

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN AĞIRLIKLIL
ORTALAMA TOPLANABİLME METODU
İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Zerrin ÖNDER

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.03.01

Sunuş Tarihi: 12.06.2015

Bornova-İZMİR

2015

Zerrin ÖNDER tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “**Bulanık sayı dizilerinin ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için Tauber tipi teoremler**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **12.06.2015** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Raportör Üye : Doç. Dr. Ümit TOTUR

Üye : Doç. Dr. Tahsin ÖNER

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Bulanık sayı dizilerinin ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için Tauber tipi teoremler” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

12/06/2015

İmzası

Zerrin ÖNDER

ÖZET

**BULANIK SAYI DİZİLERİNİN
AĞIRLIKLIL ORTALAMA TOPLANABİLME METODU İÇİN
TAUBER TİPİ TEOREMLER**

ÖNDER, Zerrin

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Haziran 2015, 42 sayfa

Bu çalışma esas olarak üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bulanık mantığın ortaya çıkışı, amacı ve yararlarından kısaca bahsedilmiştir. Ayrıca, bulanık kümeler, bulanık sayılar ve bulanık sayı dizileri ile ilgili çeşitli araştırmacılar tarafından yapılan çalışmalar ile tezde yapılacak olan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak bulanık sayı ve bulanık sayı dizileri ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ardından, klasik Tauber teorisinin gelişim sürecinden bahsedilmiş, toplanabilme teorisi ile ilgili tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve notasyonlar verilmiş ve son olarak bazı Tauber tipi koşullar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bulanık sayı dizileri kavramının ağırlıklı ortalama toplanabilme metoduna nasıl uygulandığı açıklanmış, metodun regüler olması için gerek ve yeter koşullar verilmiş ve bu metod için bazı Tauber tipi teoremler ispatlanmıştır .

Anahtar Sözcükler: Ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu, bulanık sayı dizisi, Tauber tipi teoremler, yavaş azalan bulanık sayı dizileri, yavaş salınımlı bulanık sayı dizileri.

ABSTRACT**TAUBERIAN THEOREMS FOR THE WEIGHTED MEAN
METHOD OF SUMMABILITY OF SEQUENCES OF FUZZY
NUMBERS**

ÖNDER, Zerrin

MSc in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

June 2015, 42 pages

This thesis essentially consists of three chapters.

In the first chapter, the dawn of fuzzy logic, its aim and advantages are shortly mentioned. Also, informations concerning studies which have done by several researchers with respect to fuzzy set, fuzzy numbers and its sequences and works which will be done in this thesis are given.

In the second chapter, firstly basic definitions and theorems related with fuzzy number and its sequences are included. Later, development process of classical Tauberian theory is mentioned, basic definitions and notations which are going to be used throughout the thesis related with summability theory are given and finally some classical Tauberian conditions are investigated.

In the third chapter, how the concept of sequences of fuzzy numbers has been applied to the weighted mean method of summability is explained, necessary and sufficient conditions for regularity of this method are given and some Tauberian theorems for this method are proved.

Key Words: The weighted mean method of summability, sequence of fuzzy numbers, Tauberian theorems, slowly decreasing sequence of fuzzy numbers, slowly oscillating sequence of fuzzy numbers.

TEŞEKKÜR

İki yıllık bir çalışmanın ürünü olan bu tezin hazırlanması sürecinde,

- engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen, sunduğu fırsatlar ve yaptığı eleştirilerle her geçen gün gelişmemi sağlayan, ilgisini, inancını ve desteğini daima üzerimde hissettiğim, yarınlara güvenle bakabildiğim ve akademik hayatıma ismi altında başlamaktan onur duyduğum değerli danışmanım Prof. Dr. İbrahim ÇANAK’a,
- çalışmamı büyük bir titizlikle inceleyen, değerli görüş ve önerileriyle bu tezin gelişimine katkı sağlayan Doç. Dr. Ümit TOTUR ve Doç. Dr. Tahsin ÖNER’e ,
- çalıştığım konuyla ilgili sahip olduğum bilgileri derinleştirmemi sağlayan ve ihtiyaç duyduğum her noktada yardım etmekten kaçınmayan sevgili çalışma arkadaşım Araş. Gör. Sefa Anıl SEZER’e ,
- aldığım kararların arkasında saygıyla duran, attığım tüm adımlarda beni cesaretlendiren, mutlu olduğum meslekte var olmam yönünde ellerinden geleni yapan, aşılamayacağımı düşündüğüm sıkıntıları aşılabılır kılan ve bana koşulsuzca güvenen aileme

teşekkürü bir borç bilirim.

ZERRİN ÖNDER

Haziran 2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
2.1 Bulanık Sayılara Ait Temel Kavramlar	4
2.2 Toplanabilme Teorisiyle İlgili Temel Kavramlar	15
3 BULANIK SAYI DİZİLERİ İÇİN AĞIRLIKLIL ORTALAMA TOP- LANABİLME METODU	21
3.1 Ağırlıklı ortalama metodunun regülerliğı ve bazı Tauber tipi koşullar	21
3.2 Ağırlıklı ortalama metodu için bazı Tauber tipi teoremler	28
KAYNAKLAR DİZİNİ	38
ÖZGEÇMİŞ	41

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$c(F)$	yakınsak bulanık sayı dizilerinin uzayı
$c_0(F)$	sıfıra yakınsayan bulanık sayı dizilerinin uzayı
$C(F)$	Cauchy dizisi olan bulanık sayı dizilerinin uzayı
$(C, 1)$	Cesàro metodu
E^1	bulanık sayılar uzayı
$\ell_\infty(F)$	sınırlı bulanık sayı dizilerinin uzayı
$\limsup u$	$u = (u_n)$ bulanık sayı dizisinin üst limiti
$\liminf u$	$u = (u_n)$ bulanık sayı dizisinin alt limiti
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
(N, p)	Nörlund metodu
$(\overline{N}, p)$	Riesz ya da ağırlıklı ortalama metodu
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	pozitif reel sayılar kümesi
(t_n)	bir dizinin ağırlıklı ortalamalar dizisi
$u_n = o(1)$	(u_n) dizisinin sıfıra yakınsak olması
$u_n = O(1)$	(u_n) dizisinin sınırlı olması
$[u]_\alpha$	u bulanık sayısının α -seviye kümesi
$u^-(\alpha)$	u bulanık sayısının α -seviye kümesinin sol uç noktası
$u^+(\alpha)$	u bulanık sayısının α -seviye kümesinin sağ uç noktası
W	tüm kapalı ve sınırlı aralıkların kümesi
ω	tüm reel sayı dizilerinin uzayı
$\omega(F)$	tüm bulanık sayı dizilerinin uzayı
(τ_n)	bir dizinin Nörlund ortalamalar dizisi
(σ_n)	bir dizinin aritmetik ortalamalar dizisi
λ_n	λ_n nin tam kısmı
Δu_n	(u_n) reel sayılar dizisinin geri farkı

1 GİRİŞ

Son yıllarda, ortaya konulan bütün çalışmalarda kesinlik arayışında olan ve bu yüzden de belirsizliği kaçınılması gereken bir durum olarak gören geleneksel bilim anlayışından bunun kaçınılması mümkün olmayan ve günlük hayata uygunluğu bakımından daha gerçekçi olduğuna inanılan modern bilim anlayışına doğru bir geçiş vardır. Bu geçiş ikili mantık sistemine karşı geliştirilen ve olayların hangi oranda gerçekleştiğini belirleyen bulanık mantık sistemiyle sağlanır. Temel olarak, bu sistem gerçek dünyada var olan belirsiz kavramları matematiksel olarak ifadeye etmeyi ve sınıflandırma problemini ortadan kaldırmayı amaçlar. Klasik kümelerdeki soğuk-sıcak, siyah-beyaz, doğru-yanlış gibi ikili değişkenler, bulanık mantıkta biraz soğuk biraz sıcak gibi esnek ifadelerle yumuşatılarak gerçek dünyaya uyarlanır. Bulanık ifadelerin önemi, kavrama ait durumlar arasındaki geçişi eksiksiz olarak yansıtabilmesinde yatar. Ayrıca uygun üyelik fonksiyonu tanımlama ve anlamlı işlemleri belirleme becerisi, bulanık küme teorisine yönelmenin en önemli sebepleri arasında gösterilebilir. Uygulama alanlarının genişliği ve doğurduğu sonuçlar bakımından da bu teori bugün bilimsel ve teknolojik çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır.

Klasik kümeler teorisinde bir nesne ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Bu durum karakteristik fonksiyon ile ifade edilecek olursa, nesne kümenin elemanı olduğunda fonksiyon “1” değerini, kümenin elemanı olmadığına ise “0” değerini alır. İlk olarak 1965 yılında yayınlanan bir makale ile L.A. Zadeh (1965) tarafından temelleri atılan bulanık kümeler teorisinde ise her bir nesne $[0,1]$ aralığında değişen üyelik derecesine sahiptir. Böylece karakteristik fonksiyonun görüntü kümesi $\{0,1\}$ kümesinden $[0,1]$ aralığına genişletilmiş olur. Bu şekilde belirlenen karakteristik fonksiyon yardımıyla bulanık kümeler üzerindeki küme ve cebirsel operatörler tanımlanmış ve bunlara ait çeşitli özellikler verilmiştir.

Yayınlanan bu makaleden sonra bulanık küme teorisi matematiğin farklı alanlarında faaliyet gösteren pek çok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Dubois ve Prade (1978) bulanık sayılar kavramını tanıtmış ve toplama, çıkarma, çarpma ve bölme operatörlerini tanımlamıştır. Bunun ardından, Goetschel ve Voxman (1986) bulanık sayıların daha az kısıtlayıcı bir tanımını vermiştir. Bulanık sayı dizileri ilk olarak Matloka (1986) tarafından tanımlanmış, sınırlılık ve yakınsaklık kavramları

ile onlara ait özellikler verilmiş ve bulanık sayıların her yakınsak dizisinin sınırlı olduğu gösterilmiştir. Nanda (1989) bulanık sayıların Cauchy dizisini tanımlamış, bulanık sayı dizilerinin sınırlı ve yakınsak uzayları üzerine çalışmalarda bulunmuş ve bu uzayların tam metrik uzay olduğunu ispatlamıştır. Daha sonraki yıllarda da bulanık sayı dizileri pek çok araştırmaya konu olmuştur.

Bulanık sayı dizileri zaman içerisinde pek çok alanda olduğu gibi toplanabilme teorisinde de odak noktası haline gelmiştir. Subrahmanyam (1999) bulanık sayı dizileri için Cesàro toplanabilme metodunu tanımlamış ve klasik tipteki bazı Tauber tipi teoremlerin bulanık sayı dizileri için benzerlerini ispatlamıştır. Talo ve Çakan (2012), Talo ve Başar (2013) ve Çanak (2014) bulanık sayı dizilerinin Cesàro toplanabilme metodunu için bazı Tauber tipi teoremler sunmuşlardır. Altın et al. (2006) bulanık sayı dizileri için istatistiksel Cesàro toplanabilmeyi tanımlamış ve bazı Tauber tipi sonuçlar elde etmişlerdir. Çanak (2014) bulanık sayı dizilerinin Hölder toplanabilme metodu için bir Tauber tipi teorem vermiştir. Tripathy ve Baruah (2010) bulanık sayı dizileri için Nörlund ve Riesz metotlarını tanıtmışlar ve Riesz metodu için bir Tauber tipi teorem ispatlamışlardır. Çanak (2014) Riesz toplanabilme metodu için klasik tipteki bir Tauber tipi teoremin bulanık sayı diziler için benzerini kanıtlamıştır. Önder et al. (2015) bulanık sayı dizileri için verilen yavaş azalanlık koşulunun Riesz metodu için bir Tauber tipi koşul olduğunu göstermişler ve buna dayanarak bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu tezin amacı, bulanık sayı dizileri için ağırlıklı ortalama toplanabilme metodunun özelliklerini tanıtmak ve daha önce klasik analizde verilmiş bazı Tauber tipi teoremlerin bulanık sayı dizileri için benzerlerini ispatlamaktır. Literatürde bulanık sayı dizilerinin Cesàro toplanabilirliği için çok sayıda Tauber tipi teorem bulunmaktadır ancak yeni bir alan olan bu konuda yeterli çalışma bulunmamaktadır. Daha genel bir toplanabilme metodu olan ağırlıklı ortalama metodu için elde edilecek olan sonuçların bu alana katkı sağlaması beklenmektedir.

Tezin ilk bölümünde, bulanık mantığın hangi gereksinimlerden dolayı ortaya çıktığı kısaca anlatılacak ve sağlamış olduğu yararlar birkaç örnekle açıklanacaktır. Ardından, bu alanda faaliyet gösteren araştırmacılar tarafından yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar hakkında özet niteliğinde bilgiler verilecek ve tezi oluşturan bölümlerin içerikleri üzerinde durulacaktır.

