

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BURGERS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
BİR YARI-ANALİTİK UYGULAMA**

DERYA TÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**MALATYA
Temmuz 2005**

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

**BURGERS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
BİR YARI-ANALİTİK UYGULAMA**

Derya TÜRK
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
75 + x sayfa
2005

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali ÖZDEŞ

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bu çalışmada model problem olarak kullanılan Burgers denklemi hakkında bilgi verilmektedir.

İkinci bölümde, konuyla ilgili temel tanımlar, teoremler ve yöntemler kısaca tanıtılmaktadır.

Üçüncü bölümde, Methof of Lines yöntemi açıklanarak bir uygulaması yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, Burgers denkleminin analitik çözümü verilmektedir.

Beşinci bölüm bu çalışmanın esasını teşkil edip burada, lineerleştirilmiş Burgers denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca, kullanılan yöntemlerin kararlılık analizi yapılmıştır.

Altıncı bölüm yine tezin temel kısmı olup yöntemler denkleme doğrudan uygulanarak nümerik çözümler elde edilmiştir.

Yedinci bölümde, elde edilen sonuçların karşılaştırılması verilmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Burgers denklemi, Method of Lines, Euler yöntemi, İkinci mertebeden ve Dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemleri, Crank-Nicolson yöntemi, Matris yöntemi.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

A SEMI-ANALITIC APPLICATION FOR SOLUTION OF BURGERS' EQUATION

Derya TÜRK

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

75 + x pages

2005

Supervisor : Assoc. Prof. Ali ÖZDEŞ

This thesis consists of seven chapters.

In chapter 1, it is devoted to Burgers' equation that is used as a model problem in this study.

In chapter 2, it is briefly introduced general concepts, theorem and methods concerning with the subject.

In chapter 3, The Method of Lines is explained and applied to a problem.

In chapter 4, analitic solution of Burgers' equation is given.

Chapter 5 is the main part of this study in which numerical solutions of Burgers' equation reduced by the Hopf-Cole transformation are obtained. Also, stability of the methods is investigated.

Chapter 6 is also important part of this thesis. In this chapter, the methods are directly applied to Burgers' equation.

In chapter 7, it is given the comparison of the obtained numerical solutions.

KEYWORDS: Burgers' equation, Method of Lines, Euler method, 2. order and 4. order Runge-Kutta methods, Crank-Nicolson method, Matrix method.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ilgi ve destekle bana yardımcı olan çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Ali ÖZDEŞ' e, sayın bölüm başkanımız Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, Matematik Bölümü hocalarına, bilgilerinden faydalandığım Arş. Gör. Dr. E. Nesligül AKSAN ve Öğr. Gör. Yusuf UÇAR' a, hem maddi hem de manevi olarak beni her zaman destekleyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ	ix

BÖLÜM 1

1.1. GİRİŞ	1
------------------	---

BÖLÜM 2

2.1. BİR MATRİSİN ÖZDEĞERLERİ İLE İLGİLİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
2.2. TÜREVLERE SONLU FARK YAKLAŞIMLARI	5
2.2.1. Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	5
2.2.2. İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	6
2.3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK YÖNTEMLER	8
2.3.1. Euler Yöntemi	8
2.3.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi	9
2.3.3. Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi	9
2.4. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK YÖNTEMLER	11
2.4.1. Euler Yöntemi	11
2.4.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi	11
2.4.3. Crank-Nicolson Yöntemi	12
2.5. SONLU FARK YÖNTEMLERİ İÇİN GENEL KARARLILIK ANALİZİ 2.5.1. Matris Yöntemi	12

BÖLÜM 3

3.1. METHOD OF LINES (MOL) YÖNTEMİ	16
3.2. MOL YÖNTEMİNİN ISI DENKLEMİNE UYGULANMASI	16
3.2.1. Euler Yöntemi	20
3.2.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi	21
3.2.3. Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi.....	22
3.3. ISI DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ	22

BÖLÜM 4

4.1. BURGERS DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ	28
--	----

BÖLÜM 5

5.1. LİNEERLEŞTİRİLMİŞ BURGERS DENKLEMİNE MOL YÖNTEMİNİN UYGULANMASI	33
5.1.1. Euler Yöntemi	36
5.1.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi	39
5.2. NÜMERİK YÖNTEMLERİN KARARLILIĞI	42
5.2.1. Euler Yöntemi İçin Kararlılık Analizi	42
5.2.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi İçin Kararlılık Analizi	44

BÖLÜM 6

6.1. BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	50
6.1.1. Euler Yöntemi	51
6.1.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi	55
6.1.3. Crank-Nicolson Yöntemi	57

BÖLÜM 7

7.1. SONUÇ VE KARŞILAŞTIRMA	61
7.1.1. Lineerleştirilmiş Burgers Denklemine Çözümleri	61
7.1.2. Burgers Denklemine Çözümleri	66

KAYNAKLAR	73
------------------------	----

ÖZGEÇMİŞ	75
-----------------------	----

ŞEKİLLER DİZİNİ

3.1	$h=0.1$ ve $k=0.001$ için $t=0.05$ zaman adımında Euler yöntemi ile elde edilen çözümün analitik çözümle karşılaştırılması	27
3.2	$h=0.1$ ve $k=0.001$ için $t=0.5$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması	27
5.1	$h=0.1, v=1$ ve $k=0.001$ için farklı zaman adımlarında Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması	38
5.2	$h=0.1, v=0.1$ ve $k=0.0005$ için $t=0.2, 0.8$ zaman adımlarında Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması	38
5.3	$h=0.1, v=1$ ve $k=0.001$ için farklı zaman adımlarında ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması	41
5.4	$h=0.1, v=0.1$ ve $k=0.0005$ için $t=0.2, 0.8$ zaman adımlarında ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması	42
6.1	$h=0.01, v=0.1$ ve $k=0.00005$ için farklı zaman adımlarında Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması	54
6.2	$h=0.01, v=0.1$ ve $k=0.00005$ için farklı zaman adımlarında ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümleri analitik çözümlerle karşılaştırılması	57
6.3	$h=0.01, v=0.1$ ve $k=0.00005$ için farklı zaman adımlarında Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması	60
7.1	$h=0.1, v=0.5$ ve $k=0.0001$ için $t=0.1, 0.3, 0.5$ zaman adımlarındaki nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması	63
7.2	$h=0.01, v=0.09$ ve $k=0.00001$ için $t=0.2, 0.4$ zaman adımlarındaki nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması	64
7.3	$h=0.02, v=0.05$ ve $k=0.0001$ için $t=0.6, 0.8, 1$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması	64
7.4	$h=0.02, v=0.009$ ve $k=0.0001$ için $t=0.6, 0.9$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin karşılaştırılması	65
7.5	$h=0.02, v=0.005$ ve $k=0.0001$ için $t=0.8, 1$ zaman adımlarında elde edilen çözümlerin karşılaştırılması	65
7.6	$h=0.1, v=0.7$ ve $k=0.002$ için $t=0.8$ zaman adımındaki nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması	70
7.7	$h=0.02, v=0.07$ ve $k=0.0005$ için $t=0.5$ zaman adımındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması	70
7.8	$h=0.01, v=0.01$ ve $k=0.00005$ için $t=0.3, 0.5$ zaman adımlarındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması	71
7.9	$h=0.1, v=10^{-10}$ ve $k=0.001$ için $t=0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarındaki nümerik çözümler	71

TABLOLAR DİZİNİ

3.1	$h = 0.1$ ve $k = 0.001$ için $t = 0.01$ zaman adımındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması	26
3.2	$h = 0.02$ ve $k = 0.0001$ için $t = 0.1$ zaman adımındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması	26
5.1	$h = 0.1$ ve $\nu = 1$ için $t = 0.1$ zaman adımında farklı k değerleri alınarak Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	37
5.2	$\nu = 0.1$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.1$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	37
5.3	$h = 0.1$ ve $\nu = 1$ için $t = 0.1$ zaman adımında farklı k değerleri alınarak ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	40
5.4	$\nu = 0.1$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.1$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	41
6.1	$h = 0.1$, $\nu = 1$ ve $k = 0.001$ için farklı zaman adımlarında Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması	53
6.2	$\nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.01$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	54
6.3	$h = 0.1$, $\nu = 1$ ve $k = 0.001$ için farklı zaman adımlarında ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması	56
6.4	$\nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.01$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	56
6.5	$h = 0.1$, $\nu = 1$ ve $k = 0.001$ için farklı zaman adımlarında Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması ...	59
6.6	$\nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.01$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	59
7.1	$h = 0.01$, $\nu = 0.5$ ve $k = 0.00002$ için $t = 0.2$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması	62
7.2	$h = 0.01$, $\nu = 0.1$ ve $k = 0.00005$ için $t = 0.3$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması	62
7.3	$h = 0.02$, $\nu = 0.01$ ve $k = 0.0001$ için $t = 0.8$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması	63
7.4	$h = 0.01$, $\nu = 0.5$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.1$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	66
7.5	$h = 0.01$, $\nu = 0.1$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.3$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	67
7.6	$h = 0.01$, $\nu = 0.05$ ve $k = 0.00002$ için $t = 0.6$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	67
7.7	$h = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $k = 0.00005$ için $t = 1$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	68
7.8	$h = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $k = 0.00001$ için $t = 0.8$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	68

7.9	$h=0.01$, $k=0.00005$ ve $t=0.3$ için farklı viskozite değerleri ile elde edilen nümerik çözümler	69
7.10	$h=0.01$, $\nu=0.05$ ve $k=0.00001$ için $t=0.1$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması	72

BÖLÜM 1

1.1. GİRİŞ

Bir boyutlu Burgers denklemi,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

şeklindedir. Burada, $\nu > 0$ kinematik viskosite katsayısıdır.

Burgers denklemi gaz dinamiği, türbülans (karışık akışkan akışı) ve şok dalgalar teorisi gibi çoğu fiziksel olayın matematiksel modeli olarak görülür. Türbülansı modelleyen ve tam çözümü aşırı derecede zor olan Navier-Stokes denklemiyle Burgers denklemi, lineer olmayan terimlerinin şekli ve küçük katsayılı yüksek mertebeli türevlerin şekli aynı olduğundan benzerdirler. Bu benzerlikten dolayı, Burgers denklemi sık sık türbülansı içeren sıvı dinamik problemlerini çözmeye matematiksel model olarak kullanılır.

Başlangıç ve sınır şartlarının değişik seçimi için Burgers denklemi, analitik olarak çözülebilen bir kaç lineer olmayan denklemden birisidir. 1950' de Cole [1], bir dönüşüm yardımıyla bu denklemi lineer difüzyon denklemine dönüştürdü ve keyfi bir başlangıç şartı için tam olarak çözdü. Ancak $Re = 1/\nu$ şeklindeki büyük Reynold sayıları için analitik çözüm yetersiz kalmaktadır. Çünkü denklem, viskositenin çeşitli seçimleri için parabolik ya da hiperbolik özellikler gösterebilmektedir. Bu yüzden pek çok yazar Burgers denklemini çözmek için, sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır eleman metodu, varyasyonel yöntemler gibi nümerik yöntemler önerdiler.

E. Varoğlu ve W.D. Finn [2], ağırlıklı kalan formülasyonuna dayanan bir sonlu eleman metodunu, J. Caldwell vd. [3] her safhada önceki adımlardan bilgiler kullanarak elemanların büyüklüklerini değiştiren sonlu eleman metodunu, H. Nguyen ve J. Reynen [4] Reynold sayısının büyük değerleri için sonlu eleman metodunun en küçük kareler zayıf formülasyonunu kullandılar. P. Jamet ve R. Bonnerot [5] Burgers denklemini isoparametrik rectangular konum-zaman sonlu eleman metodunu kullanarak çözdüler. Fakat bu yöntem, sınır katmanı bölgesindeki nümerik çözüm için aşırı sayıda konumsal grid noktasına ihtiyaç duydu. T. Öziş vd. [6], $\nu \geq 0.01$ için bir sonlu eleman metodu kullanarak buldukları nümerik

öz mleri tam çözümlerle karşılaştırdılar. A. Doğan [7], viskozite değerlerinin büyük bir cümlesi için yüksek doğrulukta çözüme sahip Galerkin sonlu eleman metodunu kullandı ve bu metodun, daha önceki metotların çoğundan daha iyi sonuç verdiğini gösterdi.

K. Kakuda ve N. Tosaka [8] genelleştirilmiş sınır eleman metodunu, D.J. Evans ve A.R. Abdullah [9] grup açık sonlu fark metodunu kullandılar. S. Kutluay vd. [10] ise yüksek doğrulukta nümerik çözümler elde etmek için Burgers benzeri denklemlere tam-açık sonlu fark metodunu önerdiler. A. R. Bahadır ve M. Sağlam [11], sonlu fark ve sınır eleman yaklaşımlarının kullanıldığı bir metotla denklemi çözdüler.

E.B. Lin ve X. Zhou [12] kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için Burgers denklemini örnek alarak Galerkin metodu ve sonlu fark metodunu birleştiren yarı-kapalı zamanı ayırıştırma metodunu kullandılar. S. Abbasbandy ve M.T. Darvishi [13], Burgers denklemini Hopf-Cole benzeri herhangi bir dönüşüm kullanmadan (lineerleştirmeden), zamanı ayırıştırma metodu üzerine kurulan modife edilmiş Adomian ayırışım metoduyla direkt olarak çözdüler. T.  ziş ve A.  zdeş [14], denklemin seri formundaki yaklaşık çözümünü elde edebilmek için bir direkt varyasyonel metod kullandılar. E.N. Aksan ve A.  zdeş [15] zamanı ayırıştırma metodunu temel alan bir varyasyonel metodla denklemi çözdüler. Viskositenin farklı değerleri için bu yolla buldukları nümerik çözümleri tam çözümle karşılaştırdılar ve bunların birbiri ile uyumlu olduğunu gösterdiler. E.N. Aksan [16] denkleme zamanın ayırıştırılmasına dayanan Galerkin sonlu eleman metodunu uyguladı.

Burgers denkleminin çözümünde, nümerik tekniklerle beraber Spline ve B-spline fonksiyonları da kullanılmaktadır. Örneğin, S. Kutluay vd. [17], uygun başlangıç ve sınır şartına sahip bir boyutlu Burgers benzeri denklemlerin nümerik çözümlerini hesaplamak için en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu eleman metodunu tanıttılar. T.  ziş vd. [18], Galerkin kuadratik B-spline sonlu eleman metodunu kullanarak, Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla indirgenen bir boyutlu Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini buldular. I. Dağ vd. [19], denklemdaki lineer olmayan terimi lineerleştiren bir kübik B-spline düzenleme yöntemini kullandılar.

Son yıllarda ise çok büyük Reynold sayıları içeren Burgers denklemini çözmede yeni metotlar önerildi. T.  ziş ve Y. Aslan [20], Reynold sayısının mümkün olan bütün yüksek değerleri için denklemi perturbasyon tekniğini kullanarak

özdüler. M.B. Abd-el-Malek ve S.M.A. El-Mansi [21], yaklaşık başlangıç ve sınır şartlı Burgers denklemini çözmek için grup-kuramsal metotları kullandılar.

Yoğun çalışmalara rağmen, lineer olmayan UU_x teriminin şok dalgalara götürdüğü büyük Reynold sayılarında Burgers denkleminin çözümü hala önemini korumaktadır.

Biz bu çalışmada, hem Burgers denklemine hem de Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla lineerleştirilmiş Burgers denklemine Method of Lines (MOL)'ı uyguladık. Bu yolla elde edilen adi türevli denklem sistemini ise Euler, ikinci mertebeden Runge-Kutta ve Crank-Nicolsan yöntemleri gibi nümerik yöntemlerle çözerek tam çözümle karşılaştırdık.

