

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGERS DENKLEMİNİN GALERKİN YÖNTEMİYLE SAYISAL
ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Halil BEYAZIT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Haziran 2019

Tezin Başlığı : BURGERS DENKLEMİNİN GALERKİN
YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan : Halil BEYAZIT

Sınav Tarihi : 24.06.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiřtir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Dr.Öğr.Üyesi Sibel ÖZER

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Mustafa İNÇ

Fırat Üniversitesi

Doç.Dr. Yusuf UÇAR

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Burgers Denkleminin Galerkin Yöntemiyle Sayısal Çözümü Üzerine” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Halil BEYAZIT



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BURGERS DENKLEMİNİN GALERKİN YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Halil BEYAZIT

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

82+xi sayfa

2019

Danışman : Dr.Öğr.Üyesi Sibel ÖZER

Bu yüksek lisans tezi beş bölüm olarak hazırlandı. Birinci bölüm tezde kullanılacak temel kavramları içermektedir.

İkinci bölümde, Ağırlıklı kalanlar yöntemi tanımı verilerek yöntemin başlıcalarından kısaca bahsedildi.

Üçüncü bölümde, ısı denklemi tanıtıldıktan sonra denklemin literatür araştırması sunuldu. Kübik B-spline Galerkin yöntemi ısı denklemine uygulanarak hesaplamalarda kullanılan matrisler elde edildi. Farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen ısı denklemi için sayısal çözümler yapıp diğer çalışmalar ile kıyaslandı. Daha sonra yöntem ile elde edilen şemanın von Neumann kararlılık analizi yapıldı.

Dördüncü bölümde, Burgers denklemine Hopf-Cole dönüşümü uygulanarak lineer ısı denklemine dönüştürüldükten sonra kübik B-spline Galerkin yöntemi uygulanarak sayısal çözümler elde edildi. Elde edilen sayısal çözümler tablolar halinde verilerek literatürde mevcut olan sayısal çözümler ile karşılaştırıldı.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen sayısal sonuçların değerlendirilmesi yapıldı.

ANAHTAR KELİMELEER: Isı Denklemi, Burgers Denklemi, Galerkin Yöntemi, Kübik B-Spline Fonksiyonlar, Hopf-Cole Dönüşümü

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF BURGERS EQUATION WITH GALERKIN METHOD

Halil BEYAZIT

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

82+xi pages

2019

Supervisor : Dr.Öğr.Üyesi Sibel ÖZER

This study, which is prepared as a master thesis, consists of five chapters. In the first chapter, the basic concepts which will be used in the following chapters are given.

In the second chapter, the information about residual weighted method are given.

In the third chapter, the global matrices which are used in the computation obtained for study are also given. After the heat equation is introduced, literature review of the equation is presented. Cubic B-spline Galerkin method applied to the heat equation and the matrices are also given which are used in the computation obtained for study. In addition, numerical solutions for the heat equation given with different initial and boundary conditions are evaluated and these solutions are compared with other studies. A von Neumann stability analysis of the method is also investigated.

In the fourth chapter, Hopf-Cole transformation is applied to the Burgers equation, after the equation is transformed into linear heat equation, cubic B-spline Galerkin method is applied to equation and numerical solutions is gained from equation. The obtained numerical solutions are given in the tables and these computed results are compared with other numerical solution in the literature.

In the fifth chapter, the results obtained in the fourth chapter have been briefly evaluated.

KEYWORDS: Heat Equation, Burgers Equation, Galerkin Method, Cubic B-Spline Functions, Hopf-Cole Transformation

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve tezin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sibel ÖZER'e, tezin hazırlanması sırasında karşılaştığım güçlüklerin üstesinden gelmem için bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR ve Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, bölüm başkanı Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e ve diğer bölüm hocalarıma, bilhassa gösterdiği fedakarlıklar ve maddi manevi desteklerinden dolayı eşime teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
TABLolar DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanımlar ve Kavramlar	2
1.2. Spline Fonksiyonlar	3
1.3. B-Spline Fonksiyonlar	4
1.4. Kübik B-Spline Fonksiyonlar	6
2. AĞIRLIKLİ KALANLAR YÖNTEMİ	10
2.1. Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi	10
2.1.1. Galerkin Yöntemi	11
2.1.2. Petrov-Galerkin Yöntemi	12
2.1.3. Subdomain Yöntemi	12
2.1.4. Kollakasyon Yöntemi.....	13
2.1.5. En Küçük Kareler Yöntemi.....	13
3. 1-BOYUTLU LİNEER ISI DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	14
3.1. Kübik B-Spline Galerkin Yönteminin Isı Denklemine Uygulanması	14
3.2. Dirichlet Sınır Şartlı Isı Denklemi.....	20
3.2.1. Başlangıç Durumu	22
3.3. Neumann Sınır Şartlı Isı Denklemi	24
3.3.1. Başlangıç Durumu	25
3.4. Robbin Sınır Şartlı Isı Denklemi	26
3.4.1. Başlangıç Durumu	28
3.5. Kararlılık Analizi.....	29
3.6. Model Problemler	31
3.6.1. Problem 1	32
3.6.2. Problem 2	35
3.6.3. Problem 3	39

4.	1-BOYUTLU BURGERS' DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	43
4.1.	Mevcut Çalışmalar	43
4.2.	Hopf-Cole Dönüşümü	45
4.3.	Model Problemler	49
4.3.1.	Problem 1	49
4.3.2.	Problem 2	50
4.3.3.	Problem 3	51
4.4.	Sayısal Sonuçlar	52
4.4.1.	Problem 4.3.1'in KBSGY ile Çözümü	52
4.4.2.	Problem 4.3.2'nin KBSGY ile Çözümü	59
4.4.3.	Problem 4.3.3'nin KBSGY ile Çözümü	66
	ÖZGEÇMİŞ	82



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	$B_m^0, B_m^1, B_m^2, B_m^3$ B-spline fonksiyonları	7
Şekil 1.2	$[a, b]$ aralığında kübik B-spline fonksiyonlar	7
Şekil 1.3	$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında kübik B-spline fonksiyonlar	8
Şekil 3.1	$[a, b]$ aralığındaki elemanların teşkili	16
Şekil 3.2	A^e lokal matrislerin birleştirilmesiyle A global matrisinin elde edilmesi.....	19
Şekil 3.3	$v = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.1 'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)	33
Şekil 3.4	$v = 0.01, h = 0.1, \Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.1 'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)	34
Şekil 3.5	$v = 0.1, h = 0.0125, \Delta t = 0.00001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.2 'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)	38
Şekil 3.6	$v = 0.01, h = 0.0125, \Delta t = 0.00001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.2 'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)	38
Şekil 3.7	$v = 1, h = 0.0125, \Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.3 'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)	40
Şekil 3.8	$v = 0.5, h = 0.0125, \Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.3 'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)	41
Şekil 3.9	$v = 0.005, h = 0.0125, \Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.3 'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)	41

Şekil 4.1	$v = 1, h = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözümleri(sol) ve analitik çözümleri(sağ)	56
Şekil 4.2	$v = 1, \Delta t = 0.0001, h = 0.0125$ için $t = 0.25$ zamanında Problem 4.3.1'in sayısal çözümünün mutlak hatası	56
Şekil 4.3	$v = 0.1, \Delta t = 0.0001, h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)	57
Şekil 4.4	$v = 0.1, \Delta t = 0.0001, h = 0.0125$ için $t = 1.0$ zamanında Problem 4.3.1'in sayısal çözümünün mutlak hatası	57
Şekil 4.5	$v = 0.01, \Delta t = 0.0001, h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü	58
Şekil 4.6	$v = 0.005, \Delta t = 0.0001, h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü	58
Şekil 4.7	$v = 0.1, h = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)	63
Şekil 4.8	$v = 0.1, \Delta t = 0.0001, h = 0.0125$ için $t = 1.0$ zamanında Problem 4.3.2'nin sayısal çözümünün mutlak hatası	64
Şekil 4.9	$v = 0.01, h = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)	64
Şekil 4.10	$v = 0.01, \Delta t = 0.0001, h = 0.0125$ için $t = 1.0$ zamanında Problem 4.3.2'nin sayısal çözümünün mutlak hatası	65
Şekil 4.11	$v = 0.005, h = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü	65
Şekil 4.12	$v = 0.0005, h = 0.0005, \Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü	66
Şekil 4.13	$v = 0.5, h = 0.05, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)	69
Şekil 4.14	$v = 0.5, h = 0.05, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için $t = 4.0$ zamanında Problem 4.3.3'ün sayısal çözümünün mutlak hatası .	69

Şekil 4.15	$v = 0.05, h = 0.05, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)	71
Şekil 4.16	$v = 0.05, h = 0.05, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için $t = 3.1$ zamanında Problem 4.3.3'ün sayısal çözümünün mutlak hatası .	72
Şekil 4.17	$v = 0.005, h = 0.005, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)	72
Şekil 4.18	$v = 0.005, h = 0.005, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için $t = 3.1$ zamanında Problem 4.3.3'ün sayısal çözümünün mutlak hatası .	73
Şekil 4.19	$v = 0.0005, h = 0.0005, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 1]$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)	73
Şekil 4.20	$v = 0.0005, h = 0.0005, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için $t = 3.1$ zamanında Problem 4.3.3'ün sayısal çözümünün mutlak hatası .	74

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 1.1	$\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu ve $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri	9
Tablo 3.1	$v = 1$, $h = 0.025$ ve $t = 0.1$ anında farklı Δt değerleri için Problem 3.6.1'in sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması	33
Tablo 3.2	$h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ iken $v=1$, $v = 0.01$ ve $v = 0.0001$ için Problem 3.6.1'in sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması	34
Tablo 3.3	$h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1$ anında v 'nin farklı değerleri için Problem 3.6.1'in L_2 ve L_∞ hata normaları	34
Tablo 3.4	$v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında Problem 3.6.2'nin sayısal sonuçlarının ve analitik sonuç ile kıyaslanması.	36
Tablo 3.5	$h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ iken $t = 1$ anında Problem 3.6.2'nin farklı v değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının hesaplanması	36
Tablo 3.6	$v = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında Problem 3.6.2'nin sayısal sonuçlarının [41] çalışmasıyla kıyaslanması.....	37
Tablo 3.7	$v = 1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında Problem 3.6.2'nin sayısal sonuçlarının [41] çalışmasıyla kıyaslanması.....	37
Tablo 3.8	$v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $t = 0.1$ anında h 'nin farklı değerleri için Problem 3.6.3'ün sayısal sonuçlarının ve analitik sonuçla kıyaslanması.	39
Tablo 3.9	$v = 0.5$, $v = 0.005$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.3'ün sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması.	40
Tablo 4.1	$v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ iken $t = 0.1$ anında Problem 4.3.1'in h 'nin farklı değerleri için sayısal çözümlerinin analitik çözümle kıyaslanması.	53
Tablo 4.2	$v = 1$, $v = 0.1$, $v = 0.01$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ iken farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in sayısal çözümlerinin analitik çözümle kıyaslanması.....	54
Tablo 4.3	$v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ iken $t = 0.1$ anında Problem 4.3.1'in sayısal çözümlerinin [37] çalışması ile kıyaslanması.	54
Tablo 4.4	$v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ iken $t = 0.1$ anında Problem 4.3.1 'in sayısal çözümlerinin [38, 39, 65] çalışmalarıyla kıyaslanması.	55
Tablo 4.5	$v = 0.1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ iken farklı t zamanlarında Problem 4.3.1 'in sayısal çözümlerinin [57] çalışmasıyla kıyası. .	55
Tablo 4.6	$v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında farklı h değerlerinde Problem 4.3.2'in KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması	60

Tablo 4.7	$v = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.5$ anında farklı h değerlerinde Problem 4.3.2'in KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması	61
Tablo 4.8	$v = 0.01$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ anında farklı h değerlerinde Problem 4.3.2'in KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması	61
Tablo 4.9	$v = 1, 0.1, 0.01$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ için farklı t zamanında Problem 4.3.2'in KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması	62
Tablo 4.10	$v = 0.01$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ anında Problem 4.3.2'in farklı h değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [42] çalışması ile kıyaslanması	62
Tablo 4.11	$v = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2' in sayısal sonuçlarının [47–49] çalışmaları ile kıyaslanması.	63
Tablo 4.12	$v = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ iken $[a, b] = [0, 8]$ aralığında Problem 4.3.3'ün farklı t zamanlarındaki sayısal çözümlerinin analitik çözümle ve $t = 3.0$ için [78] çalışmasıyla kıyaslanması. .	68
Tablo 4.13	$\Delta t = 0.01$ ve $[a, b] = [0, 1]$ için Problem 4.3.3'ün farklı v ve h değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [43–46, 67] çalışmalarıyla kıyaslanması	70
Tablo 4.14	$v = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 4.3.3' ün farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hatalarının [37] çalışmasıyla kıyaslanması	71

SİMGELER VE KISALTMALAR

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklamalar</u>
KBSGY	Kübik B-Spline Galerkin Yöntemi
ASFY	Açık Sonlu Fark Yöntemi
KSFY	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi
CNSFY	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi
HSFY	Hopscotch Sonlu Fark Yöntemi
KBSCY	Kübik B-Spline Collacation Yöntemi
MBSQI	Matris parametre Kübik B-spline Quasi-İnterpolasyon
KuBSGY	Kuadratik B-Spline Galerkin Yöntemi
AÜSFY	Açık Üstel Sonlu Fark Yöntemi
KÜSFY	Kapalı Üstel Sonlu Fark Yöntemi
CNÜSFY	Crank-Nicolson Üstel Sonlu Fark Yöntemi
KSF6	Altıncı Dereceden Kompakt Sonlu Fark
SPY	Sınırlayıcı Padé Yaklaşımı
KBSCA1	Kuintik B-Spline Kollakasyon Algoritması1
ÜBSGY	Üstel B-Spline Galerkin Yöntemi
KuarBSGY	Kuartik B-Spline Galerkin Yöntemi

1. GİRİŞ

Doğadaki olayların çoğu fizik kuralları yardımıyla cebirsel, diferansiyel veya integral denklemler olarak ifade edilebilir. Bilim insanları elde ettikleri bu denklemlerin tam çözümünü bulmaya çalışırlar. Ancak bu denklemlerin tam çözümlerine ulaşmak her zaman mümkün olmamaktadır. Denklemlerin tam çözümünü bulmanın mümkün olmadığı durumlarda yaklaşık çözümlerini bulmak için çeşitli sayısal yöntemler kullanılır [1].

Uygulamalı bilimlerin bir çok alanında ortaya çıkan olayların çoğu kısmi türevli diferansiyel denklemler ile ifade edilebilmektedir. Örneğin ısı akışı, sıg su dalgalarındaki dalgaların yayılımı, dalga hareketi, katıların titreşimi, moleküllerin yapısı, foton ve elektronların ilişkisi, elektromanyetik dalgaların ışınmı, ekolojide pek çok popülasyon modeli, kimyasal bir reaktif maddenin dispersiyonu, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, elektrik vs. gibi pek çok model kısmi diferansiyel denklemler ile temsil edilmektedir. Dolayısıyla, içinde yaşadığımız dünyanın bu gibi temel işleyişlerini anlayabilmek için ilgili kısmi diferansiyel denklemlerin özelliklerini iyi bilmek gerekmektedir [2, 3].

Matematiksel olarak modellenen problemlerin lineer olmayan problemlere genişlemesi 20. yüzyılın ilk çeyreğinde ilk kez Galerkin tarafından ifade edilen ağırlıklı kalanlar yöntemi ile yapılmıştır [4]. Daha sonra sonlu elemanlar yöntemi ile geliştirilen yöntem, karmaşık diferansiyel denklemlerin çözümü için son derece kullanışlı bir sayısal yaklaşım halini aldı. Sonlu elemanlar yöntemi varyasyonel hesaplama prensipleri ve ağırlıklı kalanlar yöntemi olarak iki sınıfa ayrılır. Ağırlıklı kalanlar yöntemi diferansiyel denklemin önceden belirlenmiş ağırlık fonksiyonlar kümesi ile çarpılıp çözüm bölgesi üzerinde integrali alındıktan sonra bu integralin sifıra eşit olması esasına dayanmaktadır [4].

1.1 Temel Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ ve K reel ya da kompleks sayıların bir cismi olsun. Her $\alpha, \beta \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

işlemleri,

$$V1) x + y = y + x,$$

$$V2) (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$V3) x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ mevcut,}$$

$$V4) x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } -x \in X \text{ mevcut,}$$

$$V5) 1.x = x,$$

$$V6) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$V7) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$V8) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

şartları sağlanıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir [5].

Tanım 1.1.2. X bir vektör uzayı ve $\|\cdot\| : X \rightarrow R$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ vektörü ve her λ skaleri için;

$$N1) \|\theta\| = 0,$$

$$N2) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir yarı-norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir yarı-normlu uzay denir.

Eğer X vektör uzayı üzerinde $(N2)$ ve $(N3)$ aksiyomlarıyla

$$N1') \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

aksiyomu sağlanıyorsa o zaman $\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay denir [5].

Tanım 1.1.3. Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir veya daha fazla değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir [6].

Tanım 1.1.4. Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir [6].

Tanım 1.1.5. Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin en az iki bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini içeren bir diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir [6].

Tanım 1.1.6. Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve bunların denklemde görülen çeşitli mertebeden türevleri birinci dereceden ve denklemini bağımlı değişken ve onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Aksi halde non-lineer diferansiyel denklem denir [6].

Tanım 1.1.7. Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal yöntemler ile çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan hesaplamaların hemen hemen her aşamasında hatalar oluşmaktadır. Oluşan bu hatalar sayısal hesaplamaların ilerleyen aşamalarında artan bir şekilde büyümüyorsa kullanılan yöntem kararlıdır denir [7].

1.2 Spline Fonksiyonlar

Newton ve Lagrange interpolasyon yöntemlerini kullanarak çok sayıdaki veri noktalarına bir tek polinom ile yaklaşmak kolay olabilir ancak bu, zaman zaman büyük hataların ortaya çıkmasına da sebep olabilir. Bu durumda, çok sayıda veri noktasına bir tek polinomla yaklaşmak yerine veri noktalarını içeren aralığın birbirini örtmeyen alt aralıklarında daha küçük (birinci, ikinci, üçüncü vb.)

dereceden polinomlar kullanılarak yapılan yaklaşımlar içeren spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir [8].

Tanım 1.2.1. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ ve $m = 0(1)N - 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

i) $S', S'', S''', \dots, S^{(n-1)}$ türevleri ve S fonksiyonu tanımlanan her $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ve x_m düğüm noktalarında süreklidir.

ii) S , her $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında en fazla n . dereceden bir polinomdur.

şartlarını sağlayan S fonksiyonuna n . dereceden spline fonksiyonu denir [9].

Spline fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler verilebilir.

1. Spline fonksiyonları, uygun bazlara sahip sonlu boyutlu vektör uzaylarıdır.
2. Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
3. Spline fonksiyonlar bilgisayar ile yapılan hesaplamalarda kolaylık sağlar.
4. Spline fonksiyonları türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlarıdır.
5. Yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların uygulanmasıyla bant matrisler oluşur, oluşan bu matrisler hesaplamalarda kolaylık sağlar.
6. Düşük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler [43].

1.3 B-Spline Fonksiyonlar

Belirli derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyonu aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu ile ifade edilebilir [10]. B-spline fonksiyonları parçalı değerlidir ve n . dereceden B-spline fonksiyonu $n - 1$ kez sürekli türeve sahiptir. B-spline, ilk olarak basis spline ifadesinin kısaltması olarak *I.J. Schoenberg* tarafından kullanılmıştır [14].

Tanım 1.3.1. Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonlar parçalı sabitlerdir. $m > 0$ ve B-spline fonksiyonlarının oluşturacağı noktaların bir kümesi

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots \\ \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \infty = -\lim_{m \rightarrow \infty} x_{-m} \end{array} \right.$$

olmak üzere sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonu

$$B_m^0 = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{array} \right. \quad (1.3.1)$$

şeklinde tanımlanır [9, 15, 23].

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i) $\forall x$ ve m için $B_m^0(x) \geq 0$
- ii) $B_m^0(x)$ süreklidir. (Sıçramaların olduğu tüm noktalarda sağdan süreklidir)
- iii) Bütün x 'ler için $\sum_{m=0}^{n+1} B_m^0(x) = 1$ 'dir.

