcı lemmalar ve teoremler ispat edilmiş ve gerekli tanımlar ortaya atılmıştır. Altıncı bölüm, sonuçların tartışılmasına ve olası gelecek çalışmaların önerilmesine ayrılmıştır ve tezimizin son bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Normlu Halka, Bulanık Küme, Bulanık Dönüşüm Yarıgrubu, Bulanık İdeal, Bulanık Normlu Eşküne.



"Bir Tanecik Oğluma"

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgi birikimini benimle paylaşan, özellikle en zor günlerde desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Memet ŞAHİN'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın her aşamasında maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a (1649B031500547 no'lu Genel Yurtiçi Doktora Burs Programı) teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve bana güvenen, çok sevdiğim biricik annem ve kardeşime, bana inanmayı hiç bırakmayan değerli dostlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi'ndeki mesai arkadaşlarıma ve kıymetli hocalarıma gösterdikleri sabır ve anlayıştan dolayı çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SEMBOLLER LİSTESİ.....	xii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xiii
BÖLÜM I GİRİŞ.....	1
1.1 Bilimsel Çalışmada Belirsizlik Kavramı	1
1.1.1 Bulanık Mantığın Kısa Tarihi.....	2
1.1.2 Normlu Halkaların Kısa Tarihi.....	4
1.2 Bulanık Normlu Halkalara Giden Yol	5
1.3 Çalışmamızın Amacı.....	6
1.4 Yöntem ve Motivasyon.....	7
1.5 Tezin Akışı.....	8
BÖLÜM II ÖN BİLGİLER.....	10
Temel Kavramlar.....	10
BÖLÜM III BAZI BULANIK DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI	25
3.1 Bulanık Dönüşümlerde Bileşke	26
3.2 Bulanık Altıyarıgruplar	28
3.3 Bulanık Bire-Bir Ve Bulanık Singüler Dönüşümler.....	31
BÖLÜM IV BULANIK NORMLU HALKALAR	34
4.1 Bulanık Normlu Althalkalar	34
4.2 Bulanık İdeallere Giriş	38
4.3 Bulanık Asal ve Bulanık Maksimal İdealler	41
BÖLÜM V BAZI BULANIK İDEALLER VE BULANIK NORMLU EŞKÜMELER	49

5.1 Seviye İdealleri ve Bulanık Normlu Eşkümeler.....	49
5.2 Bulanık Yarıasal İdealler.....	54
BÖLÜM VI SONUÇ VE ÖNERİLER	57
KAYNAKLAR	59
YAYINLAR	64
AKADEMİK ÖZGEÇMİŞ.....	65



ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	A bulanık kümesinin $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu 11
Şekil 2.2	Kesişim, Birleşim ve Tümleyen Bulaşık Kümeler12
Şekil 2.3	Bazı Bulanık Üyelik Fonksiyonları..... 13



SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbf{0}_{NR}$	NR halkasının toplamsal sıfırı
$\mathbf{1}_{NR}$	NR halkasının çarpımsal etkisiz elemanı
$\mathbf{F}(X)$	X kümesi üzerindeki tüm bulanık altkümelerin kümesi
$\mathbf{A} \leq \mathbf{NR}$	A , NR 'nin althalkasıdır (bulanık althalkasıdır)
$\mathbf{A} \trianglelefteq \mathbf{NR}$	A , NR 'nin idealidir (bulanık idealidir)

KISALTMALAR LİSTESİ

fts	Bulanık Dönüşüm Yarıgrubu
fpts	Bulanık Kısmi Dönüşüm Yarıgrubu
ffts	Bulanık Tam Dönüşüm Yarıgrubu
fps	Bulanık Permütasyonlar Yarıgrubu
fopts	Bulanık Bire-Bir Kısmi Dönüşüm Yarıgrubu

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1 Bilimsel Çalışmada Belirsizlik Kavramı

Hayatını matematik, bilim, dil ve sanat felsefesine adanmış olan Amerikalı felsefeci Max Black, 1937 yılında dünyaca ünlü makalesi “Belirsizlik: Mantıksal Analizde Bir Çalışma”yı yayınladı¹. Black, bu çalışmanın hemen girişinde, en gelişmiş ve yararlı bilimsel teorilerin pratikte hiç karşımıza çıkmayan nesnelerle ifade edilmesinin bir paradoks olduğunu ifade etti. Black, “öncül ve sonuç” yaklaşık olarak doğru olduğunda sonucun geçerliliğini yitirmeyeceği görüşünü destekledi ve Einstein’a ait “Matematik yasaları gerçekten söz ettikçe belirsizdirler; kesin oldukları kadarıyla da gerçekten söz edemezler.” sözünü kolaycılık olarak niteleyerek eleştirdi.

Belirsizlik, yıllar boyunca hayatın her alanında insanlığın en büyük çekincelerinden biri oldu. Şirketlerin, devletlerin, kurumların ve insanların sanayide, ekonomide ve mühendislik bilimlerinde kesin veriye ihtiyacı vardı. Herkes öngörülebilir bir dünyada yaşamak istese de tarihin en iyi teorik fizikçilerinden olan Richard Feynman’ın farklı bir bakış açısı vardı:

“Şüpheyle, belirsizlikle ve bilmeden yaşayabilirim. Bence bilmeden yaşamak, yanlış olabilecek cevaplara sahip olmaktan çok daha ilginç. Bu şekilde ilerledikçe, kararsız kalırız ve alternatiflere fırsat vermiş oluruz. Gerçeğin kendisi, bilgi ve kesin doğru için çok hevesli olmayacağız ve emin olmayacağız ... İlerleyebilmek için bilinmeyene kapıyı aralık bırakmak gerekir.”²

¹ Black, M. (1937). Vagueness: An exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4(4), 427-455.

² Video : BBC Interview with Feynman (uncertainty),
<https://www.youtube.com/watch?v=MmpUWEW6Is&t=53s>, 21.07.2021.

Feynman'ın bu fikri, hayatta tüm belirsizlikleri ortadan kaldırmanın mümkün olmadığını kabullenme duygusuyla, bir miktar belirsizliğin yaşama renk katacağını düşünmesinin bir sonucu olsa gerek. Bu haliyle, kendisine çok sayıda taraftar bulacağını söylemek de mümkün. Fakat iş, en küçük belirsizliklerin çarpan etkisiyle büyük hesaplama hatalarına dönüşebileceği akademik dünyaya geldiğinde “romantik” sözler yerini gerçeklere bırakmaktadır.

Britanyalı filozof, matematikçi ve mantıkçı Bertrand Russell, çalışmalarıyla küme teorisi, dilbilim, yapay zeka, bilgisayar bilimi, analitik felsefe ve matematik felsefesi gibi alanlarda büyük etki yapmış bir bilgeydi.

“Belirsizlik ve kesinlik, anlaşılması çok gerekli olan önemli kavramlardır... Tüm düşünceler bir dereceye kadar belirsizdir ve tam doğruluk (kesinlik) pratik olarak elde edilemeyen teorik bir idealdir.”³

Sonuç olarak Russell da Black ve Feynman gibi 1900'lerin ilk çeyreği henüz yeni geride kalmışken, belirsizlikler ve kesin olmayan ölçümlerle ilgili temkinliydi. Bu değerli bilim insanları, kendilerinin de büyük katkı yaptıkları bilim ve teknolojinin hızla ilerlemesiyle, özellikle sözlü iletişimin matematiksel sembollerle ifade edilmesinde ortaya çıkan belirsizlik ya da müphemlikle başa çıkma çabasında bu kadar kısa sürede bu kadar çok yol alınabileceğini hayal etmişler miydi, bilinmez.

Yirmi yıl gibi kısa bir süre içerisinde, karmaşık sayısal ve sözel problemlerin klasik mantık kullanılarak çözülmesinde yaşanan sorunların üstesinden gelinmesi yolunda üstün bir çaba gösterildi. Bunların en başarılısı ise, tıpkı Max Black gibi soğuk bir Şubat günü Azerbaycan Bakü'de doğmuş olan, Lotfi Aliasker Zadeh tarafından ortaya atılan Bulanık Mantık oldu.

1.1.1 Bulanık Mantığın Kısa Tarihi

Max Black'ten yaklaşık 30 yıl sonra, Zadeh [1] modern belirsizlik kavramının açıklanmasında önemli bir nokta olarak kabul edilen ve yeni ufuklar açan makalesini yayınladı. Burada, *bulanık küme* ve *üyelik derecesi* kavramlarını ilk kez ortaya koyan Zadeh, küme teorisinin içleme, kesişim, birleşim, tümleyen işlemleri ile birlikte

³ Russell, B. A. W., (1933). *The Analysis of Mind*. pp 107. The MacMillan Company: New York.

bağıntı ve dışbükeylik özelliklerini bu kümeler üzerinde tanımladı. Ayrıca, bulanık kümeler üzerinde cebirsel çarpım, cebirsel toplam ve fark bu çalışmada ortaya kondu ve Zadeh bulanık bağıntıların bileşkesini de yine bu çalışmada tanımladı. Önemi yıllar içerisinde anlaşılan bu yayın, ilk yıllarda akademi içerisinde çok ciddiye alınmamış ve çoğunlukla göz ardı edilmiş olsa da bugüne kadar yüz üç binin üzerinde atıf aldı.⁴

Goguen [2-4] bizzat Zadeh ile tanışmış, ondan ilham almış bir araştırmacıydı ve kısa sürede teoriye önemli katkılarda bulundu. O günlerde pek bilinmeyen iki Rumen araştırmacı olan Negoita ve Ralescu [5,6] teorik katkılarının yanında bulanık mantığın uygulamaları konusunda yaptıkları öncü çalışmalarla ün kazandılar.

Bulanık mantık teorisinin gelişmesi ve yaygınlaşması sürecinde, *Fuzzy Sets and Systems* dergisinin yılda dört sayı olarak 1978 yılında yayımlanmaya başladığını ve *Bulanık Küme Teorisi Üzerine Uluslararası Seminer* adıyla ilk bulanık mantık konferansının Avusturya Linz’de 1979 yılında düzenlenmiş olduğunu not etmek gerekir.

80’li yılların ortalarına geldiğimizde Dubois, Prade, Ruspini ve Yager [7-11] özellikle uygulamalı alanlarda yapmış oldukları çalışmalarla bulanık mantığın en güçlü temsilcileri arasında yerlerini almışlardı.

Aynı tarihlerde Cheeseman, teori aleyhinde “Bulanık mantıkla yapılan her şeyin olasılık kullanılarak çok daha iyi yapılabileceğini”⁵ savunan bir çalışma yayınladı. Devamında, olasılık teorisi destekçileri ile bulanık mantıkçılar arasında yıllar boyunca çok verimli münazaralar yapıldı ve bu fikir alışverişleri her iki bilim dalının gelişimine büyük katkılar sağladı.

1990’ların başında hemen her ülkede bulanık mantıkla ilgili dergilerin yayımlanması, her dilde kitapların basılması ve toplulukların kurulması teorisinin dünya çapında yaygınlaşmasına ve daha çok araştırmacının dikkatini çekmesine olanak sağladı. Aynı dönemde çok sayıda ders kitabı ve farklı disiplinler için uygulama kitabının [12-17] yazılması da bulanık mantığın yaygınlaşması ve tanınmasında önemli rol oynadı.

⁴ Google https://scholar.google.com/scholar?hl=tr&as_sdt=0%2C5&q=zadeh&btnG=, 21.07.2021

⁵ Cheeseman, P. (1986). Probabilistic versus Fuzzy Reasoning, *Machine Intelligence and Pattern Recognition*. (4), 85-102.

Bulanık mantık teorisinin buraya kadar olan gelişimi ve tarihi hakkında daha kapsamlı bilgi Belohlavek ve ark. [18] içinde bulunabilir.

1.1.2 Normlu Halkaların Kısa Tarihi

O'Connor ve Robertson [19]'a göre değişmeli halka teorisi 1801 yılında Legendre ve Gauss'un tamsayı eşleşimlerini (kongrüans) keşfetmesiyle başlar. *Fermat'ın Son Teoremi*'ni⁶ ispatlamaya çalışan Euler, Lame, Liouville ve Cauchy 1840'larda aritmetik ile ilgili önemli sonuçlara ulaştılar. 1871 yılında Dedekind bir *ideali* ilk tanımlayan, *modül* kelimesini ilk kullanan ve *cisimleri* ilk ortaya koyan kişi oldu. Dedekind ayrıca asal sayıları ideallere genelleştirerek *asal idealleri* de tanımladı. *Halka* kelimesi ise Hilbert'e aittir (1893). *Esas idealler* dönemin Dünya Satranç Şampiyonu Lasker tarafından ortaya atılsa da, bir idealin esas ideallere ayrışmasının tek türlü olmasına dair özelliklerinin ispatı 1915'te Macaulay'e kaldı.

Emmy Noether (1882-1935) yalnızca yaşadığı dönemin değil, tarihin en başarılı kadın matematikçilerinden biridir ve soyut cebire ve teorik fiziğe çığır açıcı katkılarıyla bilinmektedir. Değişmeli halkaların aksiyomatik sınıflandırılması 1920'lerde Emmy Noether ve Krull tarafından yapıldı. Noether 1921'de önemli bir adım atarak polinomlar halkası ve sayılar halkası teorilerini tek bir başlık altında, *soyut değişmeli halkalar teorisi* olarak birleştirdi. Ayrımcılık nedeniyle sonuçlarını yayınlamayan Noether'in çalışmaları, ancak Van Der Waerden [20] *Modern Cebir* adlı önemli eserinde ona yer verdiğinde geniş bir kitle ile buluşmayı başarabildi.

Diğer yandan, değişmeli olmayan halka teorisini ele aldığımızda, 1840'lara geri dönüp *vektör uzayı* fikrini ortaya atan Hamilton ile karşılaşırız. Matrislerde toplama ve çarpma işlemleri Cayley tarafından 1850'de takdim edilmiş olsa da, 1870 yılında Pierce kare matrislerin, bugün de kullanılmakta olan halka aksiyomlarını sağladığını gösteren kişi oldu. Wedderburn 1905 yılında *her çarpık cismin değişmeli olduğunu ve dolayısıyla bir cisim olduğunu* ispatladı. Wedderburn'ün teorisi, 1927'de Artin tarafından *artan ve azalan sonluluk koşullarını sağlayan değişmeli olmayan halkalara* genişletildi ve daha sonra bu koşullardan azalan olmanın yeterli olduğu gösterildi.

⁶ x, y, z tamsayıları için $n > 2$ olmak üzere, $x^n + y^n = z^n$ denkleminin çözümü yoktur.

1930 sonrasında değişmeli olan ve olmayan halka teorileri birlikte ele alınmaya başlandı ve önceleri değişmeli halkalar için ortaya atılan modül kavramı genel halkalar için ele alınmaya başlandı. Bazı gelişmeler çok hızlı gerçekleşmedi ve örneğin, değişmeli olmayan halkaların asal idealleri 1949 yılında McCoy’a kadar çalışılmadı. 1945’te teoriye önemli katkıyı, grup teorisine benzer şekilde, bir halkanın *Jacobson Radikali*’ni tanımlayan Jacobson yaptı. İlginç olan ise, Jacobson’un bu fikrinin temellerinin 1885 yılına ve Frattini’ye kadar dayanmasıdır.

Normlu halkaların temellerine indiğimizde, karşımıza Van Neumann ve Murray’in [21-24] operatör halkaları üzerine yazdıkları dört öncü eser çıkmaktadır. Bu kaynaklarda Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörlerin cebiri detaylı ve birbirinin devamı olarak çalışıldı. Naïmark [25] *normlu halkayı*, cebirsel anlamda en basit haliyle, bir cebiri oluşturan elemanların basit gereklilikleri sağlayan bir norma sahip keyfi bir kümesi olarak tanımladı. Başlangıçta bu yapıya *normlu cebir* adını verdi. Normlu cebirlerin radikallerini, sürekli homomorfizmalarını ve düzgün temsillerini, ayrıca Banach cebirlerini detaylı olarak bu monografıta çalıştı. Naïmark’ın tanımı ve bakışı, yakın dostu olan Gelfand ve ark. [26] tarafından sistematik olarak geliştirildi. Bu çalışmada, değişmeli normlu halkalar üzerine sonuçlar, maksimal ideallerle ilgili sonuçlar ve sınıflandırmalar yer almaktaydı. Böylece, Gelfand değişmeli normlu halkalar teorisini kurdu. Uluçay ve ark. [27], 2016 yılında *esnek normlu halkaları* tanımladılar ve Molodtsov [28] tarafından tanımlanan esnek kümeler kavramını kullanarak esnek normlu idealleri ve esnek tam normlu halkaları ortaya koydular.

1.2 Bulanık Normlu Halkalara Giden Yol

Kümeler teorisinin bir konusu olan bulanık mantık teorisi ve soyut cebir içerisinde yer alan halka teorisi ilk bakışta birbirinden oldukça uzak olan iki daldır. Ancak, elbette halkalar da kümelerin sağladığı (ya da sağlamadığı) çeşitli aksiyomlar üzerinden tanımlanmakta ve sınıflandırılmaktadır. Buradan hareketle, tanımları bakımından, iki değerli mantık üzerine inşa edilmiş saf (pür) soyut matematiksel yapıların dahi, bilimin hemen her alanında uygulamaları bulunan bulanık kümeler ve bulanık mantık kuralları ile yeniden tanımlanması mümkün olmuş ve bu yeni tanımlarla ortaya çıkan (hibrit) yapılar, özellikle son otuz yılda ilgi çekici araştırma konuları haline gelmiştir.

Kronolojik olarak ele alacağımız aşağıdaki eserler literatürü tarama, bulanık normlu halkaları tanımlama ve teoriyi ortaya koyma aşamasında yararlandığımız kaynaklardır.