Tezin ikinci bölümünde, bulanık sayıları ve bulanık sayı dizileri için temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Ardından, reel sayı dizileri için tez içerisinde bahsedilecek olan bazı toplanabilme metotlarının tanımları ile bu metotlar için bir Tauber tipi koşul oluşturacak olan özel tipteki bazı diziler üzerinde durulacaktır.

Tezin son bölümünde, bulanık sayı dizileri için ağırlıklı ortalama metodu başta olmak üzere bazı toplanabilme metotları tanımlanacak, metotların regüler olması için gerek ve yeter koşullardan bahsedilecek, tezin ikinci bölümünde reel sayı dizileri için verilmiş olan bazı Tauber tipi koşulların bulanık sayı dizilerindeki karşılıkları verilecek ve ağırlıklı ortalama metodu ile ilgili bazı Tauber tipi teoremler ispatlanacaktır.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde ilk olarak, bulanık sayılar, bulanık sayılar uzayı üzerindeki cebirsel operatörler ve metrik kavramı ile bunlara ait özellikler, bulanık sayı dizi ve serileri ile bunlara ait teoremler verilecektir. Ardından, toplanabilme teorisindeki bazı metot ve kavramlardan bahsedilecek ve bu metot ve kavramları içeren bazı Tauber tipi teoremlere yer verilecektir.

2.1 Bulanık Sayılara Ait Temel Kavramlar

Klasik kümeler, bir nesnenin kümeye ait olup olmama durumu çerçevesinde geliştirilmiştir. Bu durumu ifade etmek için alternatif bir yol sunan karakteristik fonksiyon, nesne kümenin elemanı ise “1” değerini, kümenin elemanı değilse “0” değerini alır. Bulanık kümeler incelendiğinde ise, karakteristik fonksiyonun $[0, 1]$ aralığında değişen değerler aldığı görülür. Bu durumda, bulanık kümeler karakteristik fonksiyonlarıyla ifade edilen klasik kümelerden daha kapsamlıdır.

Bir bulanık sayı reel sayılar üzerinde bir bulanık kümedir ve bu kümeler klasik kümelerden daha kapsamlı olduğundan bulanık sayıların da reel sayıların genelleştirilmesi olduğu söylenebilir. Ancak bu sayılar kendine ait bazı ek özelliklere de sahiptir.

Tanım 2.1 (Goetschel and Voxman, 1986) $\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan

$u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna bir bulanık sayı ya da fuzzy sayısı denir:

- (i) u normaldir; yani $u(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır.
- (ii) u fuzzy konvektir; yani her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$$

gerçeklenir.

- (iii) u üst yarı süreklidir.

(iv) u ’nun desteği denilen $[u]_0 := \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$ kümesi kompakttır, burada $\overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$ kümesi $\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ nin doğal topolojisi üzerindeki kapanışını gösterir.

$\mathbb{R}$ üzerindeki tüm bulanık(fuzzy) sayıların kümesi E^1 ile gösterilir ve *bulanık(fuzzy) sayılar uzayı* olarak adlandırılır. Literatürde bulanık ifadesi yerine fuzzy ifadesi daha yaygın olarak kullanıldığından, tezin bundan sonraki kısmında bulanık ifadesinin yerini fuzzy ifadesi alacaktır.

Herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ için, $\bar{r} \in E^1$

$$\bar{r}(x) := \begin{cases} 1, & x = r, \\ 0, & x \neq r \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Her reel sayı aynı zamanda bir fuzzy sayısıdır. Bu durumda, tüm reel sayılar kümesi E^1 uzayı içine gömülebilirdir.

Bir u fuzzy sayısının α -seviye kümesi

$$[u]_\alpha := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}, & (0 < \alpha \leq 1), \\ \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > \alpha\}}, & (\alpha = 0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanımdan anlaşılacağı üzere, $u \in E^1$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha$ kümesinin boştan farklı, kapalı ve sınırlı bir aralık olmasıdır.

Negoita ve Ralescu (1975) tarafından verilen bir sonraki teorem, fuzzy sayılarının bir karakterizasyonudur ve bir fuzzy sayısıyla onun seviye kümesi arasındaki ilişkiyi vermesi bakımından oldukça önemlidir.

Teorem 2.1 (Negoita and Ralescu, 1975) $u \in E^1$ ve her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha$, u fuzzy sayısının seviye kümesi olsun. O zaman aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) Herhangi bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ boştan farklı kapalı bir aralıktır.

(ii) $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ise o zaman $[u]_{\alpha_2} \subset [u]_{\alpha_1}$ olur.

(iii) $\alpha \in (0, 1]$ noktasına alttan yakınsayan herhangi bir (α_n) dizisi için

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]_{\alpha_n} \right) = [u]_\alpha$$

vardır.

(iv) Sıfıra üstten yakınsayan herhangi bir (α_n) dizisi için

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [u]_{\alpha_n} \right) = [u]_0$$

vardır.

Tersine, $\{[M]_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ $\mathbb{R}$ nin bir alt kümeler ailesi olmak üzere yukarıdaki (i)-(iv) koşullarını sağlasın. O zaman herhangi bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha = [M]_\alpha$ olacak şekilde tek bir $u \in E^1$ vardır.

$[u]_\alpha$ seviye kümesinin uç noktaları $u^-(\alpha) = \inf[u]_\alpha$ ve $u^+(\alpha) = \sup[u]_\alpha$ ile verilir.

Goetschel ve Voxman (1986) tarafından verilen bir sonraki teorem, fuzzy sayıların farklı bir temsildir.

Teorem 2.2 (Goetschel and Voxman, 1986) $u \in E^1$ ve her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ olsun. O zaman α -seviye kümelerinin uç noktaları olarak tanımlanan $u^-, u^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlar:

- (i) $u^-(\alpha) \in \mathbb{R}$, $(0, 1]$ üzerinde sınırlı, azalmayan ve soldan sürekli bir fonksiyondur.
- (ii) $u^+(\alpha) \in \mathbb{R}$, $(0, 1]$ üzerinde sınırlı, artmayan ve soldan sürekli bir fonksiyondur.
- (iii) $u^-(\alpha)$ ve $u^+(\alpha)$ fonksiyonları $\alpha = 0$ noktasında sağdan süreklidir.
- (iv) $u^-(1) \leq u^+(1)$.

Tersine, f ve g (i)-(iv) koşullarını sağlayan bir fonksiyon ikilisi ise, o zaman her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $[u]_\alpha := [f(\alpha), g(\alpha)]$ ve

$$u(x) := \sup_{\alpha \in [0, 1]} \{\alpha : f(\alpha) \leq x \leq g(\alpha)\}$$

olacak şekilde tek bir u fuzzy sayısı vardır.

Fuzzy sayılar kümesi üzerindeki toplama, çıkarma, skalerle çarpma, çarpma ve bölme gibi cebirsel operatörlerle eşitlik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$u, v \in E^1$, $k \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olsun. O zaman

- (i) iki fuzzy sayısının eşitliği,

$$u = v \Leftrightarrow [u]_\alpha = [v]_\alpha$$

- (ii) iki fuzzy sayısının toplamı,

$$\begin{aligned} w = u + v &\Leftrightarrow [w]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha \\ &\Leftrightarrow [w^-(\alpha), w^+(\alpha)] = [u^-(\alpha) + v^-(\alpha), u^+(\alpha) + v^+(\alpha)] \end{aligned}$$

- (iii) iki fuzzy sayısının farkı,

$$\begin{aligned} w = u - v &\Leftrightarrow [w]_\alpha = [u]_\alpha - [v]_\alpha \\ &\Leftrightarrow [w^-(\alpha), w^+(\alpha)] = [u^-(\alpha) - v^+(\alpha), u^+(\alpha) - v^-(\alpha)] \end{aligned}$$

(iv) bir fuzzy sayısının skalerle çarpımı,

$$[ku]_{\alpha} = k[u]_{\alpha}$$

(v) iki fuzzy sayısının çarpımı,

$$w = uv \Leftrightarrow [w]_{\alpha} = [u]_{\alpha}[v]_{\alpha}$$

olmak üzere

$$w^{-}(\alpha) = \min\{u^{-}(\alpha)v^{-}(\alpha), u^{-}(\alpha)v^{+}(\alpha), u^{+}(\alpha)v^{-}(\alpha), u^{+}(\alpha)v^{+}(\alpha)\}$$

ve

$$w^{+}(\alpha) = \max\{u^{-}(\alpha)v^{-}(\alpha), u^{-}(\alpha)v^{+}(\alpha), u^{+}(\alpha)v^{-}(\alpha), u^{+}(\alpha)v^{+}(\alpha)\}$$

(vi) iki fuzzy sayısının bölümü,

$$w = u/v \Leftrightarrow [w]_{\alpha} = [u]_{\alpha}/[v]_{\alpha}$$

olmak üzere

$$w^{-}(\alpha) = \min\left\{\frac{u^{-}(\alpha)}{v^{-}(\alpha)}, \frac{u^{-}(\alpha)}{v^{+}(\alpha)}, \frac{u^{+}(\alpha)}{v^{-}(\alpha)}, \frac{u^{+}(\alpha)}{v^{+}(\alpha)}\right\}$$

ve

$$w^{+}(\alpha) = \max\left\{\frac{u^{-}(\alpha)}{v^{-}(\alpha)}, \frac{u^{-}(\alpha)}{v^{+}(\alpha)}, \frac{u^{+}(\alpha)}{v^{-}(\alpha)}, \frac{u^{+}(\alpha)}{v^{+}(\alpha)}\right\}$$

şeklindedir.

Bunların yanı sıra, $u \in E^1$ ve $0 \notin \{t \in \mathbb{R} : u(t) > 0\}$ ise, o zaman

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{-}(\alpha) = \frac{1}{u^{+}(\alpha)} \text{ ve } \left(\frac{1}{u}\right)^{+}(\alpha) = \frac{1}{u^{-}(\alpha)}$$

biçiminde tanımlanır. Bu kısımda, yukarıda tanımlanan işlemler temel alınarak fuzzy sayılarının toplama ve çarpma işlemlerine göre sahip olduğu bazı cebirsel özellikler verilecektir.

Teorem 2.3 (Bede, 2013)

(i) Fuzzy sayılar toplama işlemine göre değişmeli ve birleşmelidir; yani,

her bir $u, v, w \in E^1$ için $u + v = v + u$ ve $u + (v + w) = (u + v) + w$ dur.

(ii) Toplama işlemine göre fuzzy sayıların birim elemanı $\bar{0} \in E^1$ dir; yani, her bir $u \in E^1$ için $u + \bar{0} = \bar{0} + u = u$ dur.

(iii) Toplama işlemine göre hiçbir $u \in E^1 \setminus \mathbb{R}$ sayısı fuzzy sayılar uzayında ters elemana sahip değildir.

- (iv) $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ olsun. Eğer $ab \geq 0$ veya $ab \leq 0$ ise o zaman $(a + b)u = au + bu$ dur. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için bu eşitlik gerçekleşmeyebilir.
- (v) Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ ve $u, v \in E^1$ için $a(u + v) = au + av$ dir.
- (vi) Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ için $(ab)u = a(bu)$ dur.

Bir önceki teoremin sonucu olarak, fuzzy sayılar uzayının bir lineer uzay olmadığı söylenebilir.

Teorem 2.4 (Bede, 2013)

- (i) Çarpma işlemine göre fuzzy sayıların birim elemanı $\bar{1} \in E^1$ dir; yani, her bir $u \in E^1$ için $u\bar{1} = \bar{1}u = u$ dur.
- (ii) Çarpma işlemine göre hiçbir $u \in E^1 \setminus \mathbb{R}$ sayı fuzzy sayılar uzayında ters elemana sahip değildir.
- (iii) Herhangi bir $u, v, w \in E^1$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$([u]_\alpha + [v]_\alpha)[w]_\alpha \subseteq [u]_\alpha[w]_\alpha + [v]_\alpha[w]_\alpha$$

eşitsizliği vardır; yani, genel durumda çarpma işlemine göre fuzzy sayıların dağılma özelliği yoktur.

- (iv) $0 \notin [u]_0, [v]_0, [w]_0$ olmak üzere, herhangi bir $u, v, w \in E^1$ için $u(vw) = (uv)w$ eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.2 (Aytar et al., 2010) Fuzzy sayılar uzayı üzerinde $u, v \in E^1$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere,

- (i) kısmi sıralama bağıntısı,

$$\begin{aligned} u \preceq v &\Leftrightarrow [u]_\alpha \preceq [v]_\alpha \\ &\Leftrightarrow u^-(\alpha) \leq v^-(\alpha) \quad \text{ve} \quad u^+(\alpha) \leq v^+(\alpha) \end{aligned}$$

- (ii) kesin küçüklük bağıntısı,

$$u \prec v \Leftrightarrow u \preceq v \text{ ve } \exists \alpha_0 \in [0, 1], u^-(\alpha_0) < v^-(\alpha_0) \text{ ya da } u^+(\alpha_0) < v^+(\alpha_0)$$

şeklinde tanımlanır.