Genel olarak n . dereceden B-spline fonksiyonlar $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere;

$$B_m^n(x) = \left(\frac{x - x_m}{x_{m+n} - x_m} \right) B_m^{n-1}(x) + \left(\frac{x_{m+n+1} - x}{x_{m+n+1} - x_{m+1}} \right) B_{m+1}^{n-1}(x) \quad , \quad (n \geq 1) \quad (1.3.2)$$

şeklinde tanımlanır [16]. (1.3.2) eşitliğinden $B_m^1, B_m^2, B_m^3, \dots$ B-spline fonksiyonları kolaylıkla elde edilebilir [23]. Örneğin 3.dereceden B-spline fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} B_m^1(x) &= \left(\frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m} \right) B_m^0(x) + \left(\frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} \right) B_{m+1}^0(x) \quad , \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m} \right), & [x_m, x_{m+1}] \\ \left(\frac{x_{m+2} - x}{x_{m+2} - x_{m+1}} \right), & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

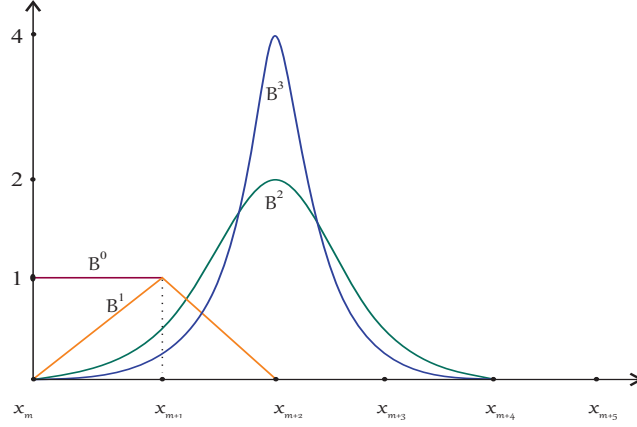
$$\begin{aligned}
B_m^2(x) &= \left(\frac{x - x_m}{x_{m+2} - x_m} \right) B_m^1(x) + \left(\frac{x_{m+3} - x}{x_{m+3} - x_{m+1}} \right) B_{m+1}^1(x) , \\
&= \begin{cases} \frac{(x-x_m)^2}{(x_{m+2}-x_m)(x_{m+1}-x_m)}, & [x_m, x_{m+1}] \\ \frac{(x-x_m)(x_{m+2}-x)}{(x_{m+2}-x_m)(x_{m+1}-x_m)} + \frac{(x_{m+3}-x)(x-x_{m+1})}{(x_{m+3}-x_{m+1})(x_{m+2}-x_{m+1})}, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \frac{(x_{m+4}-x)^2}{(x_{m+4}-x_{m+2})(x_{m+4}-x_{m+3})}, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m^3(x) &= \left(\frac{x - x_m}{x_{m+3} - x_m} \right) B_m^2(x) + \left(\frac{x_{m+4} - x}{x_{m+4} - x_{m+1}} \right) B_{m+1}^2(x) \quad (1.3.4) \\
&= \begin{cases} \frac{(x-x_m)^3}{(x_{m+3}-x_m)(x_{m+2}-x_m)(x_{m+1}-x_m)}, & [x_m, x_{m+1}] \\ \frac{(x-x_m)^2(x_{m+2}-x)}{(x_{m+3}-x_m)(x_{m+2}-x_m)(x_{m+1}-x_m)} + \frac{(x-x_{m+1})(x-x_m)(x_{m+3}-x)}{(x_{m+3}-x_{m+1})(x_{m+2}-x_{m+1})(x_{m+3}-x_m)} + \frac{(x-x_{m+1})^2(x_{m+4}-x)}{(x_{m+4}-x_{m+1})(x_{m+3}-x_{m+1})(x_{m+2}-x_{m+1})}, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \frac{(x-x_m)(x_{m+3}-x)^2}{(x_{m+3}-x_m)(x_{m+3}-x_{m+1})(x_{m+3}-x_{m+2})} + \frac{(x-x_{m+1})(x_{m+3}-x)(x_{m+4}-x)}{(x_{m+4}-x_{m+1})(x_{m+3}-x_{m+1})(x_{m+3}-x_{m+2})} + \frac{(x-x_{m+2})(x_{m+4}-x)^2}{(x_{m+4}-x_{m+1})(x_{m+4}-x_{m+2})(x_{m+3}-x_{m+2})}, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ \frac{(x_{m+4}-x)^3}{(x_{m+4}-x_{m+1})(x_{m+4}-x_{m+2})(x_{m+4}-x_{m+3})}, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}
\end{aligned}$$

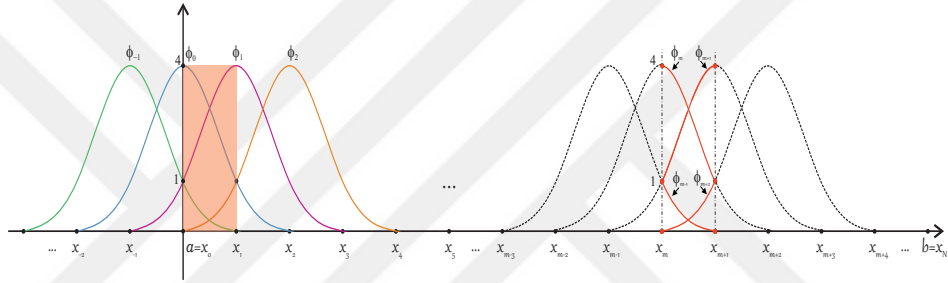
Şekil 1.1'de ilk dört B_m^0 , B_m^1 , B_m^2 , B_m^3 B-spline fonksiyonlarının aynı eksen üzerinde grafikleri çizildi [9].

1.4 Kübik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığı $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olacak şekilde eşit uzunluklu alt aralıklara bölünsün. (1.3.4) denklemi ile verilen $[x_m, x_{m+4}]$ aralığındaki $\phi_m(x)$ ile gösterilen kübik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında olacak şekilde düzenlenerek elde edilen kübik B-spline



Şekil 1.1. B_m^0 , B_m^1 , B_m^2 , B_m^3 B-spline fonksiyonları

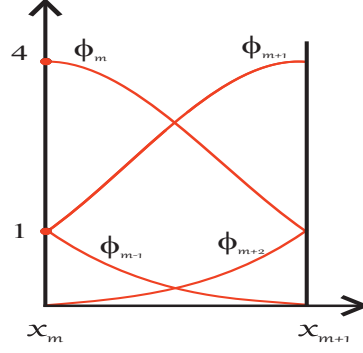


Şekil 1.2. $[a, b]$ aralığında kübik B-spline fonksiyonlar

fonksiyonların kümesi $\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_{N+1}\}$ $[a, b]$ üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için baz oluşturur [22]. $m = -1(1)N + 1$ için $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x-x_{m-2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x-x_{m-1}) + 3h(x-x_{m-1})^2 - 3(x-x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1}-x) + 3h(x_{m+1}-x)^2 - 3(x_{m+1}-x)^3 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2}-x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

şeklinde tanımlanır [22]. Şekil 1.2'deki gibi yerleşen kübik B-spline fonksiyonlar ve üçüncü mertebeye kadar türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Şekil 1.3 'de görüldüğü gibi $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında sadece $\{\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}\}$ kübik B-spline fonksiyonları yer almaktadır. $[x_{m-2}, x_{m+2}]$



Şekil 1.3. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında kübik B-spline fonksiyonlar

aralığındaki $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ fonksiyonlarının $\{x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}\}$ düğüm noktalarındaki değerleri hesaplanarak Tablo 1.1 'de sunulmuştur.

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2})^3 = 0 \\
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3}[h^3 + 3h^2(x_{m-1} - x_{m-1}) + 3h(x_{m-1} - x_{m-1})^2 - 3(x_{m-1} - x_{m-1})^3] = 1 \\
\phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x_m) + 3h(x_{m+1} - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - x_m)^3] \\
&= \frac{1}{h^3}(h^3 + 3h^3 + 3h^3 - 3h^3) = 4 \\
\phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1})^3 = \frac{h^3}{h^3} = 1 \\
\phi_m(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+2})^3 = 0 \\
\phi'_m(x_{m-2}) &= \frac{3}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2})^2 = 0 \\
\phi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3}[3h^2 + 6h(x_{m-1} - x_{m-1}) - 9(x_{m-1} - x_{m-1})^2] = \frac{3}{h} \\
\phi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[-3h^2 - 6h(x_{m+1} - x_m) + 9(x_{m+1} - x_m)^2] = 0 \\
\phi''_m(x_{m-2}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2}) = 0 \\
\phi''_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3}[6h - 18(x_{m-1} - x_{m-1})] = \frac{6}{h^2} \\
\phi''_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[6h - 18(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{12}{h^2} \\
\phi''_m(x_{m+1}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1}) = \frac{6}{h^2} \\
\phi''_m(x_{m+2}) &= 0
\end{aligned}$$

Tablo 1.1: $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu ve $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$\phi'_m(x)$	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
$\phi''_m(x)$	0	$\frac{6}{h^2}$	$\frac{12}{h^2}$	$-\frac{6}{h^2}$	0

İntegral hesaplamalarında kolaylık sağlaması amacıyla $0 \leq \xi \leq h$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere $[x_m, x_{m+1}]$ aralığını $[0, h]$ aralığına dönüştürecek şekilde $\xi = x - x_m$ lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa (1.4.1) ile verilen $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\phi_m(\xi) &= \frac{1}{h^3} [1 + 3h^2(h - \xi) + 3h(h - \xi)^2 - 3(h - \xi)^3] \\
\phi_{m-1}(\xi) &= \frac{1}{h^3} [(x_{m+1} - (\xi + x_m))^3] = \frac{1}{h^3} (h - \xi)^3 \\
\phi_{m+1}(\xi) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3] \\
\phi_{m+2}(\xi) &= \frac{1}{h^3} \xi^3
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır [4, 24].

2. AĞIRLIKLIL KALANLAR YÖNTEMİ

2.1 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi

Kısmi bir diferansiyel denklemin analitik çözüm ile yaklaşık çözümün arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamalarının sıfıra eşit olması için kullanılan yöntem ağırlıklı kalanlar yöntemi denir [20, 21]. Yani ağırlık fonksiyonlarının kümesi yardımıyla bir kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümüne en yakın yaklaşık çözümü bulmak için kullanılan genel bir yöntemdir [19]. Bu yöntem; sonlu elemanlar yönteminden önce diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirildiğinden sonlu elemanlar yönteminin temelini oluşturur denebilir.

Tanım 2.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $W : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Her $x \in I$ için $W(x) \geq 0$ ve I 'nin herhangi bir alt aralığında $W(x) \neq 0$ ise W fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir [13].

Ağırlıklı kalanlar yöntemi kısaca aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Bir Ω bölgesinde T diferansiyel bir operatör, U bağımlı değişken ve f ise bağımsız değişkenin bilinen bir fonksiyonu olmak üzere

$$T(U(x, t)) = f(x) \quad (2.1.1)$$

diferansiyel denklemi için U çözümüne, bir U_N yaklaşımı

$$U(x, t) \cong U_N(x, t) = \sum_{j=1}^N \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (2.1.2)$$

olarak tanımlanır. (2.1.2) denkleminde $\phi_j(x)$ uygun baz fonksiyonları olup $\delta_j(t)$ her bir zaman adımında belirlenmesi gereken parametrelerdir.

(2.1.2) denklemiyle verilen yaklaşık çözüm (2.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} R(x, t) &= T \{U_N(x, t)\} - f(x, t) \\ &= T \left\{ \sum_{j=1}^N \delta_j(t) \phi_j(x) \right\} - f(x) \neq 0 \end{aligned}$$

kalan değeri elde edilir [1]. Burada $R(x, t)$ kalan fonksiyonu $\delta_j(t)$ parametrelerine ve x konum değişkenine bağlıdır. Ağırlıklı kalanlar yönteminin ana fikri, $R(x, t)$ kalanının bir $W_i(x)$ ağırlık fonksiyonuyla çarpılıp Ω bölgesi üzerinden alınan integralini sıfır olmaya zorlamaktır [4]. Yani;

$$\int_{\Omega} R(x, t) W_i(x) dx = 0, i = 1(1)N \quad (2.1.3)$$

dir. Ağırlıklı kalan formu olarak adlandırılan (2.1.3) integralinden elde edilecek cebirsel denklem sisteminde δ_j parametrelerinin belirlenmesi için $W_i(x)$ ağırlık fonksiyonlarının kümesinin lineer bağımsız olması önem arz etmektedir [1].

Ağırlıklı kalanlar yöntemleri başlıca Galerkin, Petrov-Galerkin, Subdomain, Kollakasyon ve En Küçük Kareler yöntemleridir.

2.1.1 Galerkin Yöntemi

W_i ağırlık fonksiyonunun ϕ_j baz fonksiyonu ile aynı seçilmesiyle bilinen yöntemdir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i T(\phi_j) dx \\ F_i &= \int_{\Omega} f \phi_i dx \end{aligned}$$

olmak üzere (2.1.3) yaklaşımı

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \delta_j = F_i \quad (2.1.4)$$

olarak elde edilir. δ_j parametreleri (2.1.4) cebirsel denkleminden elde edilir [1].

2.1.2 Petrov-Galerkin Yöntemi

W_i ağırlık fonksiyonu ϕ_j baz fonksiyonundan farklı seçilmesi durumunda ($W_i \neq \phi_j$) ağırlıklı kalan yöntemi Petrov-Galerkin yöntemi olarak adlandırılır. Bu durumda

$$A_{ij} = \int_{\Omega} W_i T(\phi_j) dx \neq A_{ji}$$
$$F_i = \int_{\Omega} f W_i dx$$

ve Ω bölgesinde (2.1.3) yaklaşımı T lineer bir operatör olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} W_i T(\phi_j) dx \right] \delta_j = \int_{\Omega} f W_i dx$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \delta_j = F_i \quad (2.1.5)$$

olarak elde edilir. Burada A matrisi simetrik olmayan bir matristir. δ_j parametrelerinin değerleri (2.1.5) cebirsel denklemden bulunur [1].

2.1.3 Subdomain Yöntemi

Bu yöntemde W_i ağırlık fonksiyonları ve $m = 0(1)N$ için

$$W_i = \begin{cases} 1, & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. δ_j parametrelerinin bulunabilmesi için alt aralıkların sayısı δ_j parametrelerinin sayısına eşit olmalıdır [12]. W_i ağırlık fonksiyonları (2.1.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega_m} R(x, t) W_i(x) dx = 0, m = 0(1)N \quad (2.1.6)$$

N bilinmeyenli N denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. δ_j parametreleri (2.1.6) ile verilen denklem sistemin çözümünden kolayca bulunur [11].

2.1.4 Kollakasyon Yöntemi

$m = 1(1)N$ için x_m 'ler Ω çözüm bölgesinde seçilmiş noktalar olmak üzere bu yöntemde W_i ağırlık fonksiyonları

$$\int_{\Omega} \Psi(x - x_m) dx = \begin{cases} 1, & x = x_m \\ 0, & x \neq x_m \end{cases}$$

ile tanımlanan $\Psi(x - x_m)$ ile gösterilir. Burada x_m 'ler kollakasyon noktaları olarak adlandırılır ve keyfi seçilir. (2.1.3) denkleminde W_i ağırlık fonksiyonu yerine $\Psi(x - x_m)$ yazılmasıyla

$$R(x_m, t) = 0, \quad m = 1(1)N \quad (2.1.7)$$

elde edilir. (2.1.7) denklemi N adet kollakasyon noktalarında hesaplanırsa N bilinmeyenli N denklemlilik cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sisteminin çözülmesi ile δ_j parametreleri kolayca bulunur [1, 11].

2.1.5 En Küçük Kareler Yöntemi

Bu yöntemde δ_j parametreleri, kalanın karesinin Ω çözüm bölgesindeki integralinin minimum olacak şekilde belirlenir. Yani

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial t} R(x, t) dx = 0 \quad (2.1.8)$$

olmalıdır. (2.1.3) denklemi dikkate alındığında (2.1.8) denkleminde $W_i = \frac{\partial R}{\partial t}$ olarak yazılabilir. T lineer bir operatör ise $i = 1(1)N$ için $W_i = T(\phi_i)$ olur ve bu durumda (2.1.8) denklemi

$$A_{ij} = \int_{\Omega} T(\phi_i) T(\phi_j) dx$$
$$F_i = \int_{\Omega} f T(\phi_i) dx$$

olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \delta_j = F_i$$

şeklinde yazılabilir [1].

3. 1-BOYUTLU LİNEER ISI DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bir ortamdaki ısı akışının ve sıcaklık dağılımının yüzeydeki şartlara bağlı olduğu bilinmektedir. Ortamdaki ısı probleminin tanımı, ortamı sınırlayan yüzeylerdeki ısı şartları tam olarak tarif edilmeden tamamlanamaz. Sınırlardaki ısı şartlarının matematiksel ifadeleri sınır şartları olarak adlandırılır [27]. Isı iletim denklemi için sayısal yaklaşımlar farklı alanlarda kullanılmaktadır. Bu konuda bir çok araştırmalar yapılmış ve hala yapılmaktadır. Örneğin; Marwaha ve Chopra [29] kimyasal, elektriksel ya da nükleer enerjinin termal enerjiye dönüşümü için bir plakadaki geçici termal dağılımın sayısal bir çözümünü inceledi. Isı denkleminin analitik çözümünün ısı profilini tanımlamak adına, Elimoel ve Rogerio [30] üstel sinüsoidal bir boyutlu analitik model kullandı. Monte [31] bir kompozit plakada bir boyutlu geçici ısı iletiminin çözümü için analitik yaklaşımlar yaptı ve plakayı çevreleyen akışkanın sıcaklığının ani değişimleri için bir boyutlu çok katmanlı kompozit plakanın geçici tepkisi üzerine çalıştı. Lu [32], zamana bağlı sınır şartlarıyla bir boyutlu içi boş silindir kompozitte geçici ısı iletim denklemi için yeni bir analitik yöntem uyguladı. Dhawan ve Kumar [25, 26] kuadratik ve kübik B-spline Galerkin yöntemi ile bir boyutlu ısı denkleminin çeşitli model problemlerinin sayısal çözümlerini yaptı.

3.1 Kübik B-Spline Galerkin Yönteminin Isı Denklemine Uygulanması

Bu bölümde, uygulamalarda karşılaşılan en genel sınır şartları olan Dirichlet, Neumann ve Robin sınır şartları altında kübik B-spline Galerkin yöntemi kullanılarak bir boyutlu ısı denkleminin sayısal çözümü elde edilecektir [27].

$[a, b]$ aralığının $m = 0(1)N - 1$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olacak şekilde düzgün bir parçalanması $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olsun.

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.1.1)$$

ile verilen bir boyutlu lineer ısı denkleminin kübik B-spline Galerkin yöntemi uygulanırsa (3.1.1) denkleminin yaklaşık çözümü

$$\theta_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (3.1.2)$$

ve $i = -1(1)N + 1$ için W_i ağırlık fonksiyonu olmak üzere ağırlıklı kalan formu ise

$$\int_a^b W_i \left[\frac{\partial \theta_N}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta_N}{\partial x^2} \right] dx = \int_a^b W_i \frac{\partial \theta_N}{\partial t} dx - v \int_a^b W_i \frac{\partial^2 \theta_N}{\partial x^2} dx = 0 \quad (3.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.3) denkleminde $\int_a^b W_i \frac{\partial^2 \theta_N}{\partial x^2} dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_a^b W_i \frac{\partial^2 \theta_N}{\partial x^2} dx = W_i \frac{\partial \theta_N}{\partial x} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dW_i}{dx} \frac{\partial \theta_N}{\partial x} dx$$

elde edileceğinden (3.1.3) denklemi

$$\int_a^b W_i \frac{\partial \theta_N}{\partial t} dx + v \int_a^b \left(\frac{dW_i}{dx} \frac{\partial \theta_N}{\partial x} \right) dx - v W_i \frac{\partial \theta_N}{\partial x} \Big|_a^b = 0 \quad (3.1.4)$$

halini alır. (3.1.4) denkleminin (3.1.1) ile verilen ısı denkleminin zayıf formu denir.

(3.1.4) denklemi $[a, b]$ aralığının $[x_m, x_{m+1}]$ gibi bir alt aralığı için

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} W_i \frac{\partial \theta_N}{\partial t} dx + v \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\frac{dW_i}{dx} \frac{\partial \theta_N}{\partial x} \right) dx - v W_i \frac{\partial \theta_N}{\partial x} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0 \quad (3.1.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Kübik B-spline Galerkin sonlu eleman yönteminde ağırlık fonksiyonu baz fonksiyonu ile aynı seçileceğinden $W_i(x) = \phi_j(x)$ eşitliği (3.1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_a^b \phi_i \frac{\partial \theta_N}{\partial t} dx + v \int_a^b \left(\frac{d\phi_i}{dx} \frac{\partial \theta_N}{\partial x} \right) dx - v \phi_i \frac{\partial \theta_N}{\partial x} \Big|_a^b = 0 \quad (3.1.6)$$



Şekil 3.1. $[a, b]$ aralığındaki elemanların teşkili

denklemini elde edilir. .

$m = 0(1)N - 1$ için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında

$$e_m = \{x : x_m \leq x \leq x_{m+1}\} \quad (3.1.7)$$

şeklinde tanımlanan e_m , m .eleman olarak adlandırılır ve aralığın uç noktalarına da düğüm noktaları denir. Şekil 3.1’de gösterilen ve (3.1.7) kümesinin tanımladığı her bir eleman için (3.1.2) ile verilen ϕ_j kübik B-spline fonksiyonları ve δ_j parametrelerinin lineer birleşimi kullanılarak yaklaşımlar yapılacaktır. Böylece $[a, b]$ aralığının her e_m alt aralığı için yaklaşık çözüm bilinecek ve bütün aralık üzerinde $\theta_N(x, t)$ hesaplanacaktır [4]. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $\{\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}\}$ kübik B-spline fonksiyonlarının sadece sıfırdan farklı olacağı dikkate alınırsa e_m elemanlarının hesaplanmasında kullanacağımız (3.1.2) denklemindeki $\theta_N(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$\theta_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (3.1.8)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $[x_m, x_{m+1}]$ aralığına $\xi = x - x_m$ lokal koordinat dönüşümü uygulayalım. Bu durumda $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşeceğinden (3.1.8) denkleminde verilen yaklaşık çözüm

$$\theta_N(x, \xi) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t) \phi_j(\xi) \quad (3.1.9)$$

ve $W_i = \phi_j$ göz önünde bulundurularak (3.1.5) denkleminde verilen zayıf form ise

$$\int_0^h \phi_i \frac{\partial \theta_N}{\partial t} d\xi + v \int_0^h \left(\frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{\partial \theta_N}{\partial \xi} \right) d\xi - v \phi_i \frac{\partial \theta_N}{\partial \xi} \Big|_0^h = 0 \quad (3.1.10)$$

olur. Burada δ_m parametreleri bulunması gereken bilinmeyen parametrelerdir.