Das [29] bir bulanık altgrupun *seviye altgrupunu* tanımladı ve bunu kullanarak sonlu devirli grupların tüm bulanık altgruplarını karakterize etti. Kuroki [30] bir yarıgrup içinde *bulanık yarıasalılık* kavramını ortaya attı ve basit yarıgrupların bir yarılatısı olan bir yarıgrup tanımladı. *Bulanık değişmez altgruplar* ve *bulanık ideallerin* bazı temel özelliklerini veren Liu [31], bir bulanık idealini kullanarak bazı şartlar altında değişmeli ve birimli bir halkanın bir cisim olacağını gösterdi. Ayrıca, [32]'de bir halkanın *L*-bulanık idealleri üzerinde kesişim, toplama ve çarpma işlemlerini tanımladı ve klasik ideallere ait bazı işlemlerin temel özelliklerini *L*-bulanık idealler üzerinde gösterdi. Mukherjee ve Bhattacharya [33] *bulanık normal altgrup* ve *bulanık eşküme* kavramlarını ortaya attı. Bir grubun bulanık altgrupunun bulanık normal olma şartını verdi ve bir bulanık normal altgrupun tüm seviye altgruplarının normal olduğunu gösterdi. Lagrange Teoremi'nin bulanık bir versiyonunu ifade ve ispat etti. Mukherjee ve Sen [34] halkaların bulanık ideallerini çalıştı ve bunları, düzgün halkaları ve Noether halkalarını sınıflandırmak ve tamsayılar halkasının tüm bulanık asal ideallerini belirlemek için kullandı. Swamy ve Swamy [35] bir idealler ailesinden herhangi bir bulanık ideal inşa etmek için koşullar buldu ve asal ve maksimal bulanık idealler için önemli sonuçlara ulaştı. Verilen bir grubun bir bulanık altgrupunun hangi şartlar altında iki bulanık öz altgrupun bir birleşimi olarak kabul edilebileceğini araştıran Dixit ve ark. [36], bulanık karakteristik altgrupları ve bulanık eşlenik altgrupları da karakterize etti. Ayrıca, [37]'de bulanık asal ideallerin homomorfizmler altında görüntü ve öngörüntülerinin cebirsel yapılarını inceledi ve bir bulanık asal (bulanık maksimal) idealin tüm bulanık eşkümelerinin halkasını çalıştı. Malik ve Mordeson [38] bir halkanın *bulanık maksimal ideal*, bir bulanık idealin *bulanık radikali* ve *bulanık esas ideal* kavramlarını tanımladı. Dixit ve ark. [39] bir halkanın sonlu bulanık altkümesi tarafından üretilen bulanık althalkayı / bulanık ideali tanımladı ve *bulanık yarıasal ideali* tanımlayarak temel özelliklerini çalıştı. Bunlarla birlikte, bulanık cebirsel yapıları ve özellikle bulanık grupları ve altgrupları detaylı olarak inceleyen [40], bulanık cebir teorisine önemli katkılarda bulunmuş Mordeson ve arkadaşları tarafından yazılmış çok sayıdaki kıymetli eserden biridir.

1.3 Çalışmamızın Amacı

Klasik yarıgruplar ve sonrasında bulanık yarıgruplar, daha önce sözünü ettiğimiz çok sayıda değerli çalışmanın konusu olmuştur. Yarıgruplar üzerine araştırma ve

alışmalar devam etmektedir. Bu tezde bizim amacımız, bugüne kadarki literatürü doğru şekilde takip ederek ileriye taşıyabilmek ve bunun için daha önce tanımlanmamış bazı bulanık yarıgrupları tanımlayarak, bunların cebirsel özelliklerini çalışmak, kolaylaştırıcı notasyonlar önermek ve bulgularımızı paylaşmaktır.

Ayrıca, yukarıda sözü edilen çalışmaların her biri bulanık cebir açısından da birer önemli kilometre taşıdır. Bulanık halkalar çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiş ve cebirsel özellikleri çalışılmıştır ve günümüzde ciddi bir ilgi görmeye devam etmektedir. Normlu halkalar üzerine çalışmalar ise daha eski tarihlerde yoğunlaşmaktadır. Buna rağmen, son yıllarda normlu halkalara olan ilgi de gözle görülür ölçüde artmıştır.

Ayrı ayrı çalışılmış bu iki konunun bir potada eritilmesinin, normlu halkalara bulanık kümeler üzerinden başka bir açıdan tekrar bakılmasının, yeni tanımların yapılarak althalkalar ve ideallerin bu yeni duruma uygun şekilde yeniden incelenmesinin literatürdeki önemli bir boşluğu dolduracağı açıktır. Daha önce tanımlanmamış ve çalışılmamış bir konu olarak *bulanık normlu halkalar*, bu sayede literatüre kazandırılmış olacaktır.

Benzer şekilde, bulanık cebirin bir başka konusu olan bulanık yarıgruplar üzerine, bu tezde ilk kez ortaya koyduğumuz tanım, notasyon, örnek ve teoremlerin de ilerleyen yıllarda araştırmacılardan yoğun ilgi göreceğine inanıyoruz.

Bu haliyle yaptığımız çalışma, alanında kendisinden önce yapılmış çalışmaları takip eden ve yeni bir yol açan, özgün ve değindiği konularla ilgili teoriler arasında sağlam bir köprü vazifesi görmeyi amaçlayan bir emeğin ürünüdür.

1.4 Yöntem ve Motivasyon

Soyut cebir alanındaki çalışmalar genellikle birbirine benzer akışa sahiptir. Alan, uygulamalara ve deneylere açık olmadığından, tezimizde de kullandığımız yöntem,

Tanım $\Rightarrow$ Yardımcı Lemma $\Rightarrow$ İspat $\Rightarrow$ Teorem $\Rightarrow$ İspat $\Rightarrow$ Sonuç $\Rightarrow$ Örnek $\Rightarrow$ Tanım şeklindedir.

Araştırma konusu olarak bulanık normlu halkaları seçmekteki gayemiz, literatüre özgün ve nitelikli bir katkıda bulunabilmektir. Bu yolda amacımıza emin adımlarla yürüdüğümüzü düşünüyoruz. Nitekim, bu tez çalışmasının ilk sonuçlarını “Fuzzy

Normed Rings” [51] adıyla yayınladığımız ve yeni bir cebirsel yapının temellerini ortaya koyduğumuz 2018 yılından bugüne kadar, bulanık normlu halkalar ciddi bir ilgi görmüş ve çalışmamız Ağustos 2021 itibariyle sekiz adet nitelikli atıf almıştır [52-59]. Bu çalışmanın ilgi görmeye devam edeceğini ve ilerleyen yıllarda etkisinin daha da artacağını düşünüyoruz.

Bununla birlikte, tezimizin diğer bölümlerini oluşturan ve 2021 yılında yayınlanan iki çalışmamızın da özellikle bulanık yarıgruplar alanına katkı vereceğine yürekten güveniyor ve inanıyoruz.

1.5 Tezin Akışı

Tezimiz altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, *belirsizlik* kavramı, konularımızın tarihsel arka planı ve gelişimi, geçmiş çalışmalar ve bu çalışmaların gidermeyi amaçladığımız eksiklikleri, çalışmamızın amacı ve motivasyonumuz ile tezimizin akışı yer almaktadır.

İkinci bölümde, tezimizde yer alan bulanık mantık, yarıgrup teorisi ve normlu halkalar hakkında temel kavramlar ve teoremler verilmiştir ve bu bölüm ilerleyen bölümlerde kullanılacak tüm temel bilgileri içermektedir.

Üçüncü bölüm, bulanık yarıgruplarla ilgili çalışmalarımıza ayrılmıştır. Burada, bulanık dönüşümlerin bileşkeleri, tanım ve görüntü kümeleri tanımlanmış ve gösterimlerde kolaylık sağlayacak yeni bir notasyon önerilmiştir. Bulanık altyarıgruplar, bulanık kısmi, bulanık tam dönüşümler ve bunlarla ilgili bulanık yarıgruplar bu bölümde tanımlanmış ve örneklendirilmiştir. Ayrıca, bulanık permütasyonlar, bulanık bire-bir ve singüler dönüşümler ile bunların arasındaki altyarıgrup olma (olmama), ideal olma (olmama) ilişkileri yine üçüncü bölümde incelenmiştir.

Dördüncü bölüm, çalışmamızın en kapsamlı bölümüdür. Bu bölüm, bulanık normlu althalkaların tanımlanması ve örneklendirilmesiyle başlamakta ve sürekli t-norm ve s-normlar kullanılarak, bulanık kümeler üzerinde bulanık normlu halkaların ilk kez tanımlanmasıyla devam etmektedir. Çok sayıda açıklayıcı örnek vermeye çalıştığımız dördüncü bölümde, normlu halkalarda bulanık ideallerle ilgili bulgularımız geniş yer tutmaktadır. Ayrıca, normlu halkaların bulanık asal ve bulanık maksimal idealleri

tanımlanmış ve bunların arasındaki cebirsel ilişkiler yardımcı lemma ve teoremler yardımıyla gösterilmiştir.

Tezimizin beşinci bölümü, bulanık normlu halkalarda seviye idealleri, bulanık yarıasal idealler ve bulanık normlu eşkümeler üzerindeki çalışmalarımızdan oluşmaktadır. Bulanık ideallerin A_t seviye kümelerinin, bir NR normlu halkasının bulanık idealleri olma koşulları incelenmiş ve ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bulanık normlu eşkümeler kavramı ve ilgili teoremler burada yer almaktadır. Beşinci bölümde son olarak, bulanık yarıasal idealler tanımlanmış ve NR bulanık normlu halkasına ait A bulanık idealinin bulanık yarıasal olması için gerek ve yeter bir şart verilerek ispatlanmıştır.

Altıncı bölüm, elde ettiğimiz sonuçların değerlendirilerek tartışılmasına ve olası gelecek çalışmaların önerilmesine ayrılmıştır.

Tezimizle ilgili çalışmalarımızı içeren üç adet yayın ve yazarın Akademik Özgeçmişi, tezimizin sonunda yer almaktadır.

BÖLÜM II

ÖN BİLGİLER

Temel Kavramlar

Bu bölümde, tezimizin sonraki bölümlerinde kullanacağımız temel tanım, örnek ve yardımcı teoremler verilecektir. Bunu yaparken bulanık mantık teorisi, cebirsel yapılar ve halka teorisi ,bulanık cebir, metrik, norm ve normlu uzaylar sıralamasını takip edeceğiz.

Tanım 2.1 [41] X evrensel kümesi üzerinde, elemanları $x \in X$ ile gösterilen bir A kümesi,

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$$

sıralı ikililerinden oluşsun. Burada $\mu_A(x)$, x elemanının A kümesi içindeki **üyelik fonksiyonu** ya da üyelik derecesi olarak adlandırılır. Her $x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ ise A kümesine bir **bulanık küme** denir.

$\mu_A(x) = 0$ ise x elemanının A kümesi içinde yer almadığı ve $\mu_A(x) = 1$ oluyorsa x elemanının A kümesinin (bütünüyle) bir elemanı olduğu anlaşılır.

Bu çalışma boyunca genellikle, x elemanının A kümesi içindeki üyelik derecesini $\mu_A(x)$ yerine $A(x)$ ile göstereceğiz.

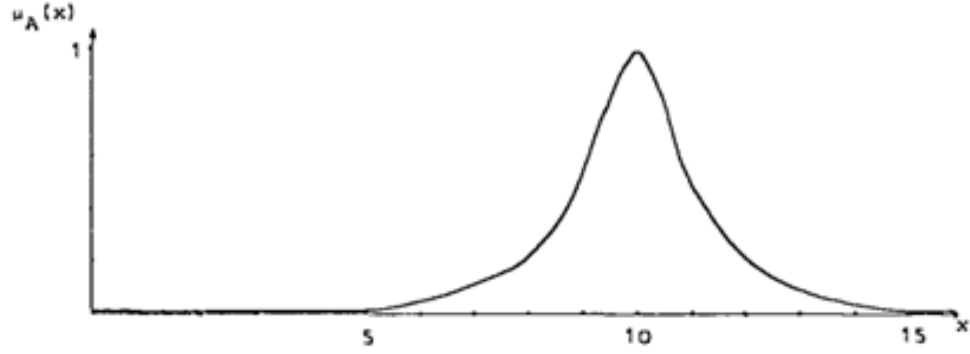
Tanım 2.2 [1] A ve B bulanık kümeler ve $x \in X$ evrensel kümede olmak üzere, eğer A kümesi B kümesinin **altkümesi** (ya da B , A 'yı içeriyor) ise, her $x \in X$ için,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$$

olur.

Örnek 2.3 [41] 10 sayısına yakın reel sayıların bir bulanık kümesini oluşturalım.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : \mu_A(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1}\} \text{ olarak tanımlansın.}$$



Şekil 2.1 A bulanık kümesinin $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu

Örneğin, $\mu_A(7) = 0.1 = \mu_A(13)$ ve $\mu_A(10) = 1$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 2.4 [41] A ve B iki bulanık küme ve $x \in X$ olmak üzere,

$A \cap B$ kesişim kümesinin üyelik fonksiyonu

$$(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)),$$

$A \cup B$ kesişim kümesinin üyelik fonksiyonu

$$(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x))$$

ve $\bar{A}$ tümleyen işleminin üyelik fonksiyonu

$$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$$

şeklinde noktasal olarak tanımlanır.

Lemma 2.5 [1] Klasik kümelerde birleşim ve kesişimle ilgili De Morgan kuralları (7 ve 8) ve dağılma özellikleri (9 ve 10) aşağıdaki gibidir:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (7)$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (8)$$

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad (9)$$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B) \quad (10)$$

Şimdi, (7), (8), (9) ve (10) ile birlikte Tanım 2.4 kullanılarak, De Morgan kuralları ve dağılma özelliklerinin bulanık kümelerdeki tanımlarını elde edebiliriz. Örneğin, (7) eşitliği,

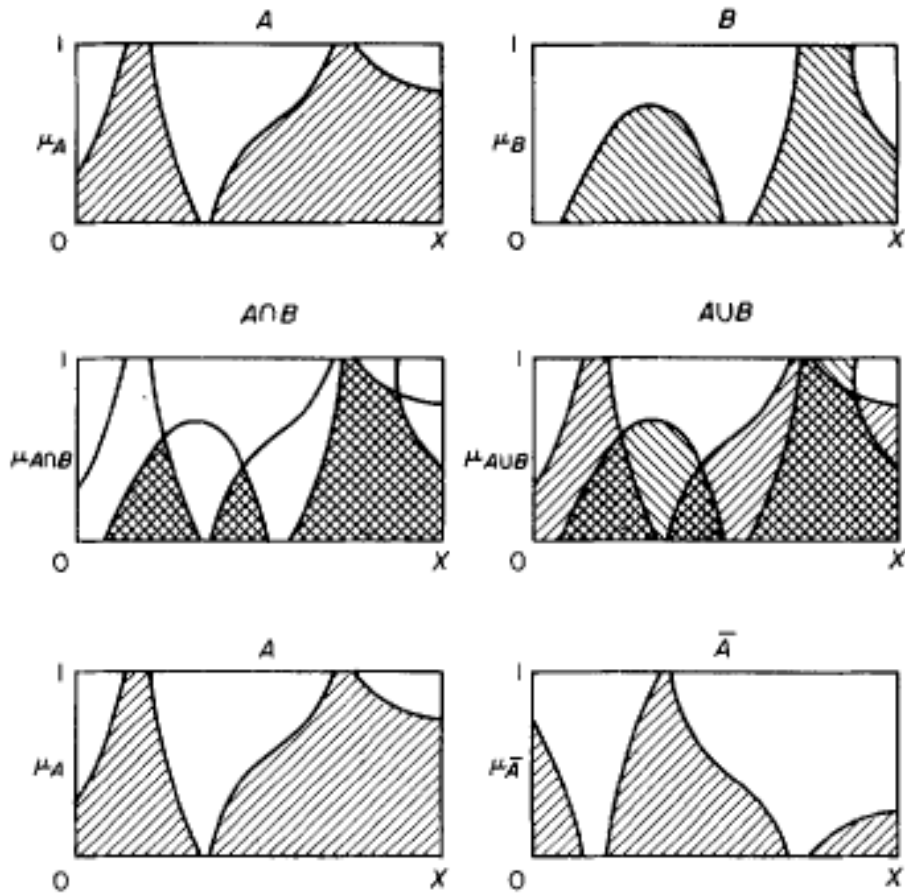
$$1 - \max(A(x), B(x)) = \min(1 - A(x), 1 - B(x))$$

olur. Diğer yandan, (10) eşitliği bulanıklaştırılırsa,

$$\max(C(x), \min(A(x), B(x))) = \min[\max(C(x), A(x)), \max(C(x), B(x))]$$

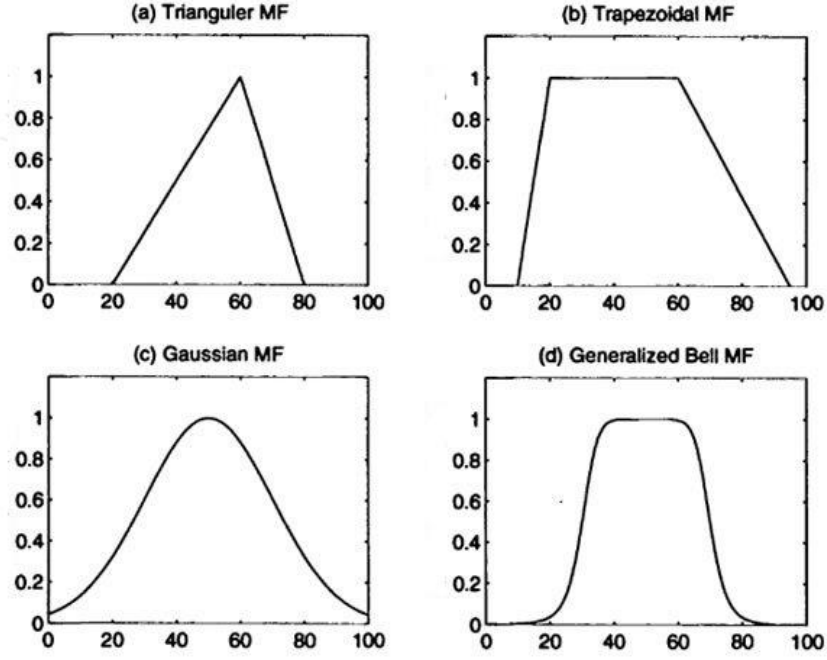
olarak elde edilir.

Örnek 2.6 [7] A ve B kümelerinin bulanık üyelik dereceleri şekildeki gibi verildiğinde, $A \cap B$, $A \cup B$ ve $\bar{A}$ kümelerinin alacağı üyelik derecelerine ait görsel şekildeki gibidir:



Şekil 2.2 Kesişim, Birleşim ve Tümleyen Bulanık Kümeler

Örnek 2.7 [7] Önceden tanımlanmış ve sıklıkla kullanılan bulanık üyelik fonksiyonlardan bazıları aşağıdadır:



Şekil 2.3 Bazı Bulanık Üyelik Fonksiyonları

Bunlar, (a) Üçgensel, (b) Yamuksal, (c) Gauss ve (d) Genelleştirilmiş Çan fonksiyonlarıdır. Örneğin, yukarıdaki Yamuksal Üyelik Fonksiyonu,

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x < 10 \text{ ya da } x > 90 \text{ ise} \\ \frac{x - 10}{20 - 10}, & 10 \leq x < 20 \text{ ise} \\ 1, & 20 \leq x \leq 60 \text{ ise} \\ \frac{90 - x}{90 - 60}, & 60 \leq x \leq 90 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.8 [38] X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinden $[0,1]$ kapalı aralığına tanımlanmış bir f fonksiyonuna, X 'in bir **bulanık altkümesi** denir.

A , X 'in bir bulanık altkümesi ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. R bir halka olmak üzere,

$$A_t = \{x \in R : A(x) \geq t\}$$

kümesine X 'in A 'ya göre **seviye kümesi** denir.