- (iii) Eğer $u \preceq v$ ve $v \preceq u$ bağıntılarından her ikisi de gerçekleşmiyorsa, u ve v fuzzy sayıları kıyaslanamaz denir ve $u \approx v$ şeklinde gösterilir.

$u, v \in E^1$ olacak şekilde fuzzy sayılar uzayı üzerinde kapalı bir aralık,

$$[u, v] = \{w \in E^1 : u \preceq w \preceq v\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3 (Kadak and Başar, 2013) $u \in E^1$ olmak üzere $u \succeq \bar{0}$ ise o zaman u sayısına negatif olmayan fuzzy sayısı denir. Benzer olarak, eğer $u \preceq \bar{0}$ ise o zaman u sayısı pozitif olmayan fuzzy sayısı olarak adlandırılır.

Kısmi sıralama bağıntısının uygulanması halinde, $u \in E^1$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $u^-(\alpha) \geq 0$ koşulu sağlanıyorsa o zaman u sayısına negatif olmayan fuzzy sayısı denir. Benzer olarak, eğer $u^+(\alpha) \leq 0$ koşulu sağlanıyorsa o zaman u sayısı pozitif olmayan fuzzy sayısı olarak adlandırılır.

Teorem 2.5 (Li and Wu, 2007) $u, v, w \in E^1$ olsun. Eğer u sayısı $\bar{0}$ ile kıyaslanabilir, $v \succeq \bar{0}, w \succeq \bar{0}$ ya da $v \preceq \bar{0}, w \preceq \bar{0}$ ise o zaman

$$u(v + w) = uv + uw$$

eşitliği gerçekleşir.

Fuzzy sayılar uzayı üzerindeki kısmi sıralama bağıntısının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.1 (Talo and Başar, 2013) $u, v \in E^1$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $u \preceq v + \bar{\epsilon}$ ise o zaman $u \preceq v$ olur.

Lemma 2.2 (Talo and Başar, 2013) $u, v, w, e \in E^1$ olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) Eğer $u \preceq v, v \preceq w$ ise o zaman $u \preceq w$ olur.
- (ii) Eğer $u \prec v, v \prec w$ ise o zaman $u \prec w$ olur.
- (iii) Eğer $u \preceq w, v \preceq e$ ise o zaman $u + v \preceq w + e$ olur.
- (iv) Eğer $u \succeq \bar{0}, v \succ w$ ise o zaman $uv \succeq uw$ olur.

Lemma 2.3 (Talo and Başar, 2013) $u, v, w \in E^1$ olsun. Eğer $u + w \preceq v + w$ ise o zaman $u \preceq v$.

Fuzzy sayılar uzayı üzerinde pek çok metrik tanımlanabilir. Ancak, bu metrikler arasında en çok bilinen ve en çok çalışılan metrik Hausdorff uzaklığıdır. Fuzzy

sayıları için bu uzaklık, reel sayıların kompakt konveks alt kümeleri arasındaki klasik Hausdorff uzaklığını temel alır. Bu yüzden, önce klasik anlamda Hausdorff uzaklığını tanımlayalım:

W tüm kapalı ve sınırlı aralıkların kümesi olmak üzere, $A, B \in W$ ve $A = [\underline{A}, \overline{A}]$, $B = [\underline{B}, \overline{B}]$ iki kapalı aralık olsun. W üzerindeki Hausdorff uzaklığı,

$$d(A, B) := \max \{ |\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}| \}$$

şeklinde tanımlanır. Tanımlanan bu uzaklığa göre, W tam ayrılabilir bir metrik uzaydır. (Nanda, 1989)

Bu metrikten hareketle, fuzzy sayılar uzayı üzerindeki Hausdorff uzaklığını tanımlayalım:

Tanım 2.4 (Bede, 2013) $D : E^1 \times E^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} D(u, v) &:= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \{ |u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)| \} \\ &:= \sup_{\alpha \in [0,1]} d([u]_\alpha, [v]_\alpha). \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan D fonksiyonuna fuzzy sayıları arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

D metriğinin tanımından,

$$D(u, \bar{0}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \{ |u^-(\alpha)|, |u^+(\alpha)| \} = \max \{ |u^-(0)|, |u^+(0)| \}$$

olduğu görülür.

Bir sonraki önerme, fuzzy sayıları arasındaki Hausdorff uzaklığının bazı özelliklerini vermektedir.

Önerme 2.1 (Bede, 2013) $u, v, w, z \in E^1$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

- (i) (E^1, D) bir tam metrik uzaydır.
- (ii) $D(u + w, v + w) = D(u, v)$ dir, yani; iki fuzzy sayısı arasındaki Hausdorff uzaklığı öteleme işlemi altında değişmez.
- (iii) $D(ku, kv) = |k| D(u, v)$.
- (iv) $D(u + v, w + z) \leq D(u, w) + D(v, z)$.
- (v) $|D(u, \bar{0}) - D(v, \bar{0})| \leq D(u, v) \leq D(u, \bar{0}) + D(v, \bar{0})$.

Lemma 2.4 (Anastassiou and Gal, 2001) Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in E^1$ için $ab \geq 0$ olmak üzere,

$$D(au, bu) \leq |a - b| D(u, \bar{0})$$

sağlanır.

Lemma 2.5 (Aytar et al., 2010) Herhangi iki u ve v fuzzy sayıları için aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) $D(u, v) \leq \epsilon$,
- (ii) $\epsilon > 0$ olmak üzere $u - \bar{\epsilon} \preceq v \preceq u + \bar{\epsilon}$

Bundan sonraki kısımda, fuzzy sayı dizileri ve fuzzy sayı serilerinin tanımları ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilecektir.

Tanım 2.5 (Matloka, 1986) Bir $u = (u_n)$ fuzzy sayı dizisi, tüm pozitif sayılar kümesi $\mathbb{N}$ den E^1 uzayına giden bir fonksiyondur. u_n fuzzy sayısı, $n \in \mathbb{N}$ noktasında fonksiyonun aldığı değeri göstermektedir ve dizinin n . terimi olarak adlandırılır. Tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesi $\omega(F)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 (Matloka, 1986) $u = (u_n)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $D(u_n, \bar{0}) < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ bulunabiliyorsa $u = (u_n)$ dizisine sınırlı bir dizi denir. Sınırlı fuzzy sayı dizilerinin kümesi $\ell_\infty(F)$ ile gösterilir.

Tanımdan hareketle, bir $(u_n) \in \omega(F)$ dizisinin sınırlılığının

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} D(u_n, \bar{0}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|u_n^-(\alpha)|, |u_n^+(\alpha)|\} < \infty$$

eşitsizliğine denk olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra, bir fuzzy sayı dizisinin sınırlılık kavramı, metrikle verilmek yerine kısmi sıralama bağıntısıyla da verilebilir.

Tanım 2.7 (Kadak and Başar, 2013) Bir $(u_n) \in \omega(F)$ dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul (u_n) dizisinin terimlerini içeren $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fuzzy sayılar kümesinin sınırlı bir küme olmasıdır. Diğer bir ifadeyle, bir $(u_n) \in \omega(F)$ dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul her $n \in \mathbb{N}$ için $m \preceq u_n \preceq M$ olacak şekilde m ve M fuzzy sayılarının olmasıdır. Buradan, her $\alpha \in [0, 1]$ için $m^-(\alpha) \leq u_n^-(\alpha) \leq M^-(\alpha)$ ve $m^+(\alpha) \leq u_n^+(\alpha) \leq M^+(\alpha)$ eşitsizliklerinin sağlandığı görülür.

Tanım 2.8 (Matloka, 1986) $(u_n) \in \omega(F)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\mu_0 \in E^1$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için

$$D(u_n, \mu_0) < \epsilon, \quad n > n_0$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (u_n) dizisi μ_0 'a yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \mu_0$ ya da $u_n \rightarrow \mu_0$ şeklinde yazılır. Yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi $c(F)$ ile gösterilir. $\bar{0}$ değerine yakınsayan fuzzy sayı dizilerinin kümesi ise $c_0(F)$ ile temsil edilir.

Tanım 2.9 (Matloka, 1986) $(u_n) \in \omega(F)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\epsilon > 0$ için

$$D(u_n, u_m) < \epsilon, \quad n, m > n_0$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (u_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir ve Cauchy dizilerinin kümesi $C(F)$ ile gösterilir.

Bir $(u_n) \in \omega(F)$ dizisi $u \in E^1$ fuzzy sayısına yakınsıyorsa o zaman D metriğinin tanımından, $\{u_n^-(\alpha)\}$ ve $\{u_n^+(\alpha)\}$ fonksiyon dizileri, $[0, 1]$ aralığında sırasıyla $u^-(\alpha)$ ve $u^+(\alpha)$ değerlerine düzgün olarak yakınsar. Tersine, $\{u_n^-(\alpha)\}$ ve $\{u_n^+(\alpha)\}$ fonksiyon dizileri, $[0, 1]$ aralığında sırasıyla $u^-(\alpha)$ ve $u^+(\alpha)$ değerlerine düzgün olarak yakınsıyorsa $(u_n) \in \omega(F)$ dizisi de $u \in E^1$ fuzzy sayısına yakınsar.

Fuzzy sayı dizileri üzerindeki Hausdorff uzaklığına göre, $\ell_\infty(F)$, $c(F)$ ve $c_0(F)$ uzayları tam metrik uzaylardır. (Nanda, 1989)

Teorem 2.6 (Matloka, 1986) $(u_n) \in \omega(F)$ yakınsak bir fuzzy sayı dizisi olsun. O zaman (u_n) dizisinin tek bir limit noktası vardır.

Teorem 2.7 (Matloka, 1986) $(u_n), (w_n), (v_n) \in \omega(F)$ ve $u_n \preceq w_n \preceq v_n$ olsun. Eğer $n \rightarrow \infty$ durumunda $u_n \rightarrow \mu_0$ ve $v_n \rightarrow \mu_0$ ise o zaman $w_n \rightarrow \mu_0$ olur.

Teorem 2.8 (Matloka, 1986) Yakınsak bir fuzzy sayı dizisi sınırlıdır.

Teorem 2.9 (Matloka, 1986) $(u_n), (v_n) \in \omega(F)$, $k \in \mathbb{R}$ ve $n \rightarrow \infty$ durumunda $u_n \rightarrow a$ ve $v_n \rightarrow b$ olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur:

- (i) $u_n \pm v_n \rightarrow a \pm b$, $n \rightarrow \infty$
- (ii) $ku_n \rightarrow ka$, $n \rightarrow \infty$
- (iii) $u_nv_n \rightarrow ab$, $n \rightarrow \infty$
- (iv) $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{a}{b}$, $n \rightarrow \infty$ (her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \notin [v_n]_0, [b]_0$ olmalıdır.)

Tanım 2.10 (Matloka, 1986) $(u_n) \in \omega(F)$ ve (n_k) doğal sayıların artan bir dizisi olsun. O zaman (u_{n_k}) dizisine, (u_n) nin bir alt dizisi denir.

Fuzzy sayı dizileriyle ilgili verilen tüm kavramlar göz önünde bulundurulduğunda,

$$c_0(F) \subset c(F) \subset C(F) \subset \ell_\infty(F) \subset \omega(F)$$

olduğu açıkça görülür.

Tanım 2.11 (Kadak and Başar, 2013) $u = (u_n) \in \omega(F)$ olmak üzere her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

tanımlansın. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir μ fuzzy sayısına yakınsak ise, o halde fuzzy sayılarının $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi μ sayısına yakınsaktır denir ve $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \mu$ şeklinde gösterilir. $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi μ sayısına yakınsak ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k^-(\alpha) = \mu^-(\alpha) \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k^+(\alpha) = \mu^+(\alpha)$$

yakınsamaları $[0, 1]$ aralığında düzgündür. Aksine,

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^-(\alpha) = \mu^-(\alpha) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k^+(\alpha) = \mu^+(\alpha)$$

serileri $[0, 1]$ aralığında düzgün yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \mu$ olacak şekilde $[\mu]_\alpha = [\mu^-(\alpha), \mu^+(\alpha)]$ bir fuzzy sayısı tanımlar.

Lemma 2.6 (Talo and Başar, 2009) $(u_k), (v_k) \in \omega(F)$ olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ serileri yakınsak ise

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \sum_{k=0}^{\infty} v_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} D(u_k, v_k)$$

gerçeklenir.

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} D(u_k, \bar{0}) \leq \infty$ ise $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi yakınsaktır.