Şimdi

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j \frac{d\delta_j}{dt}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \frac{d\phi_j}{d\xi}$$

eşitlikleri göz önüne alınarak (3.1.9) yaklaşık çözümü (3.1.10) denkleminde yerine yazılırsa (3.1.1) denklemi

$$\int_0^h \phi_i(\xi) \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \dot{\delta}_j(t) \phi_j(\xi) \right] d\xi + v \int_0^h \phi'_i(\xi) \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j(t) \phi'_j(\xi) \right] d\xi$$

$$- v \left\{ \phi_i(\xi) \left[\sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_m(t) \cdot \phi'_m(\xi) \right]_0^h \right\} = 0$$

formuna dönüşür. Daha düzenli olarak

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right] \dot{\delta}_j^e + v \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^h \phi'_i \phi'_j d\xi \right] \delta_j^e - v \sum_{j=m-1}^{m+2} [\phi_i \phi'_j]_0^h \delta_j^e = 0 \quad (3.1.11)$$

elde edilir [4]. ($\frac{d\delta}{dt}$ ve $\frac{d\phi}{d\xi}$ türevleri sırasıyla $\dot{\delta}$ ve ϕ' olarak sembolize edildi)

$i = m-1, m, m+1, m+2$ ve $j = m-1, m, m+1, m+2$ için

$$A_{ij}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h \phi'_i \phi'_j d\xi$$

$$C_{ij}^e = [\phi_i \phi'_j]_0^h$$

şeklinde 4×4 tipinde matrisler olacağından (3.1.11) denklemi

$$A^e \dot{\delta}_j^e + v B^e \delta_j^e - v C^e \delta_j^e = 0$$

olarak yazılır [26] ve burada A^e

$$A^e = \begin{bmatrix} \int_0^h \phi_{m-1}\phi_{m-1}d\xi & \int_0^h \phi_{m-1}\phi_md\xi & \int_0^h \phi_{m-1}\phi_{m+1}d\xi & \int_0^h \phi_{m-1}\phi_{m+2}d\xi \\ \int_0^h \phi_m\phi_{m-1}d\xi & \int_0^h \phi_m\phi_md\xi & \int_0^h \phi_m\phi_{m+1}d\xi & \int_0^h \phi_m\phi_{m+2}d\xi \\ \int_0^h \phi_{m+1}\phi_{m-1}d\xi & \int_0^h \phi_{m+1}\phi_md\xi & \int_0^h \phi_{m+1}\phi_{m+1}d\xi & \int_0^h \phi_{m+1}\phi_{m+2}d\xi \\ \int_0^h \phi_{m+2}\phi_{m-1}d\xi & \int_0^h \phi_{m+2}\phi_md\xi & \int_0^h \phi_{m+2}\phi_{m+1}d\xi & \int_0^h \phi_{m+2}\phi_{m+2}d\xi \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $i = m - 1$, $j = m + 2$ için A^e matrisinin $A_{m-1,m+2}$ elemanı

$$\begin{aligned} A_{m-1,m+2} &= \int_0^h \phi_{m-1}\phi_{m+2}d\xi \\ &= \int_0^h \frac{1}{h^3}(h-\xi)^3 \cdot \frac{1}{h^3}\xi^3 d\xi \\ &= \frac{1}{h^6} \left[\frac{h^3}{4}\xi^4 - \frac{3h^2}{4}\xi^5 + \frac{h}{2}\xi^6 - \frac{1}{7}\xi^7 \right]_0^h \\ &= \frac{h}{140} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. A^e matrisinin diğer elemanları, B^e ve C^e matrisleri de benzer şekilde hesaplanabilir. Sonuç olarak A^e , B^e ve C^e matrisleri

$$\begin{aligned} A^e &= \frac{h}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix} \\ B^e &= \frac{1}{10h} \begin{bmatrix} 18 & 21 & -36 & -3 \\ 21 & 102 & -87 & -36 \\ -36 & -87 & 102 & 21 \\ -3 & -36 & 21 & 18 \end{bmatrix} \\ C^e &= \frac{3}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı için elde edilen A^e , B^e ve C^e matrislerinin Şekil 3.2'deki gibi birleştirilmesiyle

genel m .sattır elemanları

$$\begin{aligned} A &: \frac{h}{140}(1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1) \\ B &: \frac{-1}{10h}(3, 72, 45, -240, 45, 72, 3) \\ C &: \frac{3}{h}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

olan global matrisleri için $[a, b]$ aralığında

$$A\dot{\delta} + vB\delta - vC\delta = 0 \quad (3.1.12)$$

global denklemi elde edilir [4, 68]. Burada $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N+1})^T$ olmak üzere A, B ve C matrisleri $N + 3$ boyutlu karesel 7’li bant matrislerdir. İlerleyen kısımlarda $B - C = D$ olarak ifade edilecektir.

Şimdi daha önce belirtildiğı gibi en yaygın bilinen sınır şartlarından Dirichlet, Neumann ve Robin sınır şartları altında verilecek ısı denkleminin model problemleri için kübik B-spline Galerkin yöntemi uygulanarak sayısal yaklaşımlar yapılacaktır.

3.2 Dirichlet Sınır Şartlı Isı Denklemi

Dirichlet sınır şartlı ısı denklemi için ısı iletimi sınırlarda fiziksel olarak sabit olabilir ya da (3.2.1)’de verildiğı gibi zamana bağılı değışebilir [27, 28]. Dirichlet sınır şartı

$$\left. \begin{aligned} \theta(x_0, t) &= \beta_1(t) \\ \theta(x_N, t) &= \beta_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

olarak verilir. x_0 ve x_N sınır düğüm noktaları için

$$\theta(x_0, t) = \beta_1(t) \Rightarrow \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 = \beta_1(t) \quad (3.2.2)$$

$$\Rightarrow \delta_{-1} = \beta_1(t) - (4\delta_0 + \delta_1)$$

$$\Rightarrow \dot{\delta}_{-1} = \dot{\beta}_1(t) - (4\dot{\delta}_0 + \dot{\delta}_1)$$

ve

$$\theta(x_N, t) = \beta_2(t) \Rightarrow \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} = \beta_2(t) \quad (3.2.3)$$

$$\Rightarrow \delta_{N+1} = \beta_2(t) - (\delta_{N-1} + 4\delta_N)$$

$$\Rightarrow \dot{\delta}_{N+1} = \dot{\beta}_2(t) - (4\dot{\delta}_{N-1} + \dot{\delta}_N)$$

yazılır. (3.2.2) ve (3.2.3) sınır şartları (3.1.12) denkleminde uygulanırsa $N + 1$ bilinmeyenli ve $N + 3$ denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin çözülebilir hale gelmesi için denklem sayısı ile bilinmeyen sayısını eşitlemek adına ilk ve son denklemler çıkarılır denklem sistemi düzenlenirse $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{22} - 4a_{21} & , & \quad \tilde{a}_{12} = a_{23} - a_{21} \\ \tilde{a}_{21} &= a_{32} - 4a_{31} & , & \quad \tilde{a}_{22} = a_{33} - a_{31} \\ \tilde{a}_{31} &= a_{42} - 4a_{41} & , & \quad \tilde{a}_{32} = a_{43} - a_{41} \\ \tilde{a}_{N-1,N+1} &= a_{N,N+2} - 4a_{N,N+3} & , & \quad \tilde{a}_{N-1,N} = a_{N,N+1} - a_{N,N+3} \\ \tilde{a}_{N,N+1} &= a_{N+1,N+2} - 4a_{N+1,N+3} & , & \quad \tilde{a}_{N,N} = a_{N+1,N+1} - a_{N+2,N+3} \\ \tilde{a}_{N+1,N+1} &= a_{N+2,N+2} - 4a_{N+2,N+3} & , & \quad \tilde{a}_{N+1,N} = a_{N+2,N+1} - a_{N+2,N+3} \\ \tilde{a}_{ij} &= a_{i+1,j+1}, \quad i = 1(1)N + 1, \quad j = 3(1)N - 1 \end{aligned}$$

$\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{11} &= d_{22} - 4d_{21} & , & \quad \tilde{d}_{12} = d_{23} - d_{21} \\ \tilde{d}_{21} &= d_{32} - 4d_{31} & , & \quad \tilde{d}_{22} = d_{33} - d_{31} \\ \tilde{d}_{31} &= d_{42} - 4d_{41} & , & \quad \tilde{d}_{32} = d_{43} - d_{41} \\ \tilde{d}_{N-1,N+1} &= d_{N,N+2} - 4d_{N,N+3} & , & \quad \tilde{d}_{N-1,N} = d_{N,N+1} - d_{N,N+3} \\ \tilde{d}_{N,N+1} &= d_{N+1,N+2} - 4d_{N+1,N+3} & , & \quad \tilde{d}_{N,N} = d_{N+1,N+1} - d_{N+2,N+3} \\ \tilde{d}_{N+1,N+1} &= d_{N+2,N+2} - 4d_{N+2,N+3} & , & \quad \tilde{d}_{N+1,N} = d_{N+2,N+1} - d_{N+2,N+3} \\ \tilde{d}_{ij} &= d_{i+1,j+1}, \quad i = 1(1)N + 1, \quad j = 3(1)N - 1 \end{aligned}$$

ve

$$\tilde{M} = \beta_1 \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\beta}_1 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{N,N+3} \\ d_{N+1,N+3} \\ d_{N+2,N+3} \end{pmatrix} + \dot{\beta}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{N,N+3} \\ a_{N+1,N+3} \\ a_{N+2,N+3} \end{pmatrix}$$

olmak üzere (3.1.12) denklemi matris formunda

$$\tilde{A}\dot{\delta} + \tilde{D}\delta + \tilde{M} = 0 \quad (3.2.4)$$

olarak yazılır.

(3.2.4) denkleminde $\dot{\delta}$ ve δ yerine [33]

$$\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}, \quad \delta = \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} \quad (3.2.5)$$

ileri sonlu fark yaklaşımı ve Crank-Nicolson yaklaşımı yazılarak denklem düzenlenirse

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \tilde{A} + \frac{v}{2} \tilde{D} \right) \delta^{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t} \tilde{A} - \frac{v}{2} \tilde{D} \right) \delta^n - \tilde{M} \quad (3.2.6)$$

denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden δ^{n+1} parametreleri bulunur ve (3.1.1) ile verilen ısı denkleminin çözümüne ulaşılır.

(3.2.6) denklem sisteminde $N + 1$ denklem ve $N + 1$ bilinmeyen olduğundan sistem çözülebilir bir sistemdir. İterasyona başlamak için δ^0 değerlerine ihtiyaç olduğundan başlangıç şartından faydalanılacaktır.

3.2.1 Başlangıç Durumu

(3.2.6) denklem sisteminde $\delta_j^0 = \delta_j(0)$ başlangıç parametrelerinin hesaplanması için (3.1.2) denkleminde faydalanılarak $\theta_N(x, 0)$ başlangıç değeri;

$$\begin{aligned} \theta_N(x, 0) &= \theta(x, 0) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j^0 \phi_j(x) \\ &= \delta_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \delta_0^0 \phi_0(x) + \dots + \delta_N^0 \phi_N(x) + \delta_{N+1}^0 \phi_{N+1}(x) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Verilen başlangıç şartı için x_m düğüm noktasında

$$\theta(x_m, 0) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j^0 \phi_j(x), \quad m = 0(1)N$$

yazılabileceğinden ve Tablo 1.1 değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\theta(x_0, 0) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 \\
\theta(x_1, 0) &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0 \\
&\vdots \\
\theta(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-2}^0 + 4\delta_{N-1}^0 + \delta_N^0 \\
\theta(x_N, 0) &= \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$N+1$ denklemden oluşan $N+3$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Denklem sayısını bilinmeyen sayısına eşitlemek için

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x_0, 0) = \frac{3}{h} (\delta_1^0 - \delta_{-1}^0)$$

ve

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x_N, 0) = \frac{3}{h} (\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0)$$

denklemleri (3.2.7) denklem sistemine ilave edilir. Bu durumda

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0)^T,$$

$$L = \left(\frac{h}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_0, t), \theta(x_0), \theta(x_1), \dots, \theta(x_N), \frac{h}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_N, t) \right)^T$$

olmak üzere

$$K\delta^0 = L \tag{3.2.8}$$

denklem sisteminden

$$\delta^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0)^T$$

parametresi kolaylıkla bulunur ve (3.2.6) denklem sisteminde yerine yazılarak iterasyona geçilir [34].

3.3 Neumann Sınır Şartlı Isı Denklemi

Fiziksel olarak Neuman sınır şartı sınırdaki sabit bir ısı akışının olduğunu, sınır şartlarının homojen olması durumunda ise sınırdaki yalıtım olduğunu ifade eder. Bu yüzden Neumann sınır şartı ile ısı akışı sıfır olan son derece iyi yalıtılmış bir yüzey modellenebilir [27]. Neumann sınır şartı

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_0, t) &= \gamma_1(t) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_N, t) &= \gamma_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.1)$$

olarak verilir. Tablo 1.1'den faydalanarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_0, t) &= \frac{3}{h}(\delta_1 - \delta_{-1}) = \gamma_1, \\ \implies \delta_{-1} &= \delta_1 - \frac{h\gamma_1}{3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_N, t) &= \frac{3}{h}(\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) = \gamma_2, \\ \implies \delta_{N+1} &= \delta_{N-1} + \frac{h\gamma_2}{3} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.1.12) denkleminde (3.3.1) ve (3.3.2) eşitlikleri kullanılır ve Dirichlet sınır şartlı ısı denkleminde olduğu gibi denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olacak şekilde düzenlerise $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{22} & , & \quad \tilde{a}_{12} = a_{23} + a_{21} \\ \tilde{a}_{21} &= a_{32} & , & \quad \tilde{a}_{22} = a_{33} + a_{31} \\ \tilde{a}_{31} &= a_{42} & , & \quad \tilde{a}_{32} = a_{43} + a_{41} \\ \tilde{a}_{N-1, N+1} &= a_{N, N+2} & , & \quad \tilde{a}_{N-1, N} = a_{N, N+1} + a_{N, N+3} \\ \tilde{a}_{N, N+1} &= a_{N+1, N+2} & , & \quad \tilde{a}_{N, N} = a_{N+1, N+1} + a_{N+2, N+3} \\ \tilde{a}_{N+1, N+1} &= a_{N+2, N+2} & , & \quad \tilde{a}_{N+1, N} = a_{N+2, N+1} + a_{N+2, N+3} \\ \tilde{a}_{ij} &= a_{i+1, j+1}, \quad i = 1(1)N+1, \quad j = 3(1)N-1 \end{aligned}$$

$\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{11} &= d_{22} & , & \quad \tilde{d}_{12} = d_{23} + d_{21} \\
\tilde{d}_{21} &= d_{32} & , & \quad \tilde{d}_{22} = d_{33} + d_{31} \\
\tilde{d}_{31} &= d_{42} & , & \quad \tilde{d}_{32} = d_{43} + d_{41} \\
\tilde{d}_{N-1,N+1} &= d_{N,N+2} & , & \quad \tilde{d}_{N-1,N} = d_{N,N+1} + d_{N,N+3} \\
\tilde{d}_{N,N+1} &= d_{N+1,N+2} & , & \quad \tilde{d}_{N,N} = d_{N,+1N+1} + d_{N+2,N+3} \\
\tilde{d}_{N+1,N+1} &= d_{N+2,N+2} & , & \quad \tilde{d}_{N+1,N} = d_{N+2,N+1} + d_{N+2,N+3} \\
\tilde{d}_{ij} &= d_{i+1,j+1}, \quad i = 1(1)N+1, \quad j = 3(1)N-1
\end{aligned}$$

ve

$$\tilde{M} = -\frac{h}{3}\gamma_1 \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{h}{3}\dot{\gamma}_1 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h}{3}\gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{N,N+3} \\ d_{N+1,N+3} \\ d_{N+2,N+3} \end{pmatrix} + \frac{h}{3}\dot{\gamma}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{N,N+3} \\ a_{N+1,N+3} \\ a_{N+2,N+3} \end{pmatrix}$$

olmak üzere (3.1.12) denklemi kapalı formda

$$\tilde{A}\dot{\delta} + \tilde{D}\delta + \tilde{M} = 0 \tag{3.3.3}$$

olarak yazılır. (3.2.5) eşitliği (3.3.3) denkleminde yerine yazılırsa $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ denklemden oluşan

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \tilde{A} + \frac{v}{2} \tilde{D} \right) \delta^{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t} \tilde{A} - \frac{v}{2} \tilde{D} \right) \delta^n - \tilde{M} \tag{3.3.4}$$

denklem sistemi elde edilir.

3.3.1 Başlangıç Durumu

(3.3.4) denklem sisteminde (3.2.7) eşitlikleri kullanılarak $N+3$ bilinmeyenli $N+1$ denklemden oluşan denklem sistemi oluşur. Sistemi çözülebilir hale getirmek için (3.3.2) eşitliğindeki δ_{-1} ve δ_{N+1} değerleri (3.2.7) eşitliğinde yerine yazılır ve

düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\theta(x_0, 0) &= 4\delta_0 + 2\delta_1 - \frac{h\gamma_1}{3} \\
\theta(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\
&\vdots \\
\theta(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-2} + 4\delta_{N-1} + \delta_N \\
\theta(x_N, 0) &= 2\delta_{N-1} + 4\delta_N + \frac{h\gamma_2}{3}
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix}, \\
\delta^0 &= (\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0)^T, \\
L &= (\theta(x_0), \theta(x_1), \dots, \theta(x_N))^T \\
N &= \left(\frac{h\gamma_1}{3}, 0, 0, \dots, 0, -\frac{h\gamma_2}{3} \right)^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$K\delta^0 = L + N \tag{3.3.6}$$

denklem sistemi elde edilir.

(3.3.6) denklem sisteminde $\delta^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0)^T$ parametreleri bulunur ve bu değerler (3.3.4) denklem sisteminde kullanılarak iterasyona geçilir [34].

3.4 Robbin Sınır Şartlı Isı Denklemi

Robin sınır şartı uygulamada en sık karşılaşılan sınır şartıdır. Bu sınır şartı Newton'un soğuma yasasının matematiksel gösterimi olarak da bilinir ve fiziksel

olarak ısınnın bir cisimden onu çevreleyen ortama aynı hızda akmaya devam ettiğini ifade eder [27, 28]. Robin sınır şartı

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_0, t) - \theta(x_0, t) &= \alpha_1(t) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x_N, t) + \theta(x_N, t) &= \alpha_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

olarak verilir. Tablo 1.1'den ve (3.2.7) eşitliklerinden faydalanarak

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x_0, t) - \theta(x_0, t) = \alpha_1(t)$$

$$\implies \frac{3}{h} (\delta_1 - \delta_{-1}) - \delta_{-1} - 4\delta_0 - \delta_1 = \alpha_1 \quad (3.4.2)$$

$$\implies \delta_{-1} = - \left(\frac{h}{h+3} \right) \alpha_1 - \left(\frac{4h}{h+3} \right) \delta_0 - \left(\frac{h-3}{h+3} \right) \delta_1$$

$$\implies \dot{\delta}_{-1} = - \left(\frac{h}{h+3} \right) \dot{\alpha}_1 - \left(\frac{4h}{h+3} \right) \dot{\delta}_0 - \left(\frac{h-3}{h+3} \right) \dot{\delta}_1$$

ve

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x_N, t) + \theta(x_N, t) = \alpha_2(t)$$

$$\implies \frac{3}{h} (\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) + \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} = \alpha_2 \quad (3.4.3)$$

$$\implies \delta_{N+1} = \left(\frac{h}{h+3} \right) \alpha_2 - \left(\frac{4h}{h+3} \right) \delta_N - \left(\frac{h-3}{h+3} \right) \delta_{N-1}$$

$$\implies \dot{\delta}_{N+1} = \left(\frac{h}{h+3} \right) \dot{\alpha}_2 - \left(\frac{4h}{h+3} \right) \dot{\delta}_N - \left(\frac{h-3}{h+3} \right) \dot{\delta}_{N-1}$$

yazılabilir. (3.1.12) denkleminde (3.4.2) ve (3.4.3) eşitlikleri yerine yazılır ve

düzenlenirse $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{22} - \frac{4h}{h+3} a_{21} & , & \quad \tilde{a}_{12} = a_{23} - \frac{h-3}{h+3} a_{21} \\ \tilde{a}_{21} &= a_{32} - \frac{4h}{h+3} a_{31} & , & \quad \tilde{a}_{22} = a_{33} - \frac{h-3}{h+3} a_{31} \\ \tilde{a}_{31} &= a_{42} - \frac{4h}{h+3} a_{41} & , & \quad \tilde{a}_{32} = a_{43} - \frac{h-3}{h+3} a_{41} \\ \tilde{a}_{N-1, N+1} &= a_{N, N+2} - \frac{4h}{h+3} a_{N, N+3} & , & \quad \tilde{a}_{N-1, N} = a_{N, N+1} - \frac{h-3}{h+3} a_{N, N+3} \\ \tilde{a}_{N, N+1} &= a_{N+1, N+2} - \frac{4h}{h+3} a_{N+1, N+3} & , & \quad \tilde{a}_{N, N} = a_{N+1, N+1} - \frac{h-3}{h+3} a_{N+2, N+3} \\ \tilde{a}_{N+1, N+1} &= a_{N+2, N+2} - \frac{4h}{h+3} a_{N+2, N+3} & , & \quad \tilde{a}_{N+1, N} = a_{N+2, N+1} - \frac{h-3}{h+3} a_{N+2, N+3} \\ \tilde{a}_{ij} &= a_{i+1, j+1}, \quad i = 1(1)N+1, \quad j = 3(1)N-1 \end{aligned}$$

$\tilde{D} = [\tilde{d}_{ij}]$ matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{11} &= d_{22} - \frac{4h}{h+3}d_{21} & , & \quad \tilde{d}_{12} = d_{23} - \frac{h-3}{h+3}d_{21} \\
\tilde{d}_{21} &= d_{32} - \frac{4h}{h+3}d_{31} & , & \quad \tilde{d}_{22} = d_{33} - \frac{h-3}{h+3}d_{31} \\
\tilde{d}_{31} &= d_{42} - \frac{4h}{h+3}d_{41} & , & \quad \tilde{d}_{32} = d_{43} - \frac{h-3}{h+3}d_{41} \\
\tilde{d}_{N-1,N+1} &= d_{N,N+2} - \frac{4h}{h+3}d_{N,N+3} & , & \quad \tilde{d}_{N-1,N} = d_{N,N+1} - \frac{h-3}{h+3}d_{N,N+3} \\
\tilde{d}_{N,N+1} &= d_{N+1,N+2} - \frac{4h}{h+3}d_{N+1,N+3} & , & \quad \tilde{d}_{N,N} = d_{N+1,N+1} - \frac{h-3}{h+3}d_{N+2,N+3} \\
\tilde{d}_{N+1,N+1} &= d_{N+2,N+2} - \frac{4h}{h+3}d_{N+2,N+3} & , & \quad \tilde{d}_{N+1,N} = d_{N+2,N+1} - \frac{h-3}{h+3}d_{N+2,N+3} \\
\tilde{d}_{ij} &= d_{i+1,j+1}, \quad i = 1(1)N+1, \quad j = 3(1)N-1
\end{aligned}$$

ve

$$\tilde{M} = -\frac{h\alpha_1}{h+3} \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{h\dot{\alpha}_1}{h+3} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h\alpha_2}{h+3} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{N,N+3} \\ d_{N+1,N+3} \\ d_{N+2,N+3} \end{pmatrix} + \frac{h\dot{\alpha}_2}{h+3} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{N,N+3} \\ a_{N+1,N+3} \\ a_{N+2,N+3} \end{pmatrix}$$

olmak üzere (3.1.12) denklemi yeni haliyle;

$$\tilde{A}\dot{\delta} + \tilde{D}\delta + \tilde{M} = 0 \tag{3.4.4}$$

olarak yazılır. (3.4.4) denkleminde (3.2.5) eşitliği yazılırsa

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \tilde{A} + \frac{v}{2} \tilde{D} \right) \delta^{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t} \tilde{A} - \frac{v}{2} \tilde{D} \right) \delta^n - \tilde{M} \tag{3.4.5}$$

denklem sistemi elde edilir.