Her $t > s$ için açıkça $A_t \subseteq A_s$ olur.

Tanım 2.9 [42] Aşağıdaki şartları sağlayan bir $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemine bir ***t-norm*** denir:

(i) $*$ işlemi değişmeli ve birleşmelidir, yani, her $x, y, z \in [0,1]$ için

$$x * y = y * x$$

$$x * (y * z) = (x * y) * z ,$$

(ii) $*$ işlemi azalmayandır,

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow (x_1 * y) \leq (x_2 * y) ,$$

$$y_1 \leq y_2 \Rightarrow (x * y_1) \leq (x * y_2) ,$$

(iii) her $x \in [0,1]$ için $1 * x = x$ ve $0 * x = 0$.

Diğer yandan, yukarıdaki (iii) şartı, (iii') ile değiştirilirse bir ***s-norm (t-conorm)*** elde edilir. Diğer bir deyişle, $\diamond: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ işlemi (i), (ii) ve (iii') şartlarını sağlıyorsa, s-norm olarak anılır:

(iii') her $x \in [0,1]$ için $1 \diamond x = 1$ ve $0 \diamond x = x$.

$*$ ve $\diamond$ işlemleri $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ (bildiğimiz anlamıyla) sürekli oluyorsa, bir ***sürekli t-norm (s-norm)*** adını alır.

Örnek 2.10 $x * y = \min\{x, y\}$, $x * y = x \cdot y$ ve $x * y = \max\{x + y - 1, 0\}$ fonksiyonları sürekli t-normlardır.

$x \diamond y = \max\{x, y\}$, $x \diamond y = x + y - x \cdot y$ ve $x \diamond y = \min\{x + y, 1\}$ fonksiyonları sürekli s-normlardır.

Tanım 2.11 [43] $\cdot$ bir ikili işlem ve G kümesi $\cdot$ altında kapalı olan boştan farklı bir küme olsun.

(*Yarıgrup*) $\cdot$ işlemi birleşme özelliğini sağlıyorsa, $(G, \cdot)$ cebirsel yapısına bir ***yarıgrup*** denir.

(*Monoid*) Etkisiz elemana haiz olan yarıgruba bir ***monoid*** adı verilir.

(*Grup*) $(G, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki koşulları sağlarsa bir ***grup*** olarak anılır:

G1: Her $a, b, c \in G$ için,

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{birleşme özelliği})$$

G2: Her $x \in G$ için,

$$e \cdot x = x \cdot e = x \quad (\text{etkisiz eleman})$$

olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

G3: Her $a \in G$ ile bağlantılı bir $a' \in G$ elemanı

$$a \cdot a' = a' \cdot a = e \quad (\text{ters eleman})$$

olacak şekilde mevcuttur. Değişmeli gruplara **abel grubu** adı verilir.

Tanım 2.12 [49] Yarıgruplar, 0 (sıfır) elemanını içermek zorunda değildir. $(S, \cdot)$, 0-elemanlı bir yarıgrup olsun. Eğer her $x, y \in S$ için,

$$x \cdot y = 0$$

oluyorsa, $(S, \cdot)$ yarıgrubuna bir **sıfır yarıgrup** denir.

Eğer her $x, y \in S$ için,

$$x \cdot y = x \quad (x \cdot y = y)$$

oluyorsa, bu yarıgruba bir **sol sıfır (sağ sıfır) yarıgrup** denir.

Her $x \in S$ için,

$$xS = S \text{ ve } Sx = S$$

şartlarını sağlayan $(S, \cdot)$ yarıgrubu bir **grup** olur. Çünkü bu şart, grup teorisindeki

$$(\forall x, y \in S) (\exists a, b \in S) : x \cdot a = y \text{ ve } b \cdot x = y$$

şartının eşleniğidir.

$e \in S$ olmak üzere $e^2 = e$ şartını sağlayan elemana bir **idempotent** denir.

T, S yarıgrubunun boştan farklı bir altkümesi olmak üzere, çarpma işlemine göre kapalı ise, yani $\forall x, y \in T$ için

$$x \cdot y \in T$$

oluyorsa, T 'ye bir **altyarıgrup** denir.

A, S yarıgrupunun boştan farklı bir altkümesi olmak üzere, eğer

$$SA \subseteq A \quad (AS \subseteq A)$$

şartını sağlıyorsa, A 'ya S yarıgrupunun bir **sol (sağ) ideali** denir. A, S yarıgrupunun hem sağ, hem de sol ideali ise (iki-terafli) **ideali** olarak adlandırılır.

Örnek 2.13 Bilinen toplama işlemi ile pozitif tamsayılar kümesi $(\mathbb{Z}^+, +)$ bir grup değildir, çünkü $+$ işlemine göre ters elemanlar bu kümede yer almaz.

Tamsayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar ve karmaşık sayılar toplama işlemi ile yukarıdaki şartları sağlarlar. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ birer abel grubudur.

Girdileri reel sayılar olan $n \times n$ tipindeki matrisler $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ grup değildir. Ancak $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ kümesinin *terslenebilir* matrislerden oluşan her bir alt kümesi matris çarpması ile (değişmeli olmayan) birer gruptur.

Tanım 2.14 [43] R bir küme, $+$ (toplama) ve $\cdot$ (çarpma) R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. $(R, +, \cdot)$ aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bir **halka** adını alır:

$\mathcal{R}_1$: $(R, +)$ abel grubudur.

$\mathcal{R}_2$: Çarpma işlemi birleşmelidir.

$\mathcal{R}_3$: Her $a, b, c \in R$ için,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{soldan dağılma})$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{sağdan dağılma})$$

özellikleri sağlanır.

Halka, çarpma işlemi değişmeli olursa **değişmeli halka** ve çarpmanın etkisiz elemanı 1_R mevcutsa **birimli halka** adını alır.

Örnek 2.15 $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ birer değişmeli halkadır.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ve $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ise değişmeli olmayan halkalara örnektir.

Örnek 2.16 Reel sayılardan reel sayılara tanımlı, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlardan

$$\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonların kümesini $\mathcal{R}$ ile gösterelim.

$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f \otimes g)(x) = f(x)g(x)$ ile tanımlanan işlemler olsun. $0_{\mathcal{R}} = f(x) = 0$ sabit (sıfır) fonksiyonu olarak alınırsa, $(\mathcal{R}, \oplus, \otimes)$ toplamsal birimi $0_{\mathcal{R}}$ olan bir değişmeli halka olur. Ancak, $f(x) = 1$ fonksiyonu için,

$$\int_0^{\infty} 1 \cdot dx = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 0) = \infty$$

olduğu için bu halka, birimli değildir.

Tanım 2.17 R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer, S kümesi R 'nin işlemlerine göre halka şartlarını sağlarsa, S 'ye R 'nin bir **althalkası** denir.

Diğer bir deyişle, her $a, b \in S$ için

$$1) a - b \in S \text{ ve}$$

$$2) a \cdot b \in S$$

şartlarını sağlayan S , R halkasının bir althalkasıdır.

Örnek 2.18 $\{0_R\}$ ve R , R halkasının aşık althalkalarıdır.

Tek tamsayılar, $\mathbb{Z}_{2k+1} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin bir althalkası değildir, çünkü çıkarma işlemine göre kapalı olma şartını sağlamaz.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ kümesi 2×2 tipinde, girdileri tamsayılar olan matrislerin kümesidir. Şimdi, boştan farklı $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ altkümesini ele alalım.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \in S \text{ matrisleri için,}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & 0 \\ 0 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \in S \text{ ve}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2 & 0 \\ 0 & y_1 \cdot y_2 \end{bmatrix} \in S$$

olduğundan, $S \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ bir althalkadır.

Tanım 2.19 R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. Eğer, her $a, b \in I$ ve $r \in R$ için

$$1) a - b \in I \text{ ve}$$

$$2) r \cdot a \in I \text{ ve } a \cdot r \in I$$

sağlanıyorsa, I 'ya R halkasının bir **ideali** denir. Sadece $r \cdot a \in I$ şartı sağlanırsa, I bir sol ideal ve sadece $a \cdot r \in I$ şartı sağlanırsa, I bir sağ ideal olarak adlandırılır.

Örnek 2.20 $\{0_R\}$ ve R aşık ideallerdir.

Bir R halkasının her ideali bir althalkadır, ancak tersi doğru olmayabilir. Örneğin, $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ althalkasıdır, ancak $r = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ ve $a = 6 \in 3\mathbb{Z}$ için $r \cdot a = a \cdot r = \frac{6}{5} \notin 3\mathbb{Z}$ olduğundan, $3\mathbb{Z} \not\leq \mathbb{Q}$ ideali değildir.

R birimli ve değişmeli bir halka ve $a \in R$ olmak üzere,

$$\langle a \rangle = \{a \cdot r : r \in R\}$$

kümesi R halkasının bir idealidir.

Tanım 2.21 [43] R ve R' iki halka olsun. $\varphi: R \rightarrow R'$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir **halka homomorfizması** olarak adlandırılır. Her $a, b \in R$ için

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Ayrıca $0'$, R' halkasının toplamsal sıfırı olmak üzere, $\varphi: R \rightarrow R'$ halka homomorfizmasının,

$$\varphi^{-1}[0'] = \{r \in R : \varphi(r) = 0'\}$$

ile tanımlanan althalkasına **çekirdek (kernel)** denir ve $Ker(\varphi)$ ile gösterilir.

Birebir halka homomorfizmasına bir **monomorfizma**, örten halka homomorfizmasına bir **epimorfizma** adı verilir. Birebir ve örten halka homomorfizmasına bir **izomorfizma** ve bu durumda R ve R' halkalarına **izomorfik** denir.

Örnek 2.22 [43] $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ dönüşümünde $\varphi(a)$ değeri, a tamsayısının n ile bölümünden kalan olarak tanımlanmış olsun. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ olduğu açıktır. Çarpma işleminin de aynı özelliği sağladığını göstermek için, bölme algoritmasından,

$$a = q_1n + r_1 \text{ ve } b = q_2n + r_2$$

yazılırsa,

$$ab = n(q_1q_2n + r_1q_2 + r_2q_1) + r_1r_2$$

olduğundan, r_1r_2 sayısı n ile bölündüğünde kalan $\varphi(ab)$ olur. Diğer yandan, $\varphi(a) = r_1$ ve $\varphi(b) = r_2$ olup, $\varphi(a)\varphi(b) = r_1r_2$ ve homomorfizmanın çarpma şartı da sağlanmış olur. Ayrıca, $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ homomorfizmasının çekirdeği, yani $\text{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$ dir.

Tanım 2.23 [49] X boştan farklı bir küme ve $\varphi, X \times X$ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer her $x \in \text{dom}(\varphi)$ için, $|x\varphi| = 1$ oluyorsa, yani tanım kümesindeki her eleman bir tek elemana eşleniyorsa, φ bir *kısmi dönüşüm*dür denir. X kümesi üzerinde kısmi dönüşümlerin kümesi P_X ile gösterilir.

Eğer kısmi φ dönüşümü için $\text{dom}\varphi = X$ ise, φ bir *tam dönüşüm*dür denir. X kümesi üzerinde tam dönüşümlerin kümesi T_X ile gösterilir.

$\alpha, \beta \in B_X$ iki bağıntı olmak üzere, bunların bileşkesi $\alpha \circ \beta$,

$$(\alpha \circ \beta) = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z \in X)(x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda tanımlı bileşke işlemi ile $(B_X, \circ)$, $(T_X, \circ)$ birer yarıgruptur.

P_X kısmi dönüşümler kümesinin yarıgrup olabilmesi iki şarta bağlıdır. $\alpha, \beta \in P_X$ için

$$\text{dom}(\alpha \circ \beta) = (\alpha^{-1})[\text{im}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta)] \text{ ve } \text{im}(\alpha \circ \beta) = \beta[\text{im}(\alpha) \cap \text{dom}(\beta)].$$

Ancak bu şekilde, $(P_X, \circ)$ bir yarıgrup olur.

Tanım 2.24 [44] A ve B iki küme olsun.

(1) $\mu: A \times B \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna bir *bulanık bağıntı* denir.

- (2) Her $a \in A$ için $\mu(a, b) > 0$ olacak şekilde $b \in B$ mevcutsa, μ bulanık bağıntısına ***tam bağıntı*** denir.
- (3) Eğer her $a \in A, b, b' \in B$ için $\mu(a, b) = \mu(a, b')$ olması $b = b'$ olmasını gerektiriyorsa, μ bulanık bağıntısına ***bulanık kısmi fonksiyon*** denir.
- (4) Tam kısmi bulanık bağıntıya bir ***bulanık fonksiyon*** denir.

Tanım 2.25 [45] X ve Y boştan farklı kümeler olsun. α_1 ve α_2 , X kümesi üzerinde iki bulanık bağıntı olsun. Bu durumda, her $x, y, z \in X$ için ***iki bulanık bağıntının bileşkesi*** $\alpha_1 \circ \alpha_2$ ile gösterilir ve

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)(x, y) = V(\alpha_1(x, z) \wedge \alpha_2(z, y))$$

şeklinde tanımlanır. Burada sırasıyla V bulanık maksimum ve $\wedge$ bulanık minimum fonksiyonlarıdır.

X kümesi üzerindeki tüm bulanık bağıntıların kümesi FB_X , yukarıda tanımlı bileşke işlemi ile bir yarıgruptur. Dahası, etkisiz bağıntı Id_X , her $x = y$ için $Id_X(x, y) = 1$ ve $x \neq y$ için $Id_X(x, y) = 0$ olarak alınırsa FB_X , birimli bir monoid olur.

Lemma 2.26 [44] S bir yarıgrup ve f bir bulanık altküme olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanır:

- (1) f , S 'nin bir ***bulanık altyarıgrubudur*** ancak ve ancak $f \circ f \subseteq f$.
- (2) f , S 'nin bir ***bulanık sol ideal***dir ancak ve ancak $S \circ f \subseteq f$.
- (3) f , S 'nin bir ***bulanık sağ ideal***dir ancak ve ancak $f \circ S \subseteq f$.
- (4) f , S 'nin bir ***bulanık*** (çift taraflı) ***idealidir*** ancak ve ancak $S \circ f \subseteq f$ ve $f \circ S \subseteq f$.

Tanım 2.27 [46] Q boştan farklı bir sonlu küme, S sonlu bir yarıgrup ve $\delta: Q \times S \rightarrow Q$ aşağıdaki şartları sağlayan bir kısmi fonksiyon olsun: Her $q \in Q$ ve $s, s' \in S$ için,

- (1) $\delta(\delta(q, s)s') = \delta(q, ss')$ ve
- (2) $\delta(q, s) = \delta(q, s')$ olduğunda $s = s'$

şartları sağlanıyorsa, (Q, S) ikilisine bir ***dönüşüm yarıgrubu*** denir.

Tanım 2.28 [47] Q boştan farklı bir sonlu küme, S sonlu bir yarıgrup ve ρ , $Q \times S \times Q$ kartezyen çarpımının bir bulanık altkümeleri olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan (Q, S, ρ) üçlüsüne bir **bulanık dönüşüm yarıgrubu (fts)** denir:

(1) Her $u, v \in S$ ve $p, q \in Q$ için

$$\rho(q, uv, p) = \bigvee \{\rho(q, u, r) \wedge \rho(r, v, p) \mid r \in Q\}.$$

(2) S birimli bir yarıgrup ve birimi e ise, bu durumda her $q, p \in Q$ için $q = p$ ise

$$\rho(q, e, p) = 1 \text{ ve } q \neq p \text{ ise } \rho(q, e, p) = 0 \text{ olur.}$$

Bunlarla birlikte, aşağıdaki şart da sağlanırsa, (Q, S, ρ) **sadık**tır denir.

(3) $u, v \in S$ olsun. Eğer, her $q, p \in Q$ için $\rho(q, u, p) = \rho(q, v, p)$ ise $u = v$ dir.

Tanım 2.29 [17] R kümesi üzerinde tüm bulanık altkümelerin kümesi $F(R)$ ile gösterilsin. $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $A \in F(R)$ olsun. $\wedge$ (ve – minimum) bulanık kesişim ve $\vee$ (veya – maksimum) bulanık birleşim fonksiyonları olmak üzere, her $x, y \in R$ için

$$1. A(x - y) \geq A(x) \wedge A(y)$$

$$2. A(xy) \geq A(x) \wedge A(y)$$

şartlarını sağlayan A kümesine R halkasının bir **bulanık althalkası** denir. Eğer, her $a \in A$ için A kümesi R halkasının bir althalkası oluyorsa, bu durumda A bir **bulanık halka** adını alır.

Tanım 2.30 [17] A kümesi R halkasının bir bulanık althalkası olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$A(xy) \geq A(x) \vee A(y)$$

oluyorsa, A kümesi R halkasının bir **bulanık idealidir** denir.

R halkası üzerindeki işlemler, t-norm ve s-normlar kullanılarak $F(R)$ bulanık kümelerine şu şekilde genişletilebilir:

Her $z \in R$ ve $A, B \in F(R)$ için

$$(A + B)(z) = \diamond_{x+y=z} (A(x) * B(y))$$

$$(A - B)(z) = \diamond_{x-y=z} (A(x) * B(y))$$

$$(A.B)(z) = \diamond_{x,y=z}(A(x) * B(y)).$$

Tanım 2.31 [48] X bir küme ve her $x, y, z \in X$ için ρ , aşağıdaki üç şartı sağlayan tek-değerli, negatif olmayan, reel değerli ve $\rho(x, y)$ ile gösterilen bir fonksiyon olsun:

$$M_1: \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$M_2: (\text{simetri}) \rho(x, y) = \rho(y, x) \text{ ve}$$

$$M_3: (\text{üçgen eşitsizliği}) \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Bu durumda, (X, ρ) ikilisine bir **metrik uzay** denir.

Örnek 2.32 X bir küme ve her $x, y \in X$ olsun. X üzerinde

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \neq y \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } x = y \text{ ise} \end{cases}$$

(ayrık) metriğini tanımlarsak, (X, ρ) bir metrik uzay olur.

Eğer metrik, bilinen uzaklık fonksiyonu (mutlak değer)

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

olarak alınırsa, yine (X, ρ) bir metrik uzaydır.

Tanım 2.33 [48] L bir lineer uzay olmak üzere, L üzerinde bir **norm**, reel-değerli ve $\| \cdot \|$ ile gösterilen bir sonlu fonksiyoneldir ve her $x, y \in L$ ve her α için aşağıdaki şartları sağlar:

$$N_1: \text{Her } x \neq 0 \text{ için } \|x\| > 0; (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0),$$

$$N_2: \|\alpha \cdot x\| = \alpha \cdot \|x\|, \text{ ve dolayısıyla } \|x\| = \|-x\|,$$

$$N_3: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği).}$$

Üzerinde bir norm tanımlanmış L uzayına bir **normlu lineer uzay** denir.

