



**BULANIK SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ
ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Eda EFE

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Şükrü TORTOP

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2025

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL
ÇEKİRDEĞİ ÜZERİNE

Eda EFE

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Şükrü TORTOP

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2025

TEZ ONAY SAYFASI

Eda EFE tarafından hazırlanan “Bulanık Sayı Dizilerinin İstatistiksel Çekirdeği Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 20 / 06 / 2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Şükrü TORTOP

Başkan : Prof. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniv. Meslek Yüksek Okulu

Üye : Prof. Dr. Erdiç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Şükrü TORTOP
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../ 2021 tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım
bu tez çalışmada;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.....

Eda EFE

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ ÜZERİNE

Eda EFE

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Şükrü TORTOP

Bu tez çalışmasında, E^1 uzayında tanımlı sınırlı bulanık sayı dizilerinin yakınsaklık özellikleri, seviye kümeleri ve çekirdek kavramı temel alınarak incelenmiştir. Klasik limit ve yakınsaklık kavramlarının bulanık yapılara doğrudan uygulanamaması, bu kavramların seviye kümeleri yardımıyla yeniden tanımlanmasını gerekli kılmıştır. Bu çerçevede, alt ve üst limitlere ilişkin iki farklı tanım verilmiş ve bu tanımların birbirinden ayrıldığı durumlar örneklerle gösterilmiştir.

Tezde ayrıca, bulanık sayı dizileri için çekirdek kavramı detaylı şekilde ele alınmış, çekirdek ile dizinin limit noktaları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Özellikle yakınsak olmayan diziler için çekirdek kümesinin yapısının, dizinin genel davranışını anlamada önemli bir araç olduğu ortaya konmuştur.

Çalışmanın diğer bir yönü, istatistiksel yakınsaklık kavramının bulanık sayı dizilerine uyarlanmasıdır. Seviye kümeleri yardımıyla tanımlanan istatistiksel liminf ve limsup kavramları, klasik limitlerle karşılaştırılmış ve farklılıkları örneklerle ortaya konulmuştur. Son olarak, istatistiksel çekirdek tanıtılarak, klasik limitin mevcut olmadığı durumlarda bile dizinin limit davranışı hakkında anlamlı bilgiler elde edilebileceği gösterilmiştir.

2025, v+34 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayılar, Çekirdek, İstatistiksel çekirdek, İstatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON THE STATISTICAL CORE OF SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS

Eda EFE

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Şükrü TORTOP

This thesis explores the convergence properties of bounded sequences of fuzzy numbers defined in the space E^1 , focusing on the roles of level sets and the core concept. Classical limit definitions are not directly applicable to fuzzy structures, leading to the development of alternative lower and upper limit formulations using level sets. These definitions are compared, and examples are provided to illustrate their differences.

The concept of the core of a fuzzy number sequence is studied in detail. Its relationship with the set of limit points is analyzed, and it is shown that the core provides meaningful insights, especially in the case of non-convergent sequences.

Furthermore, the notion of statistical convergence is adapted to fuzzy number sequences through level sets. Statistical $\liminf$ and $\limsup$ are redefined and contrasted with classical counterparts. The statistical core, is also introduced, offering a way to understand the asymptotic behavior of sequences even when classical convergence fails.

2025, v+34 pages

Key Words: Fuzzy numbers, Core, Statistical core, Statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, gelecekteki meslek hayatımda da kendisinden edindiğim bilgilerden her zaman faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Şükrü Tortop'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Hayatımın her alanında olduğu gibi tez çalışmam süresince de hep yanımda olan, bana her zaman sevgi, sabır ve iyi niyetle yaklaşan; bugünlere gelmemde büyük desteği olan ve bana güvenen sevgili anne ve babama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eda EFE

Afyonkarahisar 2025

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Bulanık Sayılar	4
2.2 İstatistiksel Yakınsaklık	6
3. BİR BULANIK SAYI DİZİSİNİN ALT VE ÜST LİMİTİ	8
4. BULANIK SAYI DİZİSİNİN ÇEKİRDEĞİ	18
4.1 E^1 de supremum ve infimumun varoluş teoremi	26
5. BULANIK SAYI DİZİSİNİN İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ	30
6. KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$L(\mathbb{R})$	Gerçek doğrudaki tanımlı tüm bulanık sayılar kümesi
E^1	Seviye küme gösterimiyle tanımlı bulanık sayılar uzayı
X_k	Bir bulanık sayı dizisi
$[X^\alpha, X_\alpha]$	X bulanık sayısının α -seviye kümesi
$B(x, \varepsilon)$	x merkezli, ε yarıçaplı açık yuvar
$\delta(A)$	$A \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu
$\liminf$ / $\limsup$	Alt limit / Üst limit
st- $\lim$, st- $\liminf$, st- $\limsup$	İstatistiksel limit, istatistiksel alt ve üst limit
$\text{core}(X)$	Bulanık sayı dizisinin çekirdek kümesi
L_X	X dizisinin tüm limit noktaları kümesi
$\mathcal{S}$	Pozitif doğal yoğunluğa sahip alt kümelerin ailesi
$\mathcal{S}^\#$	Pozitif üst yoğunluk taşıyan alt kümeler ailesi
$\sup$, $\inf$	Üst sınır, alt sınır
$D(X, Y)$	Seviye küme metriği (E^1 üzerindeki metrik)
$X \rightarrow Y$	Bulanık sayı dizisinin yakınsaması
$X \sim Y$	İki bulanık sayının karşılaştırılabilir olması
$X \not\sim Y$	İki bulanık sayının karşılaştırılamaz olması
$X < Y$	X bulanık sayısının Y 'den küçük olması
$X \leq Y$	X bulanık sayısının Y 'ye göre küçük ya da eşit olması
$X + Y$	Bulanık sayıların toplamı
aX	Bir gerçek sayının bir bulanık sayıyla çarpımı
$X - a_1$	Gerçek sayı çıkarımıyla elde edilen bulanık sayı
$X + a_1$	Gerçek sayı eklenmiş bulanık sayı
0_1	0'ın karakteristik fonksiyonu şeklinde bulanık gösterimi

1. GİRİŞ

Belirsizlik içeren sistemlerin modellenmesinde klasik matematiksel araçların yetersiz kaldığı durumlarda, bulanık kümeler kuramı etkili bir alternatif sunmaktadır. Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan bu kuram, kesin üyelik yerine kademeli üyelik yaklaşımı sunarak, özellikle insan düşüncesiyle örtüşen belirsiz durumların matematiksel olarak ifade edilmesine olanak sağlamaktadır. Bu bağlamda, bulanık sayılar, bulanık kümelerin sayısal karşılıkları olarak tanımlanmakta ve çeşitli mühendislik, yapay zekâ, karar teorisi, optimizasyon ve kontrol sistemleri gibi uygulamalı alanlarda önemli bir yer edinmektedir.

Bulanık sayı dizileri, bu yapıların dinamik davranışlarının incelenmesinde temel bir rol oynar. Ancak, klasik limit ve yakınsaklık tanımlarının doğrudan bulanık yapılara uygulanamaması, bu alanda alternatif yaklaşım ve genellemelere ihtiyaç doğurmuştur. Reel sayı dizileri için tanımlanan limit, limsup, liminf ve çekirdek gibi kavramların, bulanık sayı dizilerine uyarlanması sürecinde, seviye kümeleri temelli analizler kritik bir yöntem olarak öne çıkmaktadır. Bu doğrultuda, literatürde bulanık sayıların üst ve alt sınırları, çekirdek kümeleri ve bu kümelerin limit davranışları üzerine çeşitli çalışmalar mevcuttur.

Bu tez çalışmasında, E^1 uzayında tanımlı sınırlı bulanık sayı dizilerinin alt limit ve üst limitleri, seviye kümeleri aracılığıyla analiz edilmiş ve klasik limit kavramlarının bulanık bağlamda ne şekilde yorumlanabileceği detaylandırılmıştır. Bununla birlikte, reel sayı dizileri için bilinen bazı temel sonuçların bulanık sayı dizilerine doğrudan genellenemeyeceği, çeşitli örnekler ve karşı örnekler yardımıyla ortaya konulmuştur. Özellikle, klasik limit tanımlarına alternatif olarak önerilen yeni limit tanımları ile, her durumda geçerli olmayabilen klasik limit kavramlarının eksiklikleri giderilmeye çalışılmıştır.

Tezin odak noktalarından biri olan çekirdek kavramı, ilk olarak Knopp (1930) tarafından karmaşık sayı dizileri için tanımlanmış ve daha sonra Aytar vd. (2008) tarafından bulanık sayı dizilerine uyarlanmıştır. Çekirdek, bir dizinin kuyruk terimlerini kapsayan en küçük kapalı ve dışbükey kümelerin kesişimi olarak tanımlanmakta

olup, dizinin genel davranışı hakkında toplu bir bilgi sunmaktadır. Bu kavramın, özellikle yakınsak olmayan diziler için, dizinin limit noktalarının ötesinde bir anlam taşıdığı ve dizinin asimptotik özelliklerini yansıttığı görülmektedir.

Bu bağlamda tezde, bir bulanık sayı dizisinin limit noktaları kümesi ile çekirdek kümesi arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bu iki kümenin her zaman örtüşmediği, hatta limit kümesi boş olsa dahi çekirdek kümesinin anlamlı olabileceği gösterilmiştir. Ayrıca, çekirdek kümesinin alt ve üst limit sınırları ile eşleştiği durumlar analiz edilmiş; bu eşleşmenin tekil hale gelmesinin dizinin yakınsaklığı için yeterli bir koşul olabileceği tartışılmıştır.