3.4.1 Başlangıç Durumu

(3.4.5) denklem sistemine iterasyon uygulanabilmesi için δ^0 parametrelerinin belirlenmesi gerekmektedir. (3.4.2) ve (3.4.3) eşitliklerindeki δ_{-1} ve δ_{N+1} değerleri

(3.2.7) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\theta(x_0, 0) &= \left(\frac{12}{h+3}\right) \delta_0 + \left(\frac{6}{h+3}\right) \delta_1 - \left(\frac{h}{h+3}\right) \alpha_1 \\
\theta(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\
&\vdots \\
\theta(x_{N-1}, 0) &= \delta_{N-2} + 4\delta_{N-1} + \delta_N \\
\theta(x_N, 0) &= \left(\frac{6}{h+3}\right) \delta_{N-1} + \left(\frac{12}{h+3}\right) \delta_N + \left(\frac{h}{h+3}\right) \alpha_2
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

elde edilir. Elde edilen (3.4.6) denklem sistemi matris formunda

$$\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} \frac{12}{h+3} & \frac{6}{h+3} & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & \frac{6}{h+3} & \frac{12}{h+3} \end{bmatrix}, \\
\delta^0 &= (\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0)^T, \\
L &= (\theta(x_0), \theta(x_1), \dots, \theta(x_N))^T \\
N &= \left(\frac{h\alpha_1}{h+3}, 0, 0, \dots, 0, -\frac{h\alpha_2}{h+3}\right)^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$K\delta^0 = L + N \tag{3.4.7}$$

yazılabilir.

(3.4.7) 'de $\delta^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0)^T$ parametreleri bulunur ve bu değerler (3.4.5)

denklem sisteminde kullanılarak iterasyona geçilir [34].

3.5 Kararlılık Analizi

Kübik B-spline Galerkin yöntemi ile elde edilen şemanın kararlılığı Von Neuman Kararlılık analizi kullanılarak yapılacaktır. Von Neuman Kararlılık analizine göre

β mod sayısı ve h eleman büyüklüğü olmak üzere

$$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{im\beta h} \quad (3.5.1)$$

ile verilen Fourier modu için

$$\hat{\delta}^{n+1} = g \hat{\delta}^n$$

şeklindeki g büyüme faktörünün

$$|g| \leq 1 \quad (3.5.2)$$

şartını sağlaması durumunda yöntem kararlıdır [40].

(3.4.5) denklem sisteminde m . genelleştirilmiş satır

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{h}{140} - \frac{3v\Delta t}{20h}, \quad \alpha_2 = \frac{120h}{140} - \frac{72v\Delta t}{20h}, \quad \alpha_3 = \frac{1191h}{140} - \frac{45v\Delta t}{20h}, \\ \alpha_4 &= \frac{2416h}{140} + \frac{240v\Delta t}{20h}, \quad \alpha_5 = \frac{h}{140} + \frac{3v\Delta t}{20h}, \quad \alpha_6 = \frac{120h}{140} + \frac{72v\Delta t}{20h}, \\ \alpha_7 &= \frac{1191h}{140} + \frac{45v\Delta t}{20h}, \quad \alpha_8 = \frac{2416h}{140} - \frac{240v\Delta t}{20h} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_4 \delta_m^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \alpha_7 \delta_{m+3}^{n+1} = \quad (3.5.3)$$

$$\alpha_5 \delta_{m-3}^n + \alpha_6 \delta_{m-2}^n + \alpha_7 \delta_{m-1}^n + \alpha_8 \delta_m^n + \alpha_7 \delta_{m+1}^n + \alpha_6 \delta_{m+2}^n + \alpha_5 \delta_{m+3}^n$$

olacağından δ_m^n parametreleri yerine (3.5.1) eşitliği yazılırsa (3.5.3) eşitliği

$$\alpha_1 \hat{\delta}^{n+1} e^{i(m-3)\beta h} + \alpha_2 \hat{\delta}^{n+1} e^{i(m-2)\beta h} + \dots + \alpha_1 \hat{\delta}^{n+1} e^{i(m+3)\beta h} = \quad (3.5.4)$$

$$\alpha_5 \hat{\delta}^n e^{i(m-3)\beta h} + \alpha_6 \hat{\delta}^n e^{i(m-2)\beta h} + \alpha_7 \hat{\delta}^n e^{i(m-1)\beta h} + \dots + \alpha_5 \hat{\delta}^n e^{i(m+3)\beta h}$$

halini alır.

$$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$$

Euler eşitliği kullanılarak (3.5.4) ifadesi düzenlenirse

$$g = \frac{2\alpha_5 \cos(3\beta h) + 2\alpha_6 \cos(2\beta h) + 2\alpha_7 \cos(\beta h) + \alpha_8}{2\alpha_1 \cos(3\beta h) + 2\alpha_2 \cos(2\beta h) + 2\alpha_3 \cos(\beta h) + \alpha_4} \quad (3.5.5)$$

olmak üzere

$$\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$$

elde edilir. Diğer taraftan $\cos(3\beta h)$ ve $\cos(2\beta h)$ trigonometrik fonksiyonları için düzenleme yapılırsa (3.5.5) eşitliği

$$\begin{aligned} r &= \frac{2h}{140} [4 \cos^3(\beta h) + 240 \cos^2(\beta h) + 1188 \cos(\beta h) + 1088] \\ s &= \frac{6v\Delta t}{20h} [4 \cos^3(\beta h) + 48 \cos^2(\beta h) + 12 \cos(\beta h) - 104] \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

olmak üzere

$$g = \frac{r+s}{r-s}$$

olur. Bu durumda

$$|g| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |g|^2 \leq 1$$

olacağından

$$\begin{aligned} \left| \frac{r+s}{r-s} \right|^2 &= \frac{|r+s|^2}{|r-s|^2} \leq 1 \\ \Rightarrow |r-s|^2 - |r+s|^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow 4rs &\leq 0 \end{aligned}$$

şartı sağlanmalıdır. (3.5.6) eşitliklerinde bütün $\beta h \in \mathbb{R}$ durumları için $r > 0$ ve $s < 0$ olduğundan $|g| \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanması bir şarta bağlı değildir. Dolayısıyla yöntem şartsız kararlıdır.

3.6 Model Problemler

Şimdi farklı model problemler için her bir t adımında sayısal sonuçlar elde edilecek ve yöntemin doğruluğu

$$\begin{aligned} L_2 &= \sqrt{h \sum_{j=0}^N |\theta_j - (\theta_N)_j|^2}, \\ L_\infty &= \|\theta - \theta_N\|_\infty = \max_j |\theta_j - (\theta_N)_j| \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

olarak verilen L_2 ortalama hata normu ve L_∞ maksimum hata normu ile ölçülecektir.

3.6.1 Problem 1

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

denklemleriyle verilen 1-boyutlu lineer ısı denkleminin

$$\theta(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$\theta(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

Dirichlet sınır şartları ve

$$\theta(x, 0) = \sin(\pi x)$$

başlangıç şartı altındaki analitik çözümü

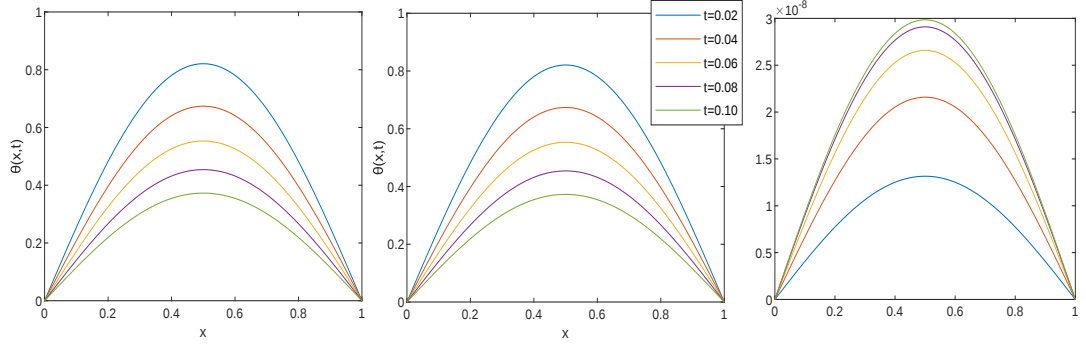
$$\theta(x, t) = e^{-\pi^2 vt} \sin \pi x$$

olarak verilmiştir [52].

$t = 0.1$ zamanında $v = 1$, $h = 0.025$ ve Δt 'nin farklı değerleri için Problem 3.6.1'in sayısal çözümü yapıldı ve elde edilen sayısal sonuçlar analitik sonuçlarla Tablo 3.1'de kıyaslandı. Sayısal sonuçların analitik sonuçlarla uyum içerisinde olduğu Tablo 3.1'de kolayca anlaşılmaktadır ve Δt değeri küçüldükçe L_2 ve L_∞ normlarının küçüldüğü gözlemlendi. Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de $v = 1$ ve $v = 0.01$ değerleri için farklı t zamanlarında analitik çözüm, sayısal çözüm ve mutlak hatanın grafikleri verildi. v viskozite katsayısının daha küçük seçilmesiyle hatanın küçüldüğü Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de görülmektedir. Problem 3.6.1'in $v = 1$, $v = 0.1$, $v = 0.0001$ için farklı t zamanlarında ve farklı x konumlarında hesaplanan sayısal sonuçları ile analitik sonuçlar kıyaslanarak Tablo 3.2'de verildi. Tablo 3.2'de sonuçlar uyum içerisinde olduğundan kübik B-spline Galerkin

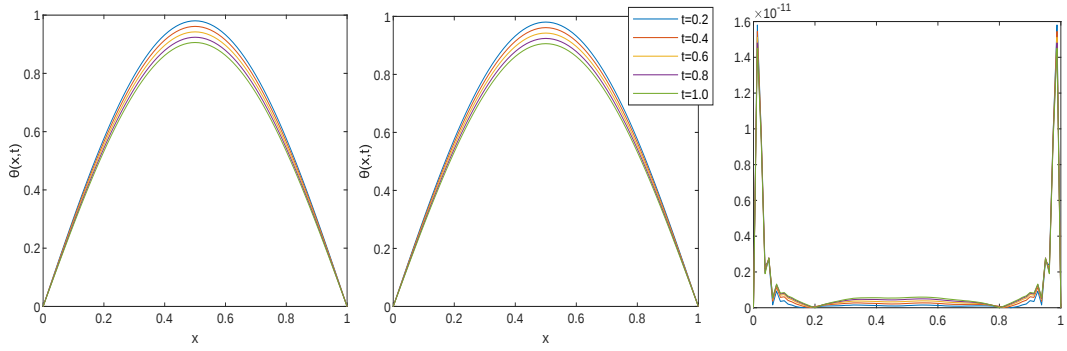
Tablo 3.1: $v = 1$, $h = 0.025$ ve $t = 0.1$ anında farklı Δt değerleri için Problem 3.6.1'in sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması

x	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta t = 0.00001$	Analitik
0.1	0.115081	0.115172	0.115173	0.115173	0.115173
0.2	0.218896	0.219070	0.219072	0.219072	0.219072
0.3	0.301285	0.301525	0.301527	0.301527	0.301527
0.4	0.354182	0.354463	0.354466	0.354466	0.354466
0.5	0.372409	0.372705	0.372708	0.372708	0.372708
0.6	0.354182	0.354463	0.354466	0.354466	0.354466
0.7	0.301285	0.301525	0.301527	0.301527	0.301527
0.8	0.218896	0.219070	0.219072	0.219072	0.219072
0.9	0.115081	0.115172	0.115173	0.115173	0.115173
L_2	$2.1137e-04$	$2.1114e-06$	$2.1094e-08$	$1.9823e-10$	
L_∞	$2.9892e-04$	$2.9860e-06$	$2.9839e-08$	$2.7754e-10$	



Şekil 3.3: $v = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)

yönteminin (KBSGY) iyi sonuçlar verdiği düşünülmektedir. $v = 0.01$, $v = 0.0001$, $v = 0.000001$ viskozite katsayısının daha küçük değerleri için $t = 0.1$ anında L_2 ve L_∞ normaları hesaplandı ve sonuçlar Tablo 3.3'de verildi. Tablo 3.3 incelendiğinde v değerinin küçülmesiyle sayısal sonuçlar analitik sonuçlara daha çok yaklaşmaktadır.



Şekil 3.4: $v = 0.01$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)

Tablo 3.2: $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ iken $v=1$, $v = 0.01$ ve $v = 0.0001$ için Problem 3.6.1'in sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması

x	t	$v = 1$		$v = 0.01$		$v = 0.0001$	
		Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.25	0.4	0.013645	0.013645	0.679735	0.679735	0.706828	0.706828
	0.6	0.001895	0.001895	0.666449	0.666449	0.706688	0.706688
	0.8	0.000263	0.000263	0.653423	0.653423	0.706549	0.706549
	1.0	0.000037	0.000037	0.640652	0.640652	0.706409	0.706409
0.50	0.4	0.019296	0.019296	0.961291	0.961291	0.999605	0.999605
	0.6	0.002680	0.002680	0.942502	0.942502	0.999408	0.999408
	0.8	0.000372	0.000372	0.924080	0.924080	0.999211	0.999211
	1.0	0.000052	0.000052	0.906018	0.906018	0.999014	0.999014
0.75	0.4	0.013645	0.013645	0.679735	0.679735	0.706828	0.706828
	0.6	0.001895	0.001895	0.666449	0.666449	0.706688	0.706688
	0.8	0.000263	0.000263	0.653423	0.653423	0.706549	0.706549
	1.0	0.000037	0.000037	0.640652	0.640652	0.706409	0.706409

Tablo 3.3: $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ için $t = 0.1$ anında v 'nin farklı değerleri için Problem 3.6.1'in L_2 ve L_∞ hata normaları

	$v = 0.01$	$v = 0.0001$	$v = 0.000001$
L_2	$3.0296e - 12$	$5.0783e - 13$	$4.7062e - 14$
L_∞	$1.5990e - 11$	$2.4790e - 12$	$1.7899e - 13$

3.6.2 Problem 2

Bu problemde;

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

le verilen ısı denkleminin

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) &= 2, \end{aligned}$$

Neumann sınır şartları ve

$$\theta(x, 0) = x^2 + 1 + \cos(\pi x)$$

başlangıç şartı altındaki analitik çözümü

$$\theta(x, t) = 2t + x^2 + 1 + e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)$$

şeklindedir [52].

Problem 3.6.2'nin $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve h 'nin çeşitli değerleri için $t = 0.1$ anında KBSGY ile sayısal çözümler elde edilerek sonuçlar analitik sonuçla kıyaslandı ve Tablo 3.4'de verildi. h 'nin değerleri küçüldükçe sayısal sonuçların analitik sonuçlara daha yaklaştığı Tablo 3.4'de görülmektedir. $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ anında v 'nin farklı değerlerinde L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Tablo 3.5'de verildi. v viskozite katsayısının küçük seçilmesiyle hatanın küçüldüğü Tablo 3.5'de görüldü. $v = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlar [41] çalışmasıyla kıyaslanarak Tablo 3.6 ve $v = 1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında elde edilen sayısal sonuçlar Tablo 3.7'de sunularak [41] çalışmasıyla kıyaslandı. Problem 3.6.2 için Tablo 3.6 ve Tablo 3.7'den KBSGY'nin [41] çalışmasındaki sonlu fark yöntemlerinden daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Farklı t zamanlarında elde edilen sayısal çözüm, analitik çözüm ve mutlak hata $v = 0.1$, $h = 0.0125$,

Tablo 3.4: $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında Problem 3.6.2'nin sayısal sonuçlarının ve analitik sonuç ile kıyaslanması.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Analitik
0.0	1.572717	1.572709	1.572708	1.572708	1.572708
0.1	1.564476	1.564467	1.564466	1.564466	1.564466
0.2	1.541534	1.541528	1.541527	1.541527	1.541527
0.3	1.509077	1.509073	1.509072	1.509072	1.509072
0.4	1.475175	1.475173	1.475173	1.475173	1.475173
0.4	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000
0.6	1.444825	1.444827	1.444827	1.444827	1.444827
0.7	1.470923	1.470927	1.470928	1.470928	1.470928
0.8	1.538466	1.538472	1.538473	1.538473	1.538473
0.9	1.655524	1.655533	1.655534	1.655534	1.655534
1.0	1.827283	1.827291	1.827292	1.827292	1.827292
L_2	7.2882e-06	8.9509e-07	1.0936e-07	1.3288e-08	
L_∞	1.0097e-05	1.3727e-06	1.7861e-07	2.2530e-08	

Tablo 3.5: $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ iken $t = 1$ anında Problem 3.6.2'nin farklı v değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının hesaplanması

	$v = 0.5$	$v = 0.005$	$v = 0.0005$	$v = 0.00005$
L_2	5.0276e-08	2.6742e-09	4.7375e-10	1.0818e-10
L_∞	7.0151e-08	8.5404e-09	2.2772e-09	6.5212e-10

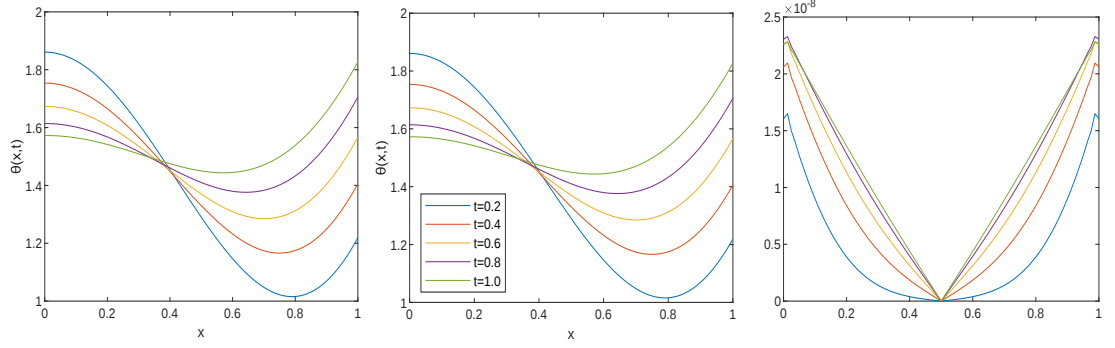
$\Delta t = 0.00001$ için Şekil 3.5'de ve $v = 0.01$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ için Şekil 3.6 'de verildi. Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 'de görüldüğü gibi v viskozite katsayısının daha küçük değerleri için yöntem daha iyi sonuçlar vermekte ve hata küçülmektedir.

Tablo 3.6: $v = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında Problem 3.6.2'nin sayısal sonuçlarının [41] çalışmasıyla kıyaslanması.

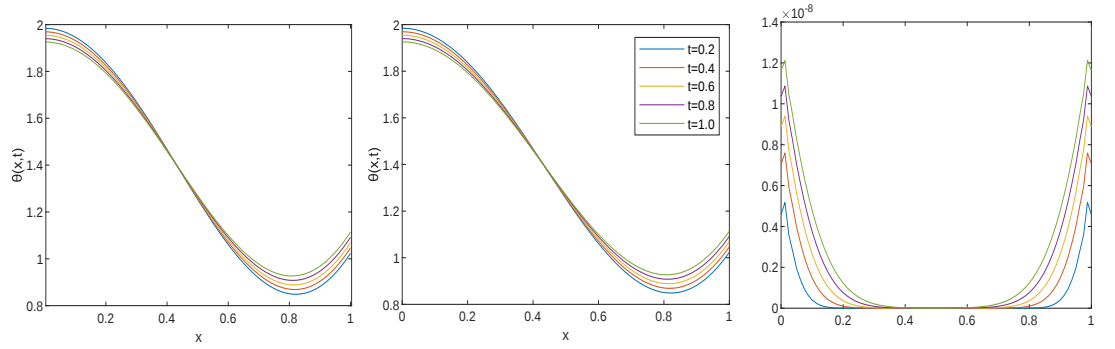
$h = 0.1$					
x	KBSGY	ASFY[41]	KSFY[41]	CNSFY[41]	Analitik
0.0	1.572717	1.575718	1.575754	1.575736	1.572708
0.1	1.564476	1.567329	1.567363	1.567346	1.564466
0.2	1.541534	1.543962	1.543991	1.543976	1.541527
0.3	1.509077	1.510841	1.510862	1.510852	1.509072
0.4	1.475175	1.476103	1.476114	1.476109	1.475173
0.5	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000
0.6	1.444825	1.443897	1.443886	1.443891	1.444827
0.7	1.470923	1.469159	1.469138	1.469148	1.470928
0.8	1.538466	1.536038	1.536009	1.536024	1.538473
0.9	1.655524	1.652671	1.652637	1.652654	1.655534
1.0	1.827283	1.824282	1.824246	1.824264	1.827292
L_2	$7.2882e-06$	$2.218e-03$	$2.154e-03$	$2.141e-03$	
L_∞	$1.0097e-05$	$3.010e-03$	$3.046e-03$	$3.028e-03$	

Tablo 3.7: $v = 1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında Problem 3.6.2'nin sayısal sonuçlarının [41] çalışmasıyla kıyaslanması.