BÖLÜM 2

Bu kısımda, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım, teorem ve yöntemler kısaca tanıtılacaktır.

2.1. BİR MATRİSİN ÖZDEĞERLERİ İLE İLGİLİ TANIM VE TEOREMLER

2.1.1. Tanım: $A \in IR_n^n$ ve $\lambda \in IR$ olmak üzere,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

olarak tanımlanan P polinomuna A matrisinin *karakteristik polinomu* denir [22].

2.1.2. Tanım: $A \in IR_n^n$ matrisinin karakteristik polinomu P ise P polinomunun köklerine A matrisinin *karakteristik değerleri veya özdeğerleri* denir [22].

2.1.3. Tanım: $A \in IR_n^n$ matrisinin λ_i ($i=1,2,3,\dots,n$) özdeğerleri için,

$$(A - \lambda_i I_n)x = 0$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $x \in IR^n$ vektörüne A matrisinin λ_i özdeğerlerine karşılık gelen *karakteristik vektörü veya özvektörü* denir [22].

2.1.4. Teorem (2. Gerschgorin veya Brauer Teoremi) : Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ karesel matrisinin a_{ss} köşegen elemanı hariç s . satırda bulunan elemanların modülleri toplamı P_s olsun. Bu takdirde A 'nın her bir özdeğeri,

$$|\lambda - a_{ss}| \leq P_s$$

çemberlerinin en az birinin içinde veya üzerinde bulunur [23].

2.2. TÜREVLERE SONLU FARK YAKLAŞIMLARI

2.2.1. Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

$U(x,t)$ fonksiyonu değişkenlerine göre yeterince türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $U(x+h,t)$ ve $U(x-h,t)$ fonksiyonlarının x noktası civarındaki Taylor seri açılımları,

$$U(x+h,t) = U(x,t) + \frac{h}{1!} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (2.1)$$

$$U(x-h,t) = U(x,t) - \frac{h}{1!} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2)$$

dır. (2.1) ve (2.2)' den $\partial U / \partial x$ türevi çekilirse sırasıyla;

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x,t)}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \dots \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x,t) - U(x-h,t)}{h} + \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (2.4)$$

yazılır. (2.1)' den (2.2) çıkartılır ve $\partial U / \partial x$ türevi yalnız bırakılırsa,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x-h,t)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \dots \quad (2.5)$$

bulunur. Bulunan bu (2.3), (2.4) ve (2.5) denklemlerinden $U(x,t)$ fonksiyonunun x civarındaki birinci mertebeden türev yaklaşımları,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x,t)}{h} + O(h) \quad \text{“ İleri fark ”} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x,t) - U(x-h,t)}{h} + O(h) \quad \text{“ Geri fark ”} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x-h,t)}{2h} + O(h^2) \quad \text{“ Merkezi fark ”} \quad (2.8)$$

olarak elde edilir. Burada “ O ” sonsuz terimli bir ifadenin sonlu terimine kadar alındığını, $O(h)$ terimi ise $h \rightarrow 0$ iken oluşacak hatanın h ile orantılı olduğunu gösterir [24].

2.2.2. İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

$\partial^2 U / \partial x^2$ ikinci mertebeden türev yaklaşımını bulmak için $U(x+2h,t)$ ve $U(x-2h,t)$ fonksiyonlarının x civarındaki Taylor seri açılımlarını göz önüne alalım. Bu açılımlar sırasıyla,

$$U(x+2h,t) = U(x,t) + 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (2.9)$$

$$U(x-2h,t) = U(x,t) - 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (2.10)$$

dır. (2.1) ve (2.9) denklemlerinden $\partial U / \partial x$ yok edilip $\partial^2 U / \partial x^2$ çekilirse;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) - 2U(x+h,t) + U(x+2h,t)}{h^2} - h \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.2) ve (2.10) denklemlerinden,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) - 2U(x-h,t) + U(x-2h,t)}{h^2} + h \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots$$

bulunur. (2.1) ve (2.2) denklemlerinden $\partial U / \partial x$ yok edilip $\partial^2 U / \partial x^2$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x+h,t) - 2U(x,t) + U(x-h,t)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \dots$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) - 2U(x+h,t) + U(x+2h,t)}{h^2} + O(h) \quad \text{“İleri fark”} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) - 2U(x-h,t) + U(x-2h,t)}{h^2} + O(h) \quad \text{“Geri fark”} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x+h,t) - 2U(x,t) + U(x-h,t)}{h^2} + O(h^2) \quad \text{“Merkezi fark”} \quad (2.13)$$

türev yaklaşımları elde edilir.

Problemin çözüm bölgesinin $B = \{(x,t) : 0 \leq x \leq l, t > 0, l \text{ sonlu}\}$ olduğunu kabul edelim. Sonlu fark yaklaşımı için çözüm bölgesi; $\Delta t = k$ ve $\Delta x = h = l/N$ olmak üzere $x_i = ih$, $t_n = nk$ ($i=0,1,2,\dots,N$, $n=0,1,2,\dots$, $N \in \mathbb{Z}^+$) koordinat doğruları yardımıyla kafeslere bölünür, öyle ki $U(x,t)$ değişkeni sadece grid noktalarında değer alır.

Bir $P(ih,nk)$ grid noktası üzerinde U 'nun değeri,

$$U_p = U(ih,nk) \cong U_{i,n} \cong U_i^n$$

gösterimlerinden biri ile ifade edilir.

Bu gösterimlerin kullanılması ve hataların ihmal edilmesiyle birinci mertebeden türevlerin sonlu fark yaklaşımları olan (2.6), (2.7) ve (2.8) formülleri sırasıyla;

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h}$$

ikinci mertebeden türevlerin sonlu fark yaklaşımları olan (2.11), (2.12) ve (2.13) formülleri ise sırasıyla;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_i^n - 2U_{i+1}^n + U_{i+2}^n}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_i^n - 2U_{i-1}^n + U_{i-2}^n}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}$$

olarak yazılır.

2.3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK YÖNTEMLER

Birinci mertebeden bir lineer adi türevli diferansiyel denklem,

$$U'(t) = \lambda U(t) \tag{2.14}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\lambda U(t) = f(U)$ denilirse (2.14) denklemi,

$$U'(t) = f(U)$$

olarak yazılır. Burada λ , sabitler matrisidir.

2.3.1. Euler Yöntemi

(2.14) formundaki bir lineer denkleme Euler yönteminin uygulanmasıyla çözümler,

$$U^{n+1} = U^n + kf(U^n) \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

ya da

$$U^{n+1} = U^n + k\lambda U^n$$

formülüyle hesaplanır [25].

2.3.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

(2.14) denklemi için ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi,

$$U^* = U^n + \frac{1}{2}kf(U^n)$$

olmak üzere,

$$U^{n+1} = U^n + kf(U^*)$$

ile verilir.

Yani çözümler $n=0,1,2,\dots$ için,

$$U^{n+1} = U^n + k\lambda \left(U^n + \frac{1}{2}k\lambda U^n \right)$$

veya

$$U^{n+1} = U^n + (k\lambda)U^n + \frac{1}{2}(k\lambda)^2 U^n$$

formülüyle hesaplanır [25].

2.3.3. Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

Dördüncü mertebeden Runge-Kutta çözümleri ise,

$$F_0 = f(U^n)$$

$$F_1 = f\left(U^n + \frac{1}{2}kF_0\right)$$

$$F_2 = f\left(U^n + \frac{1}{2}kF_1\right)$$

$$F_3 = f\left(U^n + kF_2\right)$$

olmak üzere,

$$U^{n+1} = U^n + \frac{k}{6}(F_0 + 2F_1 + 2F_2 + F_3) \quad , \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.15)$$

şeklindedir [25].

F_i ' ler ($i=0,1,2,3$) daha açık olarak,

$$F_0 = f(U^n) \Rightarrow F_0 = \lambda U^n$$

$$F_1 = f\left(U^n + \frac{1}{2}kF_0\right) = \lambda\left(U^n + \frac{1}{2}k(\lambda U^n)\right) \Rightarrow F_1 = \lambda U^n + \frac{k\lambda^2}{2}U^n$$

$$F_2 = f\left(U^n + \frac{1}{2}kF_1\right) = \lambda\left(U^n + \frac{1}{2}k\left(\lambda U^n + \frac{k\lambda^2}{2}U^n\right)\right) \Rightarrow F_2 = \lambda U^n + \frac{k\lambda^2}{2}U^n + \frac{k^2\lambda^3}{4}U^n$$

$$F_3 = f(U^n + kF_2) = \lambda\left(U^n + k\left(\lambda U^n + \frac{k\lambda^2}{2}U^n + \frac{k^2\lambda^3}{4}U^n\right)\right)$$

$$F_3 = \lambda U^n + k\lambda^2 U^n + \frac{k^2\lambda^3}{2}U^n + \frac{k^3\lambda^4}{4}U^n$$

şeklinde yazılır. Bunların (2.15) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla (2.14) lineer denklemi için dördüncü mertebeden Runge-Kutta çözümleri,

$$U^{n+1} = U^n + k\lambda U^n + \frac{(k\lambda)^2}{2}U^n + \frac{(k\lambda)^3}{6}U^n + \frac{(k\lambda)^4}{24}U^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

ile bulunur [25].

2.4. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK YÖNTEMLER

2.4.1. Euler Yöntemi

Genel olarak,

$$U' = f(U) \tag{2.16}$$

şeklindeki lineer olmayan denklemler için Euler yöntemi,

$$U^{n+1} = U^n + kf(U^n), \quad n=0,1,2,\dots$$

şeklinde tanımlıdır [25].

2.4.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

(2.16) lineer olmayan denklemi için ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi,

$$U^* = U^n + \frac{1}{2}kf(U^n) \tag{2.17}$$

olmak üzere,

$$U^{n+1} = U^n + kf(U^*), \quad n=0,1,2,\dots \tag{2.18}$$

formülü ile verilir. Burada, (2.17) ile hesaplanan U^* değerleri $t_{n+\frac{1}{2}}$ zaman adımıda hesaplanan $U^{n+\frac{1}{2}}$ değerleridir. (2.18)' de f fonksiyonu bu $U^{n+\frac{1}{2}}$ ara noktalarında değer alarak U^{n+1} değerleri bulunur [25].

2.4.3. Crank-Nicolson Yöntemi

(2.16) denkleminin Crank-Nicolson yöntemi ile çözümlerinin bulunmasında $n=0,1,2,\dots$ için,

$$U^{n+1} = U^n + \frac{k}{2} f(U^n + U^{n+1})$$

formülü kullanılır [25].

2.5. SONLU FARK YÖNTEMLERİ İÇİN GENEL KARARLILIK ANALİZİ

Kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün kısmi diferansiyel denklemin tam çözümüne yakınsaması için gerekli olan şartlara kararlılık şartları, kararlılık şartlarının bulunması işlemine de kararlılık analizi denir.

Kararlılık analizi için bilinen iki yöntem vardır. Biz burada matris yönteminden bahsedeceğiz.

2.5.1. Matris Yöntemi

Matris yöntemi, lineer denklemler için kullanılan kararlılık analizlerinden biridir. Sonlu fark denklemlerinin çözümünün kararlılığının incelenmesinde yaygın olarak kullanılır.

Bu yöntemle kararlılığı incelemek için,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} , \quad 0 \leq x \leq l , \quad t > 0$$

zaman bağımlı, boyutsuz ısı-iletim problemini,

$$U(0,t) = g_1(t) \quad , \quad t \geq 0$$

$$U(l,t) = g_2(t) \quad , \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq l$$

başlangıç şartı ile düşünelim. Burada $g_1(t)$, $g_2(t)$ ve $f(x)$ fonksiyonları biliniyor olsun. Kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark yaklaşımı kapalı olarak matris notasyonunda,

$$\underline{U}^{(m+1)} = A\underline{U}^{(m)} + \underline{b} \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. $\underline{U}^{(m+1)}$ değerine çok yakın bir çözüm $\underline{U}^{(m+1)*}$ olsun ve bu çözüm yuvarlama hatalarını da içersin. Bu durumda,

$$\underline{U}^{(m+1)*} = A\underline{U}^{(m)*} + \underline{b} \quad (2.20)$$

yazılabilir. Buradaki hatanın,

$$e_i^m = U_i^m - U_i^{m*}$$

olduğu düşünülürse hata vektörü,

$$\underline{e}^{(m)} = \begin{bmatrix} U_1^m - U_1^{m*} & U_2^m - U_2^{m*} & \dots & U_{N-1}^m - U_{N-1}^{m*} \end{bmatrix}^T$$

olur. (2.19) ifadesinden (2.20) ifadesinin çıkarılmasıyla,

$$\underline{e}^{(m+1)} = A\underline{e}^{(m)}$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$\underline{e}^{(m)} = A\underline{e}^{(m-1)} = A^2\underline{e}^{(m-2)} = \dots = A^m\underline{e}^{(0)} \quad (2.21)$$

yazılabilir. Burada $\underline{e}^{(0)} = [e_1^0 \quad e_2^0 \quad \dots \quad e_{N-1}^0]^T$ başlangıç hatasıdır. Başlangıç hatasının $t = 0$ ' da bulunduğunu kabul edelim ve $\underline{e}^{(m)}$ hatasının sınırlı kalma şartını araştıralım:

A reel, simetrik ve rankı $(N-1)$ olan bir matris olsun. Böylece A matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$ özdeğerlerine $(N-1)$ tane lineer bağımsız $\underline{W}_1, \underline{W}_2, \dots, \underline{W}_{N-1}$ özvektör karşılık gelir. Böylece, $\underline{W}_k$ ($k=1,2,3,\dots,N-1$) lar IR^{N-1} uzayı için bir bazdır. Dolayısıyla $(N-1)$ boyutlu herhangi bir vektör $\underline{W}_k$ ' ların lineer birleşimi olarak yazılabilir. $\underline{e}^{(0)} \in IR^{N-1}$ olduğundan,

$$\underline{e}^{(0)} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \underline{W}_k \quad (2.22)$$

yazılabilir. (2.22)' nin (2.21)' de yazılmasıyla,

$$\underline{e}^{(m)} = A^m \sum_{k=1}^{N-1} a_k \underline{W}_k \quad (2.23)$$

bulunur.

Özdeğer ve özvektör tanımından,

$$A\underline{W}_k = \lambda_k \underline{W}_k$$

dir. Ayrıca,

$$A^m \underline{W}_k = \lambda_k^m \underline{W}_k$$

dir. Bu eşitlik (2.23)' de kullanılırsa,

$$\underline{e}^{(m)} = A^m \sum_{k=1}^{N-1} a_k \underline{W}_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k A^m \underline{W}_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \lambda_k^m \underline{W}_k$$

elde edilir.

m artarken $\underline{e}^{(m)}$ nin sınırlı kalması (yani mutlak değerce istenildiği kadar küçük bir pozitif sayıdan küçük kalması) için,

$$\max_k |\lambda_k| \leq 1$$

olmalıdır [23].

BÖLÜM 3

3.1. METHOD OF LINES (MOL) YÖNTEMİ

Method of lines (MOL), lineer ve lineer olmayan denklemlerin başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünü bulmakta kullanılan bir yöntemdir [26]. Yöntem, bir değişkene (konum değişkenine) göre kısmi diferansiyel denklemi ayrıştırarak, sonuçta denklemi kolaylıkla çözülebilen adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürür. Kısmi diferansiyel denklem bütün değişkenlerine göre ayrışmadığından, MOL bazen yarı-ayırıştırma metodu olarak bilinir [27]. Ayırıştırma sonlu farklar, sonlu elemanlar ya da ağırlıklı kalan yöntemleri gibi çeşitli yollarla yapılabilir [28].