Tez kapsamında ayrıca, istatistiksel yakınsaklık kavramı da klasik tanımıyla ele alınmış, reel sayı dizilerindeki kullanımından yola çıkılarak, bulanık sayı dizilerine nasıl uyarlanabileceği tartışılmıştır. Bu noktada, bulanık sayı dizileri için istatistiksel alt ve üst limit sınırlarının tanımı yapılmış, klasik limit kavramları ile ilişkisi ortaya konulmuş ve aralarındaki farklılıklar örneklerle açıklanmıştır. Bunun sonucunda, klasik limitin mevcut olmadığı durumlarda dahi istatistiksel limitlerin var olabileceği, dolayısıyla bu yaklaşımın özellikle yakınsak olmayan dizilerin davranışlarını incelemede daha güçlü bir araç olabileceği vurgulanmıştır.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmanın amacı, kapsamı ve literatürdeki konumu açıklanmıştır. İkinci bölümde, bulanık sayıların temel tanımları, seviye kümeleri, E^1 uzayı ve istatistiksel yakınsaklık gibi çalışmada kullanılacak ön bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik reel analizde kullanılan alt ve üst limit tanımlarının bulanık yapılara genellenmesi yapılmış, klasik ve alternatif limit kavramları karşılaştırılmıştır. Dördüncü bölümde, çekirdek kavramı detaylı biçimde incelenmiş, bu kavramın limit noktaları ve dizinin yapısal özellikleriyle olan ilişkisi gösterilmiştir. Son olarak beşinci bölümde, istatistiksel yakınsaklık kavramı çekirdek kümesi temelinde yeniden tanımlanmış, bu yeni kavram çerçevesinde çeşitli teoremler ve sonuçlara ulaşılmıştır.

Bulanık sayı dizileri üzerindeki yakınsaklık türlerinin araştırılması, son yıllarda bulanık analiz literatüründe önemli bir yer edinmiştir. Klasik yakınsaklık tanımları,

bulanık yapılarla doğrudan örtüşmediğinden, bulanık sayı dizilerinde yakınsaklık kavramı farklı şekillerde yeniden ele alınmaktadır. Bu bağlamda, çekirdek kümeleri aracılığıyla bulanık sayı dizilerinin davranışlarını analiz etmek, hem teorik hem de uygulamalı açıdan önem taşımaktadır.

Bu çalışmanın amacı, bulanık sayı dizileri üzerinde klasik ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarını çekirdek kümeleri temelinde inceleyerek, yakınsak olmayan dizilerin analizinde yeni perspektifler sunmaktır. Elde edilen teorik bulguların, bulanık analiz, karar teorisi ve yapay zekâ gibi uygulamalı alanlarda katkı sağlayabilecek matematiksel bir altyapı oluşturması hedeflenmektedir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Bulanık Sayılar

Tanım 2.1 Aşağıda verilen koşulları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna bulanık sayı denir.

- X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır.
- X bulanık dışbükeydir, yani her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}.$$

- X üst yarı süreklidir.
- $\{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır (Dubois ve Prade 1978).

Tanım 2.2 $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ bir bulanık sayı olmak üzere X bulanık sayısının α seviye kümesi

$$X^\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid X(x) \geq \alpha\}$$

eşitliği ile verilir.

Tüm bulanık sayılar kümesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilsin. Bir $\bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\bar{d}(X, Y) := \sup_{\alpha \in [0, 1]} d(X^\alpha, Y^\alpha).$$

Puri ve Ralescu (1983) tarafından $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ nin bir tam metrik uzay olduğu kanıtlandı.

Tanım 2.3 $X, Y \in L(\mathbb{R})$ verildiğinde $X \leq Y$ olması için gerek ve yeter şart tüm $\alpha \in [0, 1]$ için $X^\alpha \leq Y^\alpha$ olmasıdır (Dubois ve Prade 1980).

Ne $X \leq Y$ ne de $Y \leq X$ geçerli değilse, iki bulanık sayı olan X ve Y nin karşılaştırılmaz olduğu söylenir. Bu durumda $X \not\sim Y$ gösterimi kullanılır.

$L(\mathbb{R})$ nin bir E alt kümesi verildiğinde her $X \in E$ için $X \leq \mu$ olacak şekilde bulanık bir μ sayısı mevcutsa, E kümesinin üstten sınırlı olduğu söylenir. Tüm μ' üstten sınırlar için bir üst sınır olan μ , $\mu \leq \mu'$ eşitsizliğini sağlıyorsa μ bulanık sayısına E

nin en küçük üst sınırı (supremum) denir. Alt sınır ve en büyük alt sınır (infimum) benzer şekilde tanımlanır. Bir E kümesi, hem yukarıdan hem de aşağıdan sınırlı ise, yani yukarıdan ve aşağıdan sınırlı olduğu durumda, *sınırlı* olarak adlandırılır. Denk bir şekilde, bu tanım bulanık sayılar kümesinde tanımlı metrik kullanılarak şu şekilde de ifade edilebilir:

Bir E kümesi, eğer her $X \in E$ için $d(X, \mathbf{0}_1) \leq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ gerçekte sayı varsa, *sınırlı* olarak adlandırılır. Burada $\mathbf{0}_1$, 0 gerçekte sayısının karakteristik fonksiyonunu ifade eder.

“Sup” (üst sınır) ve “inf” (alt sınır) kavramları yalnızca sınırlı bulanık sayı kümeleri için tanımlanmıştır. Wu ve Wu (1997) tarafından ispatlanan önemli bir sonuç, $E \subseteq L(\mathbb{R})$ kümesi sınırlı ise bu kümenin supremum ve infimumunun mevcut olduğunu belirtmektedir (Fang ve Huang 2004).

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ olan iki bulanık sayı verildiğinde, bunların toplamı $Z = X + Y$ olarak tanımlanır; burada

$$Z^\alpha := X^\alpha + Y^\alpha = [\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Gerçekte bir sayı $a \in \mathbb{R}$ verildiğinde, buna karşılık gelen bulanık sayı $a_1 \in L(\mathbb{R})$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x = a, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Açıkça görülmektedir ki, herhangi bir $X \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısı ile a_1 in toplamı için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$(X + a_1)^\alpha = X^\alpha + a = [\underline{X}^\alpha + a, \overline{X}^\alpha + a], \quad \alpha \in [0, 1].$$

Benzer şekilde,

$$(X - a_1)^\alpha = X^\alpha - a = [\underline{X}^\alpha - a, \overline{X}^\alpha - a], \quad \alpha \in [0, 1].$$

$a \geq 0$ olan durumlar için ayrıca aX çarpımı tanımlanır; burada

$$(aX)^\alpha = [a\underline{X}^\alpha, a\overline{X}^\alpha], \quad \alpha \in [0, 1].$$

Açıkça, $(X + a_1)$, $(X - a_1)$ ve aX elemanları $L(\mathbb{R})$ kümesindedir. Eğer $a > 0$ ise, aşağıdaki sıkı sıralama sağlanır:

$$X - a_1 < X < X + a_1 \quad \text{ve} \quad d(X, X + a_1) = d(X, X - a_1) = a.$$

$X = \{X_k\}$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu dizi, $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlı ise sınırlı olarak adlandırılır. Eğer $X = \{X_k\}$ dizisi, X_0 bulanık sayısına yakınsıyor ise

$$\lim_k X_k = X_0$$

şeklinde gösterilir. Bu ifade ise her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır ki, tüm $k > n_0$ için

$$d(X_k, X_0) < \varepsilon$$

ifadesine denktir.

Eğer bir bulanık sayı dizisi olan $X = \{X_k\}$ dizisinin bir c bulanık sayısına yakınsayan bir alt dizi varsa c bulanık sayısına dizinin bir limit noktası denir. X bulanık sayı dizisinin tüm limit noktalarının kümesi L_X ile gösterilir.

$L(\mathbb{R})$ içinde kapalı bir aralık şu şekilde tanımlanır:

$$[X, Y] := \{Z \in L(\mathbb{R}) : X \leq Z \leq Y\}, \quad (1)$$

burada $X, Y \in L(\mathbb{R})$ dir. Eğer bir $W = \{W_k\}$ dizisinin tüm terimleri $[X, Y]$ aralığında yer alıyorsa, dizinin limit noktaları da bu aralıkta yer alır.

Tez boyunca, sınırlı bir bulanık sayı dizisi için kısaca BSFN kısaltması kullanılacaktır.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.4 $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun ve eğer limit $\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$ mevcutsa, bu sınıra K kümesinin asimptotik yoğunluğu denir. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$, K kümesinin n 'den küçük veya eşit elemanlarının sayısını ifade eder (Anastassiou ve Duman 2011, Niven ve Zuckerman 1980).

Eğer $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 1$ ise, o zaman $\delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1 \cup K_2) = 1$ olur.

Eğer $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 0$ ise, o zaman $\delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1 \cup K_2) = 0$ olur.

Gerçel veya karmaşık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaması ilk olarak Fast (1951) tarafından tanıtılmıştır.

Tanım 2.5 $x = (x_k)$ bir gerçel veya karmaşık sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir L reel sayısı mevcut olup,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

oluyorsa, (x_k) dizisi L 'ye istatistiksel olarak yakınsar denir.

İstatistiksel limsup ve liminf kavramları Fridy ve Orhan (1997) tarafından aşağıdaki şekilde tanıtılmıştır.