$h = 0.0125$					
x	KBSGY	ASFY[41]	KSFY[41]	CNSFY[41]	Analitik
0.0	1.572708	1.572737	1.572773	1.572755	1.572708
0.1	1.564466	1.564494	1.564528	1.564511	1.564466
0.2	1.541527	1.541551	1.541580	1.541565	1.541527
0.3	1.509072	1.509089	1.509111	1.509100	1.509072
0.4	1.475173	1.475182	1.475193	1.475188	1.475173
0.5	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000
0.6	1.444827	1.444818	1.444807	1.444812	1.444827
0.7	1.470928	1.470911	1.470889	1.470900	1.470928
0.8	1.538473	1.538449	1.538420	1.538435	1.538473
0.9	1.655534	1.655506	1.655472	1.655489	1.655534
1.0	1.827292	1.827263	1.827227	1.827245	1.827292
L_2	$1.3288e-08$	$1.2e-05$	$4.6e-05$	$3.3e-03$	
L_∞	$2.2530e-08$	$2.9e-05$	$6.5e-05$	$4.7e-03$	



Şekil 3.5: $v = 0.1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.2 'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)



Şekil 3.6: $v = 0.01$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.2 'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)

Tablo 3.8: $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $t = 0.1$ anında h 'nin farklı değerleri için Problem 3.6.3'ün sayısal sonuçlarının ve analitik sonuçla kıyaslanması.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Analitik
0.0	0.718667	0.718835	0.717629	0.717578	0.717561
0.1	0.783961	0.783059	0.782837	0.782781	0.782763
0.2	0.835475	0.834532	0.834299	0.834241	0.834221
0.3	0.872561	0.871596	0.871358	0.871299	0.871279
0.4	0.894891	0.893919	0.893679	0.893619	0.893600
0.5	0.902344	0.901371	0.901130	0.901070	0.901050
0.6	0.894891	0.893919	0.893679	0.893619	0.893600
0.7	0.872561	0.871596	0.871358	0.871299	0.871279
0.8	0.835475	0.834532	0.834299	0.834241	0.834221
0.9	0.783961	0.783059	0.782837	0.782781	0.782763
1.0	0.718667	0.718835	0.717629	0.717578	0.717561
L_2	1.2946e-03	3.1472e-04	7.7559e-05	1.9249e-05	
L_∞	1.2938e-03	3.2033e-04	7.9696e-05	1.9876e-05	

3.6.3 Problem 3

Bu problemde

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

ile verilen ısı denkleminin

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \theta(0, t) - \theta(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \theta(1, t) + \theta(1, t) &= 0, \end{aligned}$$

Robbin sınır şartları ve

$$\theta(x, 0) = 1$$

başlangıç şartı altındaki analitik çözümü

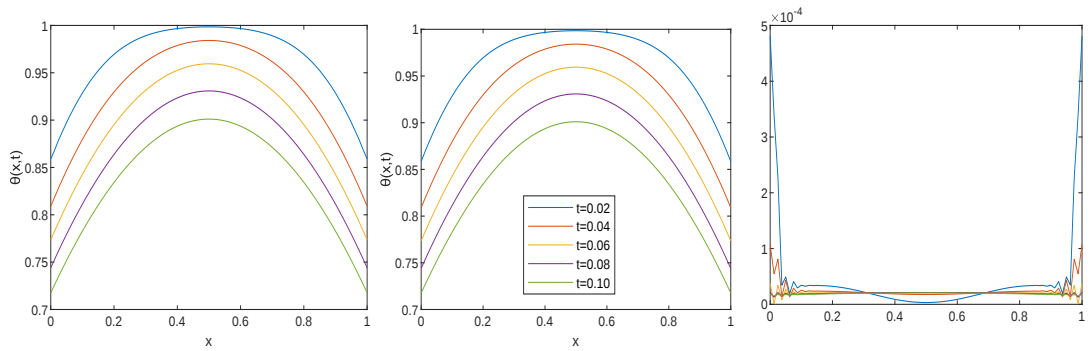
$$\theta(x, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sec \psi_n}{3 + 4\psi_n^2} \right\} e^{-4\psi_n^2 t} \cos \left(2\psi_n \left[x - \frac{1}{2} \right] \right)$$

şeklindedir. Burada ψ_n değerleri $\psi \tan \psi - 1/2 = 0$ denkleminin pozitif kökleridir [17].

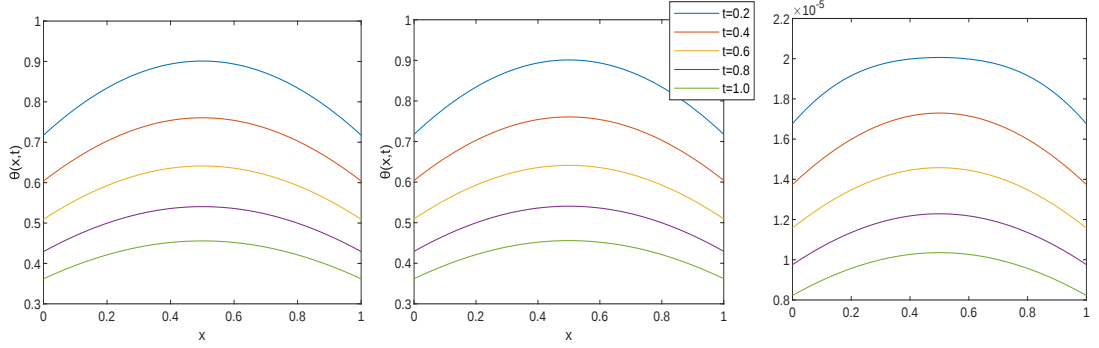
Problem 3.6.3'ün $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında h 'nin farklı değerleri için KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlar analitik sonuçla kıyaslanarak Tablo

Tablo 3.9: $v = 0.5$, $v = 0.005$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.3'ün sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması.

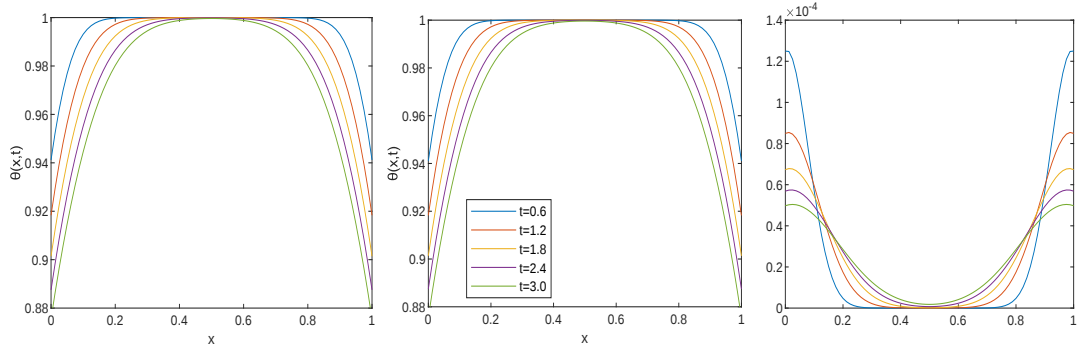
		$v = 0.5$		$v = 0.005$	
x	t	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.25	0.4	0.720414	0.720397	0.999999	1.000689
	0.6	0.607358	0.607344	0.999975	0.999975
	0.8	0.512045	0.512034	0.999867	0.999865
	1.0	0.431690	0.431680	0.999615	0.999611
	3.0	0.078308	0.078307	0.989228	0.989208
0.50	0.4	0.760614	0.760597	1.000000	1.000978
	0.6	0.641263	0.641249	1.000000	1.000000
	0.8	0.540630	0.540618	1.000000	1.000000
	1.0	0.455789	0.455779	1.000000	1.000000
	3.0	0.082680	0.082678	0.999627	0.999625
0.75	0.4	0.720414	0.720397	0.999999	1.000689
	0.6	0.607358	0.607344	0.999975	0.999975
	0.8	0.512045	0.512034	0.999867	0.999865
	1.0	0.431690	0.431680	0.999615	0.999611
	3.0	0.078308	0.078307	0.989228	0.989208
L_2		1.7514e-06		2.9906e-05	
L_∞		1.8699e-06		5.0395e-05	



Şekil 3.7: $v = 1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)



Şekil 3.8: $v = 0.5$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.3 'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)



Şekil 3.9: $v = 0.005$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 3.6.3 'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözüm(sol), analitik çözüm(orta) ve mutlak hata(sağ)

3.8’de verildi. Analitik çözüme en yakın değerin $h = 0.0125$ için elde edildiği ve h ’nin küçülmesiyle sayısal sonuçların analitik sonuca yaklaştığı Tablo 3.8’da görüldü. $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ durumunda $v = 0.5$, $v = 0.005$ için farklı t zamanlarında elde edilen sayısal sonuçlar analitik sonuçlar ile kıyaslanarak Tablo 3.9’de verildi. Problem 3.6.3 için v viskozite katsayısının küçülmesiyle hatanın büyüdüğü Tablo 3.9’de görüldü. Farklı t zamanlarında sayısal çözüm, analitik çözüm ve mutlak hata grafiği $v = 1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için Şekil 3.7’de, $v = 0.5$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için Şekil 3.8’de ve $v = 0.005$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.001$ için Şekil 3.9’da verildi. İlerleyen t zamanlarında hatanın azaldığı Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9’da görülmektedir.

4. 1-BOYUTLU BURGERS' DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

4.1 Mevcut Çalışmalar

Burgers' denklemi fizik ve matematikte zamana bağlı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden en iyi bilinen problemlerden biridir. Bu denklem viskozlu bir sıvıda şok dalgalarının ilerlemesi vasıtasıyla akışkanlara yaklaşım teorisi ve türbülansın matematiksel modellenmesi gibi çeşitli olay türlerini tanımlamak için ortaya çıkmıştır [51, 52]. Burgers' denkleminde literatürde ilk defa U , x konum ve t zaman değişkenlerine bağlı bir fonksiyon ve v viskozite katsayısı olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (4.1.1)$$

biçiminde Bateman'ın makalesinde rastlanılmıştır [53]. Hopf ve Cole (4.1.1) denkleminin analitik çözümünü Fourier serisi ile hesapladılar [54]. Fakat Fourier serisi formundaki analitik çözüm kullanışlı olmasına rağmen, bu formdaki analitik çözümün v viskozite katsayısının çok küçük değerleri için oldukça yavaş yakınsayan sonsuz seriler içermesi ve analitik çözümün keskin eğilimli olmasından dolayı daha hassas ve etkili sayısal yaklaşımlara gerek duyuldu. Hatta viskozite katsayısının $v < 0.01$ olduğu durumlarda analitik çözümdeki sonsuz serilerde terim kaybı yaşanmaktadır [55]. Burgers' denkleminin lineer olmayan $U \frac{\partial U}{\partial x}$ adveksiyon terimini barındırması, fiziksel dalga olaylarını modelleyen $v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ terimini içermesi ve v kinematik viskozite katsayısının küçük değerleri için şok dalga özelliğini sergilemesi birçok araştırmacı tarafından bu denkleme olan ilginin temel nedenlerinden bazılarıdır [61]. Bu nedenle özellikle geçtiğimiz son yıllarda, bilimsel ve mühendislik alanlarının çeşitli hesaplamalarında baz alınan (4.1.1) Burgers' denkleminin sayısal çözümü için farklı sayısal yöntemler uygulandı[56–60].

Lagerstrom vd. [62] çalışmasında Burgers' denkleminin v viskozite parametresiyle çarpılmış yüksek mertebeden türevler içermesinden dolayı Navier-Stokes denklemlerine benzediğini vurguladı. Öziş vd. [63] çalışmasında Burgers' denkleminin Hopf-Cole dönüşümü uygulayarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi için lineer B-spline baz fonksiyonları kullanarak sayısal çözüme ulaşılar ve Öziş vd. [57] çalışmasında kuadratik B-spline baz fonksiyonları kullanarak sayısal çözüm elde ettiler. Doğan [64] lineer B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Burgers' denkleminin sayısal sonucuna ulaştı. Dağ vd. [65–67] zaman bölgesini diskrize edebilmek için tamamen açık şema kullanarak farklı viskozite değerleri için kuadratik, kübik B-spline ve en küçük kareler sonlu elemanlar yöntemlerini kullanarak Burgers' denkleminin sayısal çözümünü elde etti. Soliman [68] Hopf-Cole dönüşümü kullanmadan kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Galerkin yöntemi ile denklemin sayısal çözümünü buldu ve literatürdeki diğer çalışmalarla kıyasladı. Mukundan ve Awasthi [69] Hopf-Cole dönüşümü uygulayarak Burgers' denklemini bir boyutlu difüzyon denklemine dönüştürdü ve çizgiler yöntemiyle (Method of Lines) sayısal çözümünü elde etti. Aynı yıl yüksek mertebeden parçalama yöntemiyle Seydaoğlu vd. [70], trigonometrik kuadratik B-spline subdomain Galerkin yöntemiyle Ay vd. [71] sayısal çözümler elde edildi. Daha sonra Bonkile vd. [72] Burgers' denkleminin Hopf-Cole dönüşümlü ve Hopf-Cole dönüşümsüz sayısal çözümlerinin kıyaslanması üzerine araştırma yaptı. Burgers denkleminin sayısal çözümü üzerine farklı akademik çalışmalar aynı yıl içerisinde diğer bilim insanları tarafından yapıldı [73–80]. Lakshmi ve Awasthi [81] tarafından Hopf-Cole dönüşümü uygulanarak Burgers' denklemini lineer ısı denklemine dönüştürüldü ve kübik B-spline kullanarak $\theta = 1$ ve $\theta = 1/2$ için sayısal çözüm buldu. Chen ve Zhang [82] yarı-ayrık ve tam-ayrık zayıf Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanarak Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini elde ettiler. Aynı yıl Yağmurlu vd. [83] tarafından bir boyutlu modifiye edilmiş

Burger denkleminin Strang ayrıştırma tekniğiyle ayrıştırılmasından sonra kübik B-spline kollakasyon sonlu elemanlar yöntemiyle sayısal çözümü elde edildi. Son zamanlarda Ballem [84] Galerkin yöntemi ile yeni çalışmalar ortaya koydu.

Tezin bu bölümünde Burgers' denklemin Hopf-Cole dönüşümü uygulanarak bazı model problemlerin sayısal çözümleri kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin yöntemi ile bulundu ve bulunan sonuçlar literatürdeki diğer çalışmalarla kıyaslandı.

4.2 Hopf-Cole Dönüşümü

(4.1.1) ile verilen Burgers' denkleminin bir çözümü $U(x, t)$ ve $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = \theta_x(x, t)$ olmak üzere

$$U(x, t) = -2v \frac{\theta_x(x, t)}{\theta(x, t)} \quad (4.2.1)$$

dönüşümü ile denklem ısı denklemin dönüşmektedir. Burada $\theta(x, t)$ ısı denkleminin bir çözümüdür. (4.2.1) dönüşümü ilk defa Hopf [54] tarafından ifade edildi. Daha sonraki yıllarda Cole [52] tarafından da ifade edilerek Burgers' denklemin ısı denklemin arasındaki ilişki teoremi ile ispatlandı.

Teorem 4.2.1. $\theta(x, t)$, (3.1.1) ısı denkleminin herhangi bir çözümü olmak üzere (4.1.1) Burgers' denkleminin çözümü

$$U(x, t) = -2v \frac{\theta_x(x, t)}{\theta(x, t)} \quad (4.2.2)$$

şeklindedir.

İspat.

$$f = f(x, t)$$

kendisi ve her mertebeden türevleri sürekli olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda (4.2.2) denklemin

$$U(x, t) = f_x(x, t) \quad (4.2.3)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$f_{xt} + f_x f_{xx} = v f_{xxx} \quad (4.2.4)$$

elde edilir.

f fonksiyonu sürekli olduğundan $f_{xt} = f_{tx}$ eşitliği kullanılarak (4.2.4) denklemi integrasyon sabitlerinin sıfır kabul edilmesiyle x 'e göre integralenirse

$$\begin{aligned} \int f_{xt} dx + \int f_x f_{xx} dx &= \int v f_{xxx} dx \\ f_t + \frac{1}{2} (f_x)^2 &= v f_{xx} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Burada $f(x, t) = F[\theta(x, t)]$ olarak alınır ve (4.2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F'(\theta) \theta_t + \frac{1}{2} [F'(\theta) \theta_x]^2 &= v \{ [F'(\theta) \theta_x]' \} \\ &= v [F''(\theta) \theta_x^2 + F'(\theta) \theta_{xx}] \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. $\theta(x, t)$, (3.1.1) ısı denklemini sağladığından

$$[F'(\theta)]^2 = 2v F''(\theta)$$

olur. Bu denklemde

$$F'(\theta) = \frac{1}{P(\theta)}$$

denilirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{[P(\theta)]^2} &= 2v \frac{-P'(\theta)}{[P(\theta)]^2} \\ \Rightarrow P'(\theta) &= \frac{-1}{2v} \\ \Rightarrow P(\theta) &= \frac{-1}{2v} (\theta - c_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde $c_0 = 0$ alınıp $P(\theta) = \frac{1}{F'(\theta)} = \frac{d\theta}{dF}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dF} &= \frac{-1}{2v} \theta \\ dF &= -2v \theta^{-1} d\theta \end{aligned}$$

veya

$$f(x, t) = F(\theta) = -2v \ln(\theta) + c_1$$

bulunur. Son olarak (4.2.3) eşitliğinden

$$U(x, t) = [-2v \ln(\theta) + c_1]_x \quad (4.2.6)$$

yazılır. Yani

$$U(x, t) = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

bulunur. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

(4.2.1) Hopf-Cole dönüşümü ile ısı denklemine dönüşen (4.1.1) Burgers' denkleminde başlangıç şartı da değişeceğinden şimdi $\theta(x, t)$ başlangıç değerini bulmak için (4.2.1) eşitliğinde $x = \xi$ dönüşümü yapıp 0'dan x 'e kadar integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^x U(\xi, t) d\xi &= -2v \ln \theta(\xi, t) \Big|_0^x \\ &= -2v [\ln \theta(x, t) - \ln \theta(0, t)] \\ &= -2v \ln \left[\frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)} \right] \end{aligned}$$

olup

$$(-2v)^{-1} \int_0^x U(\xi, t) d\xi = \ln \left[\frac{\theta(x, t)}{\theta(0, t)} \right]$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\theta(x, t)$

$$\theta(x, t) = \theta(0, t) e^{(-2v)^{-1} \int_0^x U(\xi, t) d\xi}$$

olarak bulunur.

$U(\xi, 0) = U_0(\xi)$ olmak üzere $U(\xi, t)$ 'nin başlangıç değeri $c = U(0, 0)$ olsun.

Bu durumda

$$\theta(x, 0) = c e^{(-2v)^{-1} \int_0^x U_0(\xi) d\xi} \quad (4.2.7)$$

şeklinde c sabitine bağlı olarak bulunur.

Teorem 4.2.2.

$$U_t + UU_x = vU_{xx}$$

Burgers' denkleminin

$$U(x, t) = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

ile verilen çözümü tektir.

İspat. (4.1.1) Burgers' denkleminin herhangi bir $U(x, t)$ çözümü, (3.1.1) ısı denklemini sağlayan (4.2.1) biçiminde $\theta(x, t)$ fonksiyonu tanımlar. $U(x, t)$ ve $Z(x, t)$ (4.1.1) denkleminin farklı iki çözümü olsun. Başlangıç şartından dolayı $U(x, 0) \equiv Z(x, 0)$ 'dir. $\theta(x, 0)$ başlangıç değeri $U(x, 0) = Z(x, 0)$ 'a bağlı olduğundan her bir durum için c sabitine kadar aynıdır. Her iki çözüm sınır değerleri için aynı olduğundan (3.1.1) ısı denkleminin $\theta(x, t)$ çözümü aynıdır. Bu durumda $U(x, t)$ ve $Z(x, t)$ (4.2.1) kullanılarak elde edildiğinden

$$U(x, t) \equiv Z(x, t)$$

olur, yani çözüm tektir.

4.3 Model Problemler

Aşağıda verilen model problemler için her bir t adımında sayısal sonuçlar elde edilecek ve yöntemin doğruluğu (3.6.1) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçülecektir.

4.3.1 Problem 1

(4.1.1) Burgers' denklemi için

$$U(x, 0) = \sin(\pi x) , 0 < x < 1$$

başlangıç şartı ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 , 0 < t < T$$

sınır şartları verilsin. (4.2.1)' ile verilen Hopf-Cole dönüşümü uygulanırsa, Problem 4.3.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ \theta(x, 0) &= \exp \left\{ -\left(\frac{1}{2\pi v}\right) [1 - \cos(\pi x)] \right\}, \quad 0 < x < 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) = 0, \quad 0 < t < T \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Neumann sınır şartlı lineer ısı denklemi problemine dönüşür [52]. Isı denkleminin analitik çözümü, C_0 ve C_n katsayıları

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_0^1 \exp \left\{ -\left(\frac{1}{2\pi v}\right) [1 - \cos(\pi x)] \right\} dx \\ C_n &= 2 \int_0^1 \exp \left\{ -\left(\frac{1}{2\pi v}\right) [1 - \cos(\pi x)] \right\} \cos(n\pi x) dx, \quad n = (1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\theta(x, t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \cos(n\pi x) \quad (4.3.2)$$

dir. Diğer taraftan $\theta_x(x, t)$ türevi

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = 2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \sin(n\pi x) \quad (4.3.3)$$

olacağından (4.3.2) ve (4.3.3) eşitlikleri kullanılarak (4.1.1) Burgers' denkleminin analitik çözümü

$$U(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \sin(n\pi x)}{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \cos(n\pi x)} \quad (4.3.4)$$

olarak elde edilir [52].

4.3.2 Problem 2

(4.1.1) Burgers' denklemini için başlangıç şartı

$$U(x, 0) = 4x(1 - x) , 0 < x < 1 \quad (4.3.5)$$

ve sınır şartları

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 , 0 < t < T$$

olsun. Hopf-Cole dönüşümü uygulanırsa (4.1.1) Burgers' denklemini başlangıç şartı

$$\theta(x, 0) = \exp \left[\frac{-x^2}{3v} (3 - 2x) \right] , 0 < x < 1 \quad (4.3.6)$$

ve sınır şartı

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) = 0 , t > 0$$

olan ısı denklemini problemine dönüşür. Isı denkleminin analitik çözümü, C_0 ve C_n katsayıları

$$C_0 = \int_0^1 \exp \left[\frac{-x^2}{3v} (3 - 2x) \right] dx$$

$$C_n = 2 \int_0^1 \exp \left[\frac{-x^2}{3v} (3 - 2x) \right] \cos(n\pi x) dx , \quad n = (1, 2, 3, \dots)$$

olmak üzere

$$\theta(x, t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) \cos(n\pi x)$$

şeklindedir. Problem 4.3.2'nin analitik çözümü katsayılar farklı olmak üzere 4.3.4 eşitliği ile gösterilebilir.

4.3.3 Problem 3

Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x, 1) = \frac{x}{1 + \exp\left[\left(\frac{1}{4v}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\right]} \quad (4.3.7)$$

ve sınır şartı

$$U(a, t) = U(b, t) = 0 \quad (4.3.8)$$

seçildi. Problemin analitik çözümü, $t_0 = \exp\left(\frac{1}{8v}\right)$ olmak üzere,

$$U(x, t) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} \exp\left(\frac{x^2}{4vt}\right)}, \quad t \geq 1$$

dir [18]. (4.2.1) Hopf-Cole dönüşümü uygulanırsa problem

$$\theta(x, 0) = \exp\left\{\frac{-x^2}{4v} + \ln\left[\frac{1 + \exp\left(\frac{4x^2-1}{16v}\right)}{1 + \exp\left(\frac{-1}{16v}\right)}\right]\right\}, \quad a \leq x \leq b$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t > 0$$

başlangıç ve sınır şartlı (3.1.1) ısı denklemi problemine dönüşür.