Lemma 2.7 (*Stojakovic and Stojakovic, 2009*) $(u_k) \in \omega(F)$ olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur:

- (i) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi yakınsak ise $k \rightarrow \infty$ olmak üzere $u_k \rightarrow \bar{0}$ dır.
- (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi yakınsak ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

sağlanır.

2.2 Toplanabilme Teorisiyle İlgili Temel Kavramlar

19. yüzyıldan günümüze kadar ciddi bir ilerleme kaydeden ve matematiksel analizin geniş bir alanı olan toplanabilme teorisi, harmonik analizden olasılık ve sayılar teorisine kadar pek çok alanda yararlı sonuçlar sunması bakımından oldukça önemlidir. Bir yakınsak serinin toplamını doğrudan belirlemenin zor olduğu durumlarda ya da bir ıraksak seriye mümkün olan en uygun toplam atanmak istendiğinde toplanabilme metotlarına başvurulur. Yakınsak olan bir seri ya da dizi herhangi bir toplanabilme metodu tarafından yakınsadığı noktaya toplanabiliyorsa, o metoda regülerdir denir. Bundan daha genel bir ifadeyle, herhangi bir toplanabilme metodu tarafından bir değere toplanabilen bir seri ya da dizi kendisinden daha güçlü olan başka bir metot tarafından aynı değere toplanabiliyorsa, bu tipteki teoremlere *Abel tipi teorem* adı verilir. Ancak bu tipteki teoremlerin terslerinin doğru olması gerekmez. Bu teoremlerin terslerinin doğru olabilmesi genel terim üzerine konulacak belirli koşullar ile mümkün olduğundan, temel problem bu koşulların neler olduğunu belirlemektir.

Bu tarzdaki ilk çalışma 1897 yılında Avusturyalı matematikçi Alfred Tauber (1897) tarafından yapılmıştır. Tauber, Abel metodu tarafından toplanabilen bir serinin yakınsaklığı için gerekli olan koşulun $na_n \rightarrow 0$ olduğunu ispatlamıştır. 1910 yılında, G. H. Hardy ve J. E. Littlewood (1914) Tauber'in çalışmalarından etkilenerek seriler üzerindeki araştırmalarına başlamışlar, Tauber tarafından verilen yakınsaklık koşulunu sınırlılığa indirgemişler ve bu tipteki teoremlere de *Tauber tipi teorem* adını vermişlerdir. İlerleyen yıllarda yapılan çalışmalar, Tauber'in verdiği koşulun zayıflatılması üzerine yoğunlaşmıştır. Bu koşulun zayıflatılması sürecinde, Hardy ve Littlewood'un yanı sıra, Landau (1910), Schmidt (1925) ve Szász (1951) da önemli bir rol oynamıştır.

Bu bölümde, Cesàro toplanabilme metodu ve bu metottan daha genel olmakla beraber tezin konusunu oluşturan ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için temel tanımlar verilecek, bu metotların regüler olması için gerekli koşullardan bahsedilecektir. Bunun yanı sıra, bu metotlar için bazı Tauber tipi teoremler üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.12 (Hardy, 1991) $u = (u_n)$ reel sayıların bir dizisi olmak üzere, bu dizinin aritmetik ortalaması

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

ile gösterilsin. Sonlu bir s sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$$

ise (u_n) dizisi s ye Cesàro toplanabilirdir denir ve $u_n \rightarrow s (C, 1)$ şeklinde gösterilir.

Her yakınsak dizi aynı noktaya Cesàro toplanabilirdir. Ancak her Cesàro toplanabilir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Bu durum klasik bir örnekle açıklanabilir.

Örnek 2.1 $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right)$ dizisini alalım. Bu dizi ıraksak olduğu halde Cesàro toplanabilirdir:

(u_n) dizisini

$$u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1, & n \text{ çift}, \\ 0, & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz, bu takdirde dizinin ıraksak olduğu görülür. Bu dizinin aritmetik ortalaması alınır,

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} \frac{n+2}{2(n+1)}, & n \text{ çift}, \\ \frac{1}{2}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

elde edilir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$ olur. Yani, (u_n) dizisi $\frac{1}{2}$ ye Cesàro toplanabilirdir.

Yukarıdaki Örnek 2.1 den görüldüğü üzere, yakınsak diziler uzayı Cesàro toplanabilir diziler uzayı tarafından kapsanır.

Cesàro toplanabilir diziler uzayından yakınsak diziler uzayına geçiş dizi üzerine konulacak uygun koşullarla mümkündür. Daha genel olarak, P bir toplanabilme metodu olmak üzere, bir dizi P toplanabilir ve buna ilaveten bazı T_p koşullarını sağlıyorsa, bu dizi yakınsaktır. T_p koşullarının her birine *Tauber koşulu* ve bu tipteki teoremlere de *Tauber tipi teoremler* adı verilir. Buradaki T_p koşulları metoda göre değişiklik gösterir, ancak her durumda ıraksaklığın belli bir yavaşlamasını ifade eder. Tezin ilerleyen bölümlerinde ağırlıklı ortalama metodu

için Tauber tipi teoremler verilecektir.

Tez boyunca sıkça kullanılacak olan bazı gösterimler aşağıda verilmiştir. Herhangi bir $v_n > 0$ ($n \geq N$) ve $(u_n) \in \omega$ için,

$$(i) \quad u_n = O(v_n) : \Leftrightarrow \exists M > 0, n \geq N : |u_n| \leq Mv_n$$

$$(ii) \quad u_n = o(v_n) : \Leftrightarrow n \rightarrow \infty \text{ için } \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $v_n = 1$ durumunda yukarıdaki notasyonların yerine, sırasıyla $O(1)$ ve $o(1)$ kullanılır.

Cesàro toplanabilme metoduyla ilgili ilk Tauber tipi teorem 1897 yılında Tauber tarafından ispatlanmıştır. Bu teoreme göre, (u_n) dizisi sonlu bir s sayısına $(C, 1)$ toplanabilir ve $n\Delta u_n = o(1)$ ise, (u_n) dizisi s ye yakınsar. Ancak, Tauber'in bu koşulu 1914 yılında sırasıyla Hardy ve Landau tarafından $n\Delta u_n = O(1)$ ve $n\Delta u_n \geq -M$ koşullarına indirgenir.

Tauber tipi koşulların zayıflatılması sürecinde dizilerle ilgili yeni kavramlara gereksinim duyulmuştur. Aşağıda verilecek olan bu kavramlar ilk defa Schmidt (Schmidt, 1925) tarafından ortaya atılmıştır.

Tanım 2.13 (Boos, 2000) $\lambda_n, \lambda n$ nin tam değeri olmak üzere, $(u_n) \in \omega$ için,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{n < k \leq \lambda_n} (u_k - u_n) \geq 0 \quad (1)$$

koşulu gerçekleşiyorsa,

ya da denk olarak,

her $\epsilon > 0$ için $n_0 \leq n < k \leq \lambda_n$ iken $u_k - u_n \geq -\epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ ve $\lambda = \lambda(\epsilon) > 1$ varsa, (u_n) dizisine yavaş azalan dizi denir.

Lemma 2.8 (Schmidt, 1925) $\lambda_n, \lambda n$ nin tam değeri olmak üzere, $(u_n) \in \omega$ için (1) koşulu aşağıdaki koşula denktir:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{\lambda_n < k \leq n} (u_n - u_k) \geq 0$$

Tanım 2.14 (Schmidt, 1925) $\lambda_n, \lambda n$ nin tam değeri olmak üzere, $(u_n) \in \omega$ için,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{n < k \leq \lambda_n} |u_k - u_n| = 0$$

koşulu gerçekleşiyorsa,

ya da denk olarak,

$n > m \rightarrow \infty$ için $\frac{n}{m} \rightarrow 1$ olmak üzere $u_n - u_m = o(1)$ sağlanıyorsa, (u_n) dizisine yavaş salınımlı dizi denir.

Yavaş salınımlı dizilere örnek olarak, tüm yakınsak diziler ile

$$\log n, \log \log n, (\log n)^\alpha (\alpha > 0)$$

gibi diziler verilebilir.

Tezin ilerleyen bölümlerinde yavaş azalanlık ve yavaş salınımlılık kavramlarına sıklıkla yer verileceğinden, bunlara ait bazı özellikleri sıralamakta fayda vardır:

(i) Her yakınsak dizi yavaş salınımlıdır, ancak tersi her zaman doğru değildir.

Örneğin; $(u_n) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$ dizisi yakınsak değildir, fakat $n > m \rightarrow \infty$ için $\frac{n}{m} \rightarrow 1$ olmak üzere

$$u_n - u_m = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \leq \int_m^n \frac{dk}{k} = \log \left(\frac{n}{m} \right) \rightarrow 0$$

olduğundan, tanımı gereğince (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır.

(ii) Her artan dizi yavaş azalandır.

(iii) $(-u_n)$ dizisi yavaş azalan ise (u_n) dizisine *yavaş artan dizi* denir.

(iv) Bir dizi hem yavaş azalan hem de yavaş artan ise yavaş salınımlıdır, ancak tersi doğru olmak zorunda değildir.

(v) (u_n) dizisi yavaş salınımlı ise $\Delta u_n = o(1)$ dir.

(vi) (u_n) bir reel sayılar dizisi olmak üzere $(n\Delta u_n)$ dizisi tek taraflı sınırlı ise (u_n) dizisi yavaş azalandır.

Yukarıda bahsedilen tanımlar doğrultusunda, yavaş azalanlık ve yavaş salınımlılık kavramları Cesàro toplanabilme metodu için Tauber tipi koşullardır.

Tanım 2.15 (Hardy, 1991) $p = (p_k)$, $p_0 > 0$ ve

$$P_n := \sum_{k=0}^n p_k \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir sayı dizisi olsun. (u_n) dizisinin ağırlıklı ortalaması

$$t_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k u_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Sonlu bir μ_0 sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \mu_0$$

ise, (u_n) dizisi ağırlıklı ortalama metodu tarafından μ_0 sayısına toplanabilir denir ve $u_n \rightarrow \mu_0$ $(\overline{N}, p)$ şeklinde gösterilir.

Ağırlıklı ortalama metodu, Riesz metodu ya da $(\overline{N}, p)$ metodu olarak da bilinir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ olması durumunda $(\overline{N}, p)$ toplanabilme metodu $(C, 1)$ metoduna indirgenir.

$(\overline{N}, p)$ toplanabilme metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul (2) şartının sağlanmasıdır.

Tanım 2.16 (Hardy, 1991) $p = (p_k)$, $p_0 > 0$ ve

$$P_n := \sum_{k=0}^n p_k \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

olacak şekilde negatif olmayan bir sayı dizisi olsun. (u_n) dizisinin Nörlund ortalaması

$$\tau_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k+1} u_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Sonlu bir μ_0 sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \mu_0$$

ise, (u_n) dizisi Nörlund ortalama metodu tarafından μ_0 sayısına toplanabilmir denir ve $u_n \rightarrow \mu_0$ (N, p) şeklinde gösterilir.

Nörlund toplanabilme metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul $n \rightarrow \infty$ durumunda $\frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0$ şartının sağlanmasıdır.

Ağırlıklı ortalama ve Nörlund ortalama metotlarının tanımlanmasının ardından bu metotlara ilişkin yavaş azalanlık ve yavaş salınımlılıkla ilgili birkaç özellik vermekte fayda vardır:

- (i) $p_0 > 0$, (p_k) azalmayan bir dizi ve $\lambda_n > n \rightarrow \infty$ için $\frac{\lambda_n}{n} \rightarrow 1$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} = 1$ sağlansın. Bu durumda, $\left(\frac{P_n}{p_n} \Delta u_n \right)$ dizisi sınırlıysa (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır:

$$|u_k - u_n| = \left| \sum_{j=n+1}^k \Delta u_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^k |\Delta u_j| \leq M \sum_{j=n+1}^k \frac{p_j}{P_j} \leq M \left(\frac{P_k}{P_n} - 1 \right)$$

olur. Tanım uygulanacak olursa,

$$\max_{n < k \leq \lambda_n} |u_k - u_n| \leq \max_{n < k \leq \lambda_n} M \left(\frac{P_k}{P_n} - 1 \right) = M \left(\frac{P_{\lambda_n}}{P_n} - 1 \right)$$

elde edilir. Önce $n \rightarrow \infty$ durumunda üst limite geçilir ve ardından da $\lambda \rightarrow 1^+$ limiti alınırsa tanımın gerçekleştiği görülür.

- (ii) Yukarıda verilen koşullar altında $\left(\frac{P_n}{p_n}\Delta u_n\right)$ dizisi tek taraflı sınırlıysa (u_n) dizisi yavaş azalandır.