Tanım 2.6 k pozitif bir tamsayı ve x bir gerçel sayı dizisi olsun. B_x ve A_x kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \delta(\{n : x_n > b\}) \neq 0\}, \quad A_x = \{a \in \mathbb{R} : \delta(\{n : x_n < a\}) \neq 0\}.$$

Bu durumda x dizisinin istatistiksel limsup ve liminf değerleri şu şekilde verilir:

$$st\text{-}\lim \sup x = \begin{cases} \sup B_x & \text{eğer } B_x \neq \emptyset, \\ -\infty & \text{eğer } B_x = \emptyset. \end{cases}$$

$$st\text{-}\lim \inf x = \begin{cases} \inf A_x & \text{eğer } A_x \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{eğer } A_x = \emptyset. \end{cases}$$

3. BİR BULANIK SAYI DİZİSİNİN ALT VE ÜST LİMİTİ

Bu bölümde, bir BSFN'nin alt limit ve üst limit kavramları, reel sayılardaki karşılıkları temel alınarak tanımlanmakta ve bu kavramların temel özellikleri incelenmektedir. Alt sınır (infimum) için, reel sayılarla özdeş kabul edilen ancak BSFN'ler açısından farklılık gösteren iki ayrı tanım önerilmektedir. Ayrıca, reel sayı dizileri için geçerli olan bazı özelliklerin BSFN'ler için sağlanmadığı görülmektedir. Örneğin, bazı BSFN örneklerinde üst limit, dizinin en büyük limit noktasıyla çakışmamaktadır.

Tanım 3.1 $X = \{X_k\}$ bir BSFN olsun. $\{X_k\}$ dizisinin alt ve üst limitleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\liminf_k X_k = \lim_n \inf_{k \geq n} X_k, \quad \limsup_k X_k = \lim_n \sup_{k \geq n} X_k.$$

Bu tanımda, $\{\inf_{k \geq n} X_k\}$ ve $\{\sup_{k \geq n} X_k\}$ dizilerinin yakınsak olduğu varsayılmaktadır. Ancak, sınırlı bir bulanık sayı dizisinin alt ya da üst limitinin her zaman mevcut olmayabileceği not edilmiştir (Wu ve Wang 2002). Bu duruma, aşağıda sunulacak olan Örnek 3.8'de de değinilmektedir.

Önerme 3.2 $\{X_k\}$ ve $\{Y_k\}$ dizilerinin bulanık sayıların yakınsak dizileri olduğu varsılsın. Eğer $n_0 \in \mathbb{N}$ olacak şekilde tüm $k > n_0$ için $X_k \leq Y_k$ bağıntısı sağlanıyorsa, o hâlde $X_k \leq \lim Y_k$ bağıntısı elde edilir.

İspat $v = \lim X_k$ ve $\mu = \lim Y_k$ olarak tanımlansın. Tüm $k > n_0$ için $X_k \leq Y_k$ koşulunun sağlanması, her $\alpha \in [0, 1]$ için aşağıdaki anlamı taşımaktadır:

Her $k > n_0$ için $\underline{X}_k^\alpha \leq \underline{Y}_k^\alpha$ ve $\overline{X}_k^\alpha \leq \overline{Y}_k^\alpha$ eşitsizlikleri geçerlidir.

Her iki tarafın limitinin $k \rightarrow \infty$ iken alınmasıyla, her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\underline{v}^\alpha = \lim_k \underline{X}_k^\alpha \leq \lim_k \underline{Y}_k^\alpha = \underline{\mu}^\alpha,$$

$$\overline{v}^\alpha = \lim_k \overline{X}_k^\alpha \leq \lim_k \overline{Y}_k^\alpha = \overline{\mu}^\alpha$$

eşitsizlikleri elde edilmektedir. Bu durumda, $v \leq \mu$ olduğu sonucuna varılır.

Önerme 3.2 uygulanarak, aşağıdaki iki teorem kolaylıkla kanıtlanabilir.

Aşağıdaki teorem, klasik analizde reel sayı dizileri için bilinen temel bir limit eşitsizliğinin bulanık sayı dizilerine de genellenebildiğini göstermektedir.

Teorem 3.3 $X = \{X_k\}$ bir BSFN olsun. Eğer $\liminf_k X_k$ ve $\limsup_k X_k$ limitleri mevcutsa, aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır:

$$\liminf_k X_k \leq \limsup_k X_k.$$

Sıradaki teorem, iki BSFN arasında asimptotik karşılaştırmalar yapılmasına olanak tanır. Eğer bir noktadan sonra $X_k \leq Y_k$ koşulu sağlanıyorsa limit alt ve üst sınırlarının da aynı sıralamayı koruyacağı garanti altına alınmış olur. Bu da özellikle yakınsaklık analizi, sıralı yaklaşımlar veya kararlılık analizleri gibi konularda kritik önem taşır.

Teorem 3.4 $X = \{X_k\}$ ve $Y = \{Y_k\}$ iki BSFN olsun. Eğer $n_0 \geq 1$ olacak şekilde tüm $k > n_0$ için $X_k \leq Y_k$ bağıntısı sağlanıyorsa ve

$$\liminf_k X_k, \quad \limsup_k X_k, \quad \liminf_k Y_k, \quad \limsup_k Y_k$$

limitleri mevcutsa, o hâlde aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\liminf_k X_k \leq \liminf_k Y_k \quad \text{ve} \quad \limsup_k X_k \leq \limsup_k Y_k.$$

Önerme 3.5 $X = \{X_k\}$ bir BSFN olmak üzere, $v = \liminf_k X_k$ ve $\mu = \limsup_k X_k$ olarak tanımlansın. O hâlde her $\varepsilon > 0$ için

$$M_1(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : X_k < v - \varepsilon_1\}, \quad M_2(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu + \varepsilon_1\}$$

kümeleri sonludur.

İspat Her $\varepsilon > 0$ için $M_1(\varepsilon)$ kümesinin yalnızca sonlu sayıda elemana sahip olduğu gösterilecektir. Aksine, $M_1(\tilde{\varepsilon})$ kümesinin sonsuz olduğu bir $\tilde{\varepsilon} > 0$ olduğu varsayılın.

İnfimum tanımı gereği, her $n \in \mathbb{N}$ için $\inf_{k \geq n} X_k \leq X_n$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

Özellikle, $n \in M_1(\tilde{\varepsilon})$ için $X_n < v - \tilde{\varepsilon}_1$ olduğu bilindiğinden,

$$\inf_{k \geq n} X_k \leq X_n < v - \tilde{\varepsilon}_1$$

elde edilir. Bu da her $n \in M_1(\tilde{\varepsilon})$ için

$$\bar{d}\left(\inf_{k \geq n} X_k, v\right) > \tilde{\varepsilon}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösterir. Ancak $M_1(\tilde{\varepsilon})$ kümesinin sonsuz olduğu varsayımı altında, bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} X_k = v$ eşitliğiyle çelişmektedir. Dolayısıyla $M_1(\varepsilon)$ kümesinin sonlu olması gerektiği sonucuna varılır. Benzer şekilde $M_2(\varepsilon)$ kümesinin de sonlu olduğu gösterilebilir. Böylece önerme ispatlanmış olur.

Şimdi, Tanım 3.1 de verilen istatistiksel alt limit ve üst limit tanımlarına benzer biçimde, alternatif bir limit kavramının tanımlanabilmesi için aşağıdaki yaklaşım sunulmaktadır. $X = \{X_k\}$ dizisi verildiğinde, aşağıdaki kümeler tanımlanır:

$$\begin{aligned} A_X &= \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k < \mu\} \in P_I(\mathbb{N})\}, \\ \bar{A}_X &= \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu\} \in P_\Delta(\mathbb{N})\}, \\ B_X &= \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu\} \in P_I(\mathbb{N})\}, \\ \bar{B}_X &= \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k < \mu\} \in P_\Delta(\mathbb{N})\}. \end{aligned}$$

Yukarıda tanımlanan kümeler, bulanık sayı dizilerinin limit davranışını klasik anlamdaki alt ve üst limitlerden farklı bir bakış açısıyla incelemeye olanak sağlar. Buradaki fikir, klasik noktadan-noktaya karşılaştırma yerine, ideal veya filtre temelli yoğunluk kavramları kullanılarak limitlerin tanımlanmasıdır.

Buradan hareketle aşağıdaki tanımlar dikkate alınmaktadır:

$$\begin{aligned} P_I(\mathbb{N}) &= \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ kümesi sonsuz sayıda elemana sahiptir}\}, \\ P_\Delta(\mathbb{N}) &= \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ kümesi sonlu sayıda elemana sahiptir}\}. \end{aligned}$$

Eğer $X = \{X_k\}$ dizisi sınırlı ise, A_X , $\bar{A}_X$, B_X ve $\bar{B}_X$ kümelerinin boş olmadığı açıktır. Ayrıca:

- A_X ve $\bar{B}_X$ kümelerinin bir alt sınırı,

- $\overline{A}_X$ ve B_X kümelerinin ise bir üst sınırı

bulunmaktadır. Bu nedenle, supremum ve infimumun varlığına ilişkin Fang ve Huang (2004) tarafından elde edilen sonuçtan yararlanılarak

$$\inf A_X, \quad \sup \overline{A}_X, \quad \sup B_X, \quad \inf \overline{B}_X$$

kavramlarının iyi tanımlı olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca, $\inf A_X = \sup \overline{A}_X$ ve $\sup B_X = \inf \overline{B}_X$ eşitliklerinin geçerli olduğu Teorem 3.7'de gösterilecektir.

Bu durum göz önünde bulundurularak aşağıdaki tanım önerilmektedir:

Tanım 3.6 Bir BSFN olan $X = \{X_k\}$ verildiğinde, alt limit ($\liminf$) ve üst limit ($\limsup$) kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\liminf X_k = \inf A_X = \sup \overline{A}_X, \quad \limsup X_k = \sup B_X = \inf \overline{B}_X.$$

Teorem 3.7 $X = \{X_k\}$ dizisi sınırlı kabul edilirse, aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı görülmektedir:

$$\inf A_X = \sup \overline{A}_X \quad \text{ve} \quad \sup B_X = \inf \overline{B}_X.$$

İspat Sadece birinci eşitliğin doğruluğu gösterilecektir. $\inf A_X$ ifadesi v ile, $\sup \overline{A}_X$ ifadesi ise μ ile gösterilsin. A_X ve $\overline{A}_X$ kümelerinin tanımlarından dolayı, her $\tilde{v} \in A_X$ için $v \leq \tilde{v}$ ve her $\tilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için $\mu \geq \tilde{\mu}$ olduğu bilinmektedir.