MOL yaklaşımının en önemli avantajı hem açık yöntemlerin kolaylığına hem de adi diferansiyel denklemin çözümünde zayıf bir nümerik yöntem kullanmadıkça, kapalı yöntemlerin üstünlüğüne (kararlılık avantajına) sahip olmasıdır. Metodun bundan başka çok önemli iki avantajı daha vardır. Birincisi, bu metodla, sayısal hesaplamalarda önemli artışlar ve sınır şartları için ek zorluklar olmadan yüksek mertebeden yaklaşımları çözmek mümkündür. İkincisi, zaman integrasyonunda güvenli ve etkili bir adi diferansiyel denklem çözücüsünün kullanımıyla, çok küçük adımlar kullanmadan da iyi sonuçlar alınabilir [29].

3.2. MOL YÖNTEMİNİN ISI DENKLEMİNE UYGULANMASI

$$U_t = U_{xx} \quad (3.1)$$

şeklindeki 1-boyutlu lineer parabolik denklem,

$$U(x,0) = f(x)$$

başlangıç şartı ve $0 \leq x \leq l$ olmak üzere,

$$U(0,t) = f_1(t) \quad , \quad t > 0$$

$$U(l,t) = f_2(t) \quad , \quad t > 0$$

sınır şartları ile göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned} x_i &= ih, & h &= x_{i+1} - x_i \\ t_n &= nk, & k &= t_{i+1} - t_i \end{aligned}$$

olmak üzere, (x_i, t_n) grid noktalarını temsil etsin. U_i^n de bu (x_i, t_n) grid noktalarındaki nümerik çözümleri göstere. Yani, $U(x, t)$ verilen kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olmak üzere $U(x, t) \approx U_i^n$ olsun.

$[0, l]$ aralığı N parçaya bölünsün. Bu durumda, $N+1$ tane grid noktası olup Δx ,

$$\Delta x = h = \frac{l}{N}$$

dir.

MOL yöntemiyle çözümü bulmak için, denklemdeki x' e göre türevin yerine sonlu fark yaklaşımı yazılarak denklem diskrite edilir. Yani,

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

alınır. Böylece kısmi diferansiyel denklem,

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

şeklinde kolaylıkla çözülebilen lineer adi diferansiyel denklem sistemine dönüşür ve matris notasyonunda,

$$U'(t) = AU(t) + f(t) \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, A üçlü bant matris ve $f(t)$ sınır şartlarını içeren sütun matrisi olup aşağıdaki gibi tanımlıdır [25].

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}, \quad f(t) = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_2(t) \end{bmatrix}_{(N-1) \times 1}$$

Bu diferansiyel denklem sistemi çeşitli nümerik yöntemler kullanılarak çözülebilir.

Bu bölümde, (3.2) diferansiyel denklem sisteminin çözümünü aşağıdaki başlangıç ve sınır şartları için Euler yöntemi, ikinci mertebeden Runge-Kutta ve dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemleri ile elde ettik ve sonuçları Tablo 3.1, Tablo 3.2 ve Şekil 3.1, Şekil 3.2’de tam çözümle karşılaştırdık.

Şimdi (3.1) denklemini,

$$U(x,0) = x(1-x) \quad (3.1a)$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1b)$$

başlangıç ve sınır değerleri ile göz önüne alıp MOL yöntemini uygulayalım:

$[0,1]$ aralığı $N = 10$ olmak üzere N parçaya bölünsün. Bu durumda $h = 1/10$ olup denklem sistemi,

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

veya

$$U_0 = 0$$

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{U_2 - 2U_1 + U_0}{h^2}$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \frac{U_3 - 2U_2 + U_1}{h^2}$$

$$\frac{dU_3}{dt} = \frac{U_4 - 2U_3 + U_2}{h^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dU_9}{dt} = \frac{U_{10} - 2U_9 + U_8}{h^2}$$

$$U_{10} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu lineer diferansiyel denklem sistemi matris formunda,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}_{9 \times 9}, \quad U = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ \dots \ U_8 \ U_9]^T_{1 \times 9}$$

ile gösterilirse diferansiyel denklem sistemi kısaca,

$$U' = AU \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir.

3.2.1. Euler Yöntemi

Bu diferansiyel denklem sistemini ilk olarak Euler yöntemiyle çözelim. Bu yöntemle göre (3.3) şeklindeki denklemlerin çözümü,

$$U^{n+1} = U^n + kAU^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

formülü ile hesaplanır [25]. Burada k , t (zaman) yönündeki grid mesafesi olup formül matris notasyonunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \\ U_6^{n+1} \\ U_7^{n+1} \\ U_8^{n+1} \\ U_9^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ U_8^n \\ U_9^n \end{bmatrix} + \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ U_8^n \\ U_9^n \end{bmatrix}$$

ve $r = k/h^2$ olmak üzere açık olarak yazılırsa,

$$U_i^{n+1} = \begin{cases} U_i^n + r(-2U_i^n + U_{i+1}^n) & , i = 1 \\ U_i^n + r(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) & , i = 2, \dots, 8 \\ U_i^n + r(U_{i-1}^n - 2U_i^n) & , i = 9 \end{cases}$$

şeklindedir.

Euler yönteminde açık sonlu fark tekniği kullanıldığından, $r \leq 1/2$ kararlılık şartı sağlanacak şekilde k ve h değerleri alınarak çözüm yapıldı. Sonuçlar t 'nin farklı iki değeri için Tablo 3.1 ve Tablo 3.2'de verildi.

3.2.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

İkinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile (3.3) denkleminin çözümü

$$U^{n+1} = U^n + (kA)U^n + \frac{1}{2}(kA)^2 U^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

formülüyle hesaplanır [25]. Algoritmanın matris formu,

$$\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \\ U_6^{n+1} \\ U_7^{n+1} \\ U_8^{n+1} \\ U_9^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ U_8^n \\ U_9^n \end{bmatrix} + \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ U_8^n \\ U_9^n \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{k}{h^2} \right)^2 \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ U_8^n \\ U_9^n \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Açık şekilde yazarsak,

$$U_i^{n+1} = \begin{cases} U_i^n + r(-2U_i^n + U_{i+1}^n) + 0.5r^2(5U_i^n - 4U_{i+1}^n + U_{i+2}^n) & , i = 1 \\ U_i^n + r(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) + 0.5r^2(-4U_{i-1}^n + 6U_i^n - 4U_{i+1}^n + U_{i+2}^n) & , i = 2 \\ U_i^n + r(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) + 0.5r^2(U_{i-2}^n - 4U_{i-1}^n + 6U_i^n - 4U_{i+1}^n + U_{i+2}^n) & , i = 3, \dots, 7 \\ U_i^n + r(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) + 0.5r^2(U_{i-2}^n - 4U_{i-1}^n + 6U_i^n - 4U_{i+1}^n) & , i = 8 \\ U_i^n + r(U_{i-1}^n - 2U_i^n) + 0.5r^2(U_{i-2}^n - 4U_{i-1}^n + 5U_i^n) & , i = 9 \end{cases}$$

olur. Yine açık sonlu fark teknikleri kullanıldığından $r \leq 1/2$ olacak şekilde k ve h değerleri seçilerek bu algorithmadan elde edilen çözümler Tablo 3.1 ve Tablo 3.2' de verildi.

3.2.3. Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

Dördüncü mertebeden Runge –Kutta yönteminde çözümlerin hesabı için,

$$U^{n+1} = U^n + kAU^n + \frac{1}{2}(kA)^2U^n + \frac{1}{6}(kA)^3U^n + \frac{1}{24}(kA)^4U^n , \quad n=0,1,2,\dots$$

formülü kullanılır [25].

Euler ve ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemlerinde yapılan işlemler, bu yöntem için de benzer olarak yapılır.

3.3. ISI DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

(3.1) ısı denkleminin (3.1a) ve (3.1b) başlangıç ve sınır şartları ile analitik çözümünü değişkenlerine ayırıştırma yöntemini kullanarak bulalım. X sadece x ' in ve T sadece t ' nin birer fonksiyonu olmak üzere çözüm,

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

formundadır.

$$U_t = X(x)T'(t) \quad \text{ve} \quad U_{xx} = X''(x)T(t)$$

olduğuna göre (3.1) ısı denklemini,

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \lambda > 0 \quad (\text{sabit})$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\frac{T'}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow T = e^{-\lambda^2 t}$$

olarak elde edilir.

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m_1 = i\lambda, \quad m_2 = -i\lambda$$

olduğundan $X(x)$ çözümü, c_1 ve c_2 iki keyfi sabit olmak üzere,

$$X(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)$$

dir. O halde (3.1) ısı denklemini genel özümü,

$$U(x, t) = (c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x))e^{-\lambda^2 t}$$

olarak bulunur. Sol sınır şartından,

$$U(0, t) = 0 \Rightarrow c_2 e^{-\lambda^2 t} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

olur. Böylece özüm,

$$U(x, t) = c_1 \sin(\lambda x)e^{-\lambda^2 t}$$

şekline gelir. Sağ sınır şartından,

$$U(1,t)=0 \Rightarrow c_1 e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda = 0$$

olur. $\forall t$ için $e^{-\lambda^2 t} \neq 0$ dır. $c_1 = 0$ olması durumunda da aşıkâr çözüm elde edileceğinden $c_1 \neq 0$ olmalıdır. O halde,

$$\sin \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = n\pi, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

dir. Böylece,

$$U_n(x,t) = c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

çözümü elde edilir. Burada c_1 yerine n 'nin farklı değerleri için kullanılabilen, fonksiyon sabitlerini gösteren c_n alınmıştır. Bu şekildeki çözümlerin her biri sınır şartlarını sağlar. Lineer denklemler için çözümlerin toplamı da yine bir çözüm olduğundan,

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) \quad (3.4)$$

de çözümdür (Süperpozisyon ilkesi). Son olarak başlangıç şartının da sağlanması gerektiğinden,

$$U(x,0) = x(1-x) \Rightarrow U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) = x(1-x)$$

olur. Bu ise $x(1-x)$ fonksiyonunun $0 < x < 1$ için Fourier sinüs serisinin açılımı problemine eşdeğerdir. O halde,

$$c_n = 2 \int_0^1 x(1-x) \sin(n\pi x) dx = 2 \left[\int_0^1 x \sin(n\pi x) dx - \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx \right]$$

olarak yazılırsa,

$$\int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi)$$

ve

$$\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2} \sin(n\pi) + \frac{2}{n^3\pi^3} \cos(n\pi) - \frac{2}{n^3\pi^3}$$

olduğundan,

$$c_n = -\frac{2}{n^2\pi^2} \sin(n\pi) - \frac{4}{n^3\pi^3} \cos(n\pi) + \frac{4}{n^3\pi^3}$$

bulunur. Bu değer (3.4)' de yerine yazılırsa (3.1) ısı denkleminin (3.1a-b) şartlarını sağlayan çözümü,

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{n^2\pi^2} \sin(n\pi) - \frac{4}{n^3\pi^3} \cos(n\pi) + \frac{4}{n^3\pi^3} \right] e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{n^2\pi^2} \sin(n\pi) - \frac{4}{n^3\pi^3} (-1)^n + \frac{4}{n^3\pi^3} \right] e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

ya da

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^3 \pi^3} e^{-(2k+1)^2 \pi^2 t} \sin((2k+1)\pi x)$$

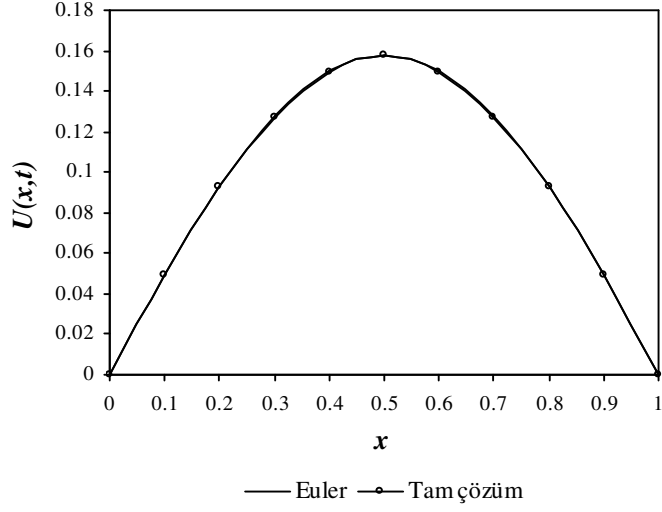
şeklinde elde edilir.

Tablo 3.1 $h = 0.1$ ve $k = 0.001$ için $t = 0.01$ zaman adımındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması

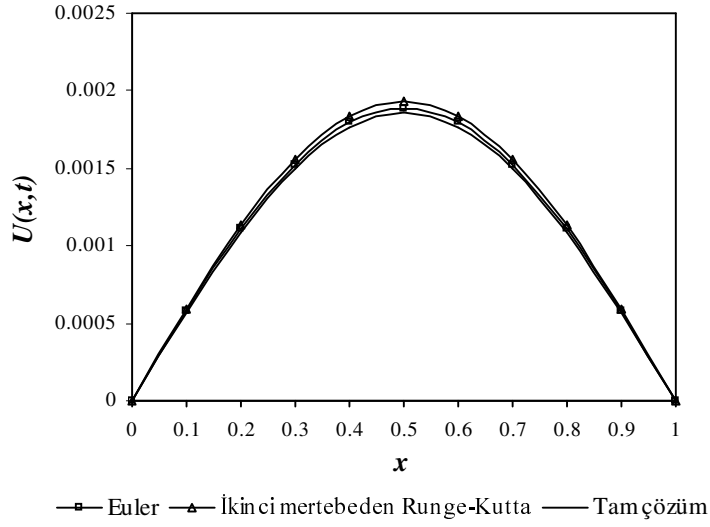
x	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	Dördüncü mertebeden Runge-Kutta	Analitik çözüm
0.1	0.07574	0.07597	0.07596	0.07560
0.2	0.14126	0.14145	0.14145	0.14114
0.3	0.19021	0.19029	0.19029	0.19016
0.4	0.22002	0.22005	0.22005	0.22002
0.5	0.23000	0.23001	0.23002	0.23000
0.6	0.22002	0.22005	0.22005	0.22002
0.7	0.19021	0.19029	0.19029	0.19016
0.8	0.14126	0.14145	0.14145	0.14114
0.9	0.07574	0.07597	0.07596	0.07560

Tablo 3.2 $h=0.02$ ve $k=0.0001$ için $t=0.1$ zaman adımındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması

x	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	Dördüncü mertebeden Runge-Kutta	Analitik çözüm
0.1	0.02971	0.02973	0.02973	0.02972
0.2	0.05652	0.05654	0.05654	0.05652
0.3	0.07778	0.07782	0.07782	0.07780
0.4	0.09144	0.09148	0.09148	0.09146
0.5	0.09615	0.09619	0.09619	0.09616
0.6	0.09144	0.09148	0.09148	0.09146
0.7	0.07778	0.07782	0.07782	0.07780
0.8	0.05652	0.05654	0.05654	0.05652
0.9	0.02971	0.02973	0.02973	0.02972



Şekil 3.1 $h=0.1$ ve $k=0.001$ için $t=0.05$ zaman adımında Euler yöntemi ile elde edilen çözümün analitik çözümle karşılaştırılması



Şekil 3.2 $h=0.1$ ve $k=0.001$ için $t=0.5$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması

BÖLÜM 4

Bu bölümde model problem olarak kullanılacak olan,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

$$U(x,0) = U_0(x) = \sin(\pi x) \quad (4.1a)$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \quad (4.1b)$$

başlangıç-sınır değer probleminin analitik çözümü yapılacaktır.