4.4 Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, önerilen yöntem üç model probleme uygulandı. Yöntemin doğruluğunu görmek için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı ve elde edilen sayısal sonuçlar literatürde mevcut çalışmalarla karşılaştırılarak tablolar halinde sunuldu.

4.4.1 Problem 4.3.1'in KBSGY ile Çözümü

Problem 4.3.1 için $t = 0.1$ anında $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ iken h 'nin farklı değerleri için KBSGY ile elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözüm ile kıyaslanması Tablo 4.1'de verildi. Tablo 4.1'de h 'nin değerleri küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarında küçüldüğü görülmektedir. v viskozite katsayısının $v = 1, v = 0.1$ ve $v = 0.01$ değerleri için çeşitli t zamanlarında sayısal yaklaşım yapıldı ve sonuçlar analitik çözüm ile kıyaslanarak Tablo 4.2'de verildi. v 'nin küçük değerleri için sayısal çözümün analitik çözüm ile uyum içerisinde olduğu Tablo 4.2'de görüldü. Tablo 4.3 'de KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlar çeşitli sonlu fark yöntemleri ile elde edilen sayısal sonuçlar ile karşılaştırıldı. Tablo 4.3 'den KBSGY ile edilen sayısal sonuçların hata normlarının [37] çalışmasındaki sonlu fark yöntemlerine göre daha küçük olduğu görüldü. Tablo 4.4'de elde edilen sayısal sonuçlar çeşitli yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı[38, 39, 65]. KBSGY'nin analitik çözüme daha yakın sonuçlar verdiği ve elde edilen sayısal sonuçların daha önceki çalışmalarda verilen sayısal sonuçlarla uyum içerisinde olduğu kolayca yine Tablo 4.4'de görülmektedir. Problem 4.3.1 için Hopf-Cole dönüşümü uygulanarak kübik B-spline Galerkin ve kuadratik B-spline Galerkin yöntemleri ile elde edilen sayısal sonuçlara Tablo 4.5'de yer verildi. KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlar [57] çalışmasının sayısal sonuçları ile uyum içerisinde olduğu ve KBSGY'nin analitik çözüme daha yakın sonuçlar verdiği Tablo 4.5'de görüldü. Problem 4.3.1'de viskozite katsayısının çok küçük değerleri için ($v < 0.01$) sayısal çözümün KBSGY ile bulunabilmesi yöntemin etkili ve güçlü olduğunu

Tablo 4.1: $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ iken $t = 0.1$ anında Problem 4.3.1'in h 'nin farklı değerleri için sayısal çözümlerinin analitik çözümle kıyaslanması.

x	Sayısal Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.109534	0.109539	0.109538	0.109538	0.109538
0.2	0.209790	0.209792	0.209792	0.209792	0.209792
0.3	0.291886	0.291896	0.291896	0.291896	0.291896
0.4	0.347912	0.347924	0.347924	0.347924	0.347924
0.5	0.371564	0.371577	0.371578	0.371577	0.371577
0.6	0.359035	0.359045	0.359046	0.359046	0.359046
0.7	0.309896	0.309905	0.309905	0.309905	0.309905
0.8	0.227817	0.227818	0.227817	0.227817	0.227817
0.9	0.120684	0.120688	0.120687	0.120687	0.120687
L_2	8.1469e-06	3.6779e-07	7.0076e-08	1.1485e-08	
L_∞	1.3432e-05	9.4684e-07	1.5094e-07	1.9744e-08	

göstermektedir. Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'dan $v = 0.01$, $v = 0.005$ küçük viskozite değerleri için Burgers' denkleminin şok dalgası oluşturduğu görülmektedir. Farklı t zamanlarında sayısal çözüm ve analitik çözüm $v = 1$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için Şekil 4.1'de verildi. Parametrelerin aynı değerleri için $t = 0.25$ zamanında mutlak hata grafiği Şekil 4.2'de verildi. Benzer şekilde $v = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında sayısal ve analitik çözüm Şekil 4.3'de ve $t = 1.0$ zamanında mutlak hata grafiği aynı parametre değerleri için Şekil 4.4'de verildi. Şekil 4.2 ve Şekil 4.4'deki hata grafikleri incelendiğinde v viskozite katsayısının küçülmesiyle hatanın büyüdüğü görülmektedir. $v = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Şekil 4.5'de ve $v = 0.005$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Şekil 4.6'de sayısal ve analitik çözümlere yer verildi.

Tablo 4.2: $v = 1$, $v = 0.1$, $v = 0.01$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ iken farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in sayısal çözümlerinin analitik çözümlerle kıyaslanması.

x	t	$v = 1$		$v = 0.1$		$v = 0.01$	
		Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.25	0.4	0.013572	0.013572	0.308894	0.308894	0.341917	0.341915
	0.6	0.001889	0.001889	0.240739	0.240739	0.268966	0.268965
	0.8	0.000262	0.000262	0.195676	0.195676	0.221482	0.221482
	1.0	0.000036	0.000036	0.162565	0.162565	0.188194	0.188194
	3.0	0.000000	0.000000	0.027202	0.027202	0.075114	0.075114
0.50	0.4	0.019235	0.019235	0.569632	0.569632	0.660659	0.660711
	0.6	0.002672	0.002672	0.447206	0.447206	0.529406	0.529418
	0.8	0.000371	0.000371	0.359236	0.359236	0.439135	0.439138
	1.0	0.000052	0.000052	0.291916	0.291916	0.374419	0.374420
	3.0	0.000000	0.000000	0.040205	0.040205	0.150179	0.150179
0.75	0.4	0.013631	0.013631	0.625438	0.625438	0.909846	0.910265
	0.6	0.001890	0.001890	0.487215	0.487215	0.767086	0.767243
	0.8	0.000262	0.000262	0.373922	0.373922	0.647335	0.647395
	1.0	0.000036	0.000036	0.287474	0.287474	0.556025	0.556051
	3.0	0.000000	0.000000	0.029772	0.029772	0.224811	0.224811

Tablo 4.3: $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ iken $t = 0.1$ anında Problem 4.3.1'in sayısal çözümlerinin [37] çalışması ile kıyaslanması.

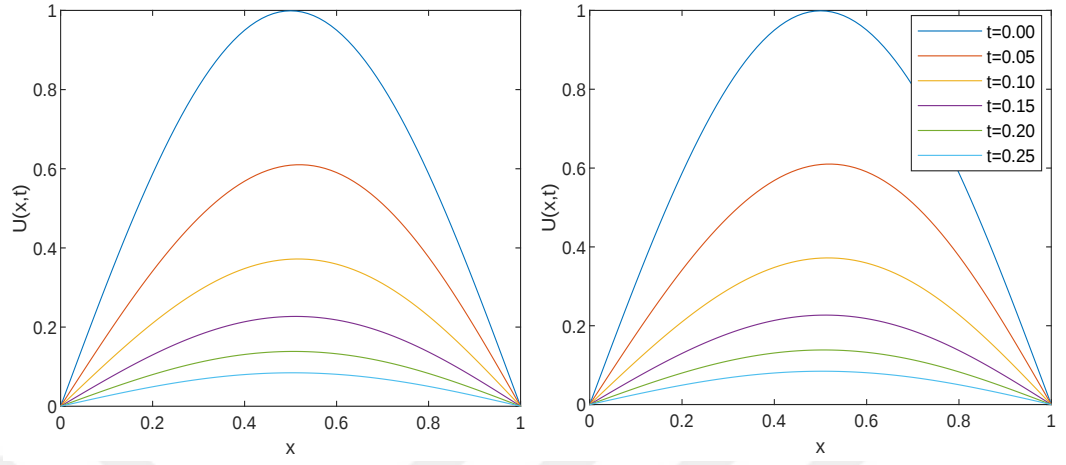
x	Sayısal Çözüm				Analitik
	KBSGY	ASFY[37]	KSFY[37]	HSFY[37]	Çözüm
0.1	0.10954	0.10952	0.10953	0.10955	0.10954
0.2	0.20979	0.20975	0.20978	0.20981	0.20979
0.3	0.29190	0.29184	0.29187	0.29194	0.29190
0.4	0.34792	0.34786	0.34790	0.34801	0.34792
0.5	0.37158	0.37151	0.37155	0.37172	0.37158
0.6	0.35905	0.35898	0.35902	0.35926	0.35905
0.7	0.30991	0.30985	0.30988	0.31019	0.30991
0.8	0.22782	0.22778	0.22780	0.22818	0.22788
0.9	0.12069	0.12067	0.12068	0.12111	0.12069
L_2	$1.1485e-08$	$4.689e-05$	$2.129e-05$	$2.3487e-04$	
L_∞	$1.9743e-08$	$6.633e-05$	$3.020e-05$	$4.3819e-04$	

Tablo 4.4: $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ iken $t = 0.1$ anında Problem 4.3.1'in sayısal çözümlerinin [38, 39, 65] çalışmalarıyla kıyaslanması.

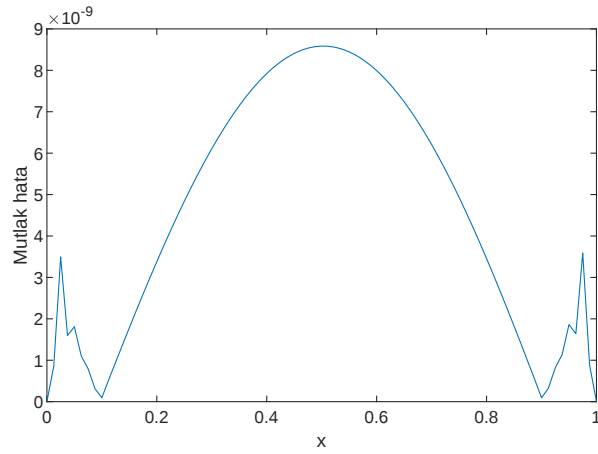
x	Sayısal Çözüm				Analitik
	KBSGY	KBSCY[65]	MBSQI[38]	ASFY[39]	Çözüm
0.1	0.109538	0.10952	0.109523	0.10952	0.109538
0.2	0.209792	0.20975	0.209762	0.20975	0.209792
0.3	0.291896	0.29184	0.291852	0.29184	0.291896
0.4	0.347924	0.34785	0.347868	0.34886	0.347924
0.5	0.371577	0.37149	0.371513	0.37151	0.371577
0.6	0.359046	0.35896	0.358979	0.35898	0.359046
0.7	0.309905	0.30986	0.309844	0.31985	0.309905
0.8	0.227817	0.22778	0.227771	0.22778	0.227817
0.9	0.120687	0.12067	0.120661	0.12067	0.120687

Tablo 4.5: $v = 0.1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ iken farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in sayısal çözümlerinin [57] çalışmasıyla kıyası.

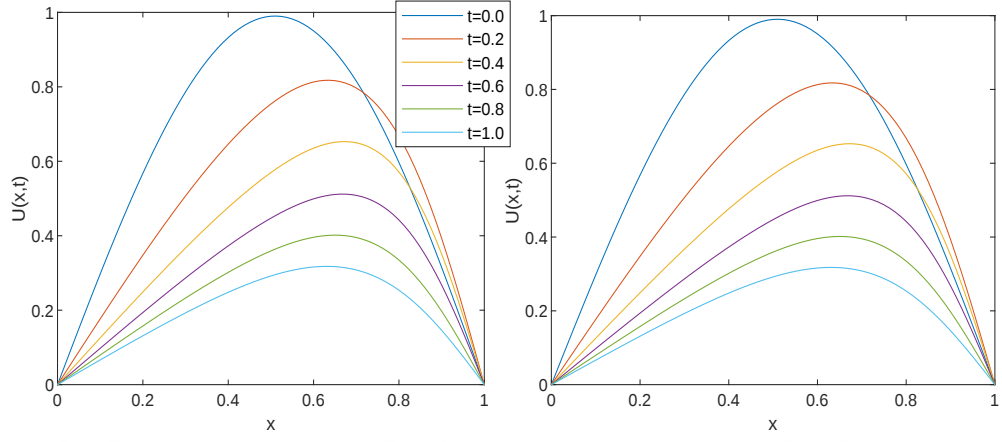
x	t	KBSGY	KuBSGY[57]	Analitik
				Çözüm
0.25	0.4	0.30889	0.30889	0.30889
	0.6	0.24074	0.24074	0.24074
	0.8	0.19568	0.19567	0.19568
	1.0	0.16257	0.16256	0.16257
	3.0	0.02720	0.02720	0.02720
0.50	0.4	0.56963	0.56961	0.56963
	0.6	0.44721	0.44719	0.44721
	0.8	0.35924	0.35923	0.35924
	1.0	0.29192	0.29191	0.29192
	3.0	0.04021	0.04020	0.04021
0.75	0.4	0.62544	0.62539	0.62544
	0.6	0.48722	0.48719	0.48722
	0.8	0.37392	0.37390	0.37392
	1.0	0.28747	0.28746	0.28747
	3.0	0.02977	0.02977	0.02977



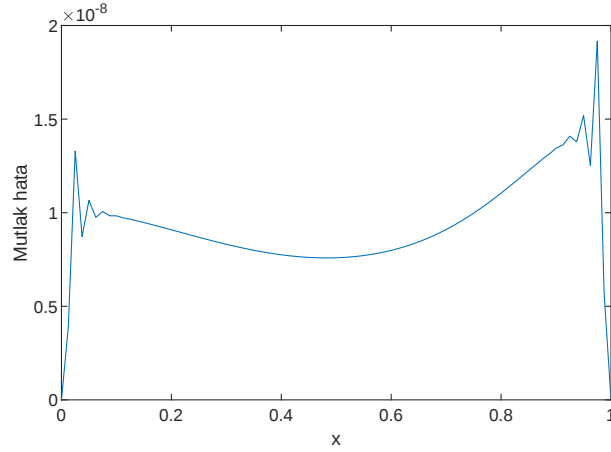
Şekil 4.1: $v = 1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözümleri(sol) ve analitik çözümleri(sağ)



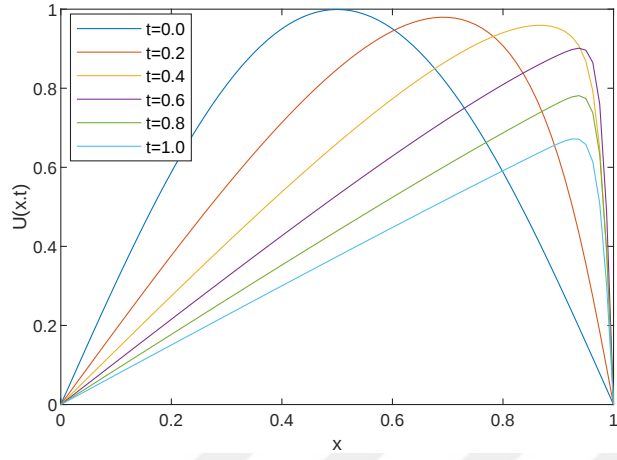
Şekil 4.2: $v = 1$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için $t = 0.25$ zamanında Problem 4.3.1'in sayısal çözümünün mutlak hatası



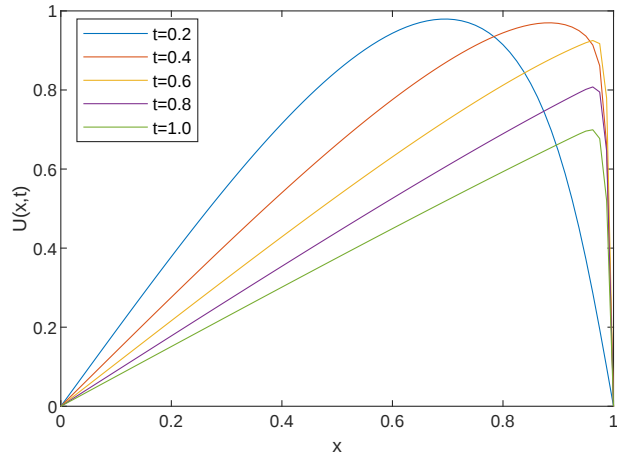
Şekil 4.3: $v = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)



Şekil 4.4: $v = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için $t = 1.0$ zamanında Problem 4.3.1'in sayısal çözümünün mutlak hatası



Şekil 4.5: $v = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü



Şekil 4.6: $v = 0.005$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.1'in KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü

4.4.2 Problem 4.3.2'nin KBSGY ile Çözümü

Problem 4.3.2 için farklı h değerlerinde KBSGY ile elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözüm ile kıyaslanması $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $t = 0.1$ anında Tablo 4.6'da, $v = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $t = 0.5$ anında Tablo 4.7'de ve $v = 0.01$, $\Delta t = 0.00001$, $t = 1$ anında Tablo 4.8'de verildi. Tablo 4.6 , Tablo 4.7 ve Tablo 4.8'de h değerlerinin küçük seçilmesiyle sayısal çözümün analitik çözüme daha yaklaştığı görüldü. Elde edilen sayısal sonuçların analitik sonuçlarla uyum içerisinde olduğu düşünülmektedir. Farklı t zamanları ve farklı x konumlarında $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v = 1$, $v = 0.1$, $v = 0.01$ için elde edilen sayısal çözümler Tablo 4.9'da verildi. v viskozite katsayısının küçük değerleri için sayısal sonuç ve analitik sonuçlar arasında uyum olduğu Tablo 4.9'da görüldü. $v = 0.01$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ anında elde edilen sayısal çözümlerin L_2 ve L_∞ hata normları [42] çalışması ile kıyaslanarak Tablo 4.10'da verildi ve [42] çalışmasındaki sonlu fark yöntemlerine nazaran KBSGY ile daha küçük hatalar elde edildiğinden Problem 4.3.2 için KBSGY'nin daha iyi çalıştığı Tablo 4.10'da görüldü. Farklı t zamanlarında $v = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.0125$ için sayısal çözümler elde edilerek [47–49] çalışmalarının sayısal sonuçlarıyla Tablo 4.11'de kıyaslandı. Tablo 4.11'de elde edilen sayısal sonuçların daha önce yapılan çalışmalarla ve analitik çözümle uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Tablo 4.11'deki kıyaslama neticesinde KBSGY'nin [48] ve [49] çalışmalarından daha iyi sonuçlar verdiği görüldü.

Farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin sayısal ve analitik çözümleri $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$, $v = 0.1$ için Şekil 4.7'de ve aynı parametreler için $t = 1$ anında mutlak hata grafiği Şekil 4.8'de verildi. $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$, $v = 0.01$ için Şekil 4.9'da sayısal ve analitik çözüm, $t = 1$ anındaki mutlak hata ise grafik olarak Şekil 4.10'de verildi. $v = 0.005$ ve $v = 0.0005$ küçük viskozite değerleri için farklı t zamanlarındaki sayısal sonuçlar Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de verildi.

Tablo 4.6: $v = 1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.1$ anında farklı h değerlerinde Problem 4.3.2'in KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması

x	Sayısal Çözüm				Analitik
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	Çözüm
0.1	0.112891	0.112893	0.112892	0.112892	0.112892
0.2	0.216254	0.216253	0.216252	0.216252	0.216252
0.3	0.300961	0.300966	0.300966	0.300966	0.300966
0.4	0.358858	0.358863	0.358863	0.358863	0.358863
0.5	0.383416	0.383423	0.383423	0.383422	0.383422
0.6	0.370654	0.370658	0.370658	0.370658	0.370658
0.7	0.320063	0.320066	0.320066	0.320066	0.320066
0.8	0.235375	0.235372	0.235371	0.235371	0.235371
0.9	0.124718	0.124719	0.124718	0.124718	0.124718
L_2	3.6951e-06	5.4480e-07	1.0599e-07	1.5611e-08	
L_∞	6.2256e-06	1.19170e-06	1.6595e-07	2.0908e-08	

$v = 0.005$ viskozite değerleri için sayısal çözümün mevcudiyeti sayısal yaklaşım olarak KBSGY'nin etkili olduğunu göstermektedir. Problem 4.3.2'nin v viskozite katsayısının küçülmesiyle şok dalgası oluşturduğu Şekil 4.7, Şekil 4.9 ve Şekil 4.11'de görülmektedir.