Bir $\tilde{v} \in A_X$ alındığında, $\{k \in \mathbb{N} : X_k < \tilde{v}\}$ kümesinin sonsuz olduğu anlaşılmaktadır. Öte yandan, $\tilde{\mu} \in \overline{A}_X$ olması durumunda, $\mathbb{N} \setminus \{k \in \mathbb{N} : X_k > \tilde{\mu}\}$ kümesinin sonlu olduğu elde edilmektedir; bu da, tüm $k \geq K_{\tilde{\mu}}$ için $X_k > \tilde{\mu}$ olacak şekilde bir $K_{\tilde{\mu}} < \infty$ sayısının varlığını ifade eder.

Bu koşullar altında, her $\tilde{v} \in A_X$ ve $\tilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için, $\tilde{\mu} < X_{k'} < \tilde{v}$ eşitsizliğini sağlayan bir $k' \geq K_{\tilde{\mu}}$ bulunduğu sonucuna varılır. Böylece, $v = \mu$ eşitliği elde edilmiş olur.

Bu durum, tüm $\tilde{v} \in A_X$ ve $\tilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için $\tilde{\mu} < \tilde{v}$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.

Elde edilen bu sonuçtan, (2) numaralı eşitsizlik doğrultusunda, her $\tilde{\mu} \in \overline{A}_X$ ifadesinin A_X kümesinin bir alt sınırı olduğu anlaşılmaktadır. Bu durumda, infimumun tanımı gereği aşağıdaki eşitsizlik elde edilmektedir:

$$\tilde{\mu} \leq v = \inf A_X.$$

Bu eşitsizlik, tüm $\tilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için geçerlidir. Dolayısıyla, supremum'un tanımı uyarınca aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\mu \leq v.$$

Şimdi $\mu < v$ durumunun geçerli olamayacağı gösterilecektir. Aksine, $\mu < v$ olduğu varsayılın. Bu durumda, $\underline{\mu}^\alpha < \underline{v}^\alpha$ ya da $\overline{\mu}^\alpha < \overline{v}^\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in [0, 1]$ bulunmuş olur.

Kesinliği sağlamak amacıyla yalnızca aşağıdaki durum ele alınacaktır:

$$\underline{\mu}^\alpha < \underline{v}^\alpha$$

ve bu varsayımın bir çelişkiye yol açtığı gösterilecektir.

$\underline{v}^\alpha$ ve $\underline{\mu}^\alpha$ nicelikleri arasındaki farkın pozitif olması nedeniyle, $b = v(\underline{\mu}^\alpha)$ tanımlansın. Buradan $b < \alpha$ olduğu açıktır (hatta $b = 0$ da olabilir). Ayrıca, tüm $\lambda \in (b, \alpha]$ için

$$\underline{\mu}^\lambda < \underline{v}^\lambda$$

eşitsizliği geçerli olmaktadır.

Eğer $\mu(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları üst yarı sürekliliğe sahipse, o hâlde (z, β) biçiminde bir nokta bulunur; burada $z \in (\underline{\mu}^\alpha, \underline{v}^\alpha)$ ve $\beta \in (b, \alpha)$ olacak şekilde

$$\text{Her } \lambda \in [\beta, \alpha] \text{ için } \underline{\mu}^\lambda < z \text{ ve } \underline{v}^\lambda > z \quad (3.1)$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

Aşağıdaki iki bulanık sayı şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & x < \underline{x}^0, \\ \beta, & x \in [\underline{x}^0, z), \\ 1, & x = z, \\ 0, & x > z, \end{cases} \quad \gamma_2 = \begin{cases} 0, & x < z, \\ \beta, & x \in [z, \overline{x}^0), \\ 1, & x = \overline{x}^0, \\ 0, & x > \overline{x}^0. \end{cases}$$

Burada, $\underline{x}^0 = \liminf \underline{X}_k^0 - 1$ ve $\bar{x}^0 = \limsup \bar{X}_k^0 + 1$ olmak üzere, bu sayıların sonlu oldukları (bkz. (3.1)) gözlemlenmektedir.

Aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığı bilinmektedir:

$$\begin{aligned}\underline{\mu}^\beta &\geq \liminf \underline{X}_k^\beta \geq \underline{X}_k^0 > \underline{x}^0 = \underline{\gamma}_1^\beta, \quad \underline{\mu}^\alpha < z = \underline{\gamma}_1^\alpha, \\ \underline{v}^b &\leq \underline{\mu}^\alpha < z = \underline{\gamma}_2^b, \quad \underline{v}^\beta > z = \underline{\gamma}_2^\beta.\end{aligned}$$

Bu gözlemlerden şu sonuç elde edilmektedir:

$$\mu \not\prec \gamma_1 \quad \text{ve} \quad v \not\prec \gamma_2. \quad (3.2)$$

Şimdi aşağıdaki kümeler tanımlansın:

$$\begin{aligned}C_1 &= \{k \in \mathbb{N} : \text{bazı } \lambda \in (\beta, \alpha] \text{ için } \underline{X}_k^\lambda \leq z\}, \\ C_2 &= \{k \in \mathbb{N} : \text{bazı } \lambda \in (\beta, \alpha] \text{ için } \underline{X}_k^\lambda \geq z\}.\end{aligned}$$

Bu tanımlardan açıkça

$$C_1 \cup C_2 = \mathbb{N} \quad (3.3)$$

olduğu görülmektedir.

Öncelikle C_1 kümesinin sonsuz sayıda eleman içerdiği varsayalım. γ_2 bulanık sayısının ve $\bar{x}^0$ reel sayısının tanımına bağlı olarak, aşağıdaki ifade elde edilmektedir:

$$\text{Her } k \in C_1 \setminus K_1 \text{ için } X_k < \gamma_2,$$

burada

$$K_1 = \left\{k \in \mathbb{N} : \text{bazı } \lambda \in [0, 1] \text{ için } \bar{X}_k^\lambda > \bar{x}^0\right\}.$$

K_1 kümesinin sonlu olduğu açıktır. Bu nedenle, $X_k < \gamma_2$ eşitsizliğini sağlayan $k \in \mathbb{N}$ sayılarının sonsuz olduğu sonucuna varılmaktadır. Bu, $\gamma_2 \in A_X$ olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla, $\inf A_X$ tanımından

$$\gamma_2 \geq v = \inf A_X$$

elde edilir. Bu sonuç (3.2) numaralı ifade ile çelişmektedir (yani $v \not\prec \gamma_2$). Bu nedenle, C_1 kümesinin sonlu olduğu sonucuna ulaşılır. Bu durumda, (3.3) numaralı ifadeye

göre C_2 kümesinin sonsuz olması gerekmektedir. γ_1 bulanık sayısı ve $\underline{x}^0$ reel sayısı göz önüne alındığında $\forall k \in C_2 \setminus (C_1 \cup K_2)$ için $X_k > \gamma_1$ eşitsizliği elde edilir; burada

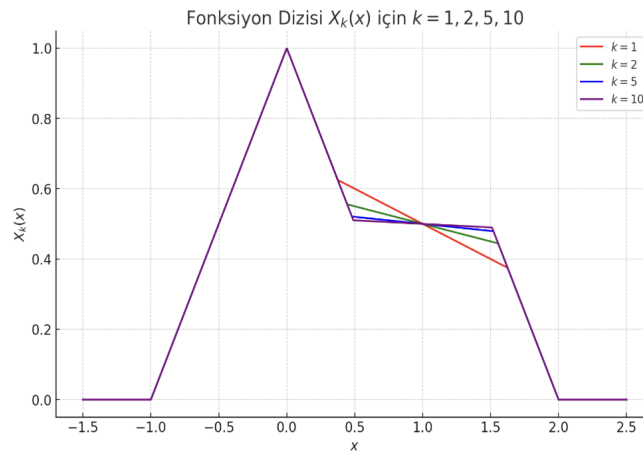
$$K_2 = \{k \in \mathbb{N} : \text{bazı } \lambda \in [0, \beta] \text{ için } \underline{X}_k^\lambda < \underline{x}^0\}$$

olarak tanımlanmıştır. K_2 kümesinin de sonlu olduğu bilinmektedir. Böylece $C_2 \setminus (C_1 \cup K_2)$ kümesinin sonsuz olduğu sonucu elde edilir. Bu durum $\gamma_1 \in \overline{A}_X$ anlamına gelmektedir. O hâlde, $\gamma_1 \leq \mu = \sup \overline{A}_X$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Ancak bu da (3.2) numaralı ifadeyle çelişmektedir (yani $\mu \not\approx \gamma_1$). Böylece Teorem 3.7'nin ispatı tamamlanmış olmaktadır.

Şimdi Tanım 3.1 ve Tanım 3.6'nın farklı olduğunu gösteren bir örnek verelim.