Örnek 2.34 n –boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

normu tanımlanırsa, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olur.

Örnek 2.35 $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan $f \in C[a, b]$ fonksiyonları üzerinde bir $\|f\|$ normu

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

olarak tanımlanabilir. Bu durumda, $(C[a, b], \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Tanım 2.36 [26] $R, 1_R$ birimine sahip bir halka olsun. Eğer her $x \in R$ elemanını $\|x\|$ sayısına eşleyen bir norm aşağıdaki koşulları sağlarsa R bir **normlu halka** olarak adlandırılır:

$$(NR_1): \|x\| \geq 0 \text{ ve } (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0).$$

$$(NR_2): \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

$$(NR_3): \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

$$(NR_4): \|1_R\| = \|-1_R\| = 1 \text{ ve dolayısıyla } \|x\| = \|-x\|.$$

Bir bakıma, normlu halkalarda tanımlanan norm işlemi tamlik bölgelerinde tanımlanan mutlak değer bir genelleştirilmesidir. Burada, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ kuralının yerini $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ almıştır.

Örnek 2.37 Hilbert uzayında sınırlı operatörler halkasının bir normlu halka olduğu Murray ve Van Neumann [21] tarafından gösterilmiştir.

Örnek 2.38 [26] D , katsayıları kompleks sayılar olan, tek değişkenli ve dereceleri bir n tamsayısından küçük ya da eşit olan polinomlar uzayında türev operatörü olsun. Bu operatörle oluşturulmuş, birim elemanlı halkayı $I^{(n)}$ ile gösterelim. $D^{n+1} = 0$ olduğundan, söz konusu halkanın elemanları katsayıları a_k olan $\sum_{k=0}^n a_k D^k$ polinomlarının toplamıdır ve D^0 birim operatördür. Şimdi,

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k D^k \right\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$$

olarak tanımladığımızda $I^{(n)}$, operatörlerin çarpımı ile birimi $e = D^0$ olan bir normlu halkadır.

Örnek 2.39 [26] $[0,1]$ kapalı aralığında mutlak integrallenebilir, ölçülebilir kompleks fonksiyonların uzayı $L^1(0,1)$ ile gösterilsin. Bu uzayda norm

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$$

ile tanımlanmış olsun. $x(t), y(t) \in L^1(0,1)$ için, bu iki fonksiyonun *konvolüsyonu* $*_{\kappa}$

$$(x *_{\kappa} y)(t) = \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau \quad (0 \leq t \leq 1)$$

hemen hemen her t için mevcuttur, $L^1(0,1)$ 'e aittir ve $*_{\kappa}$ konvolüsyon işlemi birleşmelidir. $\tau \rightarrow t - \tau$ dönüşümü yapılabileceğinden, bu işlem aynı zamanda değişmelidir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|x *_{\kappa} y\| &= \int_0^1 \left| \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \int_0^t |x(t-\tau)| |y(\tau)| d\tau \right| dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_t^1 |x(t-\tau)| dt \right) |y(\tau)| d\tau \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-\tau} |x(t)| dt \right) |y(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^1 |x(t)| dt \cdot \int_0^1 |y(\tau)| d\tau \\ &= \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

(NR_3) şartı da sağlandığından, $L^1(0,1)$, konvolüsyon işlemi ile bir normlu halkadır. Bu normlu halkanın birimli olmadığı Örnek 2.16'dakine benzer şekilde kolayca gösterilebilir.

BÖLÜM III

BAZI BULANIK DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI

Klasik yarıgruplar söz konusu olduğunda teoremin önde gelen bilim insanı Howie [49]'den söz etmeden geçemeyiz. Howie yarıgrupları takdim etti ve kendisinden sonra gelen araştırmacılara ilham kaynağı oldu. Clifford ve Preston [50] da klasik yarıgrupların cebirsel teorisini detaylı inceleyerek teoriye büyük katkılar yaptı.

Çalışmamızın bu bölümünü bulanık dönüşüm yarıgruplarına ayırdık. Bu bölümde ele alınan tanımlar, teorem ve ispatlar 18-19 Temmuz 2021 tarihlerinde Adana'da düzenlenen *International ICONTECH Symposium-4 on Innovative Surveys in Positive Sciences* adlı uluslararası sempozyumda İngilizce olarak sözlü sunumunu yaptığımız ve Full Texts kitabında tam metni yer alan çalışmayı [60] içermektedir.

Öncelikle, bulanık kümeler teorisi ve yarıgrup teorisi arasında tanımlar bakımından bir karmaşaya yol açmamak için, bu bölümde *fonksiyon* yerine *dönüşüm* kelimesini kullandık. Örneğin, Tanım 2.24 (3) içinde yer alan “kısmi bulanık fonksiyon” yerine “bulanık kısmi dönüşüm” diyeceğiz. Aynı bağlamda, bu bölümün kalanında, “tam kısmi bulanık fonksiyon” yerine “bulanık tam kısmi dönüşüm” ifadesi kullanılacaktır.

Aksi belirtilmedikçe, Q kümesi boştan farklı ve n -elemanlı $Q = Q_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olarak kabul edilecektir. Bununla birlikte, Q kümesi üzerinde tanımlı

B_Q ile tüm *bağıntıların* ve FB_Q ile tüm *bulanık bağıntıların* kümesini,

P_Q ile tüm *kısmi dönüşümlerin* ve FP_Q ile tüm *bulanık kısmi dönüşümlerin* kümesini

T_Q ile tüm *tam dönüşümlerin* ve FT_Q ile tüm *bulanık tam dönüşümlerin* kümesini,

S_Q ile tüm *permütasyonların* ve FS_Q ile tüm *bulanık permütasyonların* kümesini

I_Q ile tüm *bire-bir kısmi dönüşümlerin* ve FI_Q ile tüm *bulanık bire-bir kısmi dönüşümlerin* kümesini göstereceğiz.

Dönüşümlerin bileşkesi ($\circ$) işlemi birleşmeli olduğundan yukarıda yer alan klasik dönüşümlere ait kümelerin tümü birer (klasik) yarıgruptur.

3.1 Bulanık Dönüşümlerde Bileşke

Notasyon 3.1.1 Klasik cebirde, $\alpha: Q_n \rightarrow Q_n$ dönüşümleri genellikle

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu çalışmanın kalanında biz, her $i, x_i \in Q_n$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \rho_\alpha(1, x_1) & \rho_\alpha(2, x_2) & \dots & \rho_\alpha(n, x_n) \end{pmatrix}$$

gösterimini öneriyoruz ve kullanacağız. Burada, Tanım 2.28'deki ifadesiyle her $i, x_i \in Q_n$ için $\rho_\alpha(i, x_i) = \rho(i, \alpha, x_i)$ dir. $\rho_\alpha(i, x_i) \in [0,1]$ ile i ve x_i elemanları arasındaki α bağıntısının gücü, diğer bir deyişle, *ilişkinin derecesi* anlaşılmaktadır.

Örnek 3.1.2 Çoklu-değerli durumu somutlaştırmak için, $Q = Q_3 = \{1,2,3\}$ ve yarıgrup olarak Q_3 üzerindeki tüm bağıntılar yarıgrubu $S = (B_Q, \circ)$ alalım.

$\alpha = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} \in B_Q$ ve

$\beta = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} \in B_Q$ olsun.

İlgili bulanık dönüşüm yarıgrubu (Q, S, ρ) için $\rho_\alpha = \{\rho(q, \alpha, p) : \forall (q, p) \in \alpha\}$ ve $\rho_\beta = \{\rho(q, \beta, p) : \forall (q, p) \in \beta\}$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\rho_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,3\} & \{1,2,3\} & \{1,2,3\} \\ \{1,0.8\} & \{0.4,1,0.4\} & \{0.9,0.5,1\} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\rho_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2,3\} & \{2,3\} & \{1,2,3\} \\ \{1,0.6,0.5\} & \{1,0.5\} & \{0.5,1,1\} \end{pmatrix}.$$

Burada örneğin, $\rho_\alpha(1,3) = \rho(1,\alpha,3) = 0.8$ ve $\rho(3,\alpha,1) = 0.9$ dur. Diğer yandan, $\rho_\beta(1,2) = \rho(1,\beta,2) = 0.6$ olduğu kolayca görülmektedir. Ayrıca, her $q \in Q$ için $\rho(q,\alpha \circ \beta,q) = 1$ olduğu açıktır.

Şimdi, $q = 1$ ve $p = 2$ olsun.

$r = 1 \Rightarrow \rho(1,\alpha,1) = 1$ ve $\rho(1,\beta,2) = 0.6$ olup, $(\rho(1,\alpha,1) \wedge \rho(1,\beta,2)) = 0.6$,

$r = 2 \Rightarrow \rho(1,\alpha,2) = 0$ ve $\rho(2,\beta,2) = 1$ olup, $(\rho(1,\alpha,2) \wedge \rho(2,\beta,2)) = 0$ ve

$r = 3 \Rightarrow \rho(1,\alpha,3) = 0.8$ ve $\rho(3,\beta,2) = 1$ olup, $(\rho(1,\alpha,3) \wedge \rho(3,\beta,2)) = 0.8$ dir.

Sonuç olarak, bağıntıların bileşkesi tanımı kullanılarak,

$\rho(1,\alpha \circ \beta,2) = \bigvee \{ \rho(1,\alpha,r) \wedge \rho(r,\beta,2) \mid r \in Q \} = \bigvee (0.6,0,0.8) = 0.8$ elde edilir.

Tüm hesaplamalar benzer şekilde tamamlandığında, (Q, B_Q, ρ) bulanık dönüşümler yarıgrubu için

$$\rho(q,\alpha \circ \beta,p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \{1,2,3\} & \{1,2,3\} & \{1,2,3\} \\ \{1,0.8,0.8\} & \{0.4,1,0.5\} & \{0.9,1,1\} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilmiş olur.

Tanım 3.1.3 Q boştan farklı sonlu bir küme, S bir sonlu yarıgrup ve $\rho, Q \times S \times Q$ için bir bulanık altküme olsun. $q, p \in Q$ ve $u, v \in S$ olmak üzere,

$$dom(\rho) = \{q: \exists p \in Q, \rho(q, uv, p) > 0\}$$

ve

$$im(\rho) = \{q: \exists p \in Q, \rho(p, uv, q) > 0\}$$

kümelerine sırasıyla, ρ 'nın **tanım** ve **görüntü** kümeleri denir. Ayrıca, her $q \in Q$ için,

$$\rho_q = \{p \in Q: \rho(q, uv, p) > 0\}$$

q elemanının p altındaki tüm görüntülerinin kümesi olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.4 $Q = \{1,2, \dots, n\}$ boştan farklı sonlu kümeler, I birim dönüşüm, P_Q (Tanım 2.23'teki şartları sağlayan) kısmi dönüşümler yarıgrubu ve $\rho, Q \times P_Q \times Q$ sıralı üçlünün

$$\rho(q, I, p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

şartını sağlayan bir bulanık altkümesi olmak üzere, (Q, P_Q, ρ) bir bulanık dönüşüm yarıgrubudur.

İspat Her $u, v \in P_Q$ ve $p, q \in Q$ için

$$\rho(q, uv, p) = \bigvee \{ \rho(q, u, r) \wedge \rho(r, v, p) \mid r \in Q \}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Her $p, q \in Q$ için $\rho(q, uv, p) = 0$ ise sonuç açıktır.

$\rho(q, uv, p) \neq 0$ kabul edelim. Bu durumda, $\rho(q, u, r) > 0$ ve $\rho(r, v, p) > 0$ dır.

$\rho(q, u, r) = a$ ve $\rho(r, v, p) = b$ alınırsa, $\rho(q, uv, p) = a \wedge b$ olarak elde edilir.

Diğer yandan, $u, v \in P_Q$ olduğundan, $\rho(q, u, r) > 0$ olacak şekilde tek bir $r \in Q$ ve $\rho(r, v, p) > 0$ olacak şekilde tek bir $p \in Q$ vardır. $k_1, k_2, \dots, k_n \in Q$ olmak üzere,

$$(u \circ v)(q, p) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & \dots & n \\ k_1 & \dots & p & \dots & k_n \\ \rho(1, u \circ v, k_1) & \dots & \rho(q, u \circ v, p) & \dots & \rho(n, u \circ v, k_n) \end{pmatrix}$$

olacağından, $\rho(q, u \circ v, p) = \bigvee (a \wedge b) = a \wedge b$ olur.

Ayrıca, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ için Tanım 2.28 (2) sağlanmaktadır.

Sonuç olarak, (Q, P_Q, ρ) bir bulanık dönüşüm yarıgrubudur. ■

Tanım 3.1.5 (Q, P_Q, ρ) yarıgrubuna Q kümesi üzerinde bir **bulanık kısmi dönüşümler yarıgrubu (fpts)** denir.

3.2 Bulanık Altyarıgruplar

Tanım 3.2.1 Q boştan farklı sonlu bir küme, S bir sonlu yarıgrup ve (Q, S, ρ_1) ve (Q, S, ρ_2) iki bulanık dönüşüm yarıgrubu olsun. Bu şartları sağlayan ρ_1 ve ρ_2 bulanık altkümeleri üzerinde dönüşümlerin bileşkesi işlemi, her $\alpha, \beta \in S$ ve $x, y \in Q$ için

$$(\rho_1 \circ \rho_2)(x, y) = \bigvee (\rho_1(x, \alpha\beta, z) \wedge \rho_2(z, \alpha\beta, y) \mid z \in Q)$$

ile tanımlanır. Burada $\bigvee$ bulanık maksimum ve $\wedge$ bulanık minimum fonksiyonlarıdır.

Teorem 3.2.2 (Q, P_Q, ρ) bulanık kısmi dönüşümler yarıgrubu olsun. Tüm ρ bulanık altkümelerinin kümesi FP_Q ile gösterilmek üzere, FP_Q, P_Q kısmi bağıntılar yarıgrubunun bir bulanık altyarıgrubudur.

İspat $\rho_1, \rho_2 \in FP_Q$ alalım. $\alpha, \beta \in P_Q$ olsun. $(\rho_1 \circ \rho_2) \in FP_Q$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $(\rho_1 \circ \rho_2) = \emptyset$ ise, bu durumda $(\rho_1 \circ \rho_2)$ boş bağıntı olup $(\rho_1 \circ \rho_2) \in FP_Q$ dur.

$(\rho_1 \circ \rho_2) \neq \emptyset$ olsun. $x \in \text{dom}(\rho_1 \circ \rho_2)$ alalım. Şu halde, $(x, y) \in (\rho_1 \circ \rho_2)$ olacak şekilde $y \in Q$ mevcuttur. $(x, y) \in (\rho_1 \circ \rho_2)$ olduğundan,

$$\bigvee (\rho_1(x, \alpha \circ \beta, z) \wedge \rho_2(z, \alpha \circ \beta, y) \mid z \in Q) > 0$$

olacak şekilde $z \in Q$ vardır. Dolayısıyla,

$$\rho_1(x, \alpha \circ \beta, z) > 0 \text{ ve } \rho_2(z, \alpha \circ \beta, y) > 0.$$

Eğer $\rho_1(x, \alpha \circ \beta, u) > 0$ olacak şekilde bir $u \in Q$ mevcutsa, $\rho_1 \in FP_Q$ ve $|x_\alpha| = 1$ olduğundan $u = z$ olmalıdır. Benzer şekilde, $\rho_2(z, \alpha \circ \beta, y) > 0$ olacak şekilde bir $v \in Q$ varsa, $v = y$ eşitliği doğru olmalıdır. Şu halde, $(\rho_1 \circ \rho_2)_{(x)} = \{y\}$ ve $|(\rho_1 \circ \rho_2)_{(x)}| = 1$ olup $(\rho_1 \circ \rho_2) \in FP_Q$ olduğu gösterilmiş olur. Sonuç olarak, $(FP_Q)^2 \subseteq FP_Q$ olduğundan, Lemma 2.26(1) ile FP_Q, P_Q 'nin bir bulanık altyarıgrubudur. ■

Teorem 3.2.3 $Q = \{1, 2, \dots, n\}$ boştan farklı sonlu bir küme ve $\rho \in FT_Q$ bir bulanık tam dönüşüm olsun. Diğer bir deyişle, $\text{dom}(\rho) = Q$ olsun. Bu durumda, bulanık tam dönüşümler kümesi FT_Q, T_Q tam dönüşümleri yarıgrubunun altyarıgrubudur.

İspat $\rho_1, \rho_2 \in FT_Q$ ve $\alpha, \beta \in T_Q$ olsun. $(\rho_1 \circ \rho_2) \in FT_Q$ olduğunu göstermeliyiz.

$\rho_1, \rho_2 \in FT_Q$ (ve $T_Q \subset P_Q \Rightarrow \rho_1, \rho_2 \in FP_Q$) olduğundan, $\text{dom}\rho_1 = Q, \text{dom}\rho_2 = Q$ ve diğer yandan $|\rho_{1(x)}| = |\rho_{2(x)}| = 1$ olur. Şimdi, keyfi $x \in Q$ alalım.

$\text{dom}\rho_1 = Q$ olduğundan $\rho_1(x, \alpha \circ \beta, y) > 0$ olacak şekilde $y \in Q$ vardır. Benzer şekilde, $\text{dom}\rho_2 = Q$ olduğundan $\rho_2(y, \alpha \circ \beta, z) > 0$ olacak şekilde $z \in Q$ vardır.

$(\rho_1 \circ \rho_2)(x, z) = \bigvee (\rho_1(x, \alpha \circ \beta, y) \wedge \rho_2(y, \alpha \circ \beta, z))$ birleşimi ile $(\rho_1 \circ \rho_2)(x, z) > 0$ elde edilir ki, $x \in \text{dom}(\rho_1 \circ \rho_2)$ ve $x \in Q$ keyfi olduğundan $\text{dom}(\rho_1 \circ \rho_2) = Q$

olduğu gösterilmiş olur. Sonuç olarak, $(\rho_1 \circ \rho_2) \in FT_Q$ ve FT_Q, T_Q 'nin bir bulanık altyarıgrubudur. ■

Tanım 3.2.4 (Q, T_Q, ρ) üçlüsünün bir bulanık dönüşüm yarıgrubu olduğu Teorem 3.15'e benzer şekilde gösterilebilir. (Q, T_Q, ρ) bulanık dönüşüm yarıgrubuna **bulanık tam dönüşümler yarıgrubu (ffts)** denir.

Örnek 3.2.5 Q_4 kümesi üzerinde tanımlı bir bulanık kısmi dönüşüm

$$\rho_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & - & 2 & 4 \\ 0.8 & 0 & 0.1 & 1 \end{pmatrix} \in FP_{Q_4},$$

Q_5 kümesi üzerinde tanımlı bulanık tam ve bulanık kısmi dönüşümler

$$\rho_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0.3 & 1 & 0.7 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \in FT_{Q_5} \text{ ve}$$

$$\rho_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & - & 3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \in FP_{Q_5}$$

şeklinde örneklendirilebilir.