Tablo 4.7: $v = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 0.5$ anında farklı h değerlerinde Problem 4.3.2'in KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması

x	Sayısal Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.112635	0.112664	0.112664	0.112664	0.112664
0.2	0.223417	0.223452	0.223454	0.223454	0.223454
0.3	0.330055	0.330103	0.330105	0.330105	0.330105
0.4	0.429289	0.429316	0.429317	0.429317	0.429317
0.5	0.515406	0.515400	0.515399	0.515399	0.515398
0.6	0.577378	0.577326	0.577323	0.577323	0.577323
0.7	0.593139	0.593049	0.593044	0.593043	0.593043
0.8	0.523202	0.523105	0.523100	0.523100	0.523100
0.9	0.321825	0.321755	0.321752	0.321752	0.321752
L_2	5.7863e-05	3.0698e-06	1.8111e-07	1.8585e-08	
L_∞	1.0281e-04	6.0069e-06	3.4164e-07	3.4547e-08	

Tablo 4.8: $v = 0.01$, $\Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ anında farklı h değerlerinde Problem 4.3.2'in KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması

x	Sayısal Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	
0.1	0.078052	0.078087	0.078088	0.078089	0.078088
0.2	0.155934	0.155934	0.155934	0.155934	0.155934
0.3	0.233415	0.233305	0.233299	0.233298	0.233298
0.4	0.310091	0.309963	0.309954	0.309953	0.309953
0.5	0.385391	0.385660	0.385675	0.385676	0.385676
0.6	0.458593	0.460132	0.460229	0.460235	0.460236
0.7	0.528869	0.533074	0.533357	0.533375	0.533376
0.8	0.595313	0.604113	0.604738	0.604778	0.604781
0.9	0.656115	0.671862	0.673041	0.673118	0.673123
L_2	7.2612e-03	5.5309e-04	3.7469e-05	2.5553e-06	
L_∞	2.0784e-02	1.6160e-03	1.1602e-04	9.1995e-06	

Tablo 4.9: $v = 1, 0.1, 0.01, h = 0.0125, \Delta t = 0.00001$ için farklı t zamanında Problem 4.3.2'in KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik sonuçla kıyaslanması

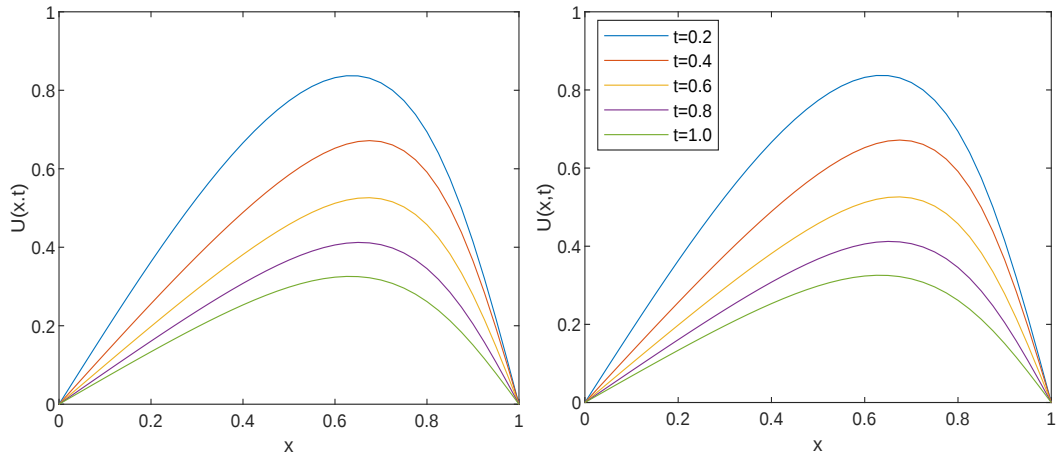
x	t	$v = 1$		$v = 0.1$		$v = 0.01$	
		Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.25	0.4	0.014004	0.014004	0.317523	0.317523	0.362262	0.362259
	0.6	0.001949	0.001949	0.246138	0.246138	0.282038	0.282037
	0.8	0.000271	0.000271	0.199555	0.199555	0.230452	0.230451
	1.0	0.000038	0.000038	0.165599	0.165599	0.194691	0.194690
	3.0	0.000000	0.000000	0.027759	0.027759	0.076134	0.076134
0.50	0.4	0.019849	0.019849	0.584537	0.584537	0.683612	0.683679
	0.6	0.002757	0.002757	0.457976	0.457976	0.548300	0.548316
	0.8	0.000383	0.000383	0.367398	0.367398	0.453709	0.453714
	1.0	0.000053	0.000053	0.298343	0.298343	0.385675	0.385676
	3.0	0.000000	0.000000	0.041065	0.041065	0.152180	0.152180
0.75	0.4	0.014067	0.014067	0.645616	0.645616	0.920049	0.920500
	0.6	0.001950	0.001950	0.502676	0.502676	0.782816	0.782994
	0.8	0.000271	0.000271	0.385336	0.385336	0.662651	0.662720
	1.0	0.000038	0.000038	0.295857	0.295857	0.569289	0.569319
	3.0	0.000000	0.000000	0.030440	0.030440	0.227743	0.227743

Tablo 4.10: $v = 0.01, \Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ anında Problem 4.3.2'in farklı h değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [42] çalışması ile kıyaslanması

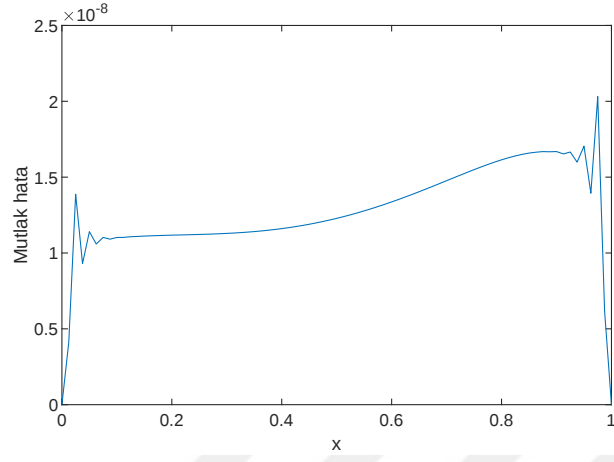
	L_2			
	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$
KBSGY	7.2612e-03	5.5309e-04	3.7466e-05	1.5720e-05
A-ÜSFY[42]	2.0002e-02	7.430e-03	2.111e-03	1.374e-03
K-ÜSFY[42]	1.9959e-02	7.387e-03	2.068e-03	1.331e-03
CN-ÜSFY[42]	1.9979e-02	7.407e-03	2.089e-03	1.351e-03
	L_∞			
	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$
KBSGY	2.0784e-02	1.6160e-03	1.1600e-04	4.9969e-05
A-ÜSFY[42]	4.7261e-02	1.7850e-02	5.220e-03	3.406e-03
K-ÜSFY[42]	4.7161e-02	1.7746e-02	5.112e-03	3.300e-03
CN-ÜSFY[42]	4.7208e-02	1.7796e-02	5.164e-03	3.351e-03

Tablo 4.11: $v = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.0125$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2' in sayısal sonuçlarının [47–49] çalışmaları ile kıyaslanması.

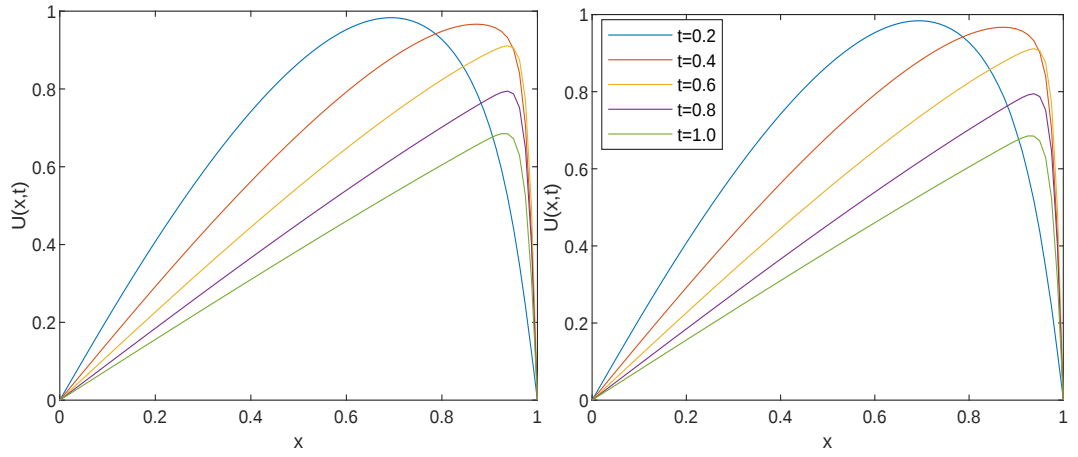
x	t	KBSGY	SF10[47]	KSF6[47]	HC[48]	SPY[49]	Analitik
0.25	0.4	0.317523	0.317523	0.317523	0.317121	0.317399	0.317523
	0.6	0.246138	0.246138	0.246138	0.246143	0.246058	0.246138
	0.8	0.199555	0.199555	0.199555	0.199531	0.199437	0.199555
	1.0	0.165599	0.165599	0.165599	0.165569	0.165529	0.165599
0.50	0.4	0.584537	0.584537	0.584537	0.584348	0.584429	0.584537
	0.6	0.457976	0.457976	0.457976	0.457902	0.457888	0.457976
	0.8	0.367398	0.367398	0.367398	0.367427	0.367320	0.367398
	1.0	0.298343	0.298343	0.298343	0.298203	0.298271	0.298343
0.75	0.4	0.645616	0.645616	0.645616	0.626990	0.645527	0.645616
	0.6	0.502676	0.502676	0.502676	0.477908	0.502564	0.502676
	0.8	0.345593	0.345593	0.345593	0.360630	0.385232	0.345593
	1.0	0.295857	0.295857	0.295857	0.272623	0.295779	0.295857



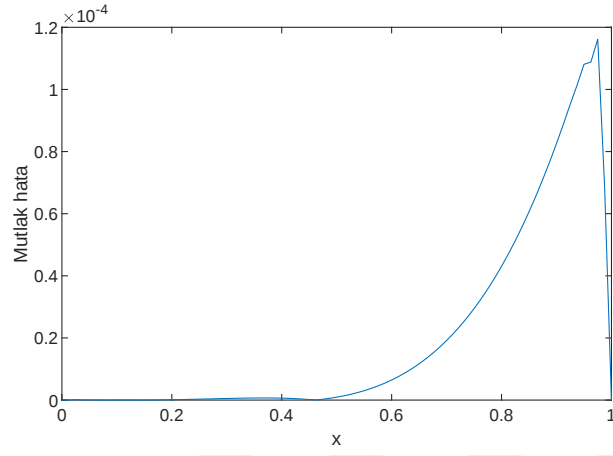
Şekil 4.7: $v = 0.1$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)



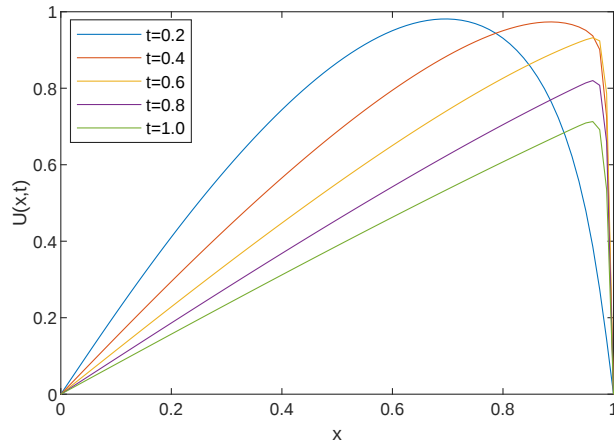
Şekil 4.8: $v = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için $t = 1.0$ zamanında Problem 4.3.2'nin sayısal çözümünün mutlak hatası



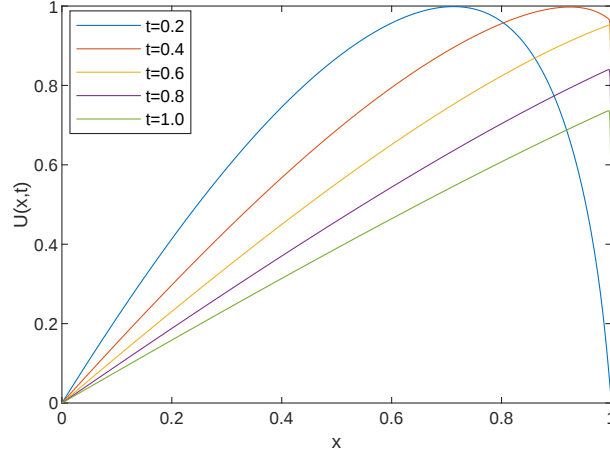
Şekil 4.9: $v = 0.01$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)



Şekil 4.10: $v = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ için $t = 1.0$ zamanında Problem 4.3.2'nin sayısal çözümünün mutlak hatası



Şekil 4.11: $v = 0.005$, $h = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü



Şekil 4.12: $v = 0.0005$, $h = 0.0005$, $\Delta t = 0.001$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.2'nin KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü

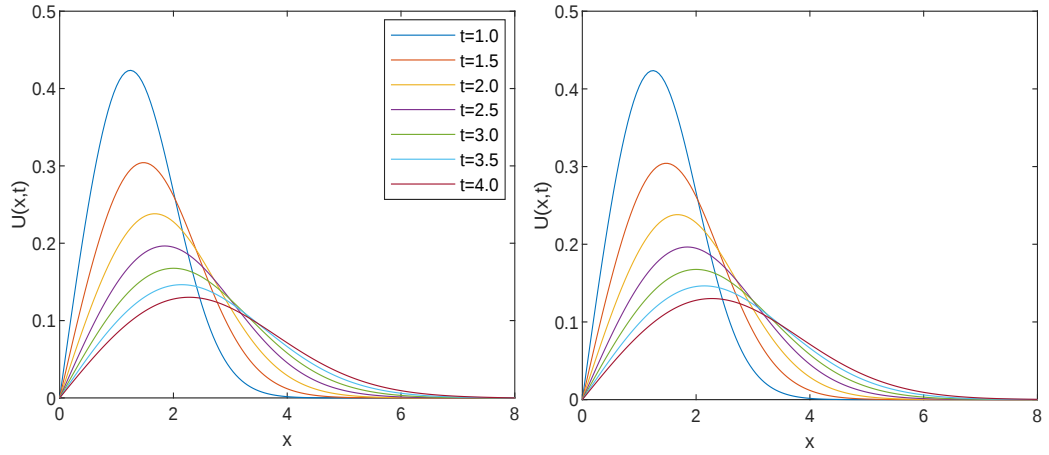
4.4.3 Problem 4.3.3'nin KBSGY ile Çözümü

Problem 4.3.3 için yöntemin iyi çalışıp çalışmadığını v 'nin küçük değerler seçilmesi durumunda yöntemin vereceği sonuçlar belirleyecektir. $v = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ için $[a, b] = [0, 8]$ aralığında $t = 1.5, t = 3.0, t = 4.5$ zamanlarındaki KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçlar ve analitik çözümle ve $t = 3.0$ zamanı için [78] çalışmasıyla kıyaslanarak Tablo 4.12'de verildi. Tablo 4.12'de KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçların analitik sonuçla ve [78] çalışmasındaki sayısal sonuçlarla uyum içerisinde olduğu görüldü. $\Delta t = 0.01$ ve $[a, b] = [0, 1]$, iken farklı t zamanlarındaki L_2 ve L_∞ hata normları v ve h 'nin farklı değerleri için hesaplanarak [43–46, 67] çalışmalarıyla kıyaslandı, elde edilen sonuçlar Tablo 4.13'de verildi. KBSGY'nin [43] çalışmasından kısmen daha büyük hatalar verdiği ve diğer çalışmalarda kullanılan yöntemlerden ise daha iyi sonuçlar verdiği Tablo 4.13'de görüldü. $v = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 4.3.3'ün farklı t zamanlarında elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak [37] çalışmasıyla Tablo 4.14 kıyaslandı. Tablo 4.14 incelendiğinde KBSGY'nin [37] çalışmasında kullanılan sonlu fark yöntemlerinden daha küçük hatalar verdiği

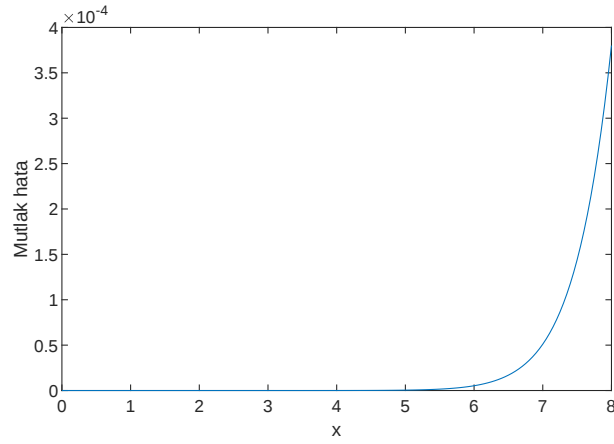
görülmektedir. $v = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için farklı t zamanlarında sayısal ve analitik sonuçlar Şekil 4.13'de ve mutlak hata $t = 4.0$ zamanında Şekil 4.14'de verildi. $v = 0.05$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için farklı t zamanlarında sayısal ve analitik sonuçlar Şekil 4.15'de verildi ve mutlak hata $t = 3.1$ anında Şekil 4.16'de gösterildi. $\Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$, $h = 0.005$ iken $v = 0.005$ için farklı t zamanlarında sayısal ve analitik sonuçlar Şekil 4.17'de ve $t = 3.1$ anında mutlak hata Şekil 4.18'de verildi. Farklı t zamanlarında $h = 0.0005$, $\Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 1]$ iken $v = 0.0005$ için Şekil 4.19'da sayısal ve analitik sonuçlar, Şekil 4.20'da $t = 3.1$ anında mutlak hata verildi. Daha küçük viskozite değeri için başlangıcın çok keskin olduğu ve şok dalgası izlenimi oluşturduğu Şekil 4.19'da görülmektedir. Şekil 4.15, Şekil 4.17 ve Şekil 4.19 'dan v 'nin daha büyük değerleri için grafiğin yayılımı daha hızlı olduğu görülmektedir. Şekil 4.16, Şekil 4.18 ve Şekil 4.20 'den v viskozite katsayısının değerleri küçüldükçe mutlak hatanın büyüdüğü görüldü.

Tablo 4.12: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ iken $[a, b] = [0, 8]$ aralığında Problem 4.3.3'ün farklı t zamanlarındaki sayısal çözümlerinin analitik çözümle ve $t = 3.0$ için [78] çalışmasıyla kıyaslanması.

x	$t = 1.5$		$t = 3.0$		$t = 4.5$	
	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik
0.5	0.15327	0.15327	0.06426	0.06426	0.03799	0.03799
1.0	0.26577	0.26577	0.11880	0.11880	0.07187	0.07187
1.5	0.30413	0.30413	0.15509	0.15509	0.09793	0.09793
2.0	0.26142	0.26142	0.16762	0.16762	0.11339	0.11339
2.5	0.17217	0.17217	0.15630	0.15630	0.11698	0.11698
3.0	0.08807	0.08807	0.12738	0.12738	0.10949	0.10949
3.5	0.03582	0.03582	0.09133	0.09133	0.09369	0.09369
4.0	0.01186	0.01186	0.05798	0.0578	0.07361	0.07361
4.5	0.00325	0.00325	0.03284	0.03284	0.05330	0.05330
5.0	0.00074	0.00074	0.01674	0.01674	0.03572	0.03572
L_2	3.47104e-08		1.89802e-05		4.35783e-04	
L_∞	5.97896e-08		4.06644e-05		7.74555e-04	



Şekil 4.13: $v = 0.5, h = 0.05, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)



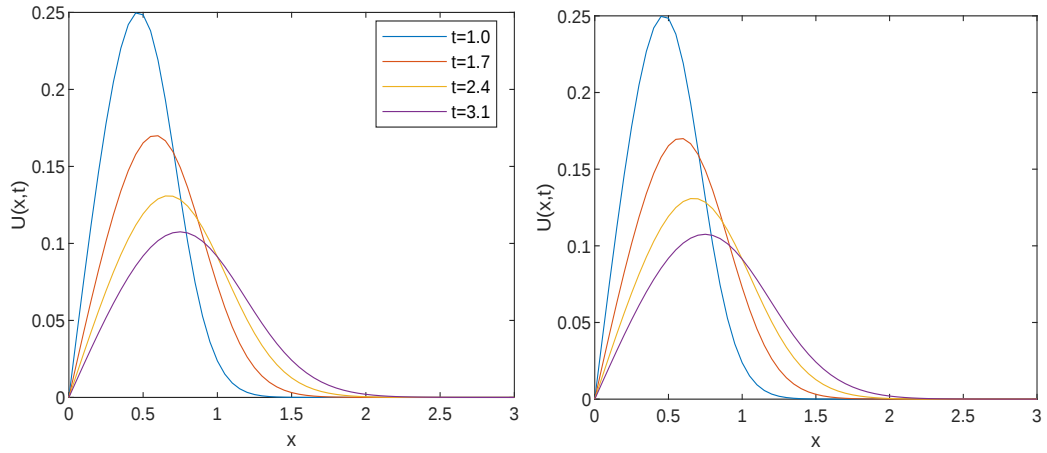
Şekil 4.14: $v = 0.5, h = 0.05, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için $t = 4.0$ zamanında Problem 4.3.3'ün sayısal çözümünün mutlak hatası

Tablo 4.13: $\Delta t = 0.01$ ve $[a, b] = [0, 1]$ için Problem 4.3.3'ün farklı v ve h değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [43–46, 67] çalışmalarıyla kıyaslanması

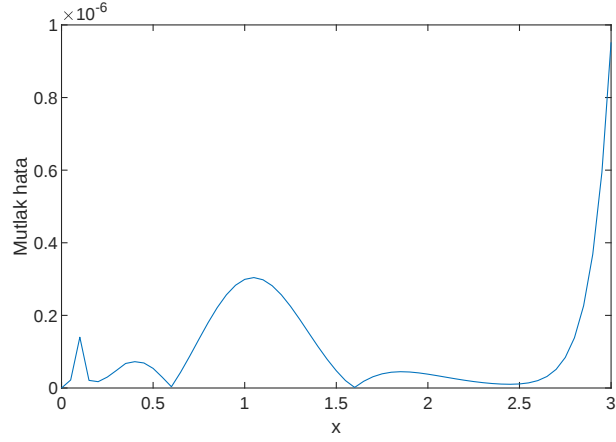
$h = 0.005, v = 0.005$					
		KBSGY	[43]	KBSGY[67]	KBSCA1[46]
$t = 1.7$	L_2	$2.0454e-05$	$1.063e-05$	$3.5126e-04$	$3.5008e-04$
	L_∞	$6.3558e-05$	$3.987e-05$	$1.2073e-03$	$1.2118e-03$
$t = 2.4$	L_2	$1.4741e-05$	$8.90e-06$	$2.4448e-04$	$2.4439e-04$
	L_∞	$6.4639e-05$	$5.837e-05$	$8.0176e-04$	$8.0771e-04$
$t = 3.1$	L_2	$6.4932e-04$	$6.0207e-04$	$6.3340e-04$	$6.3309e-04$
	L_∞	$4.7906e-03$	$4.4348e-03$	$4.7906e-03$	$4.7906e-03$
$h = 0.02, v = 0.005$					
		KBSGY	ÜBSGY[44]	KuarBSGY[45]	KBSCA1[46]
$t = 1.8$	L_2	$1.9177e-05$		$9.80e-06$	$3.3376e-04$
	L_∞	$5.9290e-04$	$8.2608e-03$	$3.546e-05$	$1.1526e-03$
$t = 2.4$	L_2	$3.9735e-05$		$1.167e-05$	$2.4522e-04$
	L_∞	$1.1199e-04$	$7.4205e-03$	$6.464e-05$	$8.0008e-04$
$t = 3.2$	L_2	$9.8643e-04$		$1.26114e-03$	$1.2298e-03$
	L_∞	$7.4915e-03$	$7.4915e-03$	$7.49147e-03$	$7.4915e-03$
$h = 0.02, v = 0.01$					
		KBSGY	ÜBSGY[44]	KuarBSGY[45]	KBSCA1[46]
$t = 1.7$	L_2	$1.6789e-05$		$1.665e-05$	$1.7792e-04$
	L_∞	$9.5921e-04$	$8.0865e-03$	$9.592e-05$	$4.7456e-04$
$t = 2.1$	L_2	$2.0830e-04$		$2.0839e-04$	$2.4875e-04$
	L_∞	$1.1476e-03$	$7.5352e-03$	$1.1476e-03$	$1.1476e-03$
$t = 2.6$	L_2	$1.5727e-03$		$1.5729e-03$	$1.5411e-03$
	L_∞	$8.0680e-03$	$8.0680e-03$	$8.0680e-03$	$8.0680e-03$