4.1. BURGERS DENKLEMİNİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

(4.1) ile verilen Burgers denkleminin doğrudan analitik çözümünün bulunması mümkün değildir. Fakat bir dönüşüm yardımıyla lineer hale getirilerek çözülebilen çok az sayıdaki non-lineer denklemlerden birisidir.

Burgers denklemi, Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinen,

$$U = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta} \quad (4.2)$$

şeklinde bir dönüşüm ile,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

lineer ısı problemine indirgenir [1]. Başlangıç ve sınır değerleri ise (4.2) dönüşümü altında,

$$\theta_0(x) = \theta(x,0) = c_0 \exp\left\{-(2\nu\pi)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} \quad (4.3a)$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0 \quad (4.3b)$$

haline gelir.

Şimdi (4.3), (4.3a) ve (4.3b) şeklinde indirgenmiş başlangıç-sınır değer probleminin analitik çözümünü değişkenlerine ayırma yöntemiyle bulalım:

Bunun için,

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

(4.3) denkleminin bir çözümü olsun.

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = X'(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

eşitlikleri (4.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$X(x)T'(t) = vX''(x)T(t)$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v} \frac{T'}{T} = -\lambda^2, \quad \lambda > 0 \text{ (sabit)}$$

olur. Buradan,

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$T' + \lambda^2 v T = 0$$

şeklinde iki adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri sırasıyla,

$$X = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)$$

$$T = ce^{-\lambda^2 vt}$$

dir. Bu çözümler,

$$\theta(x, t) = X(x)T(t)$$

ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\theta(x, t) = [A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)] [ce^{-\lambda^2 vt}]$$

elde edilir. Burada $cA_1 = A$, $cB_1 = B$ denirse,

$$\theta(x, t) = e^{-\lambda^2 vt} [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] \quad (4.4)$$

olur. Sol sınır şartından

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = e^{-\lambda^2 vt} [-A\lambda \sin(\lambda x) + B\lambda \cos(\lambda x)]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = e^{-\lambda^2 vt} (B\lambda) = 0$$

dır. $e^{-\lambda^2 vt} \neq 0$ olduğundan $B=0$ olmalıdır. Böylece (4.4) çözümü,

$$\theta(x, t) = Ae^{-\lambda^2 vt} \cos(\lambda x)$$

haline gelir. Diğer sınır şartının kullanılmasıyla,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -A\lambda e^{-\lambda^2 vt} \sin(\lambda x)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = -A\lambda e^{-\lambda^2 vt} \sin(\lambda l)$$

bulunur. Burada $A=0$ olursa aşikar çözüm bulunacağından,

$$\sin \lambda = 0$$

olmalıdır. Böylece,

$$\lambda = n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dir. λ değerinin yerine yazılmasıyla,

$$\theta_n(x, t) = A_n e^{-vn^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x)$$

çözümü elde edilir. Süperpozisyon ilkesi gereğince (4.3) denkleminin genel çözümü,

$$\theta(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 vt} A_n \cos(n\pi x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise bir Fourier cosinüs serisidir. Burada A_0 , A_n Fourier katsayıları,

$$A_0 = \int_0^1 \theta_0(x) dx = c_0 \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} dx$$

$$A_n = 2c_0 \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} \cos(n\pi x) dx$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan (4.1) ile verilen Burgers denkleminin analitik çözümü, (4.2) dönüşümü yardımıyla

$$U(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 \pi^2 v t} A_n \sin(n\pi x)}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 v t} A_n \cos(n\pi x)}$$

olarak elde edilir [1].

BÖLÜM 5

Bu bölümde, 4. bölümde verilmiş olan (4.1) başlangıç-sınır değer probleminin (4.3), (4.3a) ve (4.3b) şeklinde ifade edilen lineerleştirilmiş haline MOL yöntemi uygulandı. Sonuçta ortaya çıkan adi diferansiyel denklemlere çeşitli nümerik yöntemler uygulanarak çözümler elde edildi.

5.1. LİNEERLEŞTİRİLMİŞ BURGERS DENKLEMİNE MOL YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

$$U = -2v \frac{\theta_x}{\theta} \quad (5.1)$$

Hopf-Cole dönüşümü kullanılarak (4.1) başlangıç - sınır değer probleminin,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

$$\theta(x,0) = c_0 \exp\left\{-(2v\pi)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\right\} \quad (5.2a)$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0 \quad (5.2b)$$

şeklindeki lineer ısı problemine dönüştüğünü biliyoruz [1].

Bulunan bu lineer ısı problemine Method of Lines yöntemini uygulamak için θ_t sabit bırakılıp, θ_{xx} yerine sonlu fark yaklaşımı yazılır. Sınır şartlarına ise merkezi farklar uygulanır. (Burada $c_0 = 1$ alınacaktır.)

$$h = x_{i+1} - x_i \quad \text{olmak üzere, } [0,1] \text{ aralığı } N \text{ parçaya bölünsün.} \quad (5.2)$$

denklemine MOL uygulanırsa,

$$\frac{d\theta_i}{dt} = v \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2}, \quad i = 0,1,2,\dots,N \quad (5.3)$$

yazılabilir.

$x = 0$ 'daki sol sınır şartı merkezi fark cinsinden,

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} = 0 \quad (5.4)$$

şeklindedir. $i = 0$ için (5.4) denklemi,

$$\frac{\theta_1 - \theta_{-1}}{2h} = 0 \Rightarrow \theta_{-1} = \theta_1 \quad (5.5)$$

olur. $i=0$ için (5.3) denklemi ise,

$$\frac{d\theta_0}{dt} = v \frac{\theta_1 - 2\theta_0 + \theta_{-1}}{h^2} \quad (5.6)$$

dir. (5.5) ve (5.6) denklemlerinde problemin çözüm bölgesine düşmeyen θ_{-1} hayali değeri bulunmaktadır. Bu değer (5.5)' in (5.6)' da kullanılmasıyla kolayca yok edilir. Böylece,

$$\frac{d\theta_0}{dt} = v \frac{-2\theta_0 + 2\theta_1}{h^2}$$

elde edilir.

$x = 1$ 'deki sağ sınır şartı merkezi fark cinsinden,

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} = 0$$

olarak yazılır. $x = 1$ 'de $i = N$ olduğundan,

$$\frac{\theta_{N+1} - \theta_{N-1}}{2h} = 0 \Rightarrow \theta_{N+1} = \theta_{N-1} \quad (5.7)$$

olur. $i=N$ için (5.3) denklemi ise

$$\frac{d\theta_N}{dt} = v \frac{\theta_{N+1} - 2\theta_N + \theta_{N-1}}{h^2} \quad (5.8)$$

dir. Burada da θ_{N+1} değeri hayali değerdir. (5.7), (5.8)' de yerine yazılarak bu değer de yok edilir. Buradan,

$$\frac{d\theta_N}{dt} = v \frac{2\theta_{N-1} - 2\theta_N}{h^2}$$

bulunur.

O halde,

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \begin{cases} v \frac{-2\theta_i + 2\theta_{i+1}}{h^2} & , i = 0 \\ v \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2} & , i = 1, 2, \dots, N-1 \\ v \frac{2\theta_{i-1} - 2\theta_i}{h^2} & , i = N \end{cases}$$

lineer adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{N-2} \\ \theta_{N-1} \\ \theta_N \end{bmatrix} = \frac{v}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{N-2} \\ \theta_{N-1} \\ \theta_N \end{bmatrix}$$

ve

$$A = \frac{v}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\theta = [\theta_0 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_{N-1} \quad \theta_N]^T$$

ile gösterilirse,

$$\theta' = A\theta \quad (5.9)$$

şeklinde yazılabilir.

5.1.1. Euler Yöntemi

(5.9) denklem sisteminin Euler yöntemi ile çözümünü bulmak için,

$$\theta^{n+1} = \theta^n + kA\theta^n \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$$

algoritmasının kullanıldığını biliyoruz [25]. Buna göre algoritmanın açık ifadesi,

$$\begin{bmatrix} \theta_0^{n+1} \\ \theta_1^{n+1} \\ \theta_2^{n+1} \\ \theta_3^{n+1} \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^{n+1} \\ \theta_{N-1}^{n+1} \\ \theta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix} + \frac{kv}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix}$$

veya $r = kv/h^2$ olmak üzere,

$$\theta_i^{n+1} = \begin{cases} \theta_i^n + r(-2\theta_i^n + 2\theta_{i+1}^n) & , \quad i = 0 \\ \theta_i^n + r(\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n) & , \quad i = 1,2,\dots,N-1 \\ \theta_i^n + r(2\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n) & , \quad i = N \end{cases}$$

şeklinde (5.2) lineer ısı denkleminin çözümü olan $\theta(x,t)$ ' ler (5.2a) başlangıç şartı kullanılarak bu algorithmadan kolayca bulunur. Bulunan bu değerlerin (5.1)

dönüşümünde yerine yazılmasıyla, (4.1) ile verilen Burgers denkleminin $U(x,t)$ çözümleri elde edilmiş olur.

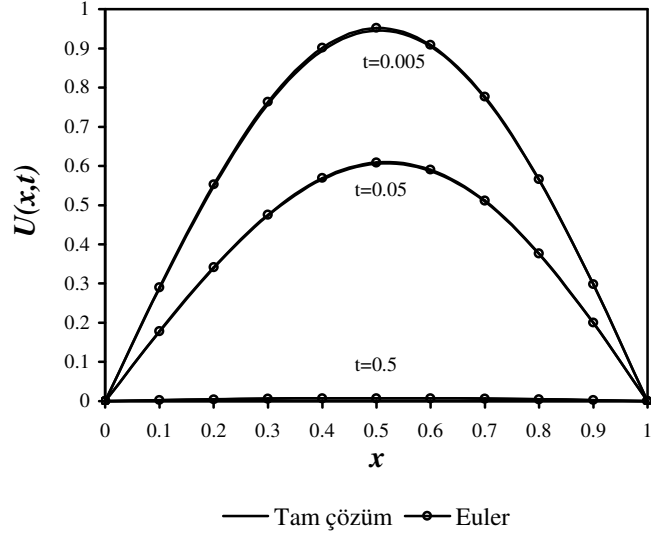
Bu algoritma kullanılarak çeşitli zaman adımlarında, farklı k ve h değerleri için nümerik çözümler elde edildi. Sonuçlar Tablo 5.1, Tablo 5.2 ve Şekil 5.1, Şekil 5.2' de analitik çözümle karşılaştırıldı.

Tablo 5.1 $h=0.1$ ve $\nu =1$ için $t = 0.1$ zaman adımında farklı k değerleri alınarak Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

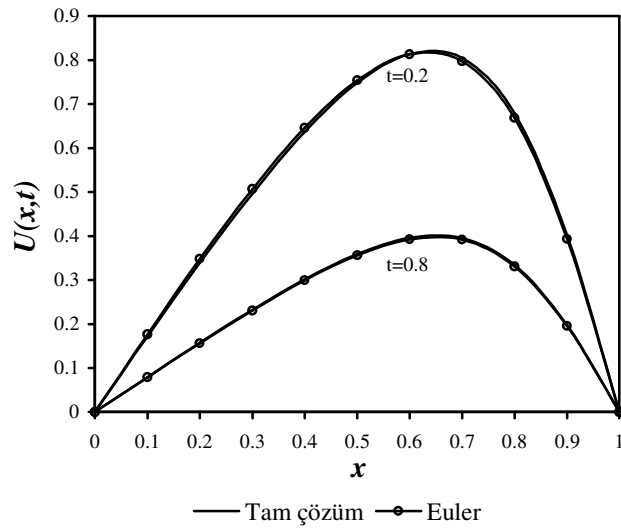
x	Euler			Analitik çözüm
	$k=0.001$	$k=0.0001$	$k=0.00001$	
0.1	0.11016	0.10868	0.10866	0.10954
0.2	0.21100	0.20815	0.20811	0.20979
0.3	0.29364	0.28961	0.28959	0.29190
0.4	0.35008	0.34519	0.34518	0.34792
0.5	0.37398	0.36866	0.36860	0.37158
0.6	0.36147	0.35622	0.35608	0.35905
0.7	0.31208	0.30746	0.30729	0.30990
0.8	0.22946	0.22601	0.22589	0.22782
0.9	0.12158	0.11973	0.11966	0.12069

Tablo 5.2 $\nu =0.1$ ve $k =0.00001$ için $t = 0.1$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	Euler				Analitik çözüm
	$N=10$	$N=20$	$N=50$	$N=100$	
0.1	0.21353	0.22100	0.22308	0.22346	0.22345
0.2	0.41919	0.43169	0.43533	0.43592	0.43580
0.3	0.60742	0.62068	0.62441	0.62508	0.62512
0.4	0.76542	0.77458	0.77723	0.77764	0.77772
0.5	0.87596	0.87692	0.87723	0.87718	0.87728
0.6	0.91654	0.90741	0.90468	0.90418	0.90425
0.7	0.86057	0.84294	0.83781	0.83695	0.83692
0.8	0.68432	0.66424	0.65843	0.65754	0.65731
0.9	0.38411	0.37045	0.36651	0.36590	0.36575



Şekil 5.1 $h=0.1$, $v=1$ ve $k=0.001$ için farklı zaman adımlarında Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması



Şekil 5.2 $h=0.1$, $v=0.1$ ve $k=0.0005$ için $t=0.2$, 0.8 zaman adımlarında Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

5.1.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

(5.9) denklem sisteminin ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile çözümü için,

$$\theta^{n+1} = \theta^n + (kA)\theta^n + \frac{1}{2}(kA)^2\theta^n, \quad n = 0,1,2,\dots$$

algoritması kullanılır [25]. Bu algoritmanın açık ifadesi,

$$\begin{bmatrix} \theta_0^{n+1} \\ \theta_1^{n+1} \\ \theta_2^{n+1} \\ \theta_3^{n+1} \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^{n+1} \\ \theta_{N-1}^{n+1} \\ \theta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix} + \frac{kv}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{kv}{h^2} \right)^2 \begin{bmatrix} 6 & -8 & 2 & & & & & \\ -4 & 7 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 7 & -4 \\ & & & & & & 2 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix}$$

veya $r = kv/h^2$ olmak üzere,

$$\theta_i^{n+1} = \begin{cases} \theta_i^n + r(-2\theta_i^n + 2\theta_{i+1}^n) + 0.5r^2(6\theta_i^n - 8\theta_{i+1}^n + 2\theta_{i+2}^n) & , i = 0 \\ \theta_i^n + r(\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n) + 0.5r^2(-4\theta_{i-1}^n + 7\theta_i^n - 4\theta_{i+1}^n + \theta_{i+2}^n) & , i = 1 \\ \theta_i^n + r(\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n) + 0.5r^2(\theta_{i-2}^n - 4\theta_{i-1}^n + 6\theta_i^n - 4\theta_{i+1}^n + \theta_{i+2}^n) & , i = 2, \dots, N-2 \\ \theta_i^n + r(\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n) + 0.5r^2(\theta_{i-2}^n - 4\theta_{i-1}^n + 7\theta_i^n - 4\theta_{i+1}^n) & , i = N-1 \\ \theta_i^n + r(2\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n) + 0.5r^2(2\theta_{i-2}^n - 8\theta_{i-1}^n + 6\theta_i^n) & , i = N \end{cases}$$

şeklindedir. (5.2a) başlangıç şartının kullanılmasıyla bu sistem kolayca çözülerek (5.2) denkleminin $\theta(x,t)$ çözümleri elde edilir. Bu şekilde hesaplanan $\theta(x,t)$ değerleri, Euler çözümünde olduğu gibi, (5.1) dönüşümünde yerine yazılarak, (4.1) Burgers denkleminin çözümleri bulunur.