3 BULANIK SAYI DİZİLERİ İÇİN AĞIRLIKLIL ORTALAMA TOPLANABİLME METODU

Bu bölümde ilk olarak, aritmetik ortalama metodu, ağırlıklı ortalama metodu ve Nörlund metodu tarafından toplanabilir olan fuzzy sayı dizilerinin tanımları verilecek ve bu metotların regüler olması için gerek ve yeter koşullar üzerinde durulacaktır. Ardından, tezin konusunu oluşturan fuzzy sayı dizilerinin ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için bazı Tauber tipi teoremler ispatlanacaktır.

3.1 Ağırlıklı ortalama metodunun regülerliği ve bazı Tauber tipi koşullar

Bu başlık altında, ikinci bölümde reel sayılar uzayındaki tanımları verilen bazı toplanabilme metotlarının fuzzy sayılar uzayındaki karşılıklarına yer verilecek ve yakınsak olan bir fuzzy sayı dizisinin hangi koşullar altında ağırlıklı ortalama ve Nörlund metodu tarafından yakınsadığı noktaya toplanabilir olduğu söylenecektir. Bunun yanı sıra, daha sonra ağırlıklı ortalama metodu için bir Tauber tipi koşul olduğu söylenecek olan bazı özel tipteki fuzzy sayı dizilerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.1 (Talo and Çakan, 2012) (u_n) bir fuzzy sayı dizisi olsun. (u_n) dizisinin aritmetik ortalaması

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Her $\epsilon > 0$ için

$$D(\sigma_n, \mu_0) < \epsilon, \quad n > n_0$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (u_n) dizisi aritmetik ortalama ya da Cesàro metodu tarafından $\mu_0 \in E^1$ sayısına toplanabilir denir.

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı noktaya Cesàro toplanabilir (Talo and Çakan, 2012). Ancak her Cesàro toplanabilir fuzzy sayı dizisi yakınsak olmak zorunda değildir. Bu durum aşağıdaki gibi bir örnekle açıklanabilir.

Örnek 3.1 (*Talo and Çakan, 2012*)

$$u_0(t) = \begin{cases} 1-t & , t \in [0, 1] \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$v_0(t) = \begin{cases} 1+t & , t \in [-1, 0] \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $(u_n) = (u_0, v_0, u_0, v_0, \dots)$ fuzzy sayı dizisi tanımlayalım. Bu dizi iraksak olduğu halde Cesàro toplanabiliridir:

$$\begin{aligned} \sigma_{2n} &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} u_k = \frac{1}{2n+1} ((u_0 + v_0) + (u_0 + v_0) + \dots + (u_0 + v_0) + u_0) \\ &= \frac{n+1}{2n+1} u_0 + \frac{n}{2n+1} v_0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} u_k = \frac{1}{2n} ((u_0 + v_0) + (u_0 + v_0) + \dots + (u_0 + v_0)) \\ &= \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} v_0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan hareketle, (u_n) fuzzy sayı dizisinin σ_{2n} ve σ_{2n-1} aritmetik ortalamalarının α -seviye kümeleri sırasıyla

$$\begin{aligned} [\sigma_{2n}]_\alpha &= [\sigma_{2n}^-(\alpha), \sigma_{2n}^+(\alpha)] = \left[\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n u_{2k}^-(\alpha), \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n u_{2k}^+(\alpha) \right] \\ &= \left[\frac{n}{2n+1}(\alpha-1), \frac{n+1}{2n+1}(1-\alpha) \right] \end{aligned}$$

ve

$$[\sigma_{2n-1}]_\alpha = \left[\frac{1}{2}(\alpha-1), \frac{1}{2}(1-\alpha) \right]$$

şeklinde bulunur. $w_0 = \frac{u_0 + v_0}{2}$ olarak tanımlanması halinde $D(\sigma_{2n}, w_0) = \frac{1}{2(2n+1)}$ ve $D(\sigma_{2n-1}, w_0) = 0$ elde edilir. Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\sigma_n, w_0) = 0$ olduğu sonucuna varılır. Öyleyse (u_n) fuzzy sayı dizisinin σ_n aritmetik ortalaması $w_0 \in E^1$ sayısına yakınsar ancak bu dizi yakınsak değildir.

Yukarıdaki Örnek 3.1 den görüldüğü üzere, yakınsak fuzzy diziler uzayı Cesàro toplanabilir fuzzy diziler uzayı tarafından kapsanır.

Cesàro toplanabilir fuzzy diziler uzayından yakınsak fuzzy diziler uzayına

geçiş tezin önceki bölümlerinde reel sayı dizileri için verilen ve ilerleyen kısımda da fuzzy sayı dizileri için verilecek olan yavaş azalanlık, yavaş salınımlılık ve bu koşulları gerektiren koşullarla mümkündür. Bu koşulların Tauber tipi koşullar olduğu Talo ve Çakan (2012) ve Talo ve Başar (2013) tarafından ispatlanmıştır.

Tanım 3.2 (Tripathy and Baruah, 2010) (p_k) , $p_0 > 0$ ve

$$P_n := \sum_{k=0}^n p_k \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

olacak şekilde negatif olmayan bir reel sayı dizisi olsun. $(u_n) \in \omega(F)$ dizisinin ağırlıklı ortalaması

$$t_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k u_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Her $\epsilon > 0$ için

$$D(t_n, \mu_0) < \epsilon, \quad n > n_0$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (u_n) dizisi ağırlıklı ortalama metodu tarafından $\mu_0 \in E^1$ sayısına toplanabilir denir.

Reel terimli diziler için verilen ağırlıklı ortalama metodu gibi fuzzy dizileri için verilen ağırlıklı ortalama metodu da, Riesz metodu ya da $(\overline{N}, p)$ metodu olarak bilinir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ olması durumunda $(\overline{N}, p)$ toplanabilme metodu $(C, 1)$ metoduna indirgenir.

Tanım 3.3 (Tripathy and Baruah, 2010) (p_k) , $p_0 > 0$ ve

$$P_n := \sum_{k=0}^n p_k \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

olacak şekilde negatif olmayan bir reel sayı dizisi olsun. $(u_n) \in \omega(F)$ dizisinin Nörlund ortalaması

$$\tau_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k+1} u_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Her $\epsilon > 0$ için

$$D(\tau_n, \mu_0) < \epsilon, \quad n > n_0$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (u_n) dizisi Nörlund ortalama metodu tarafından $\mu_0 \in E^1$ sayısına toplanabilir denir.

Teorem 3.1 (Tripathy and Baruah, 2010) $(\bar{N}, p)$ toplanabilme metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul $n \rightarrow \infty$ iken $P_n \rightarrow \infty$ olmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$): (u_n) fuzzy sayıların yakınsak bir dizisi olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \mu_0$ alalım. O zaman alınan her $\epsilon > 0$ için $n > n_0$ iken $D(u_n, \mu_0) < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Aynı zamanda, her yakınsak fuzzy sayı dizisi sınırlı olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $D(u_n, \mu_0) < H$ olacak şekilde bir $H \in \mathbb{R}$ bulunur. Hipotez gereği, $n \rightarrow \infty$ iken $P_n \rightarrow \infty$ olsun. Bu durumda, her $\epsilon > 0$ için $n > n_1$ iken $\frac{p_k}{P_n} < \frac{\epsilon}{2H \max(n_0, n_1)}$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_2 = \max(n_0, n_1)$ olmak üzere, her $n > n_2$ için

$$\begin{aligned}
& D\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k u_k, \mu_0\right) \\
&= D\left(\frac{1}{P_n} \left(\sum_{k=1}^{n_2} p_k u_k + \sum_{k=n_2+1}^n p_k u_k\right), \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k \mu_0\right) \\
&= D\left(\frac{1}{P_n} \left(\sum_{k=1}^{n_2} p_k u_k + \sum_{k=n_2+1}^n p_k u_k\right), \frac{1}{P_n} \left(\sum_{k=1}^{n_2} p_k \mu_0 + \sum_{k=n_2+1}^n p_k \mu_0\right)\right) \\
&\leq D\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n_2} p_k u_k, \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n_2} p_k \mu_0\right) + D\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=n_2+1}^n p_k u_k, \frac{1}{P_n} \sum_{k=n_2+1}^n p_k \mu_0\right) \\
&= D\left(\frac{1}{P_n} (p_1 u_1 + \dots + p_{n_2} u_{n_2}), \frac{1}{P_n} (p_1 \mu_0 + \dots + p_{n_2} \mu_0)\right) \\
&+ D\left(\frac{1}{P_n} (p_{n_2+1} u_{n_2+1} + \dots + p_n u_n), \frac{1}{P_n} (p_{n_2+1} \mu_0 + \dots + p_n \mu_0)\right) \\
&\leq \frac{p_1}{P_n} D(u_1, \mu_0) + \dots + \frac{p_{n_2}}{P_n} D(u_{n_2}, \mu_0) + \frac{p_{n_2+1}}{P_n} D(u_{n_2+1}, \mu_0) + \dots + \frac{p_n}{P_n} D(u_n, \mu_0) \\
&\leq \frac{p_1}{P_n} H + \dots + \frac{p_{n_2}}{P_n} H + \frac{p_{n_2+1}}{P_n} \frac{\epsilon}{2} + \dots + \frac{p_n}{P_n} \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2Hn_2} H + \dots + \frac{\epsilon}{2Hn_2} H + \left(\frac{p_{n_2+1}}{P_n} + \dots + \frac{p_n}{P_n}\right) \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Öyleyse, (u_n) dizisi μ_0 sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilirdir.

($\Rightarrow$): $(\bar{N}, p)$ toplanabilme metodu regüler olsun ve i. terim $\bar{1}$ olacak şekilde bir $\bar{e}_i = (\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{1}, \bar{0}, \dots) = (u_i)$ dizisi alalım. $i \rightarrow \infty$ iken $u_i \rightarrow \bar{0}$ olduğu açıktır. (t_n) dizisi $\bar{0}$ sayısına yakınsak olduğundan, her $\epsilon > 0$ için, $n > n_0$ durumunda

$$D\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k u_k, \bar{0}\right) = D\left(\frac{p_i}{P_n}, \bar{0}\right) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{p_i}{P_n} \rightarrow 0$ olduğu görülür. Böylece, $n \rightarrow \infty$ iken $P_n \rightarrow \infty$ olur. $\square$

Teorem 3.2 (Tripathy and Baruah, 2010) (N, p_n) toplanabilme metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0$ olmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$) (u_n) fuzzy sayıların yakınsak bir dizisi olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \mu_0$ alalım. O zaman alınan her $\epsilon > 0$ için $n > n_0$ iken $D(u_n, \mu_0) < \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Aynı zamanda, her yakınsak fuzzy sayı dizisi sınırlı olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $D(u_n, \mu_0) < H$ olacak şekilde bir $H \in \mathbb{R}$ bulunur. Hipotez gereği, $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda, her $\epsilon > 0$ için $n > n_1$ iken $\frac{p_n}{P_n} < \frac{\epsilon}{2H \max(n_0, n_1)}$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_2 = \max(n_0, n_1)$ olmak üzere, her $n > n_2$ için

$$\begin{aligned}
& D\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} u_k, \mu_0\right) \\
&= \frac{1}{P_n} D\left(\left(\sum_{k=1}^{n_2} p_{n-k+1} u_k + \sum_{k=n_2+1}^n p_{n-k+1} u_k\right), \sum_{k=1}^{n_2} p_{n-k+1} \mu_0\right) \\
&= \frac{1}{P_n} D\left(\left(\sum_{k=1}^{n_2} p_{n-k+1} u_k + \sum_{k=n_2+1}^n p_{n-k+1} u_k\right), \sum_{k=1}^{n_2} p_{n-k+1} \mu_0 + \sum_{k=n_2+1}^n p_{n-k+1} \mu_0\right) \\
&\leq \frac{1}{P_n} D\left(\sum_{k=1}^{n_2} p_{n-k+1} u_k, \sum_{k=1}^{n_2} p_{n-k+1} \mu_0\right) + \frac{1}{P_n} D\left(\sum_{k=n_2+1}^n p_{n-k+1} u_k, \sum_{k=n_2+1}^n p_{n-k+1} \mu_0\right) \\
&= \frac{1}{P_n} D((p_n u_1 + \dots + p_{n-n_2+1} u_{n_2}), (p_n \mu_0 + \dots + p_{n-n_2+1} \mu_0)) \\
&+ \frac{1}{P_n} D((p_{n-n_2} u_{n_2+1} + \dots + p_1 u_n), (p_{n-n_2} \mu_0 + \dots + p_1 \mu_0)) \\
&\leq \frac{p_n}{P_n} D(u_1, \mu_0) + \dots + \frac{p_{n-n_2+1}}{P_n} D(u_{n_2}, \mu_0) + \frac{p_{n-n_2}}{P_n} D(u_{n_2+1}, \mu_0) + \dots + \frac{p_1}{P_n} D(u_n, \mu_0) \\
&\leq \frac{p_n}{P_n} H + \dots + \frac{p_{n-n_2+1}}{P_n} H + \frac{p_{n-n_2}}{P_n} \frac{\epsilon}{2} + \dots + \frac{p_1}{P_n} \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2Hn_2} H + \dots + \frac{\epsilon}{2Hn_2} H + \left(\frac{p_{n-n_2}}{P_n} + \dots + \frac{p_1}{P_n}\right) \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Öyleyse, (u_n) dizisi μ_0 sayısına (N, p) toplanabilirdir.