Tanım 3.2.6 $\alpha \in T_Q$, Q boştan farklı sonlu kümesi üzerinde tanımlı bir tam dönüşüm ve $\rho_\alpha \in FT_Q$, α üzerinde tanımlı bulanık tam dönüşüm olsun. Eğer,

- (i) $im(\alpha) = Q$ ise ρ_α dönüşümüne bir **bulanık örten dönüşüm**,
- (ii) $x, y \in Q$ için $\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow x = y$ ise ρ_α dönüşümüne bir **bulanık bire-bir dönüşüm** denir.
- (iii) Hem örten, hem de bire-bir olan ρ_α dönüşümüne bir **bulanık permütasyon** denir.

Örnek 3.2.5'deki ρ_{α_2} bulanık permütasyona bir örnektir.

Lemma 3.2.7 Q kümesi üzerindeki tüm bulanık permütasyonların kümesini FS_Q ile gösterelim. Açıkça, FS_Q permütasyonlar yarıgrubu S_Q 'nin bulanık altyarıgrubudur.

Tanım 3.2.8 (Q, S_Q, ρ) bulanık dönüşüm yarıgrubuna **bulanık permütasyon yarıgrubu (fps)** adı verilir.

Lemma 3.2.9 $Q_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi üzerinde, $\alpha(n)$ dönüşümlerinin $[0, 1]$ kapalı aralığında alabileceği sonsuz sayıdaki değeri göz ardı edersek,

$$\text{bağıntıların sayısı } |Q_n \times Q_n| = n^2,$$

$$\text{bulanık dönüşümlerin sayısı } |FB_{Q_n}| = 2^{(n^2)},$$

$$\text{bulanık permütasyonların sayısı } |FS_{Q_n}| = n! \text{ ve}$$

$$\text{bulanık tam dönüşümlerin sayısı } |FT_{Q_n}| = n^n \text{ tanedir.}$$

$\alpha \in FT_{Q_n}$ için,

$$\alpha = \left(\begin{array}{c} 1 \\ x_1 \in \left\{ \underbrace{1, 2, \dots, n}_{n\text{-alternatif}} \right\} \\ \rho(1, \alpha, x_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ x_2 \in \left\{ \underbrace{1, 2, \dots, n}_{n\text{-alternatif}} \right\} \\ \rho(2, \alpha, x_2) \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} n \\ x_n \in \left\{ \underbrace{1, 2, \dots, n}_{n\text{-alternatif}} \right\} \\ \rho(n, \alpha, x_n) \end{array} \right) \quad \text{ve}$$

dolayısıyla $|FT_{Q_n}| = n^n$ olduğu kolayca görülebilir.

3.3 Bulanık Bire-Bir Ve Bulanık Singüler Dönüşümler

Tanım 3.3.1 Q boştan farklı sonlu bir küme ve $\rho \in FP_Q$ bir bulanık kısmi dönüşüm olsun. Eğer her $y \in \text{im}(\rho)$ için $|\rho^{-1}(y)| = 1$ ise, bu durumda ρ 'ya bir **bulanık bire-bir kısmi dönüşüm** denir. Yani, görüntü kümesindeki her eleman tanım kümesinden yalnız bir elemanla bağlı ise, ρ bir bulanık bire-bir kısmi dönüşümdür.

Q üzerindeki bulanık bire-bir kısmi dönüşümler kümesini FI_Q ile gösterelim. $FI_Q \leq P_Q$ bulanık altyarıgrubu olduğu açıktır. (Q, I_Q, ρ) bir bulanık dönüşüm yarıgrubu olup, Q üzerinde **bulanık bire-bir kısmi dönüşümler yarıgrubu (fopts)** olarak adlandırılır.

Örnek 3.3.2 $Q = Q_4$ üzerinde $\alpha \in P_Q$ dönüşümü ve ρ_α bulanık altkümesi

$$\rho_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & 1 & 4 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. Tanım 2.25'e göre, ρ_α tam dönüşüm olmayan bir bulanık kısmi dönüşümdür. Bu basit gözlem, FS_Q bulanık permütasyonlar kümesinin hem T_Q ve hem de I_Q bulanık yarıgruplarının altyarı grubu olduğunu görmek için yeterlidir.

Lemma 3.3.3 Daha önce belirttiğimiz gibi, $(FS_Q \circ FS_Q) \subseteq FS_Q$ olduğundan, $FS_Q \leq T_Q$ bulanık altyarı grubudur. Ancak, $FS_Q \not\leq T_Q$ bulanık ideali değildir.

İspat Lemma 2.26'ya göre, $(FS_Q \circ FT_Q) \subseteq FS_Q$ eşitliğinin doğru olmadığını göstermek yeterlidir.

$Q_3 = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde $\alpha \in S_{Q_3}$ ve $\beta \in T_{Q_3}$ için

$$\rho_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0.3 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \in FS_{Q_3} \text{ ve } \rho_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0.1 & 1 & 0.6 \end{pmatrix} \in FT_{Q_3}$$

olsun. Şimdi,

$$(\rho_\alpha \circ \rho_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0.3 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \notin FS_{Q_3}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Sonuç olarak, bulanık permütasyonlar yarı grubu, bulanık tam dönüşümler yarı grubunun bir bulanık ideali değildir. ■

Diğer yandan, bulanık singüler dönüşümlerin kümesi $FSing_Q$, T_Q 'nin bir bulanık idealidir. Bu sonucu gösterebilmek için bir yardımcı lemmayı ifade ve ispat etmeliyiz.

Tanım 3.3.4 (Q, T_Q, ρ) ve (Q, S_Q, ρ) bulanık dönüşüm yarı gruplarını alalım. $FT_Q - FS_Q$ kümesi, başka bir deyişle, Q kümesi üzerinde bulanık permütasyon olmayan bulanık tam dönüşümlerin kümesi ***FSing_Q*** ile gösterilir ve elemanları ***bulanık singüler dönüşümler*** olarak adlandırılır.

Lemma 3.3.5 Q boştan farklı bir sonlu küme ve $\alpha_1, \alpha_2 \in T_Q$ ve ilgili $\rho_1, \rho_2 \in FT_Q$ olsun. Bu durumda, $im(\rho_1 \circ \rho_2) \subseteq im(\rho_2)$ dir.

İspat Keyfi $y \in im(\rho_1 \circ \rho_2)$ alalım. O halde, $(x, y) \in (\rho_1 \circ \rho_2)$ olacak şekilde $x \in Q$ mevcuttur. $(x, y) \in (\rho_1 \circ \rho_2)$ olabilmesi için, Tanım 3.2.1 gereği, $(x, z) \in \rho_1$ ve $(z, y) \in \rho_2$ olacak şekilde $z \in Q$ vardır. Dolayısıyla, $y \in im(\rho_2)$ dir. y keyfi olduğundan, $im(\rho_1 \circ \rho_2) \subseteq im(\rho_2)$ olduğu gösterilmiş olur. ■

Teorem 3.3.6 Q boştan farklı bir sonlu küme olmak üzere $FSing_Q \trianglelefteq T_Q$ idealidir.

İspat Öncelikle, $(FT_Q \circ FSing_Q) \subseteq FSing_Q$ olduğunu gösterelim.

$\alpha_1 \in T_Q \Rightarrow \rho_1 \in FT_Q$ ve $\alpha_2 \in Sing_Q \Rightarrow \rho_2 \in FSing_Q$ olsun.

Lemma 3.3.6 ile $im(\rho_1 \circ \rho_2) \subseteq im(\rho_2)$ olduğundan, $(\rho_1 \circ \rho_2) \notin FS_Q$ açıktır. Tanımı gereği, $(\rho_1 \circ \rho_2) \in (FT_Q - FS_Q) = FSing_Q$. Sonuç olarak, istendiği gibi, $(FT_Q \circ FSing_Q) \subseteq FSing_Q$ gösterilmiş olur.

Tersine, $\rho_1 \in FSing_Q$ ve $\rho_2 \in FT_Q$ olsun. $\rho_1 \in FSing_Q$ olduğundan, $im(\rho_1) \neq Q$ ve böylece en azından iki birbirinden farklı $x, y \in dom(\rho_1)$, $z \notin \{x, y\}$ için $\rho_1(x, y) > 0$ ve $\rho_1(x, z) > 0$ olacak şekilde $z \in Q$ mevcuttur. Şimdi, $\rho_2(z) = t$, yani z elemanının ρ_2 dönüşümü altındaki görüntüsü t olsun.

Şu halde, $(\rho_1 \circ \rho_2)(x, t) > 0$ ve $(\rho_1 \circ \rho_2)(y, t) > 0$ ve böylece $im(\rho_1 \circ \rho_2) \neq Q$ dur. Buradan, $(\rho_1 \circ \rho_2) \in FT_Q$ fakat $(\rho_1 \circ \rho_2) \notin FS_Q$ olup $(\rho_1 \circ \rho_2) \in FSing_Q$ dur. α_1 ve α_2 (ve haliyle ρ_1 ve ρ_2) keyfi olduğundan $(FSing_Q \circ FT_Q) \subseteq FSing_Q$ gösterilmiş olur.

Her iki sonuçtan, $FSing_Q \triangleleft FT_Q$.

BÖLÜM IV

BULANIK NORMLU HALKALAR

Bu bölüm, tezimizin ana konu başlığını içermektedir. Dördüncü bölümde yer alan tanım, teorem ve ispatlar 2018 yılında *Symmetry* dergisinde *Fuzzy Normed Rings* [51] adıyla araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır. Bu bölüm, bulanık normlu althalkaların tanımlanması ve örneklendirilmesiyle başlamakta ve sürekli t-norm ve s-normlar kullanılarak, bulanık kümeler üzerinde bulanık normlu halkaların ilk kez tanımlanmasıyla devam etmektedir. Burada, normlu halkalarda bulanık ideallerle ilgili bulgularımız da geniş yer tutmaktadır. Ayrıca, normlu halkaların bulanık asal ve bulanık maksimal idealleri tanımlanmış ve bunların arasındaki cebirsel ilişkiler yardımcı lemma ve teoremler yardımıyla gösterilmiştir.

Bu bölümden itibaren, NR birimli ve değişmeli bir normlu halka olarak kabul edilecektir. Bir X kümesi üzerindeki tüm bulanık altkümelerin kümesini $F(X)$ ile göstereceğiz. Ayrıca, normlu halkalara ait althalkaları *bulanık normlu althalka* olarak adlandıracakız, ancak idealleri adlandırırken, kolaylık açısından, yalnızca *bulanık ideal* demekle yetineceğiz ve bulanık *normlu* ideal (ya da bulanık *normlu* maksimal ideal) kullanımından kaçınacağız.

4.1 Bulanık Normlu Althalkalar

Tanım 4.1.1 $*$ ve $\diamond$ sırasıyla birer sürekli t-norm ve s-norm, NR bir normlu halka ve A , bu normlu halka üzerinde bir bulanık altküme olsun. $A \in F(NR)$ bulanık kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(NR, +, \cdot)$ normlu halkasının bir **bulanık normlu althalkası** olarak adlandırılır: Her $x, y \in NR$ için

$$(i) \quad A(x - y) \geq A(x) * A(y),$$

$$(ii) \quad A(x \cdot y) \geq A(x) * A(y).$$

Not 4.1.2 NR normlu halkasının toplamsal birimi O_{NR} olsun. Her bulanık normlu althalka A ve her $x \in NR$ için

$$A(x) \leq A(O_{NR})$$

dır; çünkü 4.1.1. (i) ile,

$$A(O_{NR}) = A(x - x) \geq A(x) * A(x) = A(x) .$$

Örnek 4.1.3 $(X, +, ., \| \ \|)$ bir normlu halka ve $F(X)$, X kümesi üzerindeki tüm bulanık kümelerin kümesi olsun. $n \in \mathbb{N}$ doğal sayı ve O_{NR} , X halkasının toplamsal sıfırı olmak üzere $A_n \in F(X)$ bulanık altkümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$A_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = O_{NR} \text{ ise} \\ 0, & x \neq O_{NR} \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda, A_n bulanık altkümeleri $(X, +, ., \| \ \|)$ normlu halkalarının

$$\dots \leq A_{n+1} \leq A_n \leq \dots \leq A_1$$

şartını sağlayan bulanık normlu althalkalarıdır.

Ayrıca, A bir NR normlu halkasının bir bulanık althalkası olmak üzere,

$$A_1 = \{ x : A(x) = A(O_{NR}) \}$$

NR 'nin (klasik anlamda) bir althalkası olur.

Önerme 4.1.4 $A \in F(NR)$ 'nin NR 'nin bir bulanık normlu althalkası olması için gerek ve yeter koşul $(A - A) \subseteq A$ ve $(A.A) \subseteq A$ olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) NR bir normlu halka ve A onun bir bulanık althalkası olsun. Bu durumda, A toplama işlemi ile bir bulanık gruptur. [17, Önerme 5.7 ile] $(A - A) \subseteq A$ olur.

Şimdi, $x, y \in NR$ için $x.y = z$ şeklinde yazılabilen bir $z \in NR$ alalım.

$$\begin{aligned} (A.A)(z) &= \diamond_{z=x.y} (A(x) * A(y)) \\ &\leq \diamond_{z=x.y} (A(x.y)) = A(z) \end{aligned}$$

ve böylece $(A.A) \subseteq A$ olur.

($\Leftarrow$) Tersine, $(A - A) \subseteq A$ ve $(A.A) \subseteq A$ olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in NR$ için,

$$\begin{aligned} A(x - y) &\geq (A - A)(x - y) \\ &= \diamond_{s-t=x-y} (A(s) * A(t)) \\ &\geq A(x) * A(y). \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} A(xy) &\geq (A.A)(xy) \\ &= \diamond_{st=xy} (A(s) * A(t)) \\ &\geq A(x) * A(y). \end{aligned}$$

Sonuç olarak, A , NR 'nin bir bulanık normlu althalkasıdır. ■

Tanım 4.1.5 A , NR bulanık normlu halkasının bir bulanık altkümesi olsun. Eğer her $a \in A$ için A , NR 'nin bir bulanık normlu althalkası oluyorsa, A 'ya bir **bulanık normlu halka** denir.

Önerme 4.1.6 NR ve NR' iki normlu halka, A , NR bulanık normlu halkasının bir bulanık althalkası ve $f: NR \rightarrow NR'$ bir halka epimorfizması olsun. Bu durumda, $f(A)$, NR' normlu halkasının bir bulanık normlu althalkası olur.

İspat $u, v \in NR'$ olsun. f bir epimorfizma olduğundan $f(x) = u$ ve $f(y) = v$ olacak şekilde $x, y \in NR$ mevcuttur. Buradan,

$$\begin{aligned} (f(A))(u) * (f(A))(v) &= \left(\diamond_{f(x)=u} A(x) \right) * \left(\diamond_{f(y)=v} A(y) \right) \\ &= \diamond_{f(x)=u, f(y)=v} (A(x) * A(y)) \\ &\leq \diamond_{f(x)=u, f(y)=v} (A(x - y)) \quad (A \text{ althalka}) \\ &\leq \diamond_{f(x)-f(y)=u-v} (A(x - y)) \\ &= \diamond_{f(x-y)=u-v} (A(x - y)) \quad (f \text{ epimorfizma}) \\ &= \diamond_{f(z)=u-v} (A(z)) \\ &= (f(A))(u - v). \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$(f(A))(u.v) \geq f(A)(u) * f(A)(v)$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla, $f(A)$, NR' normlu halkasının bir bulanık normlu althalkasıdır. ■

Önerme 4.1.7 NR ve NR' iki normlu halka, B , NR' normlu halkasının bir bulanık althalkası ve $f: NR \rightarrow NR'$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda, $f^{-1}(B)$, NR normlu halkasının bir bulanık normlu althalkası olur.

İspat $a, b \in NR$ olsun. f homomorfizma olduğundan $f(a) = x$ ve $f(b) = y$ olacak şekilde $x, y \in NR'$ vardır. Şu halde, $f^{-1}(x) = a$ ve $f^{-1}(y) = b$ dir.

$$\begin{aligned} (f^{-1}(B))(a) * (f^{-1}(B))(b) &= \left(\diamond_{f^{-1}(x)=a} B(x) \right) * \left(\diamond_{f^{-1}(y)=b} B(y) \right) \\ &= \diamond_{f^{-1}(x)=a, f^{-1}(y)=b} (B(x) * B(y)) \\ &= \diamond_{f(a)=x, f(b)=y} (B(x) * B(y)) \\ &\leq \diamond_{f(a)=x, f(b)=y} (B(x - y)) \quad (B \text{ althalka}) \\ &= \diamond_{f(a)-f(b)=x-y} (B(x - y)) \\ &= \diamond_{f(a-b)=x-y} (B(x - y)) \quad (f \text{ h.morfizma}) \\ &= \diamond_{f^{-1}(x-y)=a-b} (B(x - y)) \\ &= \diamond_{f^{-1}(z)=a-b} (B(z)) \\ &= (f^{-1}(B))(a - b). \end{aligned}$$

Diğer yandan,

$$(f^{-1}(B))(a.b) \geq (f^{-1}(B))(a) * (f^{-1}(B))(b)$$

olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Sonuç olarak, $f^{-1}(B)$, NR normlu halkasının bir bulanık normlu althalkası olur.

4.2 Bulanık İdeallere Giriş

Tanım 4.2.1 NR bir normlu halka, $A \in F(NR)$ ve $A \neq \emptyset$ olsun. Her $x, y \in NR$ için

$$(i) \quad A(x - y) \geq A(x) * A(y),$$

$$(ii) \quad A(x.y) \geq A(y) \quad (A(x.y) \geq A(x))$$

şartları sağlanıyorsa, A bulanık altkütmesine NR normlu halkasının bir ***bulanık sol (sağ) ideali*** denir.

Tanım 4.2.2 A bulanık altkütmesi NR normlu halkasının hem sağ, hem de sol ideali ise NR normlu halkasının bir ***bulanık ideali*** adını alır.

Bir başka deyişle, her $x, y \in NR$ için,

$$(i) \quad A(x - y) \geq A(x) * A(y),$$

$$(ii) \quad A(x.y) \geq A(x) \diamond A(y)$$

şartlarını sağlayan $A \in F(NR)$, NR normlu halkasının bir bulanık idealidir.

Not 4.2.3 A bulanık altkütmesi NR normlu halkasının bir bulanık ideali olsun. Her $x, y \in NR$ için $A(x.y) \geq A(x) \diamond A(y)$ olduğundan NR 'nin çarpımsal birimi (mevcutsa) 1_{NR} ile gösterilmek üzere,

$$\begin{aligned} A(x) &= A(x.1_{NR}) \\ &\geq A(x) \diamond A(1_{NR}) \\ &\geq A(1_{NR}). \end{aligned}$$

Örnek 4.2.4 A ve B , bir NR normlu halkasının iki bulanık (sol/sağ) ideali olsunlar. Bu durumda, $(A \cap B)$ de NR normlu halkasının bir bulanık (sol/sağ) idealidir. Gösteriniz.