Örnek 3.8 Aşağıdaki şekilde tanımlanan $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisini ele alalım:

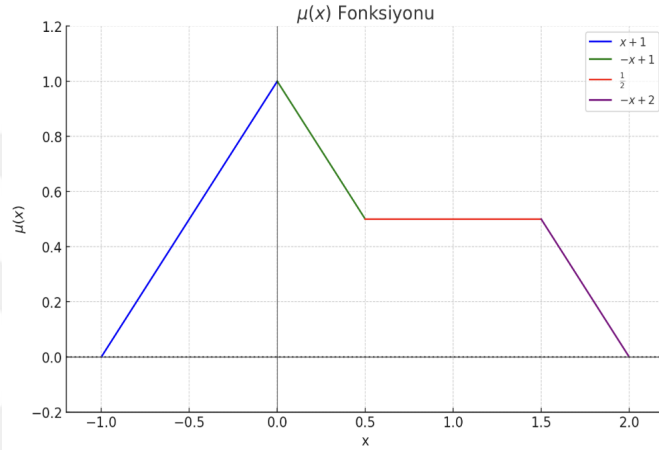
$$X_k(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5k-2}{5k-1} \right), \\ -\frac{1}{5k}(x-1) + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \left(\frac{5k-2}{5k-1} \right) \leq x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{15k-2}{5k-1} \right), \\ -x + 2, & \frac{1}{2} \left(\frac{15k-2}{5k-1} \right) \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$



Şekil 1: (X_k) bulanık sayı dizisi

Bulanık μ sayısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\mu(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ -x+2, & \frac{3}{2} \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$



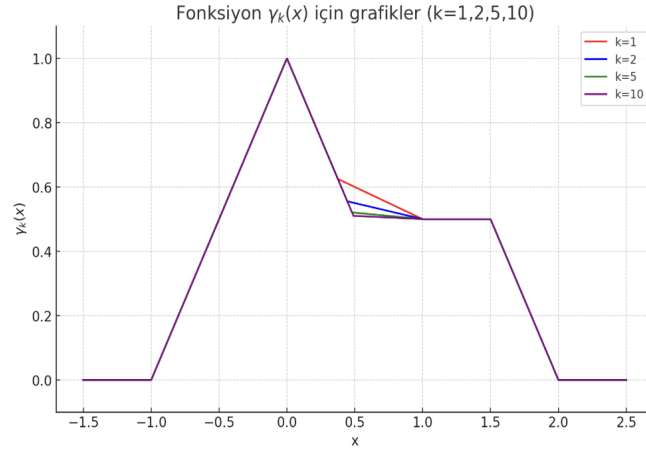
Şekil 2: μ bulanık sayısı

$\inf A_x = \inf_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k$ olduğu kolaylıkla görülür; burada

$$\gamma_k(x) := \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5k-2}{5k-1} \right), \\ -\frac{1}{5k}(x-1) + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \left(\frac{5k-2}{5k-1} \right) \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ -x+2, & \frac{3}{2} \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

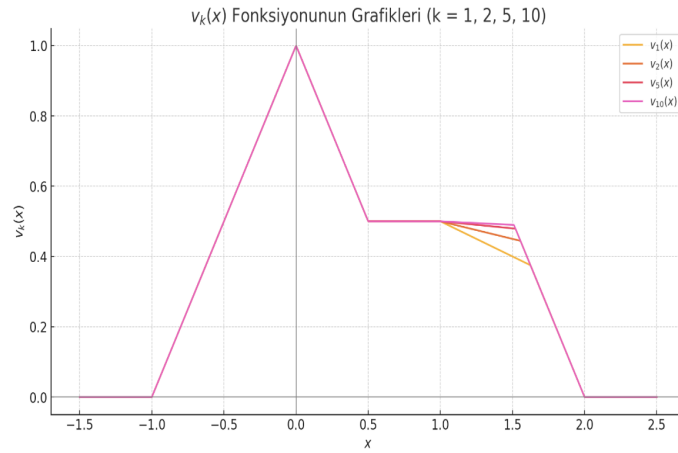
Fang ve Huang (2004)'ün çalışmasındaki Teorem 3.1 kullanılarak, $\inf_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k = \mu$ elde edilir. Dolayısıyla Tanım 3.6'ye göre $\liminf X_k = \mu$ olduğu sonucuna varılır.

Benzer şekilde, $\sup B_x = \sup_{k \in \mathbb{N}} v_k$ olduğu gözlemlenir.



Şekil 3: (γ_k) bulanık sayı dizisi

$$v_k(x) := \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{5k}(x - 1) + \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{15k-2}{5k-1} \right), \\ -x + 2, & \frac{1}{2} \left(\frac{15k-2}{5k-1} \right) \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$



Şekil 4: (V_k) bulanık sayı dizisi

Ayrıca, $\sup_{k \in \mathbb{N}} v_k = \mu$ olduğundan, Tanım 3.6'ye göre $\text{Limsup } X_k = \mu$ elde edilir. Öte yandan, $\liminf X_k$ (ve benzer şekilde $\limsup X_k$) dizileri mevcut değildir. Gerçekten

de,

$$\inf_{k \geq n} X_k = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{5n}(x - 1) + \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{15n-2}{5n-1} \right), \\ -x + 2, & \frac{1}{2} \left(\frac{15n-2}{5n-1} \right) \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olduğundan bu dizi herhangi bir bulanık sayıya yakınsamamaktadır. Özellikle, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{d} \left(\inf_{k \geq n} X_k, \mu \right) \geq \frac{1}{2} \quad \text{çünkü} \quad \left| \left(\inf_{k \geq n} X_k \right)^{1/2} - \bar{\mu}^{1/2} \right| = |1 - 3/2| = \frac{1}{2}.$$

Bu örnek aşağıdaki sonuçları göstermektedir:

1. Bir $\{X_k\}$ bulanık sayı dizisi için $\text{Liminf } X_k = \text{Limsup } X_k$ eşitliği sağlanabilir; ancak klasik anlamda limit, yani $\lim X_k$, mevcut olmayabilir.
2. Her BSFN dizisi için $\text{Liminf } X_k$ ve $\text{Limsup } X_k$ mevcuttur; fakat $\lim \inf X_k$ ve $\lim \sup X_k$ mevcut olmayabilir.
3. Bazı BSFN dizileri $\{X_k\}$ için, $\text{Liminf } X_k$ ve $\text{Limsup } X_k$ 'ye yakınsayan herhangi bir alt dizi bulunmayabilir.
4. Bir BSFN dizisi $\{X_k\}$ 'nin sınır noktaları kümesi olan L_x boş olabilir.

4. BULANIK SAYI DİZİSİNİN ÇEKİRDEĞİ

Çekirdek kavramı, karmaşık sayı dizileri bağlamında ilk olarak Knopp (1930) tarafından ortaya atılmıştır. Aşağıda, bu kavram Aytar vd. (2008) tarafından bulanık sayı dizilerine uyarlanarak tanımlanmaktadır.

$X = X_k \subset L(\mathbb{R})$ biçiminde bir dizi göz önüne alınsın. $R_n, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ kümesini kapsayan $L(\mathbb{R})$ 'nin kapalı bir aralığı olarak tanımlansın. Bu durumda, aşağıdaki kapsama ilişkisi açıkça elde edilir:

$$R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \dots$$

Tanım 4.1 Bir $X = X_k$ bulanık sayı dizisinin çekirdeği,

$$\text{core}\{X\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$$

biçimindeki kesişim olarak tanımlanır.

Önerme 4.2 $X = X_k$ bir bulanık sayılar dizisi olsun. Eğer $\liminf X$ ve $\limsup X$ mevcutsa, o hâlde $\text{core}X$ kümesi $[\liminf X, \limsup X]$ aralığına eşit olur.

İspat Tanım 4.1'e göre

$$\text{core}\{X\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$$

olmak üzere, burada $R_n = [A_n, B_n], \{X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}$ kümesini içeren en küçük kapalı aralık olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda, her $n \geq 1$ için

$$\{X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\} \subset R_n = [A_n, B_n] \quad (4.1)$$

ilişkisi elde edilir. Öncelikle,

$$[\liminf X, \limsup X] \subset \text{core}\{X\} \quad (4.2)$$

kapsamasının geçerliliği gösterilecektir. Bu amaçla, herhangi bir $\gamma \in [\liminf X, \limsup X]$ ve herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ alınsın. (4.1) numaralı bağıntıdan

$$A_{n_0} \leq X_k \leq B_{n_0}, \text{ her } k \geq n_0 \text{ için} \quad (4.3)$$

ilişkisi elde edilmektedir.

Bu eşitsizliğin sol tarafından, A_{n_0} ın $\{X_{n_0}, X_{n_0+1}, X_{n_0+2}, \dots\}$ kümesinin alt sınırı olduğu sonucu çıkarılmaktadır. Bu da $A_{n_0} \leq \inf_{k \geq n_0} X_k$ anlamına gelmektedir.

Şimdi $\xi_{n_0+i} := \inf_{k \geq n_0+i} X_k$, $i = 0, 1, \dots$ biçiminde tanımlansın.

$$\{X_{n_0}, X_{n_0+1}, \dots\} \supseteq \{X_{n_0+1}, X_{n_0+2}, \dots\}$$

olduğu için

$$\xi_{n_0} \leq \xi_{n_0+1} \leq \dots$$

ilişkisi sağlanmaktadır. Böylece, her $i \geq 0$ için $A_{n_0} \leq \xi_{n_0+i}$ elde edilir. Bu durumda, Önerme 4.2 kullanılarak

$$A_{n_0} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_{n_0+i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n_0+i} X_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} X_k = \liminf X$$

sonucuna ulaşılır. Verilen $\gamma \in [\liminf X, \limsup X]$ olduğu göz önüne alındığında, $A_{n_0} \leq \gamma$ olduğu görülür.

Benzer şekilde, (4.3) eşitsizliğinin sağ tarafı dikkate alınarak $B_{n_0} \geq \limsup X \geq \gamma$ olduğu gösterilebilir. Böylece,

$$\gamma \in [A_{n_0}, B_{n_0}] = R_{n_0}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. $n_0 \in \mathbb{N}$ keyfi seçildiğinden,

$$\gamma \in \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \text{core}\{X\}$$

olduğu sonucuna varılır. Bu nedenle, (4.2) numaralı kapsamanın geçerli olduğu kanıtlanmıştır.