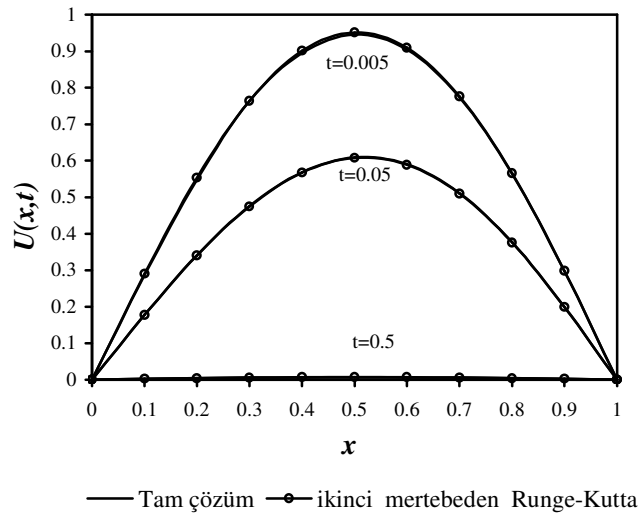
Yine yukarıdaki algoritma kullanılarak çeşitli zaman adımlarında farklı k ve h değerleri için nümerik çözümler elde edildi. Sonuçlar Tablo 5.3, Tablo 5.4 ve Şekil 5.3, Şekil 5.4’ de analitik çözümle karşılaştırıldı.

Tablo 5.3 $h=0.1$ ve $\nu =1$ için $t = 0.1$ zaman adımında farklı k değerleri alınarak ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

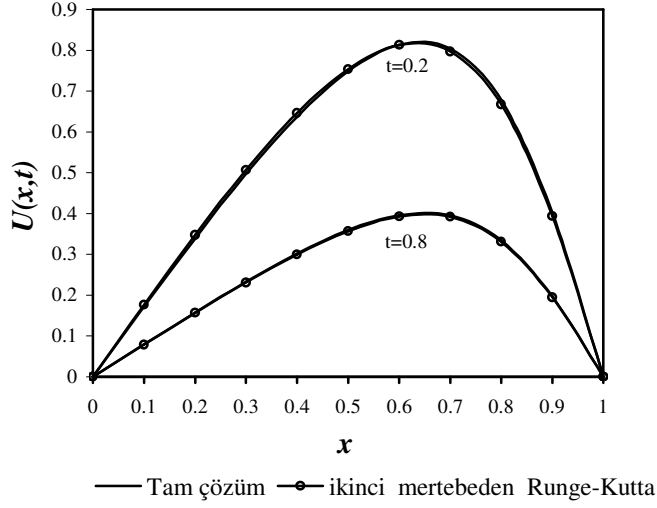
x	İkinci mertebeden Runge-Kutta			Analitik çözüm
	$k=0.001$	$k=0.0001$	$k=0.00001$	
0.1	0.11072	0.10874	0.10866	0.10954
0.2	0.21207	0.20826	0.20812	0.20979
0.3	0.29510	0.28975	0.28960	0.29190
0.4	0.35179	0.34536	0.34520	0.34792
0.5	0.37576	0.36883	0.36861	0.37158
0.6	0.36315	0.35638	0.35609	0.35905
0.7	0.31350	0.30760	0.30730	0.30990
0.8	0.23049	0.22611	0.22589	0.22782
0.9	0.12212	0.11978	0.11966	0.12069

Tablo 5.4 $\nu = 0.1$ ve $k = 0.00001$ $t = 0.1$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak ikinci mertebeden Runge - Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	İkinci mertebeden Runge-Kutta				Analitik çözüm
	$N=10$	$N=20$	$N=50$	$N=100$	
0.1	0.21353	0.22100	0.22308	0.22346	0.22345
0.2	0.41919	0.43169	0.43533	0.43593	0.43580
0.3	0.60742	0.62068	0.62441	0.62509	0.62512
0.4	0.76542	0.77458	0.77723	0.77764	0.77772
0.5	0.87596	0.87692	0.87723	0.87718	0.87728
0.6	0.91654	0.90740	0.90468	0.90417	0.90425
0.7	0.86057	0.84293	0.83780	0.83695	0.83692
0.8	0.68431	0.66424	0.65843	0.65754	0.65731
0.9	0.38411	0.37045	0.36651	0.36590	0.36575



Şekil 5.3 $h=0.1$, $\nu=1$ ve $k=0.001$ için farklı zaman adımlarında ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması



Şekil 5.4 $h=0.1$, $v=0.1$ ve $k=0.0005$ için $t=0.2$, 0.8 zaman adımlarında ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

5.2. NÜMERİK YÖNTEMLERİN KARARLILIĞI

Bu kısımda Matris yöntemi kullanılarak kararlılık analizi yapılmıştır.

5.2.1 Euler Yöntemi İçin Kararlılık Analizi

Lineerleştirilmiş Burgers denkleminin Euler Yöntemi ile çözümü,

$$\begin{bmatrix} \theta_0^{n+1} \\ \theta_1^{n+1} \\ \theta_2^{n+1} \\ \theta_3^{n+1} \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^{n+1} \\ \theta_{N-1}^{n+1} \\ \theta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix} + \frac{kv}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

olarak Bölüm 5.1.1’de verilmişti. Bu yöntemin kararlılığını araştırmak için (5.10) ifadesinin sağ tarafı

$$\begin{bmatrix} \theta_0^{n+1} \\ \theta_1^{n+1} \\ \theta_2^{n+1} \\ \theta_3^{n+1} \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^{n+1} \\ \theta_{N-1}^{n+1} \\ \theta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & 2r & & & & & & \\ & r & 1-2r & r & & & & \\ & & r & 1-2r & r & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & r & 1-2r & r & \\ & & & & & r & 1-2r & r \\ & & & & & & 2r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

şeklinde düzenlenir. Katsayılar matrisini A ile gösterirsek (5.11) ifadesi kısaca,

$$\theta^{n+1} = A\theta^n \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $r = kv/h^2$ ve $\theta^n = [\theta_0^n \quad \theta_1^n \quad \dots \quad \theta_{N-1}^n \quad \theta_N^n]^T$ dir.

Brauer teoremi gereğince A matrisinin bütün satırları için,

$$a_{ss} = 1-2r \quad \text{ve} \quad P_s = 2|r|$$

dir. $v > 0$ olduğundan $r > 0$ dir. O halde $P_s = 2r$ dir. Böylece,

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s \Rightarrow |\lambda - (1-2r)| = 2r$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{cases} \lambda_1 - 1 + 2r = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 - 1 + 2r = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 4r \end{cases}$$

bulunur. Kararlılık için,

$$|\lambda_1| \leq 1 \quad \text{ve} \quad |\lambda_2| \leq 1$$

olmalıdır. $\lambda_1 = 1$ olduğundan bu şartı sağlar. λ_2 içinse

$$|\lambda_2| \leq 1 \Rightarrow |1 - 4r| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -4r \leq 0$$

yazılır. Buradan da $r \leq 1/2$ elde edilir. O halde Euler yönteminin kararlılığı için,

$$r \leq \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad \frac{kv}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

şartı sağlanmalıdır.

5.2.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi İçin Kararlılık Analizi

Lineerleştirilmiş Burgers denkleminin ikinci mertebeden Runge-Kutta metodu ile çözümünün matris formunun,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_0^{n+1} \\ \theta_1^{n+1} \\ \theta_2^{n+1} \\ \theta_3^{n+1} \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^{n+1} \\ \theta_{N-1}^{n+1} \\ \theta_N^{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix} + \frac{kv}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{kv}{h^2} \right)^2 \begin{bmatrix} 6 & -8 & 2 & & & & & \\ -4 & 7 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 7 & -4 \\ & & & & & & 2 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^n \\ \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{N-2}^n \\ \theta_{N-1}^n \\ \theta_N^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde olduğu Bölüm 5.1.2’de verilmişti. Sağ taraf düzenlenirse

$$B = \begin{bmatrix} 1-2r+3r^2 & 2r-4r^2 & r^2 & & & \\ r-2r^2 & 1-2r+\frac{7}{2}r^2 & r-2r^2 & \frac{1}{2}r^2 & & \\ \frac{1}{2}r^2 & r-2r^2 & 1-2r+3r^2 & r-2r^2 & \frac{1}{2}r^2 & \\ & & & \ddots & & \\ & \frac{1}{2}r^2 & r-2r^2 & 1-2r+3r^2 & r-2r^2 & \frac{1}{2}r^2 \\ & & \frac{1}{2}r^2 & r-2r^2 & 1-2r+\frac{7}{2}r^2 & r-2r^2 \\ & & & r^2 & 2r-4r^2 & 1-2r+3r^2 \end{bmatrix}$$

$(N+1) \times (N+1)$ tipinde B matrisi elde edilir. (Burada $r = kv/h^2$ dir.) Böylece (5.12) ifadesi kapalı olarak

$$\theta^{n+1} = B\theta^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

şeklinde yazılabilir.

B matrisinin 1. ve $(N+1)$. satırları için,

$$a_{ss} = 1-2r+3r^2, \quad P_s = |2r-4r^2| + |r^2|$$

dir. P_s ifadesinde $r^2 > 0$ dır. $2r-4r^2$ içinse iki durum vardır:

1) Pozitif olma durumu:

$$2r-4r^2 \geq 0 \Rightarrow P_s = 2r-4r^2 + r^2 = 2r-3r^2$$

Bu durumda Brauer teoreminden,

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s \Rightarrow |\lambda - (1-2r+3r^2)| = 2r-3r^2$$

yazılır. Buradan,

$$\lambda_1 - 1 + 2r - 3r^2 = 2r - 3r^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

veya

$$\lambda_2 - 1 + 2r - 3r^2 = -2r + 3r^2 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 4r + 6r^2$$

elde edilir.

2) Negatif olma durumu:

$$2r - 4r^2 < 0 \Rightarrow P_s = -2r + 4r^2 + r^2 = -2r + 5r^2$$

olup

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s \Rightarrow |\lambda - (1 - 2r + 3r^2)| = -2r + 5r^2$$

eşitliğinden,

$$\lambda_3 - 1 + 2r - 3r^2 = -2r + 5r^2 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - 4r + 8r^2$$

$$\lambda_4 - 1 + 2r - 3r^2 = 2r - 5r^2 \Rightarrow \lambda_4 = 1 - 2r^2$$

elde edilir.

2. ve N . satırlar için,

$$a_{ss} = 1 - 2r + \frac{7}{2}r^2, \quad P_s = 2|r - 2r^2| + \frac{1}{2}|r^2| = |2r - 4r^2| + \frac{1}{2}|r^2|$$

dir. Benzer şekilde, $2r - 4r^2$ 'nin pozitif veya negatif olmasına göre

$$1) \quad 2r - 4r^2 \geq 0 \Rightarrow P_s = 2r - 4r^2 + \frac{1}{2}r^2 = 2r - \frac{7}{2}r^2$$

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s \Rightarrow \left| \lambda - (1 - 2r + \frac{7}{2}r^2) \right| = 2r - \frac{7}{2}r^2$$

olduğundan,

$$\lambda_5 - 1 + 2r - \frac{7}{2}r^2 = 2r - \frac{7}{2}r^2 \Rightarrow \lambda_5 = 1$$

$$\lambda_6 - 1 + 2r - \frac{7}{2}r^2 = -2r + \frac{7}{2}r^2 \Rightarrow \lambda_6 = 1 - 4r + 7r^2$$

elde edilir.

$$2) \quad 2r - 4r^2 < 0 \Rightarrow P_s = -2r + 4r^2 + \frac{1}{2}r^2 = -2r + \frac{9}{2}r^2$$

$$|\lambda - a_{ss}| = P_s \Rightarrow \left| \lambda - (1 - 2r + \frac{7}{2}r^2) \right| = -2r + \frac{9}{2}r^2$$

olduğundan,

$$\lambda_7 - 1 + 2r - \frac{7}{2}r^2 = -2r + \frac{9}{2}r^2 \Rightarrow \lambda_7 = 1 - 4r + 8r^2$$

$$\lambda_8 - 1 + 2r - \frac{7}{2}r^2 = 2r - \frac{9}{2}r^2 \Rightarrow \lambda_8 = 1 - r^2$$

elde edilir.

3.,4.,5.,..., (N-1). satırlar için,

$$a_{ss} = 1 - 2r + 3r^2 \quad , \quad P_s = 2 \left| \frac{1}{2}r^2 \right| + 2 \left| r - 2r^2 \right| = \left| r^2 \right| + \left| 2r - 4r^2 \right|$$

dir. Bu durumdaki a_s ve P_s değerleri 1. ve (N+1). satırdakiler ile aynıdır.

Dolayısıyla bulunacak λ değerleri de aynıdır.

Matris analizine göre kararlılık için,

$$|\lambda_i| \leq 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

olmalıdır.

$\lambda_1 = \lambda_5 = 1$ olduğundan bu şart direkt olarak sağlanır. Ayrıca $\lambda_3 = \lambda_7$ ' dir.

$$|\lambda_2| \leq 1 \Rightarrow |1 - 4r + 6r^2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 - 4r + 6r^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq 6r^2 - 4r \leq 0$$

Bu ifadenin sol tarafındaki eşitsizlik için $\Delta < 0$ olduğundan reel kök yoktur. Sağ taraftakinden ise,

$$r_1 \leq \frac{2}{3}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$|\lambda_3| \leq 1 \Rightarrow |1 - 4r + 8r^2| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 8r^2 - 4r \leq 0 \Rightarrow r_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$|\lambda_4| \leq 1 \Rightarrow |1 - 2r^2| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2r^2 \leq 0 \Rightarrow r_3 \leq 1$$

$$|\lambda_6| \leq 1 \Rightarrow |1 - 4r + 7r^2| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 7r^2 - 4r \leq 0 \Rightarrow r_4 \leq \frac{4}{7}$$

$$|\lambda_8| \leq 1 \Rightarrow |1 - r^2| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -r^2 \leq 0 \Rightarrow r_5 \leq 2$$

elde edilirler. Kararlılık için,

$$r \leq \min_{1 \leq i \leq 5} \{r_i\}$$

olmalıdır [23]. Buradan ikinci mertebeden Runge-Kutta yönteminin kararlılığı için,

$$r \leq \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad \frac{kv}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

şartı sağlanmalıdır.

BÖLÜM 6

6.1. BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx} \quad (6.1)$$

olarak verilen Burgers denklemi,

$$U(x,0) = \sin(\pi x) \quad (6.1a)$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad (6.1b)$$

başlangıç ve sınır şartları ile düşünölsün. Burada, $[0,1]$ aralığı N parçaya bölönsün. Yani,

$$h = \frac{1}{N}$$

olsun. (6.1) denkleminde MOL yöntemi uygulanırsa

$$\frac{dU_i}{dt} + U_i \left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \right) = \nu \left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \right)$$

veya

$$\frac{dU_i}{dt} = -U_i \left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \right) + \nu \left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \right) \quad (6.2)$$

olur. Burada,

$$f(U_i) = -U_i \left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \right) + \nu \left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \right)$$

denilirse (6.2) denkleminde kısaca,

$$\frac{dU_i}{dt} = f(U_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (6.3)$$

olarak yazılabilir.

6.1.1. Euler Yöntemi

Yukarıdaki şekilde oluşturulan (6.3) denklem sistemine,

$$U^{n+1} = U^n + kf(U^n) \quad , \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Euler algoritmasının uygulanmasıyla aşağıdaki lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir [25].