Çözüm $x, y \in NR$ alalım.

$$\begin{aligned} (A \cap B)(x - y) &= \min\{A(x - y), B(x - y)\} \\ &\geq \min\{A(x) * A(y), B(x) * B(y)\} \\ &\geq \min\{(A \cap B)(x), (A \cap B)(y)\}. \end{aligned}$$

Diğer yandan, A ve B sol idealler olup

$$A(x.y) \geq A(y) \text{ ve } B(x.y) \geq B(y)$$

oluşundan hareketle

$$\begin{aligned} (A \cap B)(x.y) &= \min\{A(x.y), B(x.y)\} \\ &\geq \min\{A(y), B(y)\} \\ &= (A \cap B)(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $(A \cap B)$ bir sol ideal olur. Benzer şekilde $(A \cap B)$ 'nin bir sağ ideal olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $(A \cap B)$, NR 'nin bir bulanık idealidir.

Örnek 4.2.5 NR , toplamsal birimi O_{NR} olan bir normlu halka ve A , NR 'nin bir bulanık ideali olmak üzere,

$$A^0 = \{x : A(x) = A(O_{NR})\}$$

althalkasının NR 'nin (klasik anlamda) bir ideali olduğunu gösteriniz.

Çözüm $A \trianglelefteq NR$ olduğundan, her $x, y \in NR$ için

$$A(x - y) \geq A(x) * A(y) \text{ ve } A(x.y) \geq A(x) \diamond A(y)$$

dir. Şimdi, $s, t \in A^0$ alalım. Böylece,

$$A(s) = A(O_{NR}) = A(t)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} A(s - t) &\geq A(s) * A(t) \\ &= A(O_{NR}) * A(O_{NR}) \\ &= A(O_{NR}). \end{aligned}$$

Diğer yandan, Not 4.1.2 ile

$$A(s - t) \leq A(O_{NR}) \Rightarrow A(s - t) = A(O_{NR}).$$

Sonuç olarak, $(s - t) \in A^0$ elde edilir. Şimdi, $x \in A^0$ ve $r \in NR$ alalım. A bulanık ideal olduğundan

$$A(r.x) \geq A(x) = A(O_{NR})$$

ve böylece

$$A(r.x) = A(O_{NR}) \Rightarrow (r.x) \in A^0.$$

Benzer şekilde, $(x.r) \in A^0$ olduğu gösterilebilir.

Her $x \in A^0$ ve $r \in NR$ için $(r.x) \in A^0$ ve $(x.r) \in A^0$ olduğundan A^0 , NR 'nin bir idealidir.

Önerme 4.2.6 NR ve NR' iki normlu halka ve A , NR normlu halkasının bir bulanık ideali olsun. $f: NR \rightarrow NR'$ bir halka epimorfizması ise $f(A)$, NR' normlu halkasının bir bulanık idealidir.

İspat Önerme 4.1.6 ile A , NR normlu halkasının bir bulanık althalkası olduğunda $f(A)$ 'nin NR' normlu halkasının bir althalkası olduğunu göstermiştik. Şu halde, her $u, v \in NR'$ için $(f(A))(u.v) \geq f(A)(u) \diamond f(A)(v)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $u, v \in NR'$ olsun. f bir epimorfizma olduğundan $f(x) = u$ ve $f(y) = v$ olacak şekilde $x, y \in NR$ mevcuttur. Buradan,

$$\begin{aligned} (f(A))(u) \diamond (f(A))(v) &= \left(\diamond_{f(x)=u} A(x) \right) \diamond \left(\diamond_{f(y)=v} A(y) \right) \\ &= \diamond_{f(x)=u, f(y)=v} (A(x) \diamond A(y)) \\ &\leq \diamond_{f(x)=u, f(y)=v} (A(x.y)) \quad (A \text{ ideal}) \\ &\leq \diamond_{f(x).f(y)=u.v} (A(x.y)) \\ &= \diamond_{f(x.y)=u.v} (A(x.y)) \quad (f \text{ epimorfizma}) \\ &= \diamond_{f(z)=u.v} (A(z)) \\ &= (f(A))(u.v). \end{aligned}$$

Sonuç olarak $f(A)$, NR' normlu halkasının bir bulanık idealidir. ■

Teorem 4.2.7 A , NR normlu halkasının bir bulanık ideali, $X = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq NR$, $x, y \in NR$ ve (X) , NR içinde X kümesi tarafından üretilmiş ideal olsun. Bu durumda,

$$(i) \quad x \in (X) \Rightarrow A(x) \geq \bigstar_{1 \leq i \leq m} (A(a_i)),$$

$$(ii) \quad x \in (y) \Rightarrow A(x) \geq A(y),$$

$$(iii) \quad A(O_{NR}) \geq A(x) \text{ ve}$$

$$(iv) \quad NR \text{'nin } \text{çarpımsal etkisiz elemanı } 1_{NR} \text{ ise, } A(x) \geq A(1_{NR}) \text{ dir.}$$

İspat (ii), (iii) ve (iv)'ün ispatı (i) kullanılarak kolayca yapılabilir. (i)'i gösterelim.

(X) kümesi, $a \in X$, $r, s, u, v \in NR$ ve $n \in \mathbb{Z}$ bir tamsayı olmak üzere,

$$r.a + a.s + u.a.v + n.a$$

sonlu toplamlarından oluşur. $x \in (X)$ olsun. O halde,

$$x = r.a_i + a_i.s + u.a_i.v + n.a_i$$

olacak şekilde $1 \leq i \leq m$, $r, s, u, v \in NR$ ve $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır. A ideal olduğundan,

$$\begin{aligned} A(r.a_i + a_i.s + u.a_i.v + n.a_i) &\geq A(ra_i) * A(a_i s) * A(ua_i v) * A(na_i) \\ &\geq A(a_i). \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $A(x) \geq \bigstar_{1 \leq i \leq m} (A(a_i))$ olduğu gösterilmiş olur. ■

4.3 Bulanık Asal ve Bulanık Maksimal İdealler

Tanım 4.3.1 A ve B , bir NR normlu halkasının iki bulanık altkümesi olmak üzere $A \circ B$ **arpımını** (bileşkesini) aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$(A \circ B)(x) = \begin{cases} \diamond_{x=yz} (A(y) * B(z)), & \text{eğer } x, x = yz \text{ olacak şekilde } y, z \in NR \text{ varsa} \\ 0 & , \text{eğer } x, x = yz \text{ olacak şekilde } y, z \in NR \text{ yoksa} \end{cases}$$

Eğer NR bulanık halkasının çarpımsal birimi (1_{NR}) varsa, yani $NR.NR = NR$ ise yukarıdaki tanımda bulunan ikinci durum söz konusu olmaz.

Örnek 4.2.4 ile, A ve B bir NR normlu halkasının iki bulanık (sol/sağ) ideali olmak üzere $(A \cap B)$ 'nin de NR için bir bulanık (sol/sağ) ideali olduğunu göstermiştik.

Önerme 4.3.2 A ve B , bir NR normlu halkasının sırasıyla bir bulanık sağ ve bir bulanık sol ideali olmak üzere, $(A \circ B) \subseteq (A \cap B)$ olur. Yani, her $x \in NR$ için $(A \circ B)(x) \leq (A \cap B)(x)$ dir.

İspat A ve B , bir NR normlu halkasının sırasıyla bir bulanık sağ ve bir bulanık sol idealleri olsun.

Eğer $(A \circ B)(x) = 0$ ise ispat açıktır.

$(A \circ B)(x) = \bigvee_{x=yz} (A(y) * B(z)) \neq 0$ kabul edelim. A bir bulanık sağ ve B bir bulanık sol ideal olduğundan, $A(y) \leq A(yz) = A(x)$ ve $B(z) \leq B(yz) = B(x)$ olur. Şimdi,

$$\begin{aligned} (A \circ B)(x) &= \bigvee_{x=yz} (A(y) * B(z)) \\ &\leq \min(A(x) * B(x)) \\ &= (A \cap B)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 4.3.3 A ve B , bir NR normlu halkasının bulanık idealleri ve NR 'nin bir bulanık ideali olan P , sabit olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$(A \circ B) \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ ya da } B \subseteq P$$

oluyorsa, P bulanık idealine NR normlu halkasının bir **bulanık asal ideali** denir.

Teorem 4.3.4 NR bir normlu halka, $I \neq NR$, bu normlu halkanın bir bulanık ideali olsun. Eğer I , bir bulanık asal ideal ise, bu durumda λ_I karakteristik fonksiyonu da bir bulanık asal ideal olur.

İspat Öncelikle, her $x \in NR$ için, I kümesinin karakteristik fonksiyonu,

$$\lambda_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \text{ ise} \\ 0, & x \notin I \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $I \neq NR$ kabul ettiğimiz için λ_I , NR normlu halkası üzerinde sabit olmayan bir fonksiyondur. Şimdi, NR içinde $(A \circ B) \subseteq \lambda_I$, ancak $A \not\subseteq \lambda_I$ ve $B \not\subseteq \lambda_I$ şartlarını sağlayan A ve B bulanık ideallerini alalım. Buradan, $A(x) \not\leq \lambda_I(x)$ ve $B(y) \not\leq \lambda_I(y)$ olacak şekilde $x, y \in NR$ vardır. Şu halde, $A(x) \neq 0$ ve $B(y) \neq 0$ iken

$\lambda_I(x) = 0$ ve $\lambda_I(y) = 0$ olur. Dolayısıyla, $x \notin I$ ve $y \notin I$ dır. I asal ideal olduğundan $r \in NR$ elemanı, $xry \notin I$ olacak şekilde mevcuttur. Çünkü, aksi taktirde, $xry \subseteq I$ olabilseydi, $(NR \times NR)(NR \times NR) \subseteq I$ olur ve I asal olduğundan, $(NR \times NR) \subseteq I$ ya da $(NR \times NR) \subseteq I$ olmak zorunda kalacaktı. Varsayalım $(NR \times NR) \subseteq I$ olsun. Ancak bu durumda, $(xxx) = x^3 \subseteq (NR \times NR) \subseteq I$ ve buradan $x \in I$ olup, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $x \notin I$ ve $y \notin I$ için $r \in NR$ elemanı, $xry \notin I$ olacak şekilde mevcuttur.

Şimdi, $a = xry$ alalım. Açıkça, $\lambda_I(a) = 0$ ve bundan dolayı $(A \circ B)(a) = 0$ dır. Fakat,

$$\begin{aligned} (A \circ B)(a) &= \bigvee_{a=cd} (A(c) * B(d)) \\ &\geq A(x) * B(ry) && (a = xry \text{ olarak}) \\ &\geq A(x) * B(y) && (B(ry) \geq B(y)) \\ &\geq 0. && (A(x) \neq 0 \text{ ve } B(y) \neq 0) \end{aligned}$$

Ancak, bu sonuç $(A \circ B)(a) = 0$ ile çelişir. Dolayısıyla, NR normlu halkasının A ve B bulanık idealleri için $(A \circ B) \subseteq \lambda_I$ olduğunda $A \subseteq \lambda_I$ ya da $B \subseteq \lambda_I$ olmaktadır. Sonuç olarak, λ_I bir bulanık asal idealdir. ■

Teorem 4.3.5 NR normlu halkasında λ_I bulanık asal ideal olacak şekilde bir I bulanık ideali varsa, bu durumda I da bir bulanık asal ideal olur.

İspat λ_I bulanık asal ideal olduğundan $I \neq NR$ dir. A ve B , NR normlu halkasının $(A \circ B) \subseteq I$ şartını sağlayan iki bulanık ideali olsun. $A \subseteq I$ ya da $B \subseteq I$ olması gerektiğini gösterirsek I bir bulanık asal ideal olur.

$\lambda_A \circ \lambda_B$ bileşkesini ele alalım. $x \in NR$ olsun.

$(\lambda_A \circ \lambda_B)(x) = 0$ ise $(\lambda_A \circ \lambda_B)(x) \leq \lambda_I(x)$ olup sonuç açıktır.

$(\lambda_A \circ \lambda_B)(x) \neq 0$ olsun. Böylece,

$$(\lambda_A \circ \lambda_B)(x) \leq \lambda_I(x) = \bigvee_{x=yz} (\lambda_A(y) * \lambda_B(z)) \neq 0.$$

Dolayısıyla, $\lambda_A(y) \neq 0$ ve $\lambda_B(z) \neq 0$ olacak şekilde $y, z \in NR$ elemanları $x = yz$ şartını sağlayacak şekilde mevcuttur ve $\lambda_A(y) = 1$ ve $\lambda_B(z) = 1$ dir. Böylece, $y \in A$ ve $z \in B$ olur. Şu halde,

$$x = yz \in (A \circ B) \subseteq I$$

ve buradan $\lambda_I(x) = 1$ olduğu görülür. Bu durumda, her $x \in NR$ için

$$(\lambda_A \circ \lambda_B)(x) \leq \lambda_I(x)$$

elde edilmiş olur. Yani,

$$(\lambda_A \circ \lambda_B) \subseteq \lambda_I.$$

λ_I bulanık asal ideal olduğundan, ya $\lambda_A \subseteq \lambda_I$ ya da $\lambda_B \subseteq \lambda_I$ olur.

Böylece, göstermek istediğimiz gibi, ya $A \subseteq I$ ya da $B \subseteq I$ dir. Sonuç olarak, λ_I bulanık asal ideal ise I da bir bulanık asal ideal olur. ■

Teorem 4.3.6 I , toplamsal sıfırı O_{NR} olan NR normlu halkasının bir bulanık asal ideali olsun. Bu durumda,

$$I^0 = \{x : x \in NR, I(x) = I(O_{NR})\}$$

ile tanımlanan ideal, NR normlu halkasının bir bulanık asal idealidir.

İspat $x, y \in I^0$ alalım. I ideal olduğundan,

$$I(x - y) \geq I(x) * I(y) = I(O_{NR}).$$

Diğer yandan, Not 4.1.2 ile,

$$\begin{aligned} I(O_{NR}) \geq I(x - y) &\Rightarrow I(x - y) = I(O_{NR}) \\ &\Rightarrow (x - y) \in I^0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, $x \in I^0$ ve $r \in NR$ alalım. Bu durumda,

$$I(rx) \geq I(x) = I(O_{NR})$$

ve yine Not 4.1.2 ile

$$I(rx) = I(O_{NR}).$$

Böylece, $rx \in I^0$ dır. Benzer şekilde, $xr \in I^0$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Sonuçta I^0 , NR normlu halkasının bir idealidir.

K ve L , NR normlu halkasının $(K \circ L) \subseteq I^0$ koşulunu sağlayan iki bulanık ideali olsun. Şimdi, $A = I^0 \lambda_K$ ve $B = I^0 \lambda_L$ bulanık ideallerini tanımlayalım. Her $x \in NR$ için $(A \circ B)(x) \leq I(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$(A \circ B)(x) = 0$ olduğunda gösterecek bir şey yoktur.

$(A \circ B)(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$$(A \circ B)(x) = \bigvee_{x=yz} (A(y) * B(z))$$

olduğu hatırlanırsa, $(A(y) * B(z)) \neq 0$ durumlarını ele almamız yeterlidir. Ancak, bu durumların tamamında $A(y) = I(O_{NR})$ ya da $A(y) = 0$ ve benzer şekilde $B(z) = I(O_{NR})$ ya da $B(z) = 0$ olmak zorunda olacağından, $A(y) = B(z) = I(O_{NR})$ olur. Böylece, $\lambda_K(y) = 1$ ve $\lambda_L(z) = 1$ olup, buradan $y \in K$, $z \in L$ ve

$$x = yz \in (K \circ L) \subseteq I^0$$

elde edilir. Dolayısıyla, $I(x) = I(O_{NR})$ ve böylece de her $x \in NR$ için

$$(A \circ B)(x) \leq I(x)$$

olduğu gösterilmiş olur. I bir bulanık asal ideal, A ve B bulanık idealler olduğundan, $A \subseteq I$ ya da $B \subseteq I$ olmalıdır.

Genelliği bozmadan, $A = I^0 \lambda_K \subseteq I$ olduğunu varsayalım. $K \subseteq I^0$ olduğunu göstermeliyiz.

$K \not\subseteq I$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $a \in K$ ve $a \notin I^0$ olacak şekilde bir a elemanı vardır. Başka bir deyişle, $I(a) \neq I(O_{NR})$ dir. $I(O_{NR}) \geq I(a)$ olduğunu biliyoruz. O halde, $I(O_{NR}) > I(a)$ dır. Ancak,

$$\begin{aligned} A(a) &= I^0 \lambda_K(a) \\ &= I(O_{NR}) > I(a) \end{aligned}$$

olup, bu sonuç $A = I^0 \lambda_K \subseteq I$ kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla, $K \subseteq I^0$ olmalıdır. Benzer şekilde, $B = I^0 \lambda_L$ kabul edersek, $L \subseteq I^0$ sonucuna ulaşılır. Yani, $K \subseteq I^0$ ya da $L \subseteq I^0$ doğru olmalıdır. Sonuç olarak, I^0 bir bulanık asal idealdir. ■

Teorem 4.3.7 A , NR normlu halkasının bir bulanık sol(sağ) ideali ve $A(x) \neq 1$ olacak şekilde bir $x \in NR$ elemanı mevcut olsun. Bu durumda, NR normlu halkasının bir B bulanık sol(sağ) ideali vardır, öyle ki, $B(y) \neq 1$ olacak şekilde bir $y \in NR$ vardır ve ayrıca $A \subset B$ dir.

İspat İki durumu incelemeliyiz:

1. durum: $A(O_{NR}) \neq 1$ olsun. $A(O_{NR}) < t < 1$ kabul edelim. $B \subset NR$ bulanık altkümesini, her $x \in NR$ için $B(x) = t$ olarak seçelim. Şu halde B , NR 'nin bir bulanık sol idealidir. Ayrıca, her $x \in NR$ için $B(x) \neq 1$ olur ve $A \subset B$ dir.

2. durum: $A(O_{NR}) = 1$ olsun. Kabulümüze göre, $A(x) \neq 1$ olacak şekilde bir $x \in NR$ elemanı vardır. Şimdi, $A(x) < t < A(O_{NR})$ kabul edelim. Bu durumda,

$$A_t = \{y \in NR : A(y) \geq t\}$$

bulanık kümesi, NR 'nin bir bulanık sol idealidir. NR normlu halkasının bulanık altkümesini aşağıdaki gibi seçelim:

$$B(u) = \begin{cases} 1, & u \in A_t \text{ ise} \\ t, & u \notin A_t \text{ ise} \end{cases}$$

Böylece B , NR 'nin bulanık sol idealidir. Ayrıca, $x \notin A_t$ olduğundan, $B(x) = t \neq 1$ ve $A \subset B$ olur. ■

Not Teorem 4.3.7 ispatında kullandığımız $A_t = \{y \in NR : A(y) \geq t\}$ kümesi Tanım 2.8'deki seviye kümesi olup, seviye althalkaları ve seviye idealleri bir sonraki bölümde detaylı olarak incelenecektir.