Şimdi,

$$\text{core}\{X\} \subset [\liminf X, \limsup X] \quad (4.4)$$

ilişkisi gösterilecektir. Herhangi bir $\gamma \in \text{core}\{X\}$ seçilsin.

$$\gamma \in [A_n, B_n], \text{ her } n \geq 1 \text{ için} \quad (4.5)$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi $\xi_n = \inf_{k \geq n} X_k$, $\eta_n = \sup_{k \geq n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$ olarak tanımlansın. Açıktır ki, her $k \geq n$ için $\xi_n \leq X_k \leq \eta_n$ olup

$$\{X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\} \subset [\xi_n, \eta_n], \text{ her } n \geq 1 \text{ için} \quad (4.6)$$

ilişkisi elde edilir. Öte yandan, Tanım 4.1'e göre $R_n = [A_n, B_n]$ aralığı, söz konusu kümeyi kapsayan en küçük aralık olduğundan

$$[A_n, B_n] \subset [\xi_n, \eta_n], \text{ her } n \geq 1 \text{ için}$$

ilişkisi sağlanmaktadır. Bu durumda, (4.5)'den $\gamma \in [\xi_n, \eta_n]$ elde edilir, yani $\forall n \geq 1$ için

$$\xi_n \leq \gamma \leq \eta_n,$$

eşitsizliği geçerlidir. Önerme 3.2 uygulanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \gamma \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$$

veya

$$\gamma \in [\liminf X, \limsup X]$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, (4.4) numaralı kapsamanın da doğru olduğu görülmektedir. (4.2) ve (4.4) numaralı kapsamalar birlikte ele alındığında, önerme ispatlanmış olur.

Teorem 4.3 $X = \{X_k\}$ bir BSFN ve $\text{core}\{X\} \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, $L_X \subset \text{core}\{X\}$ kapsaması geçerlidir.

İspat $\gamma \in L_X$ ve $\text{core}\{X\} = \bigcap_{n \geq 1} [A_n, B_n]$ olsun.

$$\text{Her } n \geq 1 \text{ için } \gamma \in [A_n, B_n] \quad (4.7)$$

olduğu gösterilecektir.

Bu amaçla herhangi bir $n \geq 1$ sabitlenmiş olsun. $\text{core}\{X\}$ in tanımına göre, aşağıdaki ilişki sağlanmaktadır:

$$\text{Her } k \geq n \text{ için } A_n \leq X_k \leq B_n \quad (4.8)$$

Diğer yandan, γ nın X_k dizisinin bir sınır noktası olması nedeniyle, γ ya yakınsayan bir X_{k_m} alt dizisinin var olduğu bilinmektedir. Bu alt dizi (4.8) numaralı eşitsizlik içinde yerine konulduğunda:

$$\text{Her } k_m \geq n \text{ için } A_n \leq X_{k_m} \leq B_n, \quad m = 1, 2, \dots$$

eşitsizliği elde edilmektedir. Bu durumda, Önerme 3.2 uygulanarak

$$A_n \leq \gamma \leq B_n$$

sonucuna ulaşılır. Bu da (4.7) numaralı kapsamanın sağlandığını göstermektedir. Dolayısıyla, $\gamma \in [A_n, B_n]$ her $n \geq 1$ için geçerli olduğundan,

$$\gamma \in \bigcap_{n \geq 1} [A_n, B_n] = \text{core}\{X\}$$

olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak, $L_X \subset \text{core}\{X\}$ olduğu ispatlanmıştır.

Teorem 4.4 $X = \{X_k\}$ bir BSFN olmak üzere, $\liminf X$ ve $\limsup X$ limitlerinin var olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$L_X \subset [\liminf X, \limsup X]$$

kapsaması geçerlidir.

İspat Bu sonuç, doğrudan Önerme 4.2 ve Teorem 4.3'den elde edilmektedir.

$\mathbb{R}$ kümesinin $L(\mathbb{R})$ ye gömülebilir olması nedeniyle, yalnızca reel sayı dizileri için geçerli olan bazı koşulların bulanık sayı dizileri için geçerli olmayabileceği gözlemlenmiştir.

- Teorem 4.3'de verilen kapsamanın tersi genel olarak geçerli değildir.
- İki BSFN'nin çekirdeği aynı olabilirken, bu dizilerin limit noktalarından oluşan kümelerin farklı olabileceği görülmektedir.

Reel sayı dizileriyle elde edilen bazı özellikler bulanık sayı dizilerine de genellenilebilmekle birlikte, aşağıda verilen örnek aracılığıyla bazı farklılıkların da mevcut olabileceği ortaya konulmaktadır.

Örnek 4.5 (a) $X = \{X_k\}$ dizisi ile bulanık sayı μ , Örnek 3.8’de tanımlandığı biçimde verilsin. $Z = \{Z_k\}$ ve $Y = \{Y_k\}$ dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$Z_k := \begin{cases} X_k, & \text{eğer } k \text{ tek ise,} \\ v, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad Y_k := v \quad \text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için.}$$

Bulanık sayı v , aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$v_k := \begin{cases} x - 6, & x \in [6, 7], \\ -x + 8, & x \in (7, 8], \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu tanımlar doğrultusunda

$$L_Z = \{v\}, \quad L_Y = \{v\}, \quad \text{core}\{Z\} = [\mu, v], \quad \text{core}\{Y\} = \{v\}$$

olduğu görülmektedir. Bu durum, iki farklı BSFN’nin aynı limit kümesine sahip olmasına rağmen çekirdeklerinin farklı olabileceğini göstermektedir.

(b) Örnek 3.8’de tanımlanan X dizisi için $\text{core}\{X\} = \{\mu\}$ olduğu halde, $\lim X_k$ limitinin var olmadığı gözlemlenmektedir.

(c) (a) şıkında tanımlanan sınırlı Z dizisi için $L_Z = \{v\}$ elde edilmektedir. Ancak, bu dizinin v ye yakınsamadığı belirtilmelidir.

(d) $X = \{X_k\}$ dizisi ve μ bulanık sayısı Örnek 3.8’deki gibi tanımlı olmak üzere, $S = \{S_k\}$ dizisi şu şekilde tanımlansın:

$$S_k := \begin{cases} X_k, & \text{eğer } k \text{ tek ise,} \\ \mu, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu tanıma göre, $L_S = \text{core}\{S\} = \{\mu\}$ olduğu halde, S dizisinin limitinin mevcut olmadığı tespit edilmektedir.

Şimdi bir BSFN’nin yakınsaklığı için yeterli bir koşul verilmektedir.

Teorem 4.6 $X = \{X_k\}$ bir BSFN ve

$\text{core}\{X\} = [\liminf X, \limsup X] = \{\mu\}$ olduğu varsayalım. Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için

$$K_1(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : X_k \not\prec \mu - \varepsilon_1\} \quad \text{ve} \quad K_2(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : X_k \not\prec \mu + \varepsilon_1\}$$

kümeleri sonlu olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı bulunuyorsa, o hâlde $\lim X_k = \mu$ olur.

İspat Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sabitlenmiş olsun.

$N_1 = \max\{n : n \in K_1(\varepsilon)\}$ ve $N_2 = \max\{n : n \in K_2(\varepsilon)\}$ olarak tanımlansın.

Önerme 3.5'e göre,

$$M_1(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : X_k \leq \mu - \varepsilon_1\} \quad \text{ve} \quad M_2(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : X_k \geq \mu + \varepsilon_1\}$$

kümeleri sonludur. Bu kümelerdeki en büyük elemanlar sırasıyla N_3 ve N_4 ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\mathbb{N} = K_1(\varepsilon) \cup M_1(\varepsilon) \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k > \mu - \varepsilon_1\}.$$

Dolayısıyla,

$$\text{her } k > \max\{N_1, N_3\} \text{ için } X_k > \mu - \varepsilon_1$$

olur. Benzer biçimde, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\text{her } k > \max\{N_2, N_4\} \text{ için } X_k < \mu + \varepsilon_1$$

olur. Bu iki sonuç birleştirildiğinde:

$$\text{her } k > \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\} \text{ için } \mu - \varepsilon_1 < X_k < \mu + \varepsilon_1$$

olduğu görülür. Bu durum,

$$\bar{d}(X_k, \mu) < \varepsilon \quad \text{yani} \quad \lim X_k = \mu$$

şeklinde ifade edilen yakınsaklık sonucunu verir.

Sonuç Eğer $X = \{X_k\}$ bir bulanık sayı dizisi ise, bu dizinin uç terimlerini içeren en küçük kapalı ve dışbükey kümelerin kesişimi olan $\text{core}\{X\}$ kümesinin, $[\liminf X_k, \limsup X_k]$ aralığıyla çakıştığı bilinmektedir. Bu sonuç, bu çalışmanın

temel bulgularından birini oluşturmaktadır. Yakınsak diziler için, çekirdek ile dizinin limitini içeren tekil öge çakıştığından, çekirdek kavramı bu tür diziler için ek bilgi sağlamamaktadır. Ancak dizi yakınsak değilse, çekirdek kavramı dizinin belirli özelliklerinin yorumlanmasına imkân tanımaktadır. Örneğin, dizinin uç limit noktalarının ve diğer limit noktalarının davranışları bu kavram aracılığıyla analiz edilebilmektedir.

Bu duruma bir örnek olarak, Örnek 3.8’de verilen $X = \{X_k\}$ dizisi ele alınabilir. Söz konusu dizi yakınsak olmamakla birlikte, dizinin hemen hemen tüm terimlerinin geometrik olarak $\text{core}\{X\}$ etrafında kümelendiği gözlemlenmektedir. Bu nedenle, özellikle yakınsak olmayan diziler söz konusu olduğunda, bulanık sayı dizisinin çekirdeği önemli bir bilgi kaynağı olarak değerlendirilmektedir.

Bulanık sayılar dizisinin çekirdeği tanıtıldıktan sonra, doğal olarak ortaya çıkan ilk soru, bu çekirdekle dizinin dönüştürülmüş hâlinin çekirdeği arasında bir dahil etme ilişkisi bulunup bulunmadığıdır. Bu tür bir ilişki, klasik anlamda Knopp’un çekirdek teoremi olarak bilinmektedir. Burada “bulanık sayılar dizisinin dönüştürülmüş dizisi” terimi kullanılmaktadır; ancak bu terimin henüz bulanık küme teorisi literatüründe yerleşmiş bir karşılığı bulunmamaktadır. Dolayısıyla, söz konusu teorem ancak bu kavramsal açıklıktan sonra ifade edilebilecektir.