Tablo 4.14: $v = 0.5$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 8]$ için Problem 4.3.3' ün farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hatalarının [37] çalışmasıyla kıyaslanması

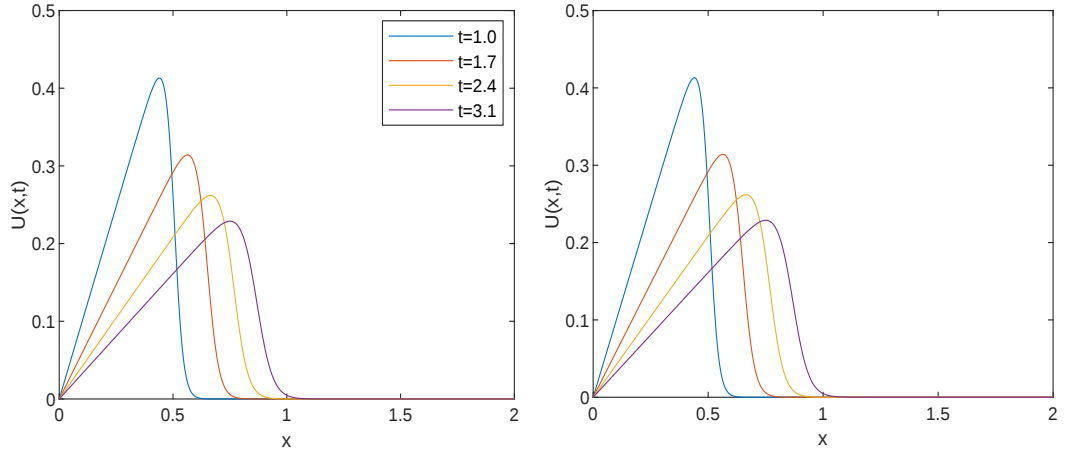
		KBSGY	ASFY[37]	KSFY[37]	CNSFY[37]	HSFY[37]
$t = 1.5$	L_2	$3.4710e-08$	$5.157e-05$	$4.768e-05$	$4.959e-05$	$4.972e-05$
	L_∞	$5.9790e-08$	$1.2480e-05$	$1.1255e-04$	$1.1856e-04$	$1.1891e-05$
$t = 3.0$	L_2	$1.8980e-05$	$1.398e-05$	$1.267e-05$	$1.323e-05$	$1.328e-05$
	L_∞	$4.0664e-05$	$3.573e-05$	$3.572e-05$	$3.573e-05$	$3.564e-05$
$t = 4.5$	L_2	$4.3578e-04$	$1.4083e-04$	$1.4076e-04$	$1.4079e-04$	$1.4056e-04$
	L_∞	$7.7456e-04$	$7.1275e-04$	$7.1273e-04$	$7.1274e-04$	$7.1160e-04$



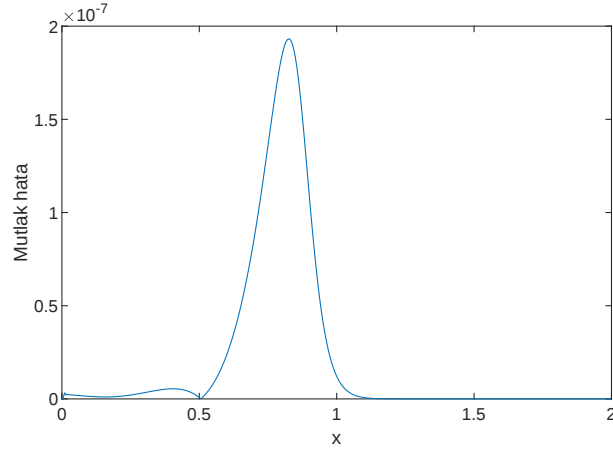
Şekil 4.15: $v = 0.05$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)



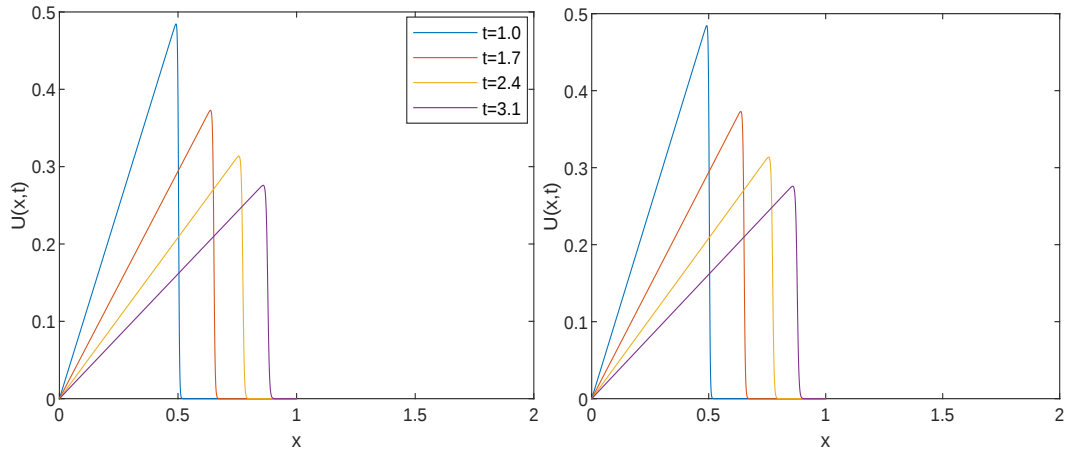
Şekil 4.16: $v = 0.05, h = 0.05, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için $t = 3.1$ zamanında Problem 4.3.3'ün sayısal çözümünün mutlak hatası



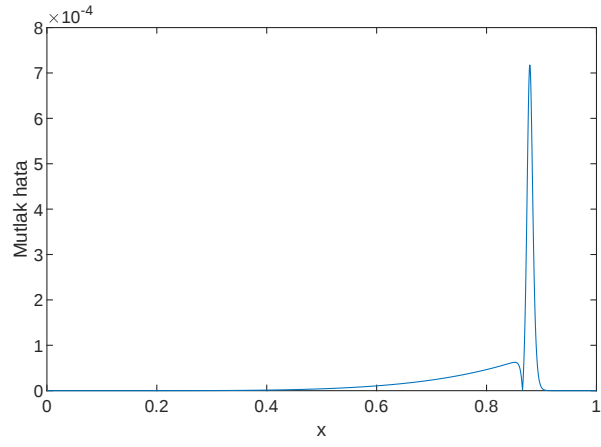
Şekil 4.17: $v = 0.005, h = 0.005, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)



Şekil 4.18: $v = 0.005, h = 0.005, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için $t = 3.1$ zamanında Problem 4.3.3'ün sayısal çözümünün mutlak hatası



Şekil 4.19: $v = 0.0005, h = 0.0005, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 1]$ için farklı t zamanlarında Problem 4.3.3'ün KBSGY ile elde edilen sayısal çözümü(sol) ve analitik çözümü(sağ)



Şekil 4.20: $v = 0.0005, h = 0.0005, \Delta t = 0.0001$ ve $[a, b] = [0, 3]$ için $t = 3.1$ zamanında Problem 4.3.3'ün sayısal çözümünün mutlak hatası

5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde 1-boyutlu lineer ısı denklemi için Bölüm 3’de Dirichlet, Neumann ve Robin sınır şartları altında model problemlere kübik B-spline Galerkin yöntemiyle sayısal yaklaşımlar yapıldı. Elde edilen sayısal sonuçların analitik sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü. L_2 ortalama hata normu ve L_∞ maksimum hata normu hesap edilerek yöntemin iyi sonuçlar verdiği görüldü.

Bölüm 4’de bir boyutlu Burgers’ denklemin Hopf-Cole dönüşümü uygulanarak denklem homojen Neumann sınır şartlı ısı denkleminde dönüştürüldü. Üç farklı model problem üzerinden sayısal sonuçlar elde edilerek daha önce yapılan çalışmalardan ASFY, KSFY, CNSFY, AÜSFY, KÜSFY ile KBSGY yöntemleriyle kıyaslamalar yapıldı ve tezde kullanılan KBSGY’nden elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının diğer çalışmalardan daha iyi değerler verdiği gözlemlendiğinden KBSGY’nin kullanışlı olduğu düşünülmektedir. İlaveten Problem 4.3.1’de viskozite katsayısının çok küçük değerleri için ($v < 0.01$) sayısal çözümün bulunabilmesi, Problem 4.3.2’nin $v = 0.005$ viskozite değerleri için sayısal çözümün mevcudiyeti yöntemin etkili ve güçlü olduğunu ve Problem 4.3.3’de $v = 0.0005$ için Şekil 4.19’de görüldüğü gibi şok dalgası izlenimi oluşturmaması Burgers denkleminin karakteristik yapısıyla uyumlu olduğunu göstermektedir.

Sonuç olarak; Burgers’ denkleminin model problemlerine Hopf-Cole dönüşümü uygulanarak KBSGY ile elde edilen sayısal sonuçların literatürdeki trigonometrik, üstel ve kuadratik baz fonksiyonu seçilen Galerkin yönteminden daha iyi sonuçlar verdiği ve KBSGY’nin sonlu elemanlar yöntemi çalışan araştırmacıların ileriki çalışmalarında fayda sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] J.N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, 2014.
- [2] W.A. Strauss, *An introduction partial differential equations*, Wiley, New York., 1992.
- [3] A.M. Wazwaz, *The Methods and Applications Partial differential equations*, Balkema Publishers, Netherlands, 2002.
- [4] D.W. Pepper, J.C. Heinrich, *The Finite Element Method Basic Concepts and Applications*, Taylor & Francis, New York, 2005.
- [5] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*, Wiley, USA, 1978.
- [6] D.G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, Cengage Learning, Boston, 2018.
- [7] M.N. Ozişik, *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, CRC Press., Florida, 1994.
- [8] B. Saka, *RLW ve K-S Denklemlerinin B-spline Kolokeyşin Metodları ile Çözümleri*, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2002.
- [9] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Sixth ed., Thomson, 2008.
- [10] C.D. Boor, *A practical Guide to Splines*. Springer Inc., 366s., New York, 1978.
- [11] F.L. Stasa, *Applied Finite Element Analysis for Engineers*, CBS College Publishing, New York, 1985.
- [12] D.L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*, Fourth Edition, Thomson, 2007.
- [13] R.L. Burden, J.D. Faires, *Numerical Analysis*, Ninth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, Boston, USA, 2010.
- [14] I.J. Schoenberg, *Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions*, **Q. Appl. Math.**, 4: 45-99 (1946), 112-141.
- [15] I. Dağ, *Studies of B-spline Finite Elements*, Ph. D. Thesis, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (UK),1994.

- [16] K. Höllig, *Finite element methods with B-splines*, **SIAM**, 51:1 (2003).
- [17] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [18] H. Nguyen, J. Reynen, *A space-time finite element approach to Burgers' equation*, C.Taylor et al. (Eds.), **Numerical Method for Non-linear Problems**, 2 (1982), 718–728.
- [19] B.A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York and London, 1972.
- [20] K.A. Woodbury, *Vehicle Data Sheets*, The University of Alabama Collage of Engineering. <https://www.me.ua.edu/me611/f02/pdf/mwr.pdf> (on-line 28 Jun, 2019),
- [21] L.E. Lindgren, *From Weighted Residual Methods to Finite Element Methods*, (2009). https://www.ltu.se/cms_fs/1.47275!/mwr_galerkin_fem.pdf (on-line 28 Jun, 2019).
- [22] P.M. Prenter, *Splines and variational methods*, Wiley, New York, 1975.
- [23] J. Rashidinia, S. Sharifi, *Survey of B-spline functions to approximate the solution of mathematical problems*, Springer, **Math. Sci.**, 6:48 (2012).
- [24] O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, Third ed., McGraw-Hill., London, 1977.
- [25] S. Dhawan, S. Kumar, *A Galerkin B-Spline Approach to One Dimensionla Heat Equation*, **IJRRAS**, 1:1 (2009), 47-57.
- [26] S. Dhawan, S. Kumar, *A Numerical Solution Of One Dimensional Heat Equation Using Cubic B-Spline Basis Functions*, **IJRRAS**, 1:1 (2009), 71-77.
- [27] Y.A. Çengel, *Isı ve Kütle Transferi Pratik Bir Yaklaşım*, Güven Bilimsel Kitabevi, Üçüncü Baskıdan Çeviri, İzmir, 2011, p.38-73.
- [28] T.L. Bergman, A.S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Wiley, 8th Edition, USA, 2017.
- [29] I.J. Marwah and M.G. Chopra, *Transient Heat Transfer in a slab with Heat Generation*, **Defence Sci. J.**, 32:2 (1982), 143-149.
- [30] E.A. Elias, R. Cichota, H.H. Torriani, Q.D.J. Lier, *Analytical Soil-Temperature Model: Correction for Temporal Variation of Daily Amplitude*, **SSSAJ**, 68:3 (2014), 784-788.

- [31] F.D. Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab: A natural analytic approach*, **Int. J. Heat. Mass. Tran.**, Vol. 43:19 (2000), 3607-3619.
- [32] X. Lu, P. Tervol, M. Viljanen, *An efficient analytical solution to the transient heat conduction in one dimensional hollow composite cylinder*, **J. Phys. A-Math. Gen.**, 38:47 (2005), 10145-10155.
- [33] S. Kutluay, *Sonlu Fark Yöntemleri*, Basılmamış Ders Notları.
- [34] A. Şahin, *Burger Denkleminin B-Spline Fonksiyonlar Yardımıyla Nümerik Çözümü*, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya, 2004
- [35] D. Irk, *Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerinin B-spline Sonlu Elemanlar Çözümleri*, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2007.
- [36] İ. Dağ, B. Saka, D. Irk, *Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines*, **J. Comput. Appl. Math.**, 190:1-2 (2006), 532-547.
- [37] Y.Uçar, *1-Boyutlu Burgers' Tipi Denklemlerin Sonlu Fark Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2005.
- [38] O. Chakrone, O. Diyer, D. Sbibi, *Numerical solution of Burger's equation based on cubic B-splines quasi-interpolants and matrix arguments*, **BSPM**, 33:2 (2015), 109-119.
- [39] S. Kutluay, A.R. Bahadır, A. Özdeş, *Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference methods*, **J. Comput. Appl. Math.**, 103:2 (1999), 251-261.
- [40] A.R. Mitchell, D.F. Griffiths, *The finite Difference Method in Partial Differential Equations*, Wiley, Toronto, 1990.
- [41] B.Bulut, *Klasik Sonlu Fark Yöntemi ve Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2007.
- [42] B. İnan, *Burger Denkleminin Üstel Sonlu Fark Yöntemleri İle Çözümü*, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2014.
- [43] H. Dalman, *Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Kuartik B-Spline Kolokeyşin Metodu ile Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2009.
- [44] M. Z. Gorgulu, I. Dag, D. Irk, *Galerkin method for the numerical solution of the Burgers' equation by using exponential B-splines*, arXiv:1604.04266v1, 2016.

- [45] B. Saka, I. Dag, *Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation*, **Appl. Math. Comp.**, 215:2 (2009), 746-758.
- [46] B. Saka, I. Dag, *A numerical study of the Burgers' equation*, **JFranklin**, 345:4 (2008), 328-348.
- [47] A. Zeytinoğlu, *Burgers' Denklemlerinin Bazı Yaklaşık Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 2010.
- [48] M. Gülsu, T. Öziş, *Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation*, **Appl. Math. Comp.**, 171:2 (2005), 1192-1200.
- [49] M. Gülsu, *A finite difference approach for solution of Burgers' equation*, **Appl. Math. Comp.**, 175:2 (2006), 1245-1255.
- [50] R.S. Jonson, *Shallow water waves in a viscous fluid the undular bore*, **Physics of Fluids**, 15 (1972), 1993-1999.
- [51] J.M. Burgers, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, **Advan. Appl. Mech.**, 1 (1948), 171-199.
- [52] J.D. Cole, *On a quasi linear parabolic equation occuring in aerodynamics*, **Quart. Appl. Math.**, 9 (1951), 225-236.
- [53] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, **Mon. Weather Rev.**, 43 (1915), 163-170,.
- [54] E. Hopf, *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* , **Commun. Pure Appl. Math.**, 3 (1950), 201-230.
- [55] E.L. Miller, *Predictor-corrector studies of Burger's model of turbulent flow*, M.S. Thesis, University of Delaware, Newark, DE, 1966.
- [56] Y. Sheng, T. Zhang, *The finite volume method for two-dimensional Burgers' equation*, **Pers. Ubiquit. Comput.**, 22:5-6 (2018), 1133-1139.
- [57] T. Öziş, A. Esen, S. Kutluay, *Numerical solution of Burgers' equation by quadratic B-spline finite elements*, **Appl. Math. Comp.**, 165:1 (2005) 237-249.
- [58] B. Inan, A.R. Bahadır, *Numerical solution of the one-dimensional Burgers' equation: Implicit and fully implicit exponential finite difference methods*, **Pramana**, 81:4 (2013), 547-556.
- [59] S. Kutluay, Y. Uçar, *Numerical solutions of the coupled Burgers' equation by the Galerkin quadratic B-spline finite element method*, Wiley Inc., **Math. Method Appl. Sci.**, 36:17 (2013), 2403-2415.
- [60] S.B.G. Karakoç, A. Başhan, T. Geyikli, *Two Different Methods for Numerical Solution of the Modified Burgers' Equation*, **TSWJ**, 2014 (2014).

- [61] M. Xu, R. H. Wang, J.H. Zhang, Q. Fang, *A novel numerical scheme for solving Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.**, 217:9 (2011), 4473–4482.
- [62] P.A. Lagerstrom, J.D. Cole, L. Trilling, *Problems in the theory of viscous compressible fluids*, Purdue University Libraries, California, 1949.
- [63] T. Öziş, E. N. Aksan, A. Özdeş, *A finite element approach for solution of Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.**, 139:2-3 (2003), 417-428.
- [64] A. Doğan, *A Galerkin finite element approach to Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.**, 157:2 (2004), 331-346.
- [65] I. Dağ, D. Irk, B. Saka, *A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines*, **Appl. Math. Comput.**, 163:1 (2005), 199-211.
- [66] İ. Dağ, D. Irk, M. Tombul, *Least-squares finite element method for the advection-diffusion equation*, **Appl. Math. Comput.**, 173:1 (2006), 554-565.
- [67] I. Dag, B. Saka, A. Boz, *B-spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.**, 166:3 (2005), 506-522.
- [68] A.A. Soliman, *A Galerkin Solution for Burgers' Equation Using Cubic B-Spline Finite Elements*, **Abstr. Appl. Anal.**, 2012 (2012).
- [69] V. Mukundan, A. Awasthi, *Efficient numerical techniques for Burgers' equation*, **Appl. Math. Comput.**, 262:1 (2015), 282-297.
- [70] M. Seydaoğlu, U. Erdoğan, T. Öziş, *Numerical solution of Burgers' equation with high order splitting methods*, **J. Comput. Appl. Math.**, 29:1 (2015), 410-421.
- [71] B. Ay, İ. Dag, M.Z. Gorgulu, *Trigonometric quadratic B-spline subdomain Galerkin algorithm for the Burgers' equation*, **Open Phys.**, 13:1 (2015), 400-406.
- [72] M.P. Bonkile, A. Awashti, S. Jarayaj, *Comparative numerical investigation of Burgers' equation with and without Hopf-Cole transformation*, **Inder Sci., IJConvC**, 2:1 (2016), 54-78.
- [73] A.I. Singh, *Burgers' equation: A study using method of lines*, Taylor&Francis Online, **JIOS.**, 37:4 (2016), 641-652.
- [74] H.O. Bakodah, N.A. Al-Zaid, M. Mirzazadeh, Q. Zhou, *Decomposition method for Solving Burgers' Equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions*, Elsevier Sci., **Optik**, 130 (2016), 1339-1346.

- [75] M. Tamsir, N. Dhiman, V.K. Srivastava, *Extended modified cubic B-spline algorithm for nonlinear Burgers' equation*, Elsevier Sci., **BJBAS**, 5:3 (2016), 244-254.
- [76] M. Yousefi, J. Rashidinia, M. Yousefi, M. Moudi, *Numerical solution of Burgers' equation by B-spline collocation*, **J. Afr. Math. Un., Afrika Matematika**, 27:7-8 (2016), 1287-1293.
- [77] S. Kutluay, Y. Uçar, N.M. Yağmurlu, *Numerical Solutions of the Modified Burgers' Equation by a Cubic B-spline Collocation Method*, **Bull. Malays. Math. Sci. Soc.**, 39:4 (2016), 1603-1614.
- [78] S. Kutluay, A. Esen, *A lumped Galerkin method for solving the Burgers' equation*, **Int. J. Comput. Math.**, 81:11 (2004), 1433-1444.
- [79] G. Arora, V. Joshi, *A computational approach using modified trigonometric cubic B-spline for numerical solution of Burgers' equation in one and two dimensions*, **Alex. Eng. J.**, 57:2 (2018), 1087-1098
- [80] A. Adib, D. Poorveis, F. Mehraban, *Comparison between results of solution of Burgers' equation and Laplace's equation by Galerkin and least-square finite element methods*, Springer, **Applied Water Science**, 8:42 (2018).
- [81] C. Lakshmi, A. Awasthi, *Numerical simulation of Burgers' equation using cubic B-splines*, **Nonlinear Engineering** , 6:1 (2017), 61-77.
- [82] Y. Chen, T. Zhang, *A weak Galerkin finite element method for Burgers' equation*, Elsevier Sci., **J. Comput. Appl. Math.**, 348 (2018), 103-119.
- [83] Y. Uçar, N.M. Yağmurlu, İ. Çelikkaya, *Operator splitting for numerical solution of the modified Burgers' equation using finite element method*, Wiley Inc., **Numer. Meth. Part. D.**, 35:2 (2018), 478-492.
- [84] S. Ballem, K. Viswanadham, D. Srinivasacharya and K.S. Reddy(eds.), *Numerical Solution of Sixth Order Boundary Value Problems by Galerkin Method with Quartic B-splines*, Springer, **Lecture Notes in Mechanical Engineering, NHTFF 2018**, (2019), 505-510.

ÖZGEÇMİŞ

14.04.1986 tarihinde Malatya’ da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya’da tamamladı. 2005-2009 yılları arasında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. 2009-2010 yılında Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü’nde tezsiz yüksek lisans yaptı. 2011-2012 yılında Ankara Asfa Koleji’nde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2015-2016 eğitim-öğretim yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimine başladı. Hala Malatya Afet ve Acil Durum Müdürlüğü’nde memur olarak görev yapmaktadırlar olup evli ve 2 çocuk babasıdır.