($\Rightarrow$) (N, p) toplanabilme metodu regüler olsun ve $\bar{e}_1 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \dots) = (u_k)$ dizisini göz önüne alalım. $k \rightarrow \infty$ iken $u_k \rightarrow \bar{0}$ olduğu açıktır. (τ_n) dizisi $\bar{0}$ sayısına yakınsak olduğundan, her $\epsilon > 0$ için, $n > n_0$ durumunda

$$D\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k+1} \bar{e}_1, \bar{0}\right) = D\left(\frac{p_n}{P_n}, \bar{0}\right) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0$ olduğu görülür. $\square$

Tauber tipi koşulların zayıflatılması sürecinde dizilerle ilgili gereksinim duyulan yeni kavramların reel uzaydaki ifadeleri ikinci bölümde verilmiştir. Bu kavramların fuzzy uzaylardaki karşılıkları ise aşağıda verilecektir.

Tanım 3.4 (Talo and Başar, 2013) Her $\epsilon > 0$ ve her $n_0 < n$ için

$$n < k \leq \lambda_n \text{ durumunda } u_k \succeq u_n - \bar{\epsilon} \quad (4)$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ ve $\lambda = \lambda(\epsilon) > 1$

ya da denk olarak,

her $\epsilon > 0$ ve her $n_0 < n$ için

$$\lambda_n < k \leq n \text{ durumunda } u_n \succeq u_k - \bar{\epsilon} \quad (5)$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\epsilon)$ ve $\lambda = \lambda(\epsilon) < 1$ varsa, $(u_n) \in \omega(F)$ dizisine yavaş azalandır denir.

Tanım 3.5 (Subrahmanyam, 1999) $u = (u_n) \in \omega(F)$ olmak üzere, her $\epsilon > 0$ için

$1 \leq \frac{m}{n} < 1 + \delta$ ve $m, n \geq N(\epsilon)$ durumunda $D(u_m, u_n) < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$

ve $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa,

ya da denk olarak,

$m \geq n \rightarrow \infty$ için $\frac{m}{n} \rightarrow 1$ olmak üzere $D(u_m, u_n) \rightarrow 0$ sağlanıyorsa, (u_n) dizisine yavaş salınımlı dizi denir.

Yavaş salınımlılık kavramının Schmidt tarafından verilen alternatif tanımının fuzzy uzaylardaki karşılığı aşağıda verilecektir.

Tanım 3.6 (Altın et al., 2006) λ_n, λ_n nin tam değeri olmak üzere, $(u_n) \in \omega(F)$ için,

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{n < k \leq \lambda_n} D(u_k, u_n) = 0$$

koşulu gerçekleşiyorsa, (u_n) dizisine yavaş salınımlı dizi denir.

Tezin bir sonraki bölümünde yavaş azalanlık ve yavaş salınımlılık kavramlarına sıklıkla yer verileceğinden, bunlara ait bazı temel özellikleri sıralamakta fayda vardır:

- (i) Her yakınsak fuzzy sayı dizisinin yavaş salınımlı olduğu Cauchy kriterinden doğrudan söylenir, ancak tersi daima doğru değildir. Örneğin (Talo and Çakan, 2012);

$$\nu_k(t) = \begin{cases} 1 - (k+1)t, & t \in [0, \frac{1}{k+1}] \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n \nu_k \right)$ dizisi yakınsak değildir, fakat her $\epsilon > 0$ için $n \leq m < n(1 + \delta)$ ve $m, n \geq N(\epsilon)$ durumunda

$$\begin{aligned} D(u_m, u_n) &= D\left(\sum_{k=0}^m \nu_k, \sum_{k=0}^n \nu_k\right) = D\left(\sum_{k=0}^n \nu_k + \sum_{k=n+1}^m \nu_k, \sum_{k=0}^n \nu_k\right) \\ &= D\left(\sum_{k=n+1}^m \nu_k, \bar{0}\right) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m D(\nu_k, \bar{0}) \\ &= \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k+1} \leq \left(\frac{m}{n} - 1\right) \leq \delta \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\delta(\epsilon) = \epsilon$ ve $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabildiğinden, tanımı gereğince (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır.

- (ii) $u = (u_n) \in \omega(F)$ olmak üzere, $D(u_k, u_{k-1}) = O(\frac{1}{k})$ koşulu gerçekleşiyorsa, (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır (Talo and Çakan, 2012). Gerçekten; (u_n) dizisi $D(u_k, u_{k-1}) = O(\frac{1}{k})$ koşulunu sağlıyorsa o zaman her $k \in \mathbb{N}$ için $D(u_k, u_{k-1}) \leq \frac{C}{k}$ olacak şekilde bir $C > 0$ vardır. Her $\epsilon > 0$ için $n \leq m < n(1 + \delta)$ ve $m, n \geq N(\epsilon)$ durumunda

$$D(u_m, u_n) \leq \sum_{k=n+1}^m D(u_k, u_{k-1}) \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{C}{k} \leq C \left(\frac{m}{n} - 1\right) \leq C\delta$$

olacak şekilde bir $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{C}$ ve $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabildiğinden, tanımı gereğince (u_n) dizisi yavaş salınımlıdır.

- (iii) Yavaş salınımlı fuzzy sayı dizileri yavaş azalandır. Ancak tersinin her zaman doğru olması gerekmez. Örneğin (Talo and Başar, 2013);

$$v_k(t) = \begin{cases} 1 - t\sqrt{k+1}, & t \in [0, \frac{1}{\sqrt{k+1}}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$ dizisi tanımlayalım. O zaman her bir $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$u_n^-(\alpha) = 0 \quad \text{ve} \quad u_n^+(\alpha) = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

olduğundan (u_n) dizisi artandır ve her artan dizi yavaş azalan olduğundan (u_n) dizisi yavaş azalandır. Ancak, her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda > 1$ için $\alpha = 0$ ve $k = \lambda n$ alınması halinde,

$$\begin{aligned} D(u_k, u_n) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \{ |u_k^-(\alpha) - u_n^-(\alpha)|, |u_k^+(\alpha) - u_n^+(\alpha)| \} \\ &= \max \{ 0, |u_k^+(0) - u_n^+(0)| \} \\ &= u_k^+(0) - u_n^+(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=n+1}^k \frac{1}{\sqrt{j+1}} \\
&\geq \frac{k-n}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{k-n}{\sqrt{\lambda n+1}} \\
&\geq \frac{\lambda n-1-n}{\sqrt{\lambda n+1}} = \frac{n(\lambda-1)}{\sqrt{\lambda n+1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda n+1}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

olduğundan, tanımdan hareketle (u_n) dizisi yavaş salınımlı değildir.

- (iv) $u = (u_n) \in \omega(F)$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve bazı $H > 0$ için $nu_n \succeq nu_{n-1} - \bar{H}$ koşulu sağlanıyorsa $u = (u_n)$ dizisi yavaş azalandır.

3.2 Ağırlıklı ortalama metodu için bazı Tauber tipi teoremler

Tezin bu kısmında, yukarıda tanımlanan yeni kavramların ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için Tauber tipi koşullar olduğunu gösteren teoremler ispatlarıyla birlikte sunulacaktır.

Teorem 3.3 (*Tripathy and Baruah, 2010*) $u = (u_n) \in \omega(F)$ dizisi $\mu_0 \in E^1$ sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilir ve yavaş salınımlı ise, o zaman (u_n) dizisi $\mu_0 \in E^1$ sayısına yakınsar.

İspat. Genelliği bozmaksızın, $\mu_0 = \bar{0}$ alalım. (u_n) dizisi $\bar{0}$ sayısına yakınsak olmasın; yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n, \bar{0}) > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $i \in \mathbb{N}$ için $D(u_{n_i}, \bar{0}) \geq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ ve $(u_{n_i}) \subset (u_n)$ alt dizisi vardır.

(u_n) yavaş salınımlı olduğundan, her $\epsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$ için $g_0(\epsilon) \leq n \leq m < (1 + \delta)n$ iken $D(u_m, u_n) < \frac{\alpha}{2}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ ve $g_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Bunun yanı sıra, (u_n) dizisinin yavaş salınımlı olması, $(u_{n_i}) \subset (u_n)$ alt dizisinin yavaş salınımlı olmasını gerektirir.

(u_n) dizisi $\bar{0} \in E^1$ sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilir olduğundan, $t_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k u_k$ şeklinde belirlenen (t_n) dizisi $\bar{0}$ sayısına yakınsar.

Her $\epsilon > 0$ için $g_1(\epsilon) \leq n_i$ ve $n_i \leq m \leq m_i = [(1 + \delta)n_i]$ olmak üzere, üçgen eşitsizliğinden

$$D(\bar{0}, u_{n_i}) \leq D(\bar{0}, u_m) + D(u_m, u_{n_i})$$

vardır. (u_{n_i}) alt dizisinin yavaş salınımlılığı ve varsayım göz önünde bulundurulursa,

$$D(\bar{0}, u_m) \geq D(\bar{0}, u_{n_i}) - D(u_m, u_{n_i}) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Her $\epsilon > 0$ için $g_1(\epsilon) \leq n_i$ ve $n_i \leq m \leq m_i = [(1 + \delta)n_i]$ olmak üzere, (u_{n_i}) alt

dizisinin yavaş salınımlılığı ve varsayımdan hareketle, Lemma 2.3 ve Lemma 2.6'den yararlanarak,

$$\begin{aligned}
& D(t_{m_i}, t_{n_i}) + D\left(t_{n_i}, \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} t_{n_i}\right) \\
& \geq D\left(t_{m_i}, \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} t_{n_i}\right) \\
& = D\left(\frac{1}{P_{m_i}} \left(\sum_{k=0}^{n_i} p_k u_k + \sum_{k=n_i+1}^{m_i} p_k u_k\right), \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} \left(\frac{1}{P_{n_i}} \sum_{k=0}^{n_i} p_k u_k\right)\right) \\
& = D\left(\frac{1}{P_{m_i}} \sum_{k=n_i+1}^{m_i} p_k u_k, \bar{0}\right) \\
& \geq D\left(\frac{1}{P_{m_i}} \sum_{k=n_i+1}^{m_i} p_k u_{n_i}, \bar{0}\right) - D\left(\frac{1}{P_{m_i}} \sum_{k=n_i+1}^{m_i} p_k u_k, \frac{1}{P_{m_i}} \sum_{k=n_i+1}^{m_i} p_k u_{n_i}\right) \\
& \geq D\left(\left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{m_i}}\right) u_{n_i}, \bar{0}\right) - \frac{1}{P_{m_i}} \sum_{k=n_i+1}^{m_i} p_k D(u_k, u_{n_i}) \\
& \geq \left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{m_i}}\right) D(u_{n_i}, \bar{0}) - \frac{1}{P_{m_i}} \sum_{k=n_i+1}^{m_i} p_k \left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
& \geq \left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{m_i}}\right) \alpha - \left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{m_i}}\right) \frac{\alpha}{2} \\
& = \left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{m_i}}\right) \frac{\alpha}{2}
\end{aligned} \tag{6}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bununla birlikte, her $\epsilon > 0$ için $g_1(\epsilon) \leq n_i \leq m_i \leq (1 + \delta)n_i < m_i + 1$ ve (P_n) reel sayı dizisi artan olduğundan,

$$P_{m_i} \leq (1 + \delta)P_{n_i} \quad \text{ve} \quad (1 + \delta)P_{n_i} \leq P_{m_i+1} = P_{m_i} + p_{m_i+1}$$

eşitsizlikleri vardır. Buradan,

$$\left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{m_i}}\right) \geq \left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{n_i}}\right) \frac{1}{(1 + \delta)} \geq \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right) - \frac{p_{m_i+1}}{P_{n_i}} \frac{1}{(1 + \delta)}$$

eşitsizliği bulunur ve $(\bar{N}, p)$ toplanabilme metodu regüler olduğundan $i \rightarrow \infty$ iken $P_{n_i} \rightarrow \infty$ dir. Öyleyse, $i \rightarrow \infty$ durumunda

$$\left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{m_i}}\right) \geq \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right)$$

eşitsizliği vardır ve (6) eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
D(t_{m_i}, t_{n_i}) + D\left(t_{n_i}, \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} t_{n_i}\right) & \geq D\left(t_{m_i}, \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} t_{n_i}\right) \geq \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right) \left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
& \geq 0
\end{aligned} \tag{7}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, her $\epsilon > 0$ için $g_1(\epsilon) \leq n_i \leq m_i$ olmak üzere, Lemma 2.3'den