Aşağıdaki teorem, bulanık sayılar kümesi olan E^1 de tanımlı bir bulanık sayı u nun temel yapı taşlarını ortaya koyan önemli bir karakterizasyon teoremidir (Goetschel ve Voxman 1986). Teorem, her bulanık sayının α -kesitlerinin belirli fonksiyonel özelliklere sahip aralıklar biçiminde tanımlanabileceğini belirtmektedir.

Bulanık sayıların çekirdekleri, α -kesitlerin $\lambda = 1$ düzeyindeki davranışlarıyla tanımlanır. Bu nedenle supremum ve infimum gibi işlemler veya yakınsaklık kavramları, çekirdeklerin analizi açısından doğrudan belirleyicidir.

Teorem 4.7 $u \in E^1$ olmak üzere, her $\lambda \in [0, 1]$ için $[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$ tanımlansın. O hâlde aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır:

1. $u^-(\lambda)$, $(0, 1]$ aralığında sınırlı, sol-süreklili ve artan olmayan bir fonksiyondur;
2. $u^+(\lambda)$, $(0, 1]$ aralığında sınırlı, sol-süreklili ve azalan olmayan bir fonksiyondur;
3. $u^-(\lambda)$ ve $u^+(\lambda)$, $\lambda = 0$ noktasında sağdan süreklidir;
4. $u^-(1) \leq u^+(1)$ eşitsizliği sağlanır.

Tersine, eğer bir $\alpha(\lambda)$ ve $\beta(\lambda)$ fonksiyon çifti (1)-(4) koşullarını sağlıyorsa, her $\lambda \in [0, 1]$ için $[u]_\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ olacak şekilde E^1 de benzersiz bir u bulunur.

Teorem 4.8 $u, v \in E^1$ olmak üzere,

$$D(u, v) = \sup_{\lambda \in [0, 1]} \max \{ |u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)| \}$$

şeklinde tanımlanan D fonksiyonunun, E^1 üzerinde bir metrik oluşturduğu gösterilmiştir. Ayrıca, (E^1, D) çiftinin bir tam metrik uzay oluşturduğu bilinmektedir (Diamon ve Kloeden 1994, Wu ve Wu 1997).

Tanım 4.9 $\{u_n\} \subset E^1$ olmak üzere, aşağıdaki kavramlar tanımlanır:

1. $\{u_n\}$ dizisinin D metriğinde u ya yakınsadığı söylenir (kısaca D -yakınsaklık). Bu durum, $\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n, u) = 0$ eşitliği ile ifade edilir ve $u_n \xrightarrow{D} u$ veya $(D)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ biçiminde gösterilir.
2. $\{u_n\}$ dizisinin seviyesinde u ya yakınsadığı (veya u nun, $\{u_n\}$ dizisinin seviye limiti olduğu) kabul edilir. Bu, her $\lambda \in [0, 1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^-(\lambda) = u^-(\lambda)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^+(\lambda) = u^+(\lambda)$ koşullarının sağlanması durumunda geçerlidir. Bu tür yakınsama $u_n \xrightarrow{1} u$ veya $(1)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ biçiminde ifade edilir.

Uyarı 4.10 Açık biçimde ifade edilmelidir ki, $\{u_n\}$ dizisi D metriği altında u ya ancak ve ancak $\{u_n^-(\lambda)\}$ ve $\{u_n^+(\lambda)\}$ dizileri, sırasıyla $[0, 1]$ aralığında $u^-(\lambda)$ ve $u^+(\lambda)$ fonksiyonlarına düzgün (uniform) olarak yakınsarsa yakınsar. Buna karşılık,

seviye yakınsamasında $[0, 1]$ üzerindeki λ için böyle bir düzgünlük koşulu aranmaz. Bu nedenle, $u_n \xrightarrow{D} u$ yakınsaması her zaman $u_n \xrightarrow{1} u$ yakınsamasını ima ederken, $u_n \xrightarrow{1} u$ yakınsaması tersini garanti etmez; yani $u_n \xrightarrow{D} u$ sonucuna ulaşamaz (Wu ve Wang 2002).

Tanım 4.11 $f_m(\lambda) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($m = 1, 2, \dots$) biçiminde verilen bir fonksiyon dizisinin, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$ ve $m \geq m_0$ olduğunda $|f_m(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ ($\delta < \lambda_0$) ve $m_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, $\lambda_0 \in (a, b]$ noktasında $f(\lambda)$ fonksiyonuna *sol yarı düzgün* şekilde yakınsadığı söylenir.

Benzer şekilde, $\{f_m(\lambda)\}$ dizisinin $\lambda_0 \in [a, b)$ noktasında $f(\lambda)$ ye *sağ yarı düzgün* biçimde yakınsadığı da tanımlanabilir.

Uyarı 4.12 Wu ve Wu (1999) tarafından yapılan çalışmada yazarlar, " $f_m(\lambda) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($m = 1, 2, \dots$) fonksiyon dizisi $\lambda \in [0, 1]$ üzerinde $f(\lambda)$ fonksiyonuna *sol yarı-tekdüze* yakınsar" kavramını tanıtmışlardır. Bu tanımın, Tanım 4.11 ile karşılaştırılması durumunda, $\{f_m(\lambda)\}$ dizisinin $\lambda \in [0, 1]$ üzerinde $f(\lambda)$ fonksiyonuna sol yarı düzgün biçimde yakınsadığı kolaylıkla görülmektedir.

Başka bir deyişle, $\{f_m(\lambda)\}$ dizisinin her $\lambda \in [0, 1]$ noktasında $f(\lambda)$ fonksiyonuna sola doğru yarı düzgün ve $\lambda = 0$ noktasında ise sağa doğru yarı düzgün biçimde yakınsadığı anlaşılmaktadır.

4.1. E^1 de supremum ve infimumun varoluş teoremi

Aşağıda sunulan teorem esasen Wu ve Wu (1997) tarafından yapılan çalışmadan türetilmiştir. Ancak burada, daha sade bir ispat sunulmaktadır. Ayrıca, teoremde verilen supremum ve infimum ifadelerinin, seviye kümelerinin uç noktaları açısından hem özlü hem de kullanım açısından elverişli olması dikkat çekmektedir.

Teorem 4.13 A, E^1 uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer A kümesinin bir üst sınırı varsa, o hâlde bu kümenin supremumu olan bir $u \in E^1$ elemanının var olduğu ve aşağıdaki ifadelerle tanımlandığı bilinmektedir:

$$u = \sup A = \bigcup_{\lambda \in (0, 1]} \lambda \left[\sup_{a \in A} a^-(\lambda), \sup_{a \in A} a^+(\lambda) \right], \quad (4.9)$$

$$u^-(\lambda) = \sup_{a \in A} a^-(\lambda), \quad u^+(\lambda) = \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r) \quad \text{her } \lambda \in (0, 1] \quad \text{için,} \quad (4.10)$$

$$u^-(0) = \inf_{\lambda > 0} \sup_{a \in A} a^-(\lambda), \quad u^+(0) = \sup_{a \in A} a^+(0). \quad (4.11)$$

Benzer biçimde, eğer A kümesinin bir alt sınırı varsa, o hâlde bu kümenin infimumu olan bir $v \in E^1$ elemanının var olduğu ve aşağıdaki biçimde tanımlandığı kabul edilmektedir:

$$v = \inf A = \bigcup_{\lambda \in (0, 1]} \lambda \left[\inf_{a \in A} a^-(\lambda), \inf_{a \in A} a^+(\lambda) \right], \quad (4.12)$$

$$v^-(\lambda) = \sup_{r < \lambda} \inf_{a \in A} a^-(r), \quad v^+(\lambda) = \inf_{a \in A} a^+(\lambda) \quad \text{her } \lambda \in (0, 1] \quad \text{için,} \quad (4.13)$$

$$v^-(0) = \inf_{a \in A} a(0), \quad v^+(0) = \sup_{\lambda > 0} \inf_{a \in A} a^+(\lambda). \quad (4.14)$$

İspat $M \in E^1$ elemanının A kümesinin bir üst sınırı olduğu varsayılınsın. Bu durumda, her $a \in A$ için $a \preceq M$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla,

$$\text{her } \lambda \in [0, 1] \text{ için } a^-(\lambda) \leq M^-(\lambda), \quad a^+(\lambda) \leq M^+(\lambda)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Her sabit $\lambda \in [0, 1]$ için, $\{a^-(\lambda) \mid a \in A\}$ ve $\{a^+(\lambda) \mid a \in A\}$ kümelerinin $\mathbb{R}$ de üstten sınırlı olduğu açıktır. Bu nedenle

$$H(\lambda) = \left[\sup_{a \in A} a^-(\lambda), \sup_{a \in A} a^+(\lambda) \right]$$

aralığı tanımlanabilir. Ayrıca, $0 < \lambda < \mu \leq 1$ olduğunda $H(\mu) \subset H(\lambda)$ olduğu gözlemlenir. Bu durumdan dolayı, bulanık kümelerin temsil teoremi gereği, $\mathbb{R}$ üzerinde

$$u = \bigcup_{\lambda \in (0, 1]} \lambda H(\lambda)$$

şeklinde tanımlanan bir bulanık küme u mevcuttur ve her $\lambda \in (0, 1]$ için

$$\begin{aligned} [u]_\lambda &= \bigcap_{r < \lambda} H(r) = \bigcap_{r < \lambda} \left[\sup_{a \in A} a^-(r), \sup_{a \in A} a^+(r) \right] \\ &= \left[\sup_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^-(r), \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca, $[u]_0$ kümesinin de kapalı bir aralık olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten, her $\lambda \in (0, 1]$ ve $r \in (0, \lambda)$ için

$$[u]_\lambda \subset \left[\sup_{a \in A} a^-(r), \sup_{a \in A} a^+(r) \right] \subset \left[\inf_{\mu > 0} \sup_{a \in A} a^-(\mu), \sup_{\mu > 0} \sup_{a \in A} a^+(\mu) \right]$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu durum,

$$[u]_0 = \text{cl} \left(\bigcup_{\lambda \in (0,1]} [u]_\lambda \right) \subset \left[\inf_{\mu > 0} \sup_{a \in A} a^-(\mu), \sup_{\mu > 0} \sup_{a \in A} a^+(\mu) \right]$$

eşitsizliğini verir. Burada $\bigcup_{\lambda \in (0,1]} [u]_\lambda$ kümesinin bir aralık olduğu unutulmamalıdır. Dolayısıyla $[u]_0$ sınırlı ve kapalı bir aralık olduğundan, $u \in E^1$ olduğu sonucuna varılır.