Tanım 4.3.8 Sabit olmayan A , NR normlu halkasının bir bulanık (sol/sağ) ideali olsun. NR 'nin her bulanık B ideali için, $A \subseteq B$ iken (Teorem 4.3.6'daki tanımıyla) $A^0 = B^0$ ya da $B = \lambda_{NR}$ oluyorsa, A idealine NR normlu halkasının bir **bulanık maksimal (sol/sağ) ideali** denir.

Teorem 4.3.9 NR , toplamsal birimi O_{NR} olan bir normlu halka ve A , NR 'nin bir bulanık maksimal sol (sağ) ideali ise, $A(O_{NR}) = 1$ dir.

İspat $A(O_{NR}) \neq 1$ olduğunu kabul edelim. $A(O_{NR}) < t < 1$ olmak üzere B , NR 'nin her $x \in NR$ için $B(x) = t$ şartını sağlayan bir bulanık altkütmesi olsun. Açıkça B , NR 'nin bir idealidir. Burada ayrıca, $A \subset B$, $B \neq \lambda_{NR}$ ve

$$B^0 = \{x : x \in NR \text{ ve } B(x) = B(O_{NR})\} = NR$$

olduğu kolayca görülebilir.

$A \subset B$ olmasına rağmen, $A^0 \neq B^0$ ve $B \neq \lambda_{NR}$ olması, hipotezimizdeki A 'nın bulanık maksimal sol ideal oluşu ile çelişir. Dolayısıyla, $A(O_{NR}) = 1$ dir. ■

Teorem 4.3.10 A , bir NR normlu halkasının bir bulanık maksimal sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda, $|im(A)| = 2$ dir.

Yukarıda gösterdiğimiz gibi, Teorem 4.3.9 ile $A(O_{NR}) = 1$ dir.

İddia: $0 \leq t < 1$ olmak üzere, $t \in im(A)$ ise, bu durumda $A_t = NR$ olur.

$0 \leq t < 1$ ve $t \in im(A)$ olsun. Teorem 4.3.7 ile A_t , NR normlu halkasının bir bulanık sol idealidir ve $t < 1$ olduğundan, $A(O_{NR}) \subset A_t$ dir. NR 'nin bir K bulanık altkütmesini aşağıdaki gibi seçelim:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_t \text{ ise} \\ t, & x \notin A_t \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda K , NR 'nin bir bulanık sol idealidir ve $K^0 = A_t$ olur. $A \subseteq K$ olduğu da açıktır. A bir bulanık maksimal ideal ve $A^0 \subset A_t = K^0$ olduğundan, $K = \lambda_{NR}$ olur. Böylece, her $x \in NR$ için $K(x) = 1$ dir. Dolayısıyla, $A_t = K^0 = NR$ elde edilir ve iddiamız ispatlanmış olur.

Şimdi, $0 \leq t_1, t_2 < 1$ şartını sağlayan iki $t_1, t_2 \in im(A)$ için $A_{t_1} = A_{t_2} = NR$ olur. Ancak bu durumda, $t_1 = t_2$ olur. Dolayısıyla, A iki değerli bir bulanık altkütmedir. Sonuç olarak, $|im(A)| = 2$ dir. ■

Örnek 4.3.11 NR , toplamsal birimi O_{NR} olan bir normlu halka ve A , NR 'nin bir bulanık ideali olmak üzere, $A^0 = \{x : x \in NR, A(x) = A(O_{NR})\}$ bir bulanık maksimal sol (sağ) idealdir. Gösteriniz.

Çözüm A sabit olmadığından, $A^0 \neq NR$ ve Teorem 4.3.10 ile $|im(A)| = 2$ dir. $0 \leq t < 1$ olmak üzere $im(A) = \{t, 1\}$ kabul edelim. Şimdi, NR normlu halkasının $A^0 \subseteq M$ şartını sağlayan bir M sol idealini alalım. $t < s < 1$ olmak üzere, NR 'nin bir bulanık altkümesini aşağıdaki gibi seçelim:

$$B(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \text{ ise} \\ s, & x \notin M \text{ ise} \end{cases}$$

Bu tanımla B , NR normlu halkasının bir bulanık sol idealidir ve açıkça $A \subseteq B$ olur. A bulanık maksimal sol ideal olduğundan, ya $A^0 = B^0$ ya da $B = \lambda_{NR}$ olur.

Eğer $A^0 = B^0$ ise, bu durumda $B^0 \subseteq M$ olduğundan $A^0 = M$ dir. Diğer yandan, eğer $B = \lambda_{NR}$ ise, bu durumda $M = NR$ olur.

Sonuç olarak, $A^0 = \{x : x \in NR, A(x) = A(O_{NR})\}$, NR normlu halkasının bir maksimal sol idealidir.

BÖLÜM V

BAZI BULANIK İDEALLER VE BULANIK NORMLU EŞKÜMELER

Bu bölümde ilk olarak, bulanık normlu halkalar üzerinde, seviye kümeleri ve bunların özellikleri üzerine lemmalar verilmiştir. A bulanık idealinin A_t seviye kümelerinin, normlu bir NR halkasının bulanık seviye idealleri olma koşulları incelenmiş ve ilgili teoremler ispatlanmıştır. Aynı zamanda, bulanık normlu eşküme kavramı burada tanımlanmaktadır. Bulanık normlu eşküme kümesinin halka olduğu gösterilmiş ve normlu halkadan bu halkaya özel bir homomorfizma tanımlanmıştır. Bölümün sonunda, bulanık yarıasal idealler tanımlanmış ve son olarak NR bulanık normlu halkasına ait A bulanık idealinin bulanık yarıasal olması için gerek ve yeter bir şart verilerek ispatlanmıştır.

Bu kısımda yer alan bulgular, 18-19 Temmuz 2021 tarihlerinde Adana’da düzenlenen *International ICONTECH Symposium-4 on Innovative Surveys in Positive Sciences* adlı uluslararası sempozyumda İngilizce olarak sözlü sunumu yapılmış ve Full Texts kitabında tam metni yer alan çalışmayı [61] içermektedir.

5.1 Seviye İdealleri ve Bulanık Normlu Eşküme

Hatırlatma 5.1.1 [38] X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinden $[0,1]$ kapalı aralığına tanımlı bir f fonksiyonuna bir *bulanık altküme* denir.

A , X ’in bir bulanık altkümesi ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. R bir halka olmak üzere,

$$A_t = \{x \in R: A(x) \geq t\}$$

kümesine X ’in A ’ya göre *seviye kümesi* denir. Her $t > s$ için açıkça $A_t \subseteq A_s$ olur.

Lemma 5.1.2 A , bir NR normlu halkasının herhangi bir bulanık althalkası/ideali olsun. Eğer $x, y \in NR$, $A(x) < A(y)$ şartını sağlayacak şekilde mevcutsa, bu durumda

$$A(x - y) = A(x) = A(y - x).$$

İspat NR bir normlu halka ve A , NR 'nin herhangi bir bulanık althalkası/ideali olmak üzere $x, y \in NR$ ve $A(x) < A(y)$ olsun. A bulanık althalka/ideal olduğundan,

$$\begin{aligned} A(y + (x - y)) &\geq A(y) * A(x - y) \\ A(x) &\geq A(y) * A(x - y) \end{aligned} \quad (1)$$

ve $A(x) \geq A(y)$ olamayacağından, $A(x) \geq A(x - y)$ dir. Diğer yandan,

$$A(x - y) \geq A(x) * A(y) = A(x) \quad (2)$$

olup, (1) ve (2)'den açık olarak $A(x) = A(x - y)$ elde edilmiş olur. NR normlu halka olduğundan, $\|x - y\| = \|y - x\|$ ve dolayısıyla $A(x - y) = A(y - x)$ dır. Sonuç olarak, $A(x - y) = A(x) = A(y - x)$ eşitliği sağlanır.

Lemma 5.1.3 A , NR normlu halkasının bir bulanık althalkası/ideali olsun. Bu durumda, $t \leq A(0_{NR})$ şartını sağlayan her

$$A_t = \{x \in R : A(x) \geq t\}$$

seviye kümesi NR 'nin bir althalkası/ideali olur.

İspat NR bir normlu halka ve A onun bir bulanık althalkası olsun. Öncelikle, A_t seviye kümesi boştan farklıdır. $x, y \in A_t$ alalım. Şu halde, $A(x) \geq t$ ve $A(y) \geq t$ olur. A bulanık althalka olduğundan,

$$\begin{aligned} A(xy) &\geq A(x) * A(y) \\ A(xy) &\geq t * t = t \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $xy \in A_t$ dir. Ayrıca,

$$A(x - y) \geq A(x) * A(y) \geq t$$

oldüğundan, $x - y \in A_t$ dir. Çarpma ve çıkarmanın kapalılığından, A_t seviye kümesi NR 'nin bir althalkasıdır.

Şimdi, keyfi $r \in NR$ alalım.

$$A(rx) \geq A(r) \diamond A(x) = A(r) \diamond \{t\}$$

olup

$$A(rx) \geq t \Rightarrow rx \in A_t.$$

Benzer şekilde, $xr \in A_t$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, A_t seviye kümesi NR 'nin bir idealidir. ■

Tanım 5.1.4 A , NR normlu halkasının bulanık althalkası/ideali ve $0 \leq t \leq A(0_{NR})$ olsun. A_t althalkasına/idealine A 'nın bir *seviye althalkası/seviye ideali* denir.

A 'nın tüm seviye althalkalarının/seviye ideallerinin ailesini F_A ile gösterelim. F_A 'nın elemanları $\{A_t : t \in ImA\}$ şeklindedir. Eğer $t_0 > t_1 > \dots > t_n$ olmak üzere, $ImA = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ şeklindeyse, $A_{t_0} \subset A_{t_1} \subset \dots \subset A_{t_n} = NR$ dir.

Teorem 5.1.5 (i) A , bir NR normlu halkasının herhangi bir bulanık ideali ve $t = A(0_{NR})$ olsun. Bu durumda, $\bar{A} \in NR/A_t$ bulanık altkümesi, her $x \in NR$ için

$$\bar{A}(x + A_t) = A(x)$$

şeklinde tanımlanır ve NR/A_t 'nin bir bulanık ideali olur.

(ii) I , NR 'nin bir ideali ve θ da NR/I 'nin, yalnızca $x \in I$ olduğunda $\theta(x + I) = \theta(I)$ şartını sağlayan bir bulanık ideali olsun. Bu durumda, NR 'nin $A_t = I$ şartını sağlayan bir A bulanık ideali vardır; öyle ki, $t = A(0_{NR})$ ve $\theta = \bar{A}$ olur.

İspat (i) A , NR normlu halkasının bulanık ideali olduğundan A_t , NR 'nin bir idealidir. Şimdi, $x + A_t = y + A_t$ olacak şekilde $x, y \in NR$ alalım. Buradan, $x - y \in A_t$ olup $A(x - y) = A(0_{NR})$ dır. $A(x) = A(y)$ ve buradan $\bar{A}(x + A_t) = \bar{A}(y + A_t)$ elde edilir. Sonuç olarak A^* iyi tanımlıdır.

$x, y \in NR$ için

$$\begin{aligned} \bar{A}((x + A_t) - (y + A_t)) &= \bar{A}((x - y) + A_t) \\ &= A(x - y) \\ &\geq A(x) * A(y) \\ &= \bar{A}(x + A_t) * \bar{A}(y + A_t) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bar{A}((x + A_t)(y + A_t)) &= \bar{A}(xy + A_t) = A(xy) \\ &\geq A(x) \diamond A(y) = (\bar{A}(x + A_t)) \diamond (\bar{A}(y + A_t)). \end{aligned}$$

Böylece $\bar{A}$, NR normlu halkasının bulanık idealidir.

(ii) A , NR normlu halkasının $A(x) = \theta(x + I)$ şartını sağlayan bir bulanık ideali olsun. θ bir bulanık ideal olduğundan,

$$\begin{aligned}\theta(x - y + I) &= \theta((x + I) - (y + I)) \\ &\geq \theta(x + I) * \theta(y + I)\end{aligned}$$

ve buradan da $A(x - y) \geq A(x) * A(y)$ olduğu görülür. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\theta(xy + I) &= \theta((x + I)(y + I)) \\ &\geq (\theta(x + I)) \diamond (\theta(y + I))\end{aligned}$$

olup, $A(xy) \geq A(x) \diamond A(y)$ elde edilmiş olur. Dolayısıyla A , NR normlu halkasının bir bulanık idealidir.

şimdi, keyfi $x \in A_t$ alalım.

$$\begin{aligned}x \in A_t &\Leftrightarrow A(x) = A(0_{NR}) \\ &\Leftrightarrow \theta(x + I) = \theta(I) \\ &\Leftrightarrow x \in I.\end{aligned}$$

Böylece $A_t = I$ olur. Son olarak, $\bar{A} = \theta$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için,

$$\bar{A}(x + I) = \bar{A}(x + A_t) = A(x) = \theta(x + I)$$

gözlemi yeterli olduğundan $\bar{A} = \theta$ olup ispat tamamlanmıř olur. ■

Tanım 5.1.6 NR bir normlu halka, A onun herhangi bir bulanık ideali ve $x \in NR$ olsun. Her $r \in NR$ için

$$\bar{A}_x(r) = A(r - x)$$

şeklinde tanımlanan $\bar{A}_x \subseteq NR$ bulanık altkümesine x ve A ile belirlenen **bulanık normlu eşküme** denir.

Teorem 5.1.7 A , bir NR normlu halkasının bulanık ideali olsun. NR içinde A 'nın tüm bulanık normlu eşk melerinin kümesini NR_A ile gösterelim. Her $x, y \in NR$ için tanımlanan

$$\overline{A}_x + \overline{A}_y = \overline{A}_{x+y} \text{ ve } \overline{A}_x \overline{A}_y = \overline{A}_{xy}$$

ikili işlemleri ile NR_A bir halkadır.

İspat Öncelikle, yukarıda tanımlı işlemlerin iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$x, y, z, t \in NR$ ve $\overline{A}_x = \overline{A}_y$ ve $\overline{A}_z = \overline{A}_t$ olsun. Her $r \in NR$ için

$$\overline{A}_x = \overline{A}_y \Rightarrow A(r - x) = A(r - y) \quad (1)$$

$$\overline{A}_z = \overline{A}_t \Rightarrow A(r - z) = A(r - t). \quad (2)$$

(1) eşitliğinde $r = x + z - t$, (2)'de $r = z$ ve (1)'de $r = a$ yerlerine konursa,

$$A(x + z - t - x) = A(x + z - t - y) = A(z - t) \quad (3)$$

$$A(z - z) = A(z - t) = A(O_{NR}) \quad (4)$$

$$A(x - x) = A(x - y) = A(O_{NR}) \quad (5)$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} (\overline{A}_x + \overline{A}_z)(r) &= (\overline{A}_{x+z})(r) = A(r - x - z) \\ &= A((r - y - t) - (x + z - y - t)) \\ &\geq * (A(r - y - t), A(x + z - y - t)) \\ &= * (A(r - y - t), A(O_{NR})) \\ &= A(r - y - t) \\ &= (\overline{A}_{y+t})(r) = (\overline{A}_y + \overline{A}_t)(r) \end{aligned}$$

olduğundan, $(\overline{A}_y + \overline{A}_t) \subseteq (\overline{A}_x + \overline{A}_z)$ dır. Benzer şekilde, $(\overline{A}_x + \overline{A}_z) \subseteq (\overline{A}_y + \overline{A}_t)$ gösterilebilir. Dolayısıyla, toplama işlemi $+$ iyi tanımlıdır.

Diğer yandan, çarpma işlemi için, yukarıda elde edilen (3), (4) ve (5) eşitlikleri kullanılarak $(\overline{A}_x \overline{A}_z) = (\overline{A}_y \overline{A}_t)$ olduğu ve çarpmanın iyi tanımlı olduğu gösterilebilir.

Ayrıca, $\overline{A}_{O_{NR}}$ toplamsal birim, $\overline{A}_{1_{NR}}$ çarpımsal birim ve her $\overline{A}_x$ için ters eleman $\overline{A}_{-x}$

olur. $(NR_A, +)$ 'nın abel grubu olduğu, çarpma işleminin birleşmeli olduğu ve dağılma özellikleri kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, $(NR_A, +, \cdot)$ bir halkadır. ■

Teorem 5.1.8 A , NR normlu halkasının herhangi bir bulanık ideali olsun. Her $x \in NR$ için $f(x) = \bar{A}_x$ ile tanımlanan $f: NR \rightarrow NR_A$ dönüşümü, $t = A(O_{NR})$ için kerneli A_t olan bir homomorfizmadır.

İspat A , NR normlu halkasının herhangi bir bulanık ideali olsun. Her $x, y \in NR$ için $f(x + y) = \bar{A}_{x+y} = \bar{A}_x + \bar{A}_y = f(x) + f(y)$ ve $f(xy) = \bar{A}_{xy} = \bar{A}_x \bar{A}_y = f(x)f(y)$ olduğundan f bir homomorfizmadır.

Şimdi, $A(x) = A(O_{NR})$ ve $r \in NR$ olsun. Yani, $A(r) \leq A(x) = A(O_{NR})$ dir. Burada karşımıza iki durum çıkar:

1. Durum: Eğer $A(r) < A(x)$ ise, Lemma 5.1.2 ile, $A(r - x) = A(r)$ olur.

2. Durum: Eğer $A(r) = A(x)$ ise, bu durumda $A(r) = A(x) = A(r - x) = A(O_{NR})$.

Dolayısıyla, her iki durumda da her $r \in NR$ için $A(r - x) = A(r)$ ve buradan da $\bar{A}_x = \bar{A}_{O_{NR}}$ olduğu gösterilmiş olur. Başka bir deyişle, $A(x) = A(O_{NR})$ olduğunda, $\bar{A}_x = \bar{A}_{O_{NR}}$ olur. Diğer yandan, $\bar{A}_x = \bar{A}_{O_{NR}} \Rightarrow A(x) = A(O_{NR})$ olduğu açıktır.

Sonuç olarak, $A(x) = A(O_{NR}) \Leftrightarrow \bar{A}_x = \bar{A}_{O_{NR}}$.

f homomorfizmasının çekirdeğini $Ker f$ ile gösterelim. Şimdi,

$$\begin{aligned} Ker f &= \{x \in NR: f(x) = \bar{A}_0\} \\ &= \{x \in NR: \bar{A}_x = \bar{A}_0\} \\ &= \{x \in NR: A(x) = A(0)\} = A_t. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.2 Bulanık Yarıasal İdealler

Tanım 5.2.1 NR bir normlu halka ve A ve θ , onun herhangi iki bulanık ideali olsun. Eğer, her $m \in \mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayısı için $\theta^m \subseteq A$ şartının gerçekleşmesi $\theta \subseteq A$ olmasını gerektiriyorsa, o halde A bulanık idealine, NR normlu halkasının bir **bulanık yarıasal ideali** denir.