yararlanarak,

$$\begin{aligned}
D\left(t_{m_i}, \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} t_{n_i}\right) &\leq D(t_{m_i}, t_{n_i}) + D\left(t_{n_i}, \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} t_{n_i}\right) \\
&= D(t_{m_i}, t_{n_i}) + D\left(\frac{P_{m_i}}{P_{n_i} P_{m_i}} \sum_{k=0}^{n_i} p_k u_k, \frac{P_{n_i}}{P_{n_i} P_{m_i}} \sum_{k=0}^{n_i} p_k u_k\right) \\
&= D(t_{m_i}, t_{n_i}) \\
&\quad + \frac{1}{P_{n_i} P_{m_i}} D\left(P_{n_i} + (P_{m_i} - P_{n_i}) \sum_{k=0}^{n_i} p_k u_k, P_{n_i} \sum_{k=0}^{n_i} p_k u_k\right) \\
&\leq D(t_{m_i}, t_{n_i}) + \left(\frac{P_{m_i} - P_{n_i}}{P_{m_i}}\right) D(t_{n_i}, \bar{0}) \\
&\leq D(t_{m_i}, \bar{0}) + D(t_{n_i}, \bar{0}) + \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right) D(t_{n_i}, \bar{0}) \tag{8}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Her iki taraftan limite geçilirse, (u_n) dizisi $\bar{0}$ sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilir olduğundan,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D\left(t_{m_i}, \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} t_{n_i}\right) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} D(t_{m_i}, \bar{0}) + \lim_{i \rightarrow \infty} D(t_{n_i}, \bar{0}) + \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right) D(t_{n_i}, \bar{0}) = 0 \tag{9}$$

eşitsizliği elde edilir. (7) ve (9) eşitsizliklerinden,

$$0 < \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right) \frac{\alpha}{2} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} D\left(t_{m_i}, \frac{P_{n_i}}{P_{m_i}} t_{n_i}\right) \leq 0$$

bulunur. Ancak, bu bir çelişki olup varsayım hatalıdır. Böylece, (u_n) dizisi $\bar{0}$ sayısına yakınsar. $\square$

Bir sonraki teorem, ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu için Tauber tipi boşluk teoremi olarak da bilinir.

Teorem 3.4 (*Tripathy and Baruah, 2010*) (n_k) doğal sayıların artan bir dizisi ve (u_n) , $n_k < n \leq n_{k+1}$ için $u_n = u_{n_{k+1}}$ olacak şekilde fuzzy sayıların bir dizisi olsun. $u = (u_n) \in \omega(F)$ dizisi $\mu_0 \in E^1$ sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilir ise, o zaman $\liminf \frac{P_{n_{k+1}}}{P_{n_k}} > 1$ koşulu sağlanmak üzere (u_n) dizisi μ_0 sayısına yakınsar.

İspat. Genelliği bozmaksızın, $\mu_0 = \bar{0}$ alalım ve $s_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k u_k$ dizisini tanımlayalım. Hipotez yardımıyla,

$$\begin{aligned}
D(s_{n_{k+1}}, \bar{0}) &+ \left(\frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}}\right) D(s_{n_k}, \bar{0}) \\
&= D(s_{n_{k+1}}, \bar{0}) + D\left(\frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} s_{n_k}, \bar{0}\right) \\
&\geq D\left(s_{n_{k+1}}, \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} s_{n_k}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&:= D \left(\frac{1}{P_{n_{k+1}}} \sum_{i=1}^{n_{k+1}} p_i u_i, \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \left(\frac{1}{P_{n_k}} \sum_{i=1}^{n_k} p_i u_i \right) \right) \\
&= D \left(\frac{1}{P_{n_{k+1}}} \left(\sum_{i=1}^{n_k} p_i u_i + \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} p_i u_i \right), \frac{1}{P_{n_{k+1}}} \sum_{i=1}^{n_k} p_i u_i \right) \\
&= D \left(\frac{1}{P_{n_{k+1}}} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} p_i u_i, \bar{0} \right) \\
&= D \left(\frac{1}{P_{n_{k+1}}} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} p_i u_{n_{k+1}}, \bar{0} \right) \\
&= D \left(\left(\frac{P_{n_{k+1}} - P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \right) u_{n_{k+1}}, \bar{0} \right) \\
&= D \left(\left(1 - \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \right) u_{n_{k+1}}, \bar{0} \right) \\
&= \left(1 - \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \right) D(u_{n_{k+1}}, \bar{0})
\end{aligned} \tag{10}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{P_{n_{k+1}}}{P_{n_k}}} = \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{n_{k+1}}}{P_{n_k}} \right\}^{-1} < \infty$$

ve keyfi bir $\lambda \in (0, 1)$ için,

$$0 < \lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \right) = 1 - \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} = 1 - \left\{ \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{P_{n_{k+1}}}{P_{n_k}} \right\}^{-1} < \infty$$

eşitsizlikleri bulunur. Hipotez gereğince, $n \rightarrow \infty$ iken (u_n) dizisi $\bar{0} \in E^1$ sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilir olduğundan, $k \rightarrow \infty$ iken $(s_{n_{k+1}})$ ve (s_{n_k}) dizileri $\bar{0} \in E^1$ sayısına yakınsar.

Böylece, (10) eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\lambda \limsup_{k \rightarrow \infty} D(u_{n_{k+1}}, \bar{0}) &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \right) \limsup_{k \rightarrow \infty} D(u_{n_{k+1}}, \bar{0}) \\
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \right) D(u_{n_{k+1}}, \bar{0}) \right\} \\
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} D(s_{n_{k+1}}, \bar{0}) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \right) D(s_{n_k}, \bar{0}) \\
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} D(s_{n_{k+1}}, \bar{0}) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{P_{n_k}}{P_{n_{k+1}}} \right) \limsup_{k \rightarrow \infty} D(s_{n_k}, \bar{0}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

elde edilir. Buradan, $k \rightarrow \infty$ iken $u_{n_{k+1}} \rightarrow \bar{0}$ sonucuna ulaşılır. O zaman her $\epsilon > 0$ için, $k > k_0$ iken $D(u_{n_{k+1}}, \bar{0}) < \epsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Aynı zamanda, (n_k) doğal sayıların artan bir dizisi olduğundan, $k > k_0$ için $n_k > n_{k_0}$ dir ve hipotez gereğince, $n_{k_0} < n_k < n \leq n_{k+1}$ durumunda $u_n = u_{n_{k+1}}$ dir. Yani, her $\epsilon > 0$ için $k > k_0$ durumunda $D(u_n, \bar{0}) = D(u_{n_{k+1}}, \bar{0}) < \epsilon$ olur. Öyleyse, (u_n) dizisi $\bar{0}$ sayısına yakınsar. $\square$

$p = (p_n)$ dizisini kısıtlayan aşağıdaki lemma Móríc ve Rhoades (2004) tarafından verilmiştir ve ispatlar içerisinde kullanılacaktır.

Lemma 3.1 (*Móríc and Rhoades, 2004*) (P_n) pozitif sayıların azalmayan bir dizisi ise

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1 \quad \lambda > 1 \quad (12)$$

ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} > 1 \quad 0 < \lambda < 1 \quad (13)$$

koşulları denktir.

Ayrıca (12) koşulu (3) koşulunu ifade eder.

Teorem 3.5 (*Önder et al., 2015*) (u_n) , (12) koşulunu sağlayan bir fuzzy sayı dizisi olsun. (u_n) dizisi, $\mu_0 \in E^1$ sayısına $(\overline{N}, p)$ toplanabilir ve yavaş azalan ise (u_n) dizisi μ_0 sayısına yakınsar.

İspat. $(u_n) \in \omega(F)$ dizisinin $\mu_0 \in E^1$ sayısına $(\overline{N}, p)$ toplanabilir ve yavaş azalan olduğunu varsayalım.

$\lambda > 1$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $P_{\lambda_n} > P_n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_{\lambda_n} + t_n &= \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} \left(\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k=0}^{\lambda_n} p_k u_k \right) + \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k u_k \\ &= \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \left(\sum_{k=0}^n p_k u_k + \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k u_k \right) + \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k u_k \\ &= \left(\frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} + \frac{1}{P_n} \right) \sum_{k=0}^n p_k u_k + \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k u_k \\ &= \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} \left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k u_k \right) + \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k u_k \\ &= \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_n + \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k u_k \end{aligned} \quad (14)$$

eşitliği vardır. (12) koşulu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{P_n}{P_{\lambda_n}}} \\ &= \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} \right) \right\}^{-1} \\ &= \left\{ 1 - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n}} \right\}^{-1} < \infty \end{aligned} \quad (15)$$

eşitsizliği elde edilir. (15) eşitsizliğinden ve (u_n) dizisinin μ_0 sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilir olduğu varsayımından hareketle,

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} D \left(\frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_{\lambda_n}, \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_n \right) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} D(t_{\lambda_n}, t_n) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} D(t_{\lambda_n} + \mu_0, t_n + \mu_0) \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} [D(t_{\lambda_n}, \mu_0) + D(t_n, \mu_0)] \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} \limsup_{n \rightarrow \infty} [D(t_{\lambda_n}, \mu_0) + D(t_n, \mu_0)] \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} D(t_{\lambda_n}, \mu_0) + \limsup_{n \rightarrow \infty} D(t_n, \mu_0) \right] \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} D(t_{\lambda_n}, \mu_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} D(t_n, \mu_0) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu durumda, yeterince büyük bir n ve $\epsilon > 0$ için,

$$D \left(\frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_{\lambda_n}, \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_n \right) < \frac{\epsilon}{3}$$

yazılabilir. Böylece, Lemma 2.5 yardımıyla,

$$\frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_n - \frac{\bar{\epsilon}}{3} \preceq \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_{\lambda_n} \preceq \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_n + \frac{\bar{\epsilon}}{3} \quad (16)$$

bağıntısı elde edilir. (u_n) dizisi μ_0 sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilir olduğundan tanım gereği

$\lim_{n \rightarrow \infty} D(t_n, \mu_0) = 0$ yazılabilir. O zaman, her bir $\epsilon > 0$ için $D(t_n, \mu_0) < \frac{\epsilon}{3}$ vardır.

Böylece, Lemma 2.5 yardımıyla,

$$\mu_0 - \frac{\bar{\epsilon}}{3} \preceq t_n \preceq \mu_0 + \frac{\bar{\epsilon}}{3} \quad (17)$$

bulunur. Ayrıca, (u_n) dizisi yavaş azalan olduğundan,

$$\frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k u_k \succeq \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k (u_n - \frac{\bar{\epsilon}}{3}) = u_n - \frac{\bar{\epsilon}}{3} \quad (18)$$

vardır. (14) eşitliğiyle birlikte (16), (17) ve (18) bağıntıları kullanılarak, her bir $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_n + \frac{2\bar{\epsilon}}{3} + \mu_0 &\succeq \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_{\lambda_n} + t_n \\
&= \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_n + \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k u_k \\
&\succeq \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} t_n + u_n - \frac{\bar{\epsilon}}{3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Lemma 2.3 yardımıyla,

$$\bar{\epsilon} + \mu_0 \succeq u_n \quad (19)$$

bulunur.

Diğer taraftan, $0 < \lambda < 1$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $P_{\lambda_n} < P_n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_n + t_n &= \left(1 + \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} \right) t_n \\ &= \frac{P_n}{P_n - P_{\lambda_n}} t_n \\ &= \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=0}^n p_k u_k \\ &= \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \left(\sum_{k=0}^{\lambda_n} p_k u_k + \sum_{k=\lambda_n+1}^n p_k u_k \right) \\ &= \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} \left(\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k=0}^{\lambda_n} p_k u_k \right) + \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^n p_k u_k \\ &= \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_{\lambda_n} + \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^n p_k u_k \end{aligned} \quad (20)$$

eşitliği vardır. (12) koşulu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{P_n}{P_{\lambda_n}} - 1} \\ &= \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} - 1 \right\}^{-1} < \infty \end{aligned} \quad (21)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda, (21) eşitsizliği göz önünde bulundurularak yukarıdaki adımlara benzer bir şekilde devam edilirse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D \left(\frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_{\lambda_n}, \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_n \right) = 0$$

bulunur. Bu durumda, yeterince büyük bir n ve $\epsilon > 0$ için,

$$D \left(\frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_{\lambda_n}, \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_n \right) < \frac{\epsilon}{3}$$

yazılabilir. Böylece, Lemma 2.5 kullanılarak,

$$\frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_{\lambda_n} - \frac{\bar{\epsilon}}{3} \preceq \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_n \preceq \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_{\lambda_n} + \frac{\bar{\epsilon}}{3} \quad (22)$$

bağıntısına ulaşılır. Ayrıca, (u_n) dizisi yavaş azalan olduğundan,

$$\frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^n p_k u_k \preceq \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^n p_k (u_n + \frac{\bar{\epsilon}}{3}) = u_n + \frac{\bar{\epsilon}}{3} \quad (23)$$

vardır. (20) eşitliğiyle birlikte (17),(22) ve (23) bağıntıları kullanılarak, her bir $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_{\lambda_n} - \frac{2\bar{\epsilon}}{3} + \mu_0 &\preceq \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_n + t_n \\ &= \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_{\lambda_n} + \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^n p_k u_k \\ &\preceq \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} t_{\lambda_n} + u_n + \frac{\bar{\epsilon}}{3} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Lemma 2.3 yardımıyla,

$$\mu_0 - \bar{\epsilon} \preceq u_n \quad (24)$$

bulunur. (19) ve (24) bağıntıları ele alındığında, her bir $\epsilon > 0$ için

$$\mu_0 - \bar{\epsilon} \preceq u_n \preceq \bar{\epsilon} + \mu_0$$

olduğu görülür. Lemma 2.5 kullanılarak,

$$D(u_n, \mu_0) \leq \epsilon$$

elde edilir. Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \mu_0$ sonucuna varılır. $\square$

Theorem 3.5 in reel uzaylardaki daha kapsamlı versiyonu Móricz ve Rhoades (2004) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada, bir dizinin yavaş azalanlığını gerektiren koşullar incelenmektedir.