$i = 1$ için,

$$\begin{aligned} U_1^{n+1} &= U_1^n + kf(U_1^n) \\ &= U_1^n + k \left(-U_1^n \left(\frac{U_2^n - U_0^n}{2h} \right) + v \left(\frac{U_2^n - 2U_1^n + U_0^n}{h^2} \right) \right) \end{aligned}$$

dir. (6.1b) sınır şartı $U_0^n = 0$ yerine yazılırsa,

$$U_1^{n+1} = U_1^n - \frac{k}{2h} U_1^n U_2^n + \frac{kv}{h^2} U_2^n - \frac{2kv}{h^2} U_1^n$$

elde edilir.

$i = 2$ için,

$$\begin{aligned} U_2^{n+1} &= U_2^n + kf(U_2^n) \\ &= U_2^n + k \left(-U_2^n \left(\frac{U_3^n - U_1^n}{2h} \right) + v \left(\frac{U_3^n - 2U_2^n + U_1^n}{h^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$U_2^{n+1} = U_2^n - \frac{k}{2h} U_2^n U_3^n + \frac{k}{2h} U_2^n U_1^n + \frac{kv}{h^2} U_3^n - \frac{2kv}{h^2} U_2^n + \frac{kv}{h^2} U_1^n$$

$i = 3$ için,

$$U_3^{n+1} = U_3^n + kf(U_3^n)$$

$$= U_3^n + k \left(-U_3^n \left(\frac{U_4^n - U_2^n}{2h} \right) + v \left(\frac{U_4^n - 2U_3^n + U_2^n}{h^2} \right) \right)$$

$$= U_3^n - \frac{k}{2h} U_3^n U_4^n + \frac{k}{2h} U_3^n U_2^n + \frac{kv}{h^2} U_4^n - \frac{2kv}{h^2} U_3^n + \frac{kv}{h^2} U_2^n$$

$\vdots$

$i = N - 2$ için,

$$U_{N-2}^{n+1} = U_{N-2}^n + kf(U_{N-2}^n)$$

$$= U_{N-2}^n + k \left(-U_{N-2}^n \left(\frac{U_{N-1}^n - U_{N-3}^n}{2h} \right) + v \left(\frac{U_{N-1}^n - 2U_{N-2}^n + U_{N-3}^n}{h^2} \right) \right)$$

$$= U_{N-2}^n - \frac{k}{2h} U_{N-2}^n U_{N-1}^n + \frac{k}{2h} U_{N-2}^n U_{N-3}^n + \frac{kv}{h^2} U_{N-1}^n - \frac{2kv}{h^2} U_{N-2}^n + \frac{kv}{h^2} U_{N-3}^n$$

$i = N - 1$ için,

$$U_{N-1}^{n+1} = U_{N-1}^n + kf(U_{N-1}^n)$$

$$= U_{N-1}^n + k \left(-U_{N-1}^n \left(\frac{U_N^n - U_{N-2}^n}{2h} \right) + v \left(\frac{U_N^n - 2U_{N-1}^n + U_{N-2}^n}{h^2} \right) \right)$$

olur. (6.1b) sınır şartının kullanılmasıyla,

$$U_{N-1}^{n+1} = U_{N-1}^n + \frac{k}{2h} U_{N-1}^n U_{N-2}^n - \frac{2kv}{h^2} U_{N-1}^n + \frac{kv}{h^2} U_{N-2}^n$$

bulunur. Yani yöntemin uygulanması ile $n=0,1,2,\dots$ için,

$$U_i^{n+1} = \begin{cases} U_i^n - \frac{k}{2h} U_i^n U_{i+1}^n + \frac{kv}{h^2} U_{i+1}^n - \frac{2kv}{h^2} U_i^n & , \quad i = 1 \\ U_i^n - \frac{k}{2h} U_i^n U_{i+1}^n + \frac{k}{2h} U_i^n U_{i-1}^n + \frac{kv}{h^2} U_{i+1}^n - \frac{2kv}{h^2} U_i^n + \frac{kv}{h^2} U_{i-1}^n & , \quad i = 2,3,\dots,N-2 \\ U_i^n + \frac{k}{2h} U_i^n U_{i-1}^n - \frac{2kv}{h^2} U_i^n + \frac{kv}{h^2} U_{i-1}^n & , \quad i = N-1 \end{cases}$$

denklem sistemi oluşturulur. Bu sistemde (6.1a) başlangıç şartının kullanılmasıyla her n için U_i^{n+1} çözümleri kolayca bulunur.

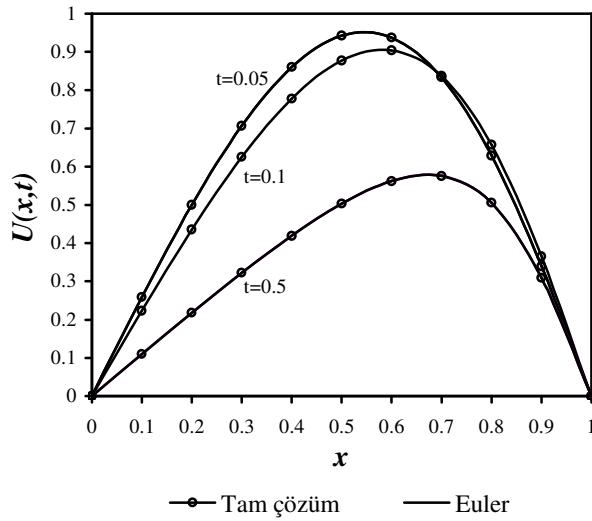
Bu algoritma ile farklı k ve h değerleri için elde edilen nümerik çözümler Tablo 6.1, Tablo 6.2 ve Şekil 6.1’de analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 6.1 $h=0.1$, $v=1$ ve $k=0.001$ için farklı zaman adımlarında Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

x	$t=0.1$		$t=0.2$		$t=0.3$	
	Euler	Anl. çöz.	Euler	Anl. çöz.	Euler	Anl. çöz.
0.1	0.10975	0.10954	0.04218	0.04193	0.01598	0.01582
0.2	0.21024	0.20979	0.08048	0.07999	0.03043	0.03014
0.3	0.29262	0.29190	0.11131	0.11062	0.04196	0.04155
0.4	0.34893	0.34792	0.13167	0.13082	0.04945	0.04896
0.5	0.37284	0.37158	0.13941	0.13847	0.05213	0.05161
0.6	0.36046	0.35905	0.13352	0.13258	0.04971	0.04921
0.7	0.31129	0.30990	0.11430	0.11347	0.04239	0.04196
0.8	0.22893	0.22782	0.08347	0.08284	0.03086	0.03054
0.9	0.12131	0.12069	0.04402	0.04369	0.01624	0.01607

Tablo 6.2 $v=1$ ve $k=0.00001$ için $t=0.01$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	Euler				Analitik çözüm
	$N=10$	$N=20$	$N=50$	$N=100$	
0.1	0.27352	0.27331	0.27325	0.27324	0.27324
0.2	0.52209	0.52169	0.52158	0.52156	0.52156
0.3	0.72255	0.72202	0.72187	0.72185	0.72185
0.4	0.85536	0.85478	0.85462	0.85459	0.85459
0.5	0.90646	0.90590	0.90574	0.90572	0.90571
0.6	0.86898	0.86849	0.86836	0.86834	0.86833
0.7	0.74459	0.74422	0.74412	0.74410	0.74410
0.8	0.54414	0.54390	0.54383	0.54382	0.54382
0.9	0.28716	0.28704	0.28700	0.28700	0.28700



Şekil 6.1 $h=0.01$, $v=0.1$ ve $k=0.00005$ için farklı zaman adımlarında Euler yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

6.1.2. İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

(6.3) denklem sisteminin ikinci mertebeden Runge-Kutta metodu ile çözümü $n=0,1,2,\dots$ için,

$$U^* = U^n + \frac{1}{2}kf(U^n) \quad (6.4)$$

olmak üzere,

$$U^{n+1} = U^n + kf(U^*) \quad (6.5)$$

formülü ile hesaplanır [25]. Buradan ilk olarak $i = 1,2,3,\dots,N-1$ için,

$$U_i^* = U_i^n + \frac{1}{2}kf(U_i^n)$$

$$U_i^* = U_i^n + \frac{1}{2}k \left(-U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{h} \right) + v \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \right)$$

den U_i^* değerleri bulunur. Bulunan bu değerlerin (6.5) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$n=0,1,2,\dots$ için,

$$U_i^{n+1} = U_i^n + k \left(-U_i^* \left(\frac{U_{i+1}^* - U_{i-1}^*}{2h} \right) + v \frac{U_{i+1}^* - 2U_i^* + U_{i-1}^*}{h^2} \right), \quad i = 1,2,3,\dots,N-1$$

algoritması elde edilir. Algoritmada (6.1a) başlangıç şartının kullanılmasıyla U_i^{n+1} çözümleri kolayca hesaplanır.

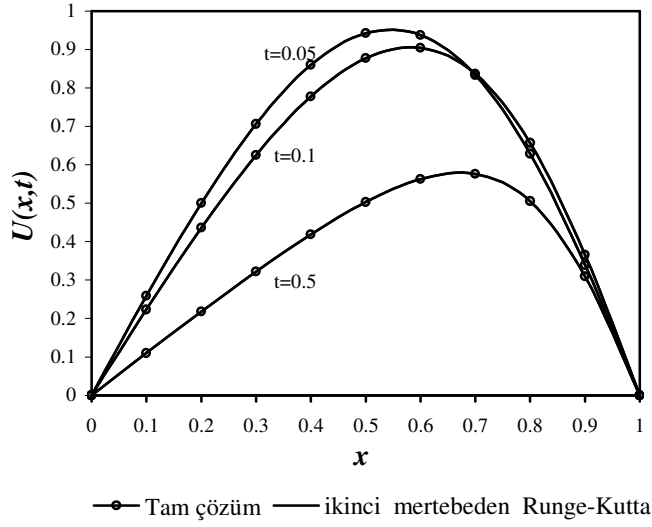
Yine farklı k ve h değerleri için bu algoritma ile elde edilen nümerik çözümler Tablo 6.3, Tablo 6.4 ve Şekil 6.2' de analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 6.3 $h=0.1$, $\nu=1$ ve $k=0.001$ için farklı zaman adımlarında ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

x	$t=0.1$		$t=0.2$		$t=0.3$	
	Runge-Kutta	Anl. çöz.	Runge-Kutta	Anl. çöz.	Runge-Kutta	Anl. çöz.
0.1	0.11030	0.10954	0.04258	0.04193	0.01621	0.01582
0.2	0.21128	0.20979	0.08125	0.07999	0.03087	0.03014
0.3	0.29406	0.29190	0.11238	0.11062	0.04257	0.04155
0.4	0.35065	0.34792	0.13295	0.13082	0.05017	0.04896
0.5	0.37467	0.37158	0.14077	0.13847	0.05290	0.05161
0.6	0.36222	0.35905	0.13483	0.13258	0.05044	0.04921
0.7	0.31279	0.30990	0.11544	0.11347	0.04301	0.04196
0.8	0.23003	0.22782	0.08430	0.08284	0.03131	0.03054
0.9	0.12189	0.12069	0.04447	0.04369	0.01648	0.01607

Tablo 6.4 $\nu=1$ ve $k=0.00001$ için $t=0.01$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	İkinci mertebeden Runge-Kutta				Analitik çözüm
	$N=10$	$N=20$	$N=50$	$N=100$	
0.1	0.27353	0.27331	0.27325	0.27324	0.27324
0.2	0.52210	0.52170	0.52158	0.52157	0.52156
0.3	0.72256	0.72203	0.72188	0.72186	0.72185
0.4	0.85537	0.85478	0.85462	0.85460	0.85459
0.5	0.90647	0.90590	0.90574	0.90572	0.90571
0.6	0.86898	0.86850	0.86836	0.86834	0.86833
0.7	0.74459	0.74422	0.74412	0.74410	0.74410
0.8	0.54414	0.54390	0.54383	0.54382	0.54382
0.9	0.28716	0.28704	0.28700	0.28700	0.28700



Şekil 6.2 $h=0.01$, $\nu=0.1$ ve $k=0.00005$ için farklı zaman adımlarında ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

6.1.3. Crank-Nicolson Yöntemi

Kullanım olarak pratik olan Crank-Nicolson metodu,

$$U^{n+1} = U^n + \frac{k}{2} f(U^n + U^{n+1})$$

formülü ile tanımlıdır [25]. Bu formül (6.3) denklemi için,

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{k}{2} \left[-U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) + \nu \left(\frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) \right]$$

şeklinde yazılır. Crank-Nicolson kapalı bir metot olduğundan bu ifade sonuçta,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{k\nu}{h^2} \right) U_i^{n+1} + \left(\frac{k}{4h} U_i^n - \frac{k\nu}{2h^2} \right) U_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{k}{4h} U_i^n + \frac{k\nu}{2h^2} \right) U_{i-1}^{n+1} \\ &= U_i^n - \frac{k}{4h} U_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{k\nu}{2h^2} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) \end{aligned}$$

şeklinde tridiagonal denklem sistemine dönüşür. Bulunan bu eşitlik (6.1b) sınır şartları da göz önüne alınarak matris formunda,

$$AU^{n+1} = B \quad (6.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{kv}{h^2} & \frac{k}{4h}U_1^n - \frac{kv}{2h^2} & & & \\ -\frac{k}{4h}U_2^n - \frac{kv}{2h^2} & 1 + \frac{kv}{h^2} & \frac{k}{4h}U_2^n - \frac{kv}{2h^2} & & \\ & \ddots & & & \\ & -\frac{k}{4h}U_{N-2}^n - \frac{kv}{2h^2} & 1 + \frac{kv}{h^2} & \frac{k}{4h}U_{N-2}^n - \frac{kv}{2h^2} & \\ & & -\frac{k}{4h}U_{N-1}^n - \frac{kv}{2h^2} & 1 + \frac{kv}{h^2} & \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}$$

$$U^{n+1} = \begin{bmatrix} U_1^{n+1} & U_2^{n+1} & \dots & U_{N-2}^{n+1} & U_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix}_{1 \times (N-1)}^T$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} U_1^n - \frac{k}{4h}U_1^nU_2^n + \frac{kv}{2h^2}(U_2^n - 2U_1^n) \\ U_2^n - \frac{k}{4h}U_2^n(U_3^n - U_1^n) + \frac{kv}{2h^2}(U_3^n - 2U_2^n + U_1^n) \\ U_3^n - \frac{k}{4h}U_3^n(U_4^n - U_2^n) + \frac{kv}{2h^2}(U_4^n - 2U_3^n + U_2^n) \\ \vdots \\ U_{N-2}^n - \frac{k}{4h}U_{N-2}^n(U_{N-1}^n - U_{N-3}^n) + \frac{kv}{2h^2}(U_{N-1}^n - 2U_{N-2}^n + U_{N-3}^n) \\ U_{N-1}^n + \frac{k}{4h}U_{N-1}^nU_{N-2}^n + \frac{kv}{2h^2}(-2U_{N-1}^n + U_{N-2}^n) \end{bmatrix}_{(N-1) \times 1}$$

şeklinde dir. Lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan metodlardan birinin (6.6)'ya uygulanmasıyla, (6.1) ile verilen Burgers denkleminin çözümleri bulunur.