Lemma 5.2.2 A, NR normlu halkasının herhangi bir bulanık altkümesi olsun. Her $s > t$ için $A(x) = t$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in A_t$ ve $x \notin A_s$ olmasıdır.

Teorem 5.2.3 NR normlu halkasının bir A bulanık idealinin yarıasal olması için gerek ve yeter şart $t \in ImA$ olmak üzere A_t seviye idealinin yarıasal olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) A bulanık yarıasal olsun. $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $t \in ImA$ olmak üzere $y^m \in A_t$ olacak şekilde bir $y \in NR$ alalım. y tarafından üretilen bulanık ideali $\langle y \rangle$ ile gösterelim. NR normlu halkasının I bulanık normlu ideali aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun:

$$I(x) = \begin{cases} t, & \text{eğer } x \in \langle y \rangle \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } x \in NR \setminus \langle y \rangle \text{ ise} \end{cases}$$

Şimdi, $I^m(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde, x elemanını $x = x_1 x_2 \dots x_m$ şeklinde gösterirsek, her $j = 1, 2, \dots, m$ için $I(x_j) \neq 0$ olur. Çünkü, her $j = 1, 2, \dots, m$ için $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ elemanı $I(x_k) = 0$ olacak şekilde bulunabilseydi, $I^m(x) = 0$ olur ve çelişki elde edilirdi. Dolayısıyla, tanım gereği, her $j = 1, 2, \dots, m$ için $I(x_j) = t$ olup, buradan $I^m(x) = t$ ve sonuçta $x_j \in \langle y \rangle$ olduğu görülür. $y^m \in A_t$ olduğundan, $x = x_1 x_2 \dots x_m \in \langle y^m \rangle \subseteq A_t$ ve $A(x) \geq t$ elde edilir. Dolayısıyla, $I^m(x) = t \leq A(x)$.

A, NR 'nin bulanık yarıasal ideali olduğundan $I \subseteq A$ ve buradan $t = I(y) \leq A(y)$ olup $y \in A_t$ olduğu görülür. O halde A_t, NR 'nin bir bulanık yarıasal idealidir.

($\Leftarrow$) Tersine, $t \in ImA$ olmak üzere, seviye ideali A_t, NR 'nin bir bulanık normlu yarıasal ideali olsun. Varsayalım ki, A bulanık normlu yarıasal olmasın; yani NR 'nin bir bulanık ideali I bulunabilsin; öyle ki, bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için $I^m \subseteq A$ ve $I \not\subseteq A$ şartları sağlansın. Şu halde, $I(x) > A(x)$ olacak şekilde $x \in NR$ vardır.

$A(x) = t$ olsun. Buradan, Lemma 5.12 ile, her $s > t$ için $x \in A_t$ ve $x \notin A_s$ olur. A_s bulanık yarıasal olduğundan, $x^m \in A_t$ ve $x^m \notin A_s$ dir. O halde, $A(x^m) = t$ ve böylece $A(x) = A(x^m) = t$ olur.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} I^m(x^m) &= (I^{m-1}I)(x^m) \\ &= I^{m-1}(I(x^m)) = I^{m-1}(I(x^{m-1}x)) \\ &\geq I^{m-1}(I(x^{m-1}) * I(x)) \quad (I \text{ bulanık ideal}) \end{aligned}$$

ve açıkça $I^m(x^m) \geq I(x)$ elde edilir. Ancak, bu durumda, $I^m \subseteq A$ olduğundan $I^m(x^m) > A(x) = A(x^m) = t$ çelişkisi ortaya çıkar. Şu halde, varsayımımız yanlıştır. Sonuç olarak, A ideali bulanık yarıasaldır.



BÖLÜM VI

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikle, bulanık yarıgruplar konusunda bugüne kadar tanımlanmamış olan yapılar ortaya konmuş ve bunların cebirsel özellikleri çalışılmıştır. Normlu halkalar adıyla bilinen cebirsel yapı, daha önce üzerinde tanımlandığı klasik kümeler yerine bulanık kümeler üzerinde tanımlanmıştır. Böylece, önce bulanık normlu althalkalar ve bulanık normlu halkalar tanımlanmış ve bunlarla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bulanık normlu halkalar üzerinde halka homomorfizmalarıyla ilgili sonuçlara ulaşılmıştır. Bulanık idealler tanımlanmış, bunlarla ilgili örnekler verilmiş ve çeşitli teorem ve sonuçlar ispatlanmıştır. Normlu halkalar üzerinde asal ve maksimal ideallerin varlığı ve şartları araştırılmış ve çeşitli sonuçlara ulaşılmıştır. Ayrıca yine normlu halkalar üzerinde eşkümeler, yarıasal idealler ve seviye idealleri çalışılmış ve ulaşılan sonuçlar çok sayıda teorem ve yardımcı teoremle ifade ve ispat edilmiştir.

Tezimizde ulaşılan sonuçların bir kısmı SCI-Expanded endeksli bir dergide yayımlanmış ve diğer sonuçlarımız da iki ayrı sözlü sunum olarak araştırmacılarla paylaşılmıştır. Sözü edilen yayınların aldığı nitelikli atıflar çalıştığımız konulara yaptığımız katkıları doğrular niteliktedir.

Bilimsel çalışmaların çok sayıda alanında uygulamaları olan bulanık mantığın, gerek yarıgruplar üzerine, gerekse cebirsel ve topolojik özellikler gösteren normlu halkalar üzerine uygulanması ile yenilikçi ve teorinin gelişmesine katkı sunacak çalışmalar yapılmaya devam edilebileceği öngörülmektedir.

Bulanık kümelerde çalışılan konuların zaman içinde esnek kümeler, nütrosifik kümeler ve nütrosifik bulanık kümelerde de çalışıldığı göz önüne alındığında, ilk tanımlarını yaparak temelini attığımız bulanık normlu halkalar teorisinin de bu tip kümelere genişletilmesi olasıdır.

Ayrıca, bulanık normlu halkalar üzerinde henüz çalışılmamış, bi-idealler, quasi idealler gibi farklı bulanık ideal tiplerinin de gelecekte araştırmacıların ilgi alanına gireceğini değerlendirmekteyiz.

Tezimizin yarıgruplar, halkalar ve bulanık mantık konularında çalışmalar yapan araştırmacılara küçük de olsa bir pencere açmasını ve fayda getirmesini samimiyetle dileriz



KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*. **(8.3)**, 338-353.
- [2] Goguen, J. A. (1967). L-Fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **(18)**, 145-174.
- [3] Goguen, J. A. (1968). Fuzzy Topological Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **(24)**, 182-190.
- [4] Goguen, J. A. (1969). The Logic of Inexact Concepts. *Synthese*. **(19)**, 325-373.
- [5] Negoita, C. V., Ralescu, D. A. (1975). Representation Theorems for Fuzzy Concepts. *Kybernetes*. **(4.3)**, 169-174.
- [6] Negoita, C. V., Ralescu, D. A. (1975). *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. Birkhauser: Basel
- [7] Dubois, D., Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press: New York.
- [8] Ruspini, E. H. (1970). Numerical Methods for Fuzzy Clustering. *Information Sciences*. **(2.3)**, 319-350.
- [9] Ruspini, E. H. (1991). On the Semantics of Fuzzy Logic. *International Journal of Approximate Reasoning*. **(5.1)**, 45-88.
- [10] Yager, R. R. (1981). A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of The Unit Interval. *Information Sciences*. **(24.2)**, 143-161.
- [11] Yager, R. R. [ed.], Zadeh, L. A. [ed.] (1992). *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems*. Kluwer Academic Publishers: Amsterdam.
- [12] Klir, G. J., Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*. Prentice Hall: New Jersey.

- [13] Pedrycz, W., Gomide, F. (1998). *An Introduction to Fuzzy Sets Analysis and Design*. MIT Press: Cambridge, Massachusetts.
- [14] Ross, T. J. (1995). *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. John Wiley & Sons: United Kingdom.
- [15] Passino, K. M., Yurkovich, S. (1998). *Fuzzy Control*. Addison-Wesley Longman: California.
- [16] Bergmann, M. (2008). *An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic*. Cambridge University Press: United Kingdom.
- [17] Wang, X., Ruan, D., Kerre, E. E. (2009). *Mathematics of Fuzziness – Basic Issues*. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg.
- [18] Belohlavek, R., Dauben, J. W., Klir, G. J. (2017). *Fuzzy Logic and Mathematics – A Historical Perspective*. Oxford University Press: New York.
- [19] O'Connor, J. J., Robertson, E. F. (2004). The development of Ring Theory: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Ring_theory/, 22.07.2021.
- [20] Van der Waerden, B. L. (1930). *Modern Algebra* (2 cilt). Berlin.
- [21] Murray, F. J., Van Neumann, J. (1936). On Rings of Operators. *Annals of Mathematics*. **(37.1)**, 116-229.
- [22] Murray, F. J., Van Neumann, J. (1937). On Rings of Operators II. *Transactions of the American Mathematical Society*. **(41.2)**, 208-248.
- [23] Murray, F. J., Van Neumann, J. (1940). On Rings of Operators III. *Annals of Mathematics*. **(41.1)**, 94-161.
- [24] Murray, F. J., Van Neumann, J. (1943). On Rings of Operators IV. *Annals of Mathematics*. **(44.4)**, 716-808.
- [25] Naïmark, M. A. (1959). *Normed rings*. 1st ed. Noordhoff: Groningen.
- [26] Gel'fand, I., Raikov, D., Shilov, G. (1964). *Commutative normed rings*. Chelsea Publishing Company: New York.

- [27] Uluçay, V., Şahin, M., Olgun, N. (2016). Soft Normed Rings. *Springer Plus.* **(5)**, 1950. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40064-016-3636-9>
- [28] Molodtsov, D. (1999). Soft Set Theory First Results. *Computers & Mathematics with Applications.* **(37.4)**, 19-31.
- [29] Das, P. (1981). Fuzzy Groups and Level Subgroups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **(84)**, 264-269.
- [30] Kuroki, N. (1982). Fuzzy semiprime ideals in semigroups. *Fuzzy Sets and Systems.* **(8)**, 71-79.
- [31] Liu, W. (1982). Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy Ideals. *Fuzzy Sets and Systems.* **(8)**, 133-139.
- [32] Liu, W. (1983). Operations on fuzzy ideals. *Fuzzy Sets and Systems.* **(11)**, 31-39.
- [33] Mukherjee, N. P., Bhattacharya, P. (1984). Fuzzy Normal Subgroups and Fuzzy Cosets. *Inform Sci.* **(34)**, 225-239.
- [34] Mukherjee, T. K., Sen, M. K. (1987). On Fuzzy Ideals of a Ring I. *Fuzzy Sets and Systems.* **(21)**, 99-104.
- [35] Swamy, U. M., Swamy, K. L. N. (1988). Fuzzy Prime Ideals of Rings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **(134)**, 94-103.
- [36] Dixit, V. N., Kumar, R., Ajmal, N. (1990). Level Subgroups and Union of Fuzzy Subgroups. *Fuzzy Sets and Systems.* **(37)**, 359-371.
- [37] Dixit, V. N., Kumar, R., Ajmal, N. (1991). Fuzzy ideals and fuzzy prime ideals of a Ring. *Fuzzy Sets and Systems.* **(44)**, 127-138.
- [38] Malik, D. S., Mordeson, J. N. (1991). Fuzzy Maximal, Radical, and Primary Ideals of a Ring. *Information Sciences.* **(53)**, 237-250.
- [39] Dixit, V. N., Kumar, R., Ajmal, N. (1992). On fuzzy rings. *Fuzzy Sets and Systems.* **(49)**, 205-213.

- [40] Mordeson, J. N., Bhutani, K. R., Rosenfeld, A. (2005). *Fuzzy Group Theory*. Springer: Heidelberg.
- [41] Zimmermann, H. J. (1991). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. 2nd edition. Kluwer Academic Publishers: USA.
- [42] Hajek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
- [43] Fraleigh, J. B. (2003). *A First Course in Abstract Algebra*. 7th edition. Pearson Education: USA.
- [44] Mordeson, J. N., Malik, D. S., Kuroki, N. (2003). *Fuzzy Semigroups*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg: New York.
- [45] Murali, V. (1989). Fuzzy Equivalence Relations. *Fuzzy Sets and Systems*. **30**, 155-163.
- [46] Holcombe, W. M. L. (1982). *Algebraic Automata Theory*. Cambridge University Press: Cambridge.
- [47] Mordeson, J. N., Malik, D. S. (2002). *Fuzzy Automata and Languages: Theory and Applications*. CRC Press: Florida.
- [48] Kolmogorov, A. N., Silverman, R. A., Fomin, S. V. (1970). *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, Inc: New York.
- [49] Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press: New York.
- [50] Clifford, A. H., Preston, G. B. (1971). *The Algebraic Theory of Semigroups*. American Mathematical Society: Providence, Rhode Island.
- [51] Emniyet, A., Sahin, M. (2018) Fuzzy Normed Rings. *Symmetry*. **(10.10)**, 515.
- [52] Bagchi, S. (2019). Analysis of Topological Endomorphism of Fuzzy Measure in Hausdorff Distributed Monoid Spaces. *Symmetry*. **(11.5)**, 671.
- [53] Alhaleem, N. A., Ahmad, A. G. (2020). Intuitionistic Fuzzy Normed Subrings and Intuitionistic Fuzzy Normed Ideals. *Mathematics*. **(8.9)**, 1594.

- [54] Altassan, A., Mateen, M. H., Pamucar, D. (2021). On Fundamental Theorems of Fuzzy Isomorphism of Fuzzy Subrings over a Certain Algebraic Product. *Symmetry*. **(13.6)**, 998.
- [55] Alolaiyan, H., Alshehri, H. A., Mateen, M. H., Pamucar, D., Gulzar, M. (2021). A Novel Algebraic Structure of $(\alpha - \beta)$ -Complex Fuzzy Subgroups. *Entropy*. **(23.8)**, 992.
- [56] Alhaleem, N. A., Ahmad, A. G. (2021). Intuitionistic Fuzzy Normed Prime and Maximal Ideals. *AIMS Mathematics*. **(6.10)**, 10565-10580.
- [57] Alhaleem, N. A., Ahmad, A. G. (2021). Intuitionistic Fuzzy Normal Subrings over Normed Rings. *International Journal of Analysis and Applications*. **(19.3)**, 341-359.
- [58] Master of Science Thesis by Zachariah Thomas. (2021). A Mathematician's Guide to Fuzzy Logic with Applications in Fuzzy Additive Systems. Proquest Dissertations Publishing: <https://www.proquest.com/docview/2513248882>, 05.08.2021.
- [59] Alolaiyan, H., A., Mateen, M. H., Mahmmmod, K. M., Arslan, F., Pamucar, A. (2021). Certain Structure of Bipolar Fuzzy Subrings. *Symmetry*. **(13.8)**, 1397.
- [60] Emniyet, A., Sahin, M. (2021). On Some Fuzzy Transformation Semigroups. *Full Text Book of the IV. International ICONTECH SYMPOSIUM on Innovative Surveys on Positive Sciences* (pp. 155-162). Liberty Publications.
- [61] Emniyet, A., Sahin, M. (2021). Some Fuzzy Ideals and Fuzzy Normed Cosets on Fuzzy Normed Rings, *Full Text Book of the IV. International ICONTECH SYMPOSIUM on Innovative Surveys on Positive Sciences* (pp. 39-45). Liberty Publications.

YAYINLAR

Araştırma Makalesi

- 1) Emniyet, A., Sahin, M. (2018) Fuzzy Normed Rings. *Symmetry*. (10.10), 515.

Sözlü Sunum ve Tam Metin

- 2) Emniyet, A., Sahin, M. (2021). Some Fuzzy Ideals and Fuzzy Normed Cosets on Fuzzy Normed Rings, *Full Text Book of the IV. International ICONTECH SYMPOSIUM on Innovative Surveys on Positive Sciences* (pp. 39-45). Liberty Publications.
- 3) Emniyet, A., Sahin, M. (2021). On Some Fuzzy Transformation Semigroups. *Full Text Book of the IV. International ICONTECH SYMPOSIUM on Innovative Surveys on Positive Sciences* (pp. 155-162). Liberty Publications.

AKADEMİK ÖZGEÇMİŞ

1. Adı Soyadı: Aykut EMNİYET
2. Ünvanı: Araştırma Görevlisi
3. Öğrenim Durumu: Doktora
4. Çalıştığı Kurum: Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi

Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2004-2006
Y. Lisans	Matematik	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2013-2015
Doktora	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2015-2021

5. Akademik Unvanlar:

Araştırma Görevlisi Tarihi: 22.12.2009

6. Yayınlar:

6.1. Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler (SCI, SSCI, Arts and Humanities):

Emniyet, A., Sahin, M. (2018) Fuzzy Normed Rings. *Symmetry*. (10.10), 515.

6.2. Uluslararası diğer hakemli dergilerde yayınlanan makaleler:

Uluçay, V., Sahin, M., Olgun, N., Oztekin, O., Emniyet, A. (2016). Generalized Fuzzy σ -Algebra and Generalized Fuzzy Measure on Soft Sets. *Indian Journal of Science and Technology*. (9.4).

6.3. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler:

6.3.1 Emniyet, A., Sahin, M. (2021). Some Fuzzy Ideals and Fuzzy Normed Cosets on Fuzzy Normed Rings, *Full Text Book of the IV. International*

ICONTECH SYMPOSIUM on Innovative Surveys on Positive Sciences (pp. 39-45). Liberty Publications.

6.3.2 Emniyet, A., Sahin, M. (2021). On Some Fuzzy Transformation Semigroups. *Full Text Book of the IV. International ICONTECH SYMPOSIUM on Innovative Surveys on Positive Sciences* (pp. 155-162). Liberty Publications.

6.4 Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler

Emniyet, A., Sahin, M. (2016). On The Approximation of NBA Scores Using a Sugeno-type Fuzzy Inference System. *International Congerence on Natural Science and Engineering ICNASE'16*. 19-20 Mart 2016. Kilis.

7. Ödüller: TÜBİTAK Yurtiçi Doktora Bursu (2015-...)

TÜBİTAK Yayın Teşvik Ödülü (2018)

8. Dereceler: 2005 Aralık LES Türkiye 268.si, 2008 Sonbahar ALES Türkiye 39.su, 2012 İlkbahar ALES Türkiye 2.si, 2017 İlkbahar ALES Türkiye 241.si .

9. Yabancı Dil Seviyesi: İNGİLİZCE 2007 ÜDS 95.000, İNGİLİZCE 2010 KPDS 93.000 .