Lemma 3.2 (*Önder et al., 2015*)

$$\frac{P_{n-1}}{p_n} = O(n) \quad (25)$$

olsun. $(u_n) \in \omega(F)$ dizisi bazı $C > 0$ ve her n için,

$$\frac{P_{n-1}}{p_n} u_n \succeq \frac{P_{n-1}}{p_n} u_{n-1} - \bar{C} \quad (26)$$

koşulunu sağlıyorsa (u_n) dizisi yavaş azalandır.

İspat. (u_n) fuzzy sayı dizisinin (26) koşulunu sağladığını varsayalım. Böylece, her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$u_n^-(\alpha) - u_{n-1}^-(\alpha) \geq -C \left(\frac{p_n}{P_{n-1}} \right) \quad \text{ve} \quad u_n^+(\alpha) - u_{n-1}^+(\alpha) \geq -C \left(\frac{p_n}{P_{n-1}} \right) \quad (27)$$

eşitsizlikleri vardır. Her $n < k$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için, (25) koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} u_k^-(\alpha) - u_n^-(\alpha) &= \sum_{j=n+1}^k [u_j^-(\alpha) - u_{j-1}^-(\alpha)] \geq -C \sum_{j=n+1}^k \left(\frac{p_j}{P_{j-1}} \right) \\ &\geq -C \sum_{j=n+1}^k \frac{1}{j} \\ &\geq -C \left(\frac{k-n}{n} \right) \\ &= -C \left(\frac{k}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece, her $\epsilon > 0$ ve $1 < \lambda \leq 1 + \frac{\epsilon}{C}$ için $n < k \leq \lambda_n$ olmak üzere,

$$u_k^-(\alpha) - u_n^-(\alpha) \geq -C \left(\frac{k}{n} - 1 \right) \geq -C(\lambda - 1) \geq -\epsilon \quad (28)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde, her $n < k$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için, (25) koşulu kullanılarak

$$u_k^+(\alpha) - u_n^+(\alpha) \geq -C \left(\frac{k}{n} - 1 \right)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece, her bir $\epsilon > 0$ ve $1 < \lambda \leq 1 + \frac{\epsilon}{C}$ için $n < k \leq \lambda_n$ olmak üzere,

$$u_k^+(\alpha) - u_n^+(\alpha) \geq -C \left(\frac{k}{n} - 1 \right) \geq -C(\lambda - 1) \geq -\epsilon \quad (29)$$

elde edilir. (28) ve (29) eşitsizlikleri göz önünde bulundurulursa, $u_k \succeq u_n - \bar{\epsilon}$ olduğu görülür. Buradan, (u_k) dizisinin yavaş azalan olduğu sonucuna varılır. $\square$

Teorem 3.5 ve Lemma 3.2 yardımıyla, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1 (Önder et al., 2015) (u_n) dizisi $\mu_0 \in E^1$ sayısına $(\bar{N}, p)$ toplanabilir bir fuzzy sayı dizisi olsun. (15), (25) ve (26) koşulları sağlanıyorsa (u_n) dizisi μ_0 sayısına yakınsar.

Lemma 3.3 (Önder et al., 2015) (25) koşulu sağlansın. $(u_n) \in \omega(F)$ dizisi (26) koşulunu sağlıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{P_{n-1}}{p_n} t_n \succeq \frac{P_{n-1}}{p_n} t_{n-1} - \bar{C} \quad (30)$$

vardır ve (t_n) dizisi yavaş azalandır.

İspat. (u_n) fuzzy sayı dizisinin (26) koşulunu sağladığını varsayalım, o zaman her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\left(\frac{P_{n-1}}{p_n} \right) (u_n^-(\alpha) - u_{n-1}^-(\alpha)) \geq -C \quad \text{ve} \quad \left(\frac{P_{n-1}}{p_n} \right) (u_n^+(\alpha) - u_{n-1}^+(\alpha)) \geq -C \quad (31)$$

eşitsizlikleri vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n-1}}{p_n} [t_n^-(\alpha) - t_{n-1}^-(\alpha)] &= \frac{P_{n-1}}{p_n} \left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k u_k^-(\alpha) - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} p_k u_k^-(\alpha) \right] \\
&= \frac{1}{P_n} \frac{1}{p_n} \left[P_{n-1} \sum_{k=0}^n p_k u_k^-(\alpha) - P_n \sum_{k=0}^{n-1} p_k u_k^-(\alpha) \right] \\
&= \frac{1}{P_n} \frac{1}{p_n} \left[P_{n-1} p_n u_n^-(\alpha) - p_n \sum_{k=0}^{n-1} p_k u_k^-(\alpha) \right] \\
&= \frac{1}{P_n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_k (u_n^-(\alpha) - u_k^-(\alpha)) \right] \\
&= \frac{1}{P_n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_k \sum_{j=k+1}^n (u_j^-(\alpha) - u_{j-1}^-(\alpha)) \right] \\
&= \frac{1}{P_n} \left[\sum_{j=0}^n P_{j-1} (u_j^-(\alpha) - u_{j-1}^-(\alpha)) \right] \\
&\geq -C
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{P_{n-1}}{p_n} [t_n^-(\alpha) - t_{n-1}^-(\alpha)] \geq -C \quad (32)$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki adımlara benzer şekilde devam edilirse,

$$\frac{P_{n-1}}{p_n} [t_n^+(\alpha) - t_{n-1}^+(\alpha)] \geq -C \quad (33)$$

eşitsizliği bulunur. (32) ve (33) eşitsizlikleri göz önünde bulundurulursa,

$$\frac{P_{n-1}}{p_n} t_n \succeq \frac{P_{n-1}}{p_n} t_{n-1} - \overline{C}$$

bağıntısına ulaşılır. Lemma 3.2 yardımıyla, (t_n) dizisinin yavaş azalan olduğu sonucuna varılır. $\square$

Teorem 3.5 ve Lemma 3.3 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2 (*Önder et al., 2015*) (t_n) dizisi $\mu_0 \in E^1$ sayısına $(\overline{N}, p)$ toplanabilir bir fuzzy sayı dizisi olsun. (15), (25) ve (30) koşulları sağlanıyorsa (u_n) dizisi $\mu_0 \in E^1$ sayısına $(\overline{N}, p)$ toplanabilmir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Altin, Y., Mursaleen, M. and Altınok, H.**, 2006, Statistical summability for sequences of fuzzy real numbers and a Tauberian theorem, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 21(6):379–384pp.
- Anastassiou, G. A. and Gal, S. G.**, 2001, On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weierstrass-type, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3):701–708pp.
- Aytar, S., Mammadov M. A. and Pehlivan, S.**, 2010, Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 157(7):976–985pp.
- Bede, B.**, 2013, Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic, Springer, Berlin.
- Boos, J.**, 2000, Classical and modern methods in summability, Oxford University Press, 586p. New York.
- Çanak, İ.**, 2014, Tauberian theorems for Cesàro summability of sequences of fuzzy numbers, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27(2):937–942pp.
- Çanak, İ.**, 2014, On the Riesz mean of sequences of fuzzy real numbers, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 26(6):2685–2688pp.
- Çanak, İ.**, 2014, Holder summability method of fuzzy numbers and a Tauberian theorem, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 11(4):87–93pp.
- Dubois, D. and Prade, H.**, 1978, Operations on fuzzy numbers, *International Journal of Systems Science*, 9(6):613–626pp.
- Dubois, D. and Prade, H.**, 1980, Fuzzy sets and systems, Academic Press, New York-London.
- Goetschel, R. and Voxman, W.**, 1986, Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems*, 18(1):31–43pp.
- Hardy, G. H. and Littlewood, J. E.**, 1914, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 13(2):174–191pp.
- Hardy, G. H.**, 1991, Divergent series, Second Edition, AMS Chelsea Publishing, 396p. USA.
- Kadak, U. and Başar, F.**, 2013, On some sets of fuzzy-valued sequences with the level sets, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 1(2):70–90pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Korevaar, J.**, 2004, Tauberian Theory – A century of developments, Springer- Verlag, 483p. New York.
- Landau, E.**, 1910, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, *Prace Mat-Fiz*, 21:97–177pp.
- Li, H. and Wu, C.**, 2007, The integral of a fuzzy mapping over a directed line, *Fuzzy Sets and Systems*, 158:2317–2338pp.
- Matloka, M.**, 1986, Sequences of fuzzy numbers, *BUSEFAL* 28:28–37pp.
- Móricz, F. and Rhoades, B.E.**, 2004, Necessary and sufficient Tauberian conditions for certain weighted mean methods of summability II., *Acta Mathematica Hungarica*, 102(4):279–285pp.
- Nanda, S.**, 1989, On sequence of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 33(1):123–126pp.
- Negoita, C.V. and Ralescu, D.A.**, 1975, Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Birkhäuser Basel.
- Önder, Z., Sezer, S.A. and Çanak, İ.**, 2015, A Tauberian theorem for the weighted mean method of summability of sequences of fuzzy numbers, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 28:1403–1409pp.
- Schmidt, R.**, 1925, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, *Mathematische Zeitschrift*, 22:89–152pp.
- Stojakovic, M. and Stojakovic, Z.**, 2009, Series of fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 160(21):3115–3127pp.
- Subrahmanyam, P. V.**, 1999, Cesàro summability for fuzzy real numbers, *Journal of Analysis*, 7:159–168pp.
- Szász, O.**, 1951, On a Tauberian theorem for Abel summability, *Pacific Journal of Mathematics*, 1:117–125pp.
- Talo, Ö. and Başar, F.**, 2009, Determination of the duals of classical sets of sequences of fuzzy numbers and related matrix transformations, *Fuzzy Sets and Systems*, 58(4):717–733pp.
- Talo, Ö. and Başar, F.**, 2013, On the slowly decreasing sequences of fuzzy numbers, *Abstract and Applied Analysis*, 2013(8):1–7pp.
- Talo, Ö. and Çakan, C.**, 2012, On the Cesàro convergence of sequences of fuzzy numbers, *Applied Mathematics Letters*, 25(4):676–681pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Tauber, A.**, 1897, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 8:273–277pp.
- Tripathy, B. C. and Baruah, A.**, 2010, Nörlund and Riesz mean of sequences of fuzzy real numbers, *Applied Mathematics Letters*, 23(5):651–655pp.
- Zadeh, L. A.**, 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8:338–353pp.

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad: Zerrin ÖNDER
- Adres : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
35100, Bornova, İzmir
- Doğum Tarihi: 04.09.1991
- Doğum Yeri : Konak/İZMİR

Öğrenim Durumu

- 1997-2005 : Hilal Necmiye Hüsnü Ataberk İlköğretim Okulu (İlk-Ortaokul eğitimi
- İzmir)
- 2005-2009 : İzmir Karşıyaka (Merkez Anadolu) Lisesi
- 2009-2013 : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Programı
- 2013- : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı

Yayınlar ve Kongreler

- Zerrin Önder, Sefa Anıl Sezer, İbrahim Çanak, 2015, *A Tauberian theorem for the weighted mean method of summability of sequences of fuzzy numbers* , Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 28:1403–1409pp.
- Zerrin Önder, Sefa Anıl Sezer, İbrahim Çanak, 2014, *A Tauberian theorem for the weighted mean method of summability of sequences of fuzzy numbers* , International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal, June 23-26, Uludağ University, Bursa/Türkiye

ÖDÜLLER

- 2013 Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü İkinciliği