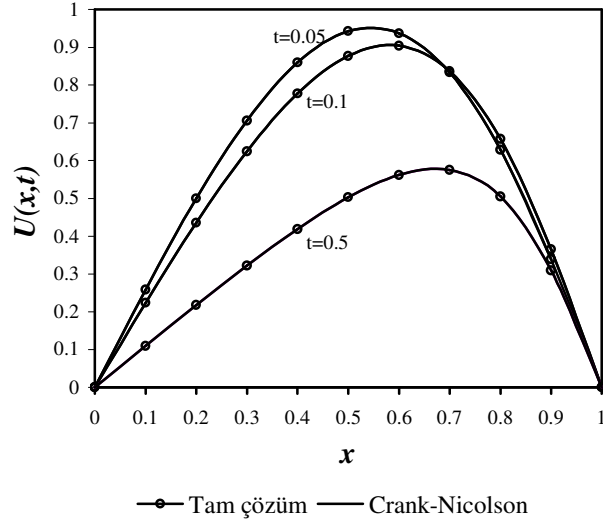
(6.6) denklem sistemi için Crout yöntemi kullanılarak, farklı k ve h değerleri için elde edilen nümerik çözümler Tablo 6.5, Tablo 6.6 ve Şekil 6.3’de analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 6.5 $h=0.1$, $\nu=1$ ve $k=0.001$ için farklı zaman adımlarında Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

x	$t=0.1$		$t=0.2$		$t=0.3$	
	C-N	Anl. çöz.	C-N	Anl. çöz.	C-N	Anl. çöz.
0.1	0.11026	0.10954	0.04257	0.04193	0.01621	0.01582
0.2	0.21123	0.20979	0.08123	0.07999	0.03087	0.03014
0.3	0.29400	0.29190	0.11236	0.11062	0.04257	0.04155
0.4	0.35060	0.34792	0.13293	0.13082	0.05016	0.04896
0.5	0.37464	0.37158	0.14076	0.13847	0.05290	0.05161
0.6	0.36222	0.35905	0.13483	0.13258	0.05044	0.04921
0.7	0.31282	0.30990	0.11543	0.11347	0.04301	0.04196
0.8	0.23007	0.22782	0.08430	0.08284	0.03131	0.03054
0.9	0.12192	0.12069	0.04447	0.04369	0.01648	0.01607

Tablo 6.6 $\nu=1$ ve $k=0.00001$ için $t=0.01$ zaman adımında farklı h değerleri alınarak Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	Crank-Nicolson				Analitik çözüm
	$N=10$	$N=20$	$N=50$	$N=100$	
0.1	0.27353	0.27331	0.27325	0.27324	0.27324
0.2	0.52210	0.52170	0.52158	0.52157	0.52156
0.3	0.72256	0.72203	0.72188	0.72186	0.72185
0.4	0.85537	0.85478	0.85462	0.85460	0.85459
0.5	0.90647	0.90590	0.90574	0.90572	0.90571
0.6	0.86898	0.86850	0.86836	0.86834	0.86833
0.7	0.74459	0.74422	0.74412	0.74410	0.74410
0.8	0.54415	0.54390	0.54383	0.54382	0.54382
0.9	0.28716	0.28704	0.28700	0.28700	0.28700



Şekil 6.3 $h=0.01$, $\nu=0.1$ ve $k=0.00005$ için farklı zaman adımlarında Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması

BÖLÜM 7

7.1. SONUÇ-KARŞILAŞTIRMA

(4.1) Burgers denklemi (4.1a), (4.1b) başlangıç ve sınır şartları ile göz önüne alınarak iki durum için yaklaşık çözümler elde edildi.

7.1.1. Lineerleştirilmiş Burgers Denkleminin Çözümleri

(4.2) Hopf-Cole dönüşümü ile (4.3), (4.3a) ve (4.3b) başlangıç-sınır değer problemine indirgenen (4.1) Burgers denkleminin çözümü için öncelikle MOL yöntemi kullanılarak problem, birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi haline getirildi ve Euler ile ikinci mertebeden Runge-Kutta nümerik yöntemleri uygulanarak çözüldü.

Viskozite katsayısının farklı iki değeri için k ve h değiştirilerek elde edilen çözümler Bölüm 5’ de tablo ve şekillerle verildi. Çözümlerin analitik çözümle uyumlu olduğu görüldü.

Her iki yöntemde de $v \geq 0.002$ için literatüre uygun nümerik çözümler elde edildiği görüldü (Şekil 7.4-7.5).

Kullanılan yöntemlerin etkinliğini gözlemleyebilmek için yine v , k ve h ’ nın çeşitli değerleri için elde edilen çözümler, birbirleri ile ve analitik çözümlerle karşılaştırıldı (Tablo 7.1-7.3, Şekil 7.1-7.5). Her iki çözümün de özellikle h ’ nın küçük değerlerinde çok uyumlu sonuçlar verdiği görüldü.

Tablo 7.1 $h=0.01$, $\nu=0.5$ ve $k=0.00002$ için $t=0.2$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması

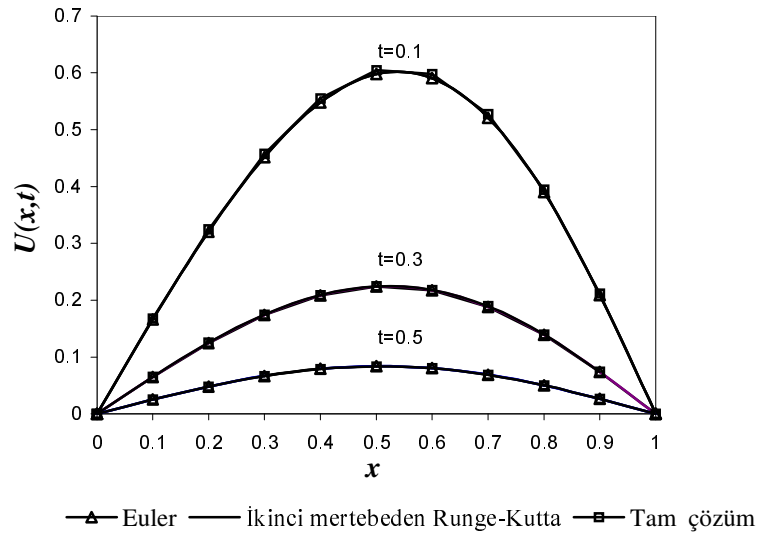
x	Nümerik çözümler		Analitik çözüm
	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	
0.1	0.10394	0.10397	0.10390
0.2	0.20027	0.20032	0.20021
0.3	0.28143	0.28153	0.28131
0.4	0.33980	0.33993	0.33966
0.5	0.36838	0.36855	0.36824
0.6	0.36163	0.36177	0.36150
0.7	0.31685	0.31696	0.31676
0.8	0.23586	0.23592	0.23579
0.9	0.12600	0.12603	0.12595

Tablo 7.2 $h=0.01$, $\nu=0.1$ ve $k=0.00005$ için $t=0.3$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması

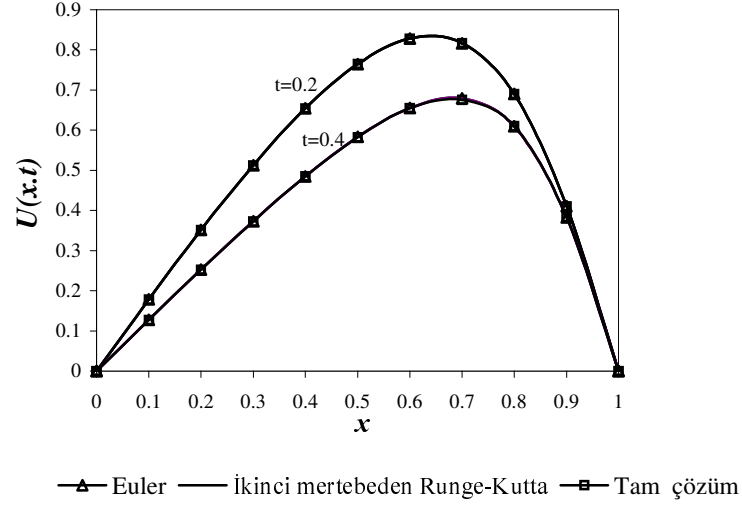
x	Nümerik çözümler		Analitik çözüm
	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	
0.1	0.14670	0.14670	0.14672
0.2	0.20903	0.29005	0.29004
0.3	0.42599	0.42602	0.42601
0.4	0.54925	0.54928	0.54930
0.5	0.65171	0.65172	0.65173
0.6	0.71932	0.71932	0.71932
0.7	0.72672	0.72671	0.72670
0.8	0.63100	0.63097	0.63100
0.9	0.38390	0.38388	0.38387

Tablo 7.3 $h=0.02$, $\nu=0.01$ ve $k=0.0001$ için $t=0.8$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması

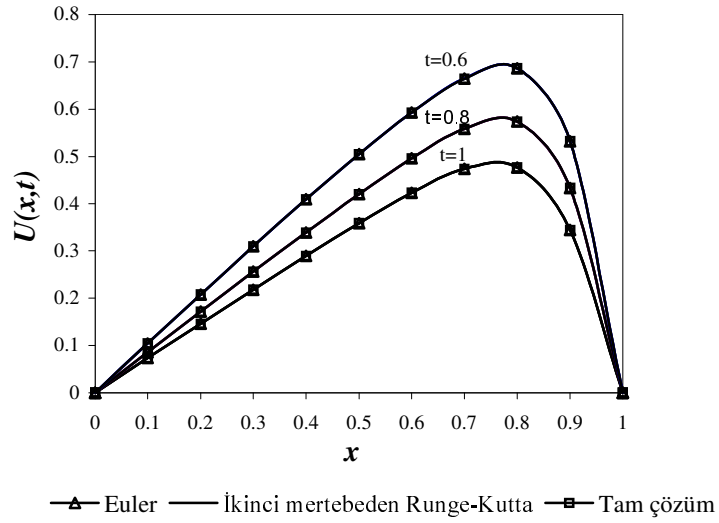
x	Nümerik çözümler		Analitik çözüm
	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	
0.1	0.08860	0.08860	0.08879
0.2	0.17718	0.17719	0.17736
0.3	0.26571	0.26571	0.26546
0.4	0.35414	0.35409	0.35282
0.5	0.44233	0.44223	0.43914
0.6	0.53012	0.52992	0.52401
0.7	0.61722	0.61690	0.60691
0.8	0.70320	0.70272	0.68708
0.9	0.78672	0.78606	0.76295



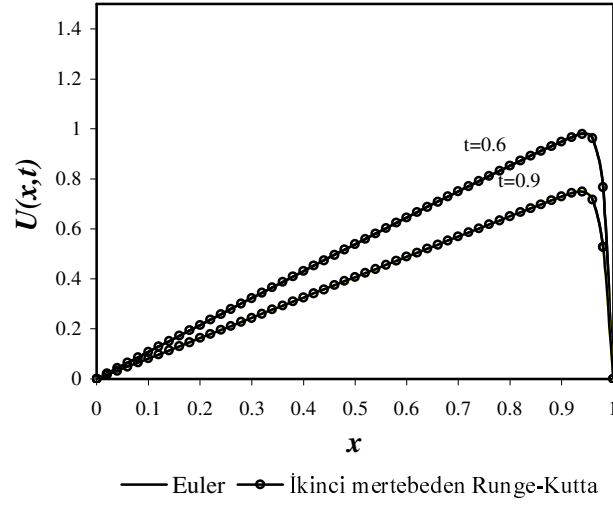
Şekil 7.1 $h=0.1$, $\nu=0.5$ ve $k=0.0001$ için $t=0.1, 0.3, 0.5$ zaman adımlarındaki nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması



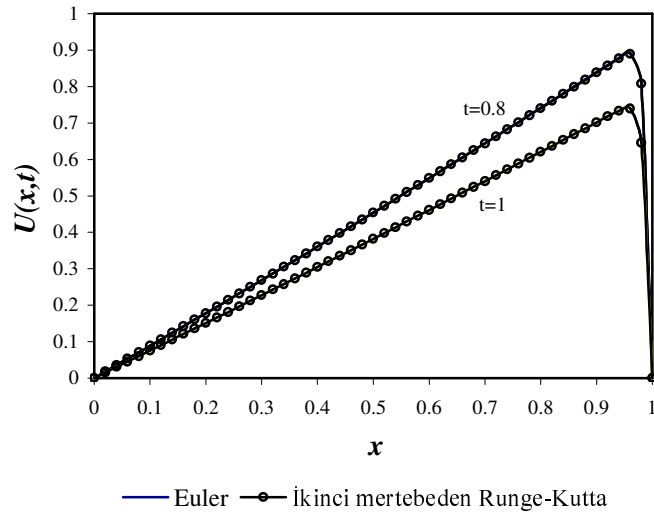
Şekil 7.2 $h=0.01$, $\nu=0.09$ ve $k=0.00001$ için $t=0.2, 0.4$ zaman adımlarındaki nümerik çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 7.3 $h=0.02$, $\nu=0.05$ ve $k=0.0001$ için $t=0.6, 0.8, 1$ zaman adımlarındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması



Şekil 7.4 $h=0.02$, $v=0.009$ ve $k=0.0001$ için $t=0.6, 0.9$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 7.5 $h=0.02$, $v=0.005$ ve $k=0.001$ için $t=0.8, 1$ zaman adımlarında elde edilen nümerik çözümlerin karşılaştırılması

7.1.2. Burgers Denklemine Çözümleri

(4.1), (4.1a) ve (4.1b) ile verilen başlangıç-sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için denklem MOL yöntemi ile ayrıştırıldı ve oluşturulan sisteme Euler, ikinci mertebeden Runge-Kutta ve Crank-Nicolson yöntemleri uygulandı.

Bölüm 6’da $\nu=1$ için h ve k ’nin farklı seçimleri ile elde edilen çözümler analitik çözümle karşılaştırıldı (Tablo 6.1-6.6). Sonuçların, viskositenin bu değerinde, alınan desimal için h ’nin küçülmesiyle analitik çözümle tam olarak çakıştığı görüldü.

Farklı ν , k , h ve t değerleri için her üç yöntemle elde edilen çözümler birbirleri ve analitik çözümle karşılaştırıldı (Tablo 7.4-7.8). Çözümlerin uyumlu olduğu görüldü.

Her üç çözümde de çok küçük viskosite değerleri için t ’nin küçük değerlerinde denklemin parabolik yapısının bozulmadığı gözlemlendi (Tablo 7.9, Şekil 7.9).