Ayrıca, denklem (4.15) ve Teorem 4.7 uyarınca aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$u^-(\lambda) = \sup_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^-(r) = \sup_{a \in A} a^-(\lambda), \quad u^+(\lambda) = \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r) \quad \text{her } \lambda \in (0, 1] \text{ için}$$

$$u^-(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} u^-(\lambda) = \inf_{\lambda > 0} \sup_{a \in A} a^-(\lambda), \quad u^+(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} u^+(\lambda) = \sup_{\lambda > 0} \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r).$$

Bu ifadelerle (4.10) ve (4.11) in ilk kısımları doğrulanmış olur. (4.11) in ikinci kısmının kanıtlanması için,

$$\sup_{\lambda > 0} \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r) = \sup_{a \in A} a^+(0)$$

eşitliği gösterilmelidir. Açıkça

$$\sup_{a \in A} a^+(0) \geq \sup_{\lambda > 0} \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r)$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer yandan, $a^+(\lambda)$ fonksiyonlarının azalan ve $\lambda = 0$ noktasında sağdan sürekliliği nedeniyle,

$$\sup_{a \in A} a^+(0) = \sup_{a \in A} \sup_{\lambda > 0} a^+(\lambda) = \sup_{\lambda > 0} \sup_{a \in A} a^+(\lambda) \leq \sup_{\lambda > 0} \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (4.11) in ikinci formülü de kanıtlanmış olur.

Son olarak, u elemanının A kümesinin supremumu olduğunu, yani $u = \sup A$ eşitliğini sağladığı gösterilecektir. Denklem (4.11) e göre, her $\lambda \in (0, 1]$ ve $a \in A$ için

$$a^-(\lambda) \leq \sup_{a \in A} a^-(\lambda) = u^-(\lambda), \quad a^+(\lambda) \leq \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r) = u^+(\lambda)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu da u nun A için bir üst sınır olduğunu gösterir.

Bununla birlikte, $w \in E^1$ olmak üzere w 'nin da A kümesinin bir üst sınırı olduğu varsayılın. Bu durumda her $\lambda \in (0, 1]$ için

$$\sup_{a \in A} a^-(\lambda) \leq w^-(\lambda), \quad \sup_{a \in A} a^+(\lambda) \leq w^+(\lambda)$$

olur. Buradan da

$$u^-(\lambda) \leq w^-(\lambda), \quad u^+(\lambda) = \inf_{r < \lambda} \sup_{a \in A} a^+(r) \leq \inf_{r < \lambda} w^+(r) = w^+(\lambda)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $u \leq w$ olduğu görülür; bu da u 'nun A kümesinin en küçük üst sınırı olduğunu, yani $u = \sup A$ eşitliğini doğrular. Benzer yöntemle infimum için de eşdeğer sonuçlar elde edilir.

5. BULANIK SAYI DİZİSİNİN İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ

Bu bölümde, bulanık sayı dizileri için *istatistiksel çekirdek* kavramı tanıtılmakta ve istatistiksel çekirdeğin klasik çekirdeğin bir altkümesi olduğu gösterilmektedir.

Tanım 5.1 $X = \{X_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ dizisinin istatistiksel çekirdeği

$$\text{st-core } X := [\text{st-lim inf } X, \text{st-lim sup } X]$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Uyarı 5.2 $X = \{X_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ dizisinin istatistiksel çekirdeği, Fridy ve Orhan (1997) tarafından verilen tanıma benzer şekilde de ifade edilebilmektedir. $\mathcal{H}(X)$, hemen her k için X_k terimlerini içeren $L(\mathbb{R})$ 'nin kapalı konveks aralıklarından oluşan bir aile olmak üzere, X dizisinin istatistiksel çekirdeği

$$\text{st-core } X := \bigcap_{H \in \mathcal{H}(X)} H$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Teorem 5.3 $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ ise

$$\text{st-core } X \subseteq \text{core } X$$

kapsaması sağlanmaktadır.

İspat $\text{st-lim inf } X \succeq \text{Lim inf } X$ olduğu, yani

$$\inf A_x \succeq \inf A'_x$$

ilişkisi sağlandığı gösterilecektir. Buna göre

$$\{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\}) \neq 0\} \subseteq \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\} \in P_I(\mathbb{N})\}$$

olduğu ortaya konulmalıdır. $\mu \in A_x$ olduğu kabul edildiğinde,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\}) \neq 0$$

yazılabilir. Yoğunluk tanımına göre, bu durumda

$$\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\} \in P_I(\mathbb{N})$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\mu \in A'_x$ olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Benzer şekilde, $st - \limsup X \preceq \text{Lim sup } X$ olduğu da gösterilebilir.

Örnek 5.4 Bu örnek ile Teorem 2.1.3'te verilen kapsamanın kesin olduğu gösterilecektir.

Aşağıdaki şekilde tanımlanan bulanık sayılar ele alınsın:

$$\mu(x) := \begin{cases} x+2 & , x \in [-2, -1], \\ -x & , x \in [-1, 0], \\ 0 & , \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$v(x) := \begin{cases} x^2 & , x \in [0, 1], \\ (x-2)^2 & , x \in [1, 2], \\ 0 & , \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$\gamma(x) := \begin{cases} x-4 & , x \in [4, 5], \\ -(x-5)^2 + 1 & , x \in [5, 6], \\ 0 & , \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$\varphi(x) := 8_1$$

olmak üzere $X = \{X_k\}$ dizisi şu şekilde tanımlansın:

$$X_k := \begin{cases} \mu & , k \text{ tek ve tam kare ise,} \\ v & , k \text{ tek fakat tam kare değil ise,} \\ \gamma & , k \text{ çift fakat tam kare değil ise,} \\ \varphi & , \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu durumda sıralama

$$\mu \prec v \prec \gamma \prec \varphi$$

şeklindedir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır:

$$\text{Lim inf } X = \mu, \quad \text{Lim sup } X = \varphi, \quad \text{st-lim inf } X = v, \quad \text{st-lim sup } X = \gamma.$$

Sonuç $X = \{X_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ ise,

$$\Gamma_X \subseteq \text{st-core } X$$

kapsaması sağlanmaktadır.

İspat Bu sonuç, Tanım 5.1'den doğrudan elde edilmektedir.

6. KAYNAKLAR

- Anastassiou G A, Duman O, 2011, Towards Intelligent Modeling: Statistical Approximation Theory (Intelligent Systems Reference Library, Vol. 14). Springer.
- Aytar S, Mammadov M A, Pehlivan S, 2006, Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 157, 976–985.
- Aytar S, Pehlivan S, Mammadov M A, 2008, The core of a sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 159(24), 3369–3379.
- C X Wu, C Wu, 1997, The supremum and infimum of the set of fuzzy numbers and its application, J. Math. Anal. Appl. 210, 499–511.
- C X Wu, C Wu, 1999, Some note on the supremum and infimum of the set of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 103, 183–187.
- C X Wu, G X Wang, 2002, Convergence of sequence of fuzzy numbers and fixed point theorems for increasing fuzzy mappings and application, Fuzzy Sets and Systems, 130, 383–390.
- Cooke R G, 1955, Infinite Matrices and Sequence Spaces, Dover Publication Inc., New York.
- Diamond P, Kloeden P, 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets, Theory and Applications, World Scientific, Singapore.
- Di Maio G, Kocinac Lj D R, 2008, Statistical convergence in topology, Topology and Applications, 156, 28–45.
- Dubois D, Prade H, 1978, Operation on fuzzy number, Internat. J. Systems Sci., 9, 613–626.
- Dubois D, Prade H, 1980, Fuzzy Sets and Systems, Academic Press, New York.
- Fang J X, Huang H, 2004, On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 147, 417–435.
- Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2, 241–244.
- Fridy J A, Orhan C, 1997, Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125, 3625–3631.
- Goetschel R, Voxman W, 1986, Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems, 18(1), 31–43.

- Gökhan A, Güngör M, 2002, On pointwise statistical convergence, Indian J. pure appl. Math., 33(9) 1379-1384.
- Kaufmann A, Gupta M M, 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand, Reinhold.
- Knopp K, 1930, Zur theorie der limitierungsverfahren (Erste Mitteilung), Math. Z. 31, 97–127.
- Matloka M, 1986, Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28, 28–37.
- Nanda S, 1989, On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 33, 123–126.
- Niven I M, Zuckerman H S, 1980, An Introduction to the Theory of Numbers (4th edt), Wiley and Sons.
- Puri M L, Relics D A, 1983, A strong law of large numbers for Banach space-valued random sets, Annals of Probability, 11(2), 222-224.
- Zadeh L A, 1965, Fuzzy sets, Information and Control, 8(3), 338–353.
- Zhang G, 1991, Fuzzy continuous function and its properties, Fuzzy Sets and Systems, 43, 159–171.