Tablo 7.4 $h=0.01$, $\nu=0.5$ ve $k=0.00001$ için $t=0.1$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik çözümler			Analitik çözüm
	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	Crank-Nicolson	
0.1	0.16807	0.16808	0.16806	0.16806
0.2	0.32450	0.32450	0.32448	0.32447
0.3	0.45743	0.45743	0.45739	0.45738
0.4	0.55481	0.55481	0.55476	0.55474
0.5	0.60491	0.60492	0.60487	0.60484
0.6	0.59770	0.59770	0.59766	0.59763
0.7	0.52720	0.52720	0.52717	0.52714
0.8	0.39473	0.39473	0.39471	0.39469
0.9	0.21171	0.21171	0.21170	0.21169

Tablo 7.5 $h=0.01$, $\nu=0.1$ ve $k=0.00001$ için $t=0.3$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik çözümler			Analitik çözüm
	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	Crank-Nicolson	
0.1	0.14676	0.14676	0.14672	0.14672
0.2	0.29012	0.29012	0.29005	0.29004
0.3	0.42612	0.42612	0.42602	0.42601
0.4	0.54944	0.54945	0.54932	0.54930
0.5	0.65189	0.65189	0.65177	0.65173
0.6	0.71944	0.71944	0.71938	0.71932
0.7	0.72674	0.72674	0.72679	0.72670
0.8	0.63098	0.63097	0.63112	0.63100
0.9	0.38385	0.38385	0.38397	0.38387

Tablo 7.6 $h=0.01$, $\nu=0.05$ ve $k=0.00002$ için $t=0.6$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik çözümler			Analitik çözüm
	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	Crank-Nicolson	
0.1	0.10432	0.10432	0.10430	0.10430
0.2	0.20792	0.20792	0.20788	0.20788
0.3	0.30999	0.31000	0.30994	0.30993
0.4	0.40949	0.40949	0.40942	0.40941
0.5	0.50481	0.50482	0.50472	0.50469
0.6	0.59276	0.59277	0.59266	0.59260
0.7	0.66450	0.66450	0.66441	0.66427
0.8	0.68676	0.68676	0.68674	0.68634
0.9	0.53276	0.53276	0.53280	0.53203

Tablo 7.7 $h=0.01$, $\nu=0.01$ ve $k=0.00005$ için $t=1$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

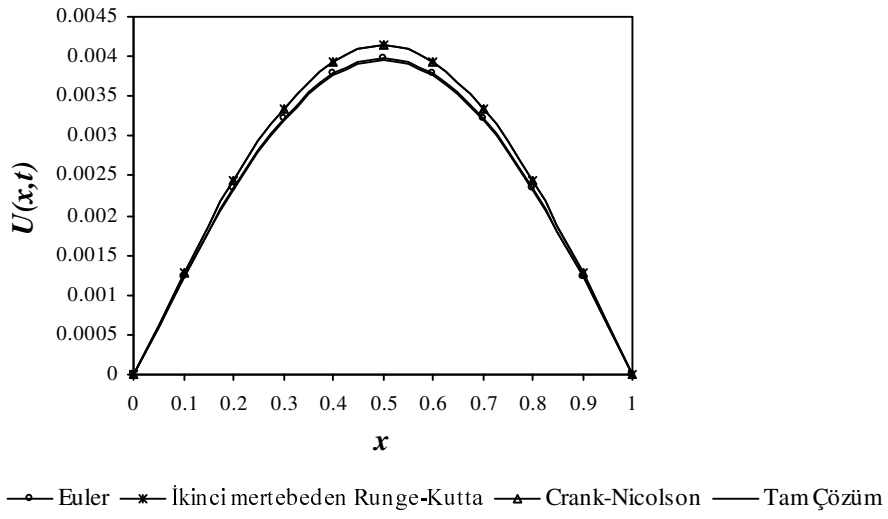
x	Nümerik çözümler			Analitik çözüm
	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	Crank-Nicolson	
0.1	0.07538	0.07538	0.07538	0.07538
0.2	0.15064	0.15065	0.15064	0.15065
0.3	0.22566	0.22567	0.22566	0.22567
0.4	0.30030	0.30032	0.30031	0.30031
0.5	0.37442	0.37443	0.37442	0.37442
0.6	0.44781	0.44783	0.44782	0.44782
0.7	0.52027	0.52029	0.52027	0.52027
0.8	0.59149	0.59151	0.59149	0.59148
0.9	0.66035	0.66036	0.66034	0.66002

Tablo 7.8 $h=0.01$, $\nu=0.005$ ve $k=0.00001$ için $t=0.8$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

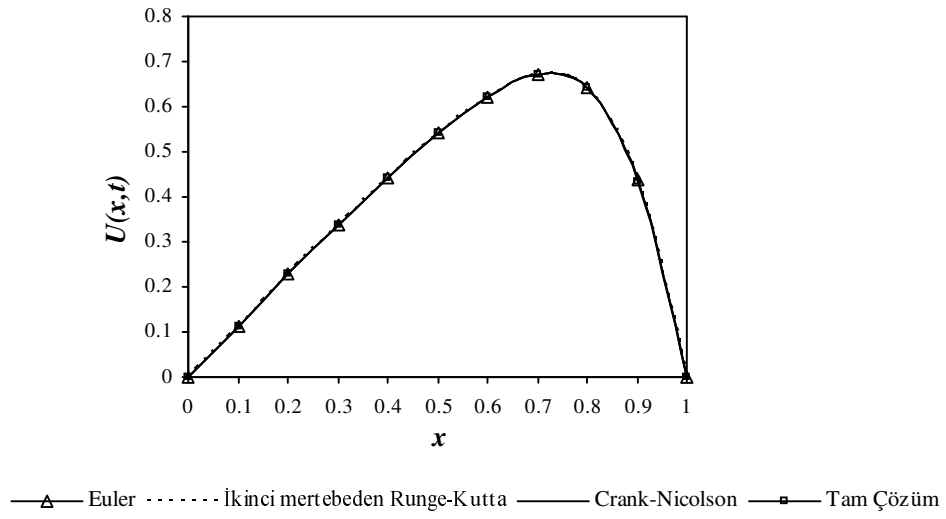
x	Nümerik çözümler			Analitik çözüm
	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	Crank-Nicolson	
0.1	0.08910	0.08910	0.08910	0.08909
0.2	0.17800	0.17800	0.17798	0.17797
0.3	0.26645	0.26645	0.26641	0.26641
0.4	0.35420	0.35420	0.35415	0.35415
0.5	0.44095	0.44095	0.44090	0.44090
0.6	0.52640	0.52640	0.52630	0.52629
0.7	0.60996	0.60996	0.60987	0.60985
0.8	0.69109	0.69110	0.69096	0.69102
0.9	0.76879	0.76880	0.76859	0.11368

Tablo 7.9 $h=0.01$, $k=0.00005$ ve $t=0.3$ için farklı viskozite değerleri ile elde edilen nümerik çözümler

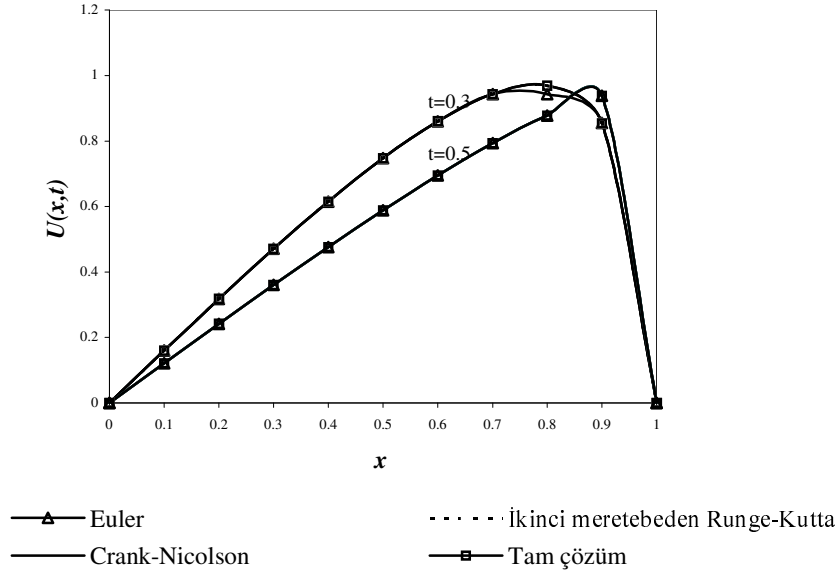
x	ν	Euler	İkinci mertebeden Runge-Kutta	Crank-Nicolson
0.25	0.001	0.39813	0.39814	0.39814
	0.0001	0.39843	0.39845	0.39844
	0.00001	0.39846	0.39848	0.39847
	0.000001	0.39847	0.39848	0.39847
	0.0000001	0.39847	0.39848	0.39847
	0.00000001	0.39847	0.39848	0.39847
0.50	0.001	0.75562	0.75563	0.75562
	0.0001	0.75639	0.75640	0.75639
	0.00001	0.75647	0.75648	0.75647
	0.000001	0.75648	0.75649	0.75647
	0.0000001	0.75648	0.75649	0.75648
	0.00000001	0.75648	0.75649	0.75648
0.75	0.001	0.98716	0.98710	0.98710
	0.0001	0.98920	0.98915	0.98915
	0.00001	0.98940	0.98935	0.98935
	0.000001	0.98942	0.98937	0.98937
	0.0000001	0.98943	0.98937	0.98937
	0.00000001	0.98943	0.98937	0.98937



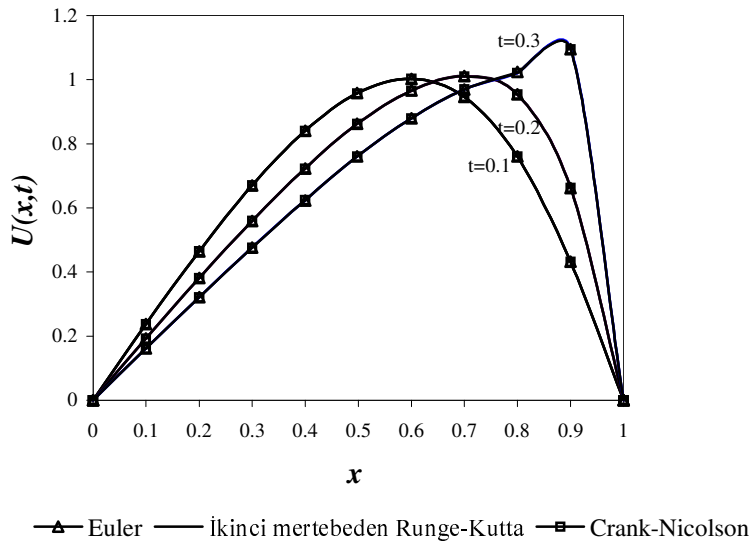
Şekil 7.6 $h=0.1$, $v=0.7$ ve $k=0.002$ için $t=0.8$ zaman adımındaki nümerik çözümler ile analitik çözümün karşılaştırılması



Şekil 7.7 $h=0.02$, $v=0.07$ ve $k=0.0005$ için $t=0.5$ zaman adımındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması



Şekil 7.8 $h=0.01$, $v=0.01$ ve $k=0.00005$ için $t=0.3, 0.5$ zaman adımlarındaki nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması



Şekil 7.9 $h=0.01$, $v=10^{-10}$ ve $k=0.00001$ için $t=0.1, 0.2, 0.3$ zaman adımlarındaki nümerik çözümler

Ayrıca lineerleştirilmiş Burgers ve Burgers denklemleri için elde edilen nümerik çözümler aynı tabloda analitik çözümle karşılaştırıldı.

Tablo 7.10 $h=0.01$, $\nu=0.05$ ve $k=0.00001$ için $t=0.1$ zaman adımında elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

x	Euler		İkinci mertebeden Runge-Kutta		Analitik çözüm
	Lineer Burgers	Burgers	Lineer Burgers	Burgers	
0.1	0.23028	0.23042	0.23028	0.23042	0.23041
0.2	0.44977	0.44999	0.44978	0.44999	0.44996
0.3	0.64677	0.64698	0.64677	0.64698	0.64692
0.4	0.80792	0.80782	0.80792	0.80782	0.80776
0.5	0.91656	0.91601	0.91656	0.91601	0.91602
0.6	0.95249	0.95132	0.95249	0.95131	0.95133
0.7	0.89092	0.88946	0.89092	0.88946	0.88949
0.8	0.70843	0.70708	0.70843	0.70708	0.70714
0.9	0.39862	0.39788	0.39862	0.39788	0.39788

Sonuç olarak, lineer ve non-lineer problemler için uygulanan bu yöntemin oldukça başarılı olduğu ve Burgers tipi diğer denklemlere de kolayca uygulanabileceği açıktır.

KAYNAKLAR

- [1] J.D. Cole, *On a quasi linear parabolic equation occuring in aerodynamics*, Quart. Apply. Math., 9 (1951) 225-236.
- [2] E. Varoğlu, W. D. Finn, *Space-time finite element incorporating characteristics for the Burgers' equation*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 16 (1980) 171-184.
- [3] J. Caldwell, P. Wanless, A. E. Cook, *A finite element approach to Burgers' equation*, Appl. Math. Model., 5 (1981) 189-193.
- [4] H. Nguyen, J. Reynen, *A space-time finite element approach to Burgers' equation*, in: C. Taylor et al. (Eds.), *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, vol. 2, Pineridge Pres, 1982, pp. 718-728.
- [5] P. Jamet, R. Bonnerot, *Numerical solution of compressible flow by finite element method which follows the free boundary and the interfaces*, J. Comput. Phys., 18 (1975) 21-45.
- [6] T. Öziş, E.N. Aksan and A. Özdeş, *A finite element approach for solution of Burgers' equation*, Appl. Math. Comput., 139 (2003) 417-428.
- [7] A. Doğan, *A Galerkin finite element approach of Burgers' equation*, Appl. Math. Comput., 157 (2004) 331-346.
- [8] K. Kakuda, N. Tosaka, *The generalized boundary element approach to Burgers' equation*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., 29 (1990) 245-261.
- [9] D.J. Evans, A.R. Abdullah, *The group explicit method for the solution of Burgers' equation*, Computing, 32 (1984) 239-253.
- [10] S. Kutluay, A.R. Bahadır, A. Özdeş, *Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference method*, J. Comput. Appl. Math., 103 (1999) 251-261.
- [11] A. R. Bahadır, M. Sağlam, *A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers' equation*, Appl. Math. Comput., 160 (2005) 663-673.
- [12] E.B.Lin, X. Zhou, *Connection coefficients on an interval and wavelet solutions of Burgers' equation*, J. Comput. Appl. Math., 135 (2001) 63-78.
- [13] S. Abbasbandy and M.T. Darvishi, *A numerical solution of Burgers' equation by modified Adomian method*, Appl. Math. Comput., 163 (2005) 1265-1272.
- [14] T. Öziş, A. Özdeş, *A direct variational methods applied to Burgers' equation*, J. Comput. Appl. Math., 71 (1996) 163-175.
- [15] E.N. Aksan, A. Özdeş, *A numerical solution of Burgers' equation*, Appl. Math. Comput., 156 (2004) 395-402.

- [16] E.N. Aksan, *A numerical solution of Burgers' equation by finite element constructed on the method of discretization in time*, Appl. Math. Comput., 2005, In Press.
- [17] S. Kutluay, A. Esen, I. Dağ, *Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method*, J. Comput. Appl. Math., 167 (2004) 21-33.
- [18] T. Öziş, A. Esen, S. Kutluay, *Numerical solution of Burgers' equation by quadratic B-spline finite elements*, Appl. Math. Comput., 165 (2005) 237-249.
- [19] İ. Dağ, D. Irk, B. Saka, *A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines*, Appl. Math. Comput., 163 (2005) 199-211.
- [20] T. Öziş, Y. Aslan, *The semi-approximate approach for solving Burgers' equation with high Reynolds number*, Appl. Math. Comput., 163 (2005) 131-145.
- [21] M.B. Abd-el-Malek, S.M.A. El-Mansi, *Group theoretic methods applied to Burgers' equation*, J. Comput. Appl. Math., 115 (2000) 1-12.
- [22] r.l. Burden and J.D. Faires, *Numerical Analysis*, Prindle, Weber&Schmidt, Boston, (1980).
- [23] G.D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: Finite Difference Methods*, 3rd., Clarendon Press, Oxford (1985).
- [24] S. Kutluay, *Predictor-Corrector Yöntemi ve Yakınsaklık Analizi*, Yüksek Lisans Tezi, (1987).
- [25] Randall J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Differential Equation*, University of Washington, (1998).
- [26] E. Tentis, D. Margaris and D. Papanikas, *Transient gas flow simulation using an Adaptive Method of Lines*, C. R. Mecanique, 331 (2003) 481-487
- [27] M. Dehghan, *Numerical solution of a parabolic equation subject to specification of energy*, Appl. Math. Comput., 149 (2004) 31-45.
- [28] T. Tahran, N. Selçuk, *Numerical Simulation of a Confined Methane/Air Laminar Diffusion Flame by the Method of Lines*, Turkish J. Eng. Env. Sci., 27 (2003) 275-290.
- [29] S. Karamehmetoğlu, *The method of lines solution of discrete ordinates method for radiative heat transfer in cylindrical enclosures*, METU, Ağustos 2002.

ÖZGEÇMİŞ

01.09.1982 tarihinde Malatya’ da doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini burada tamamladı. 1999 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2003 yılında bu bölümden birincilikle mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Tezli Yüksek Lisans Matematik Anabilim Dalına kayıt oldu.