

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGERS DENKLEMİNİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMİ İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ezgi GÜLEŞE

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine Nesligül AKSAN

AĞUSTOS 2024

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGERS DENKLEMİNİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMİ İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ezgi GÜLEŞE
(36203614043)

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine Nesligül AKSAN

AĞUSTOS 2024

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Öncelikle danışmanlığımı üstlenen ve tez çalışmamın konusunun belirlenmesinden tamamlanmasına kadar olan tüm süreçte desteklerini esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Emine Nesligül AKSAN' a, tezimde kullandığım Matlab programlarının yazımında büyük katkısından dolayı Prof. Dr. Yusuf UÇAR' a ve tezin yazımında yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU' ya ve Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR' e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bölüm başkanımız Prof. Dr. Alaattin ESEN' e ve başta Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY olmak üzere tüm bölüm hocalarımla birlikte kıymetli ailemede en içten teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Burgers Denkleminin Klasik Sonlu Fark Yöntemi İle Nümerik Çözümleri ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ezgi GÜLEŞE



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Sonlu Fark Yöntemleri	5
2.1.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi	7
2.1.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi	8
2.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi	9
2.1.4 Kararlılık Analizi.....	11
3. MODEL PROBLEMLER	13
4. BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ.....	15
4.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi	15
4.1.1 Nümerik Sonuçlar	16
4.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi	24
4.2.1 Nümerik Sonuçlar	25
4.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi	34
4.3.1 Nümerik Sonuçlar	35
4.4 Kararlılık Analizi	58
5. SONUÇ.....	60
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	65

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 : Problem 1' in; $t = 0.1$ de $v = 1$ ve $k = 0.00001$ değerleri için farklı h değerlerine karşılık yaklaşık çözümler ile tam çözümün karşılaştırılması	16
Çizelge 4.2 : Problem 1' in; farklı zamanlarda $h = 0.005$, $k = 0.0001$ ve farklı viskosite değerleri için yaklaşık çözümleri ile analitik çözümlerin karşılaştırılması ...	17
Çizelge 4.3 : Problem 1' in ; $t = 0.1$ de $v = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı h değerleri için elde edilen nümerik çözümlerdeki hata normlarının literatürdeki bazı çalışmalarda elde edilen hata normları ile karşılaştırılması	17
Çizelge 4.4 : Problem 2'nin $t = 2$ de $v = 0.5$, $k = 0.0001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	18
Çizelge 4.5 : Problem 2' nin farklı viskosite değerleri için $t = 2$ de $h = 0.1$ ve farklı zaman adımları alınarak L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.....	18
Çizelge 4.6 : Problem 2' nin $h = 0.1$, $k = 0.0001$ ve farklı viskosite değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması	19
Çizelge 4.7 : Problem 2' nin farklı zamanlarda $h = 0.1$, $k = 0.0001$ farklı viskosite değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları.....	19
Çizelge 4.8 : Problem 3' ün $t = 0.1$ de $v = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	20
Çizelge 4.9 : Problem 3' ün $t = 0.1$ de farklı viskosite değerleri alınarak $h = 0.05$ ve farklı k değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları	20
Çizelge 4.10 : Problem 3' ün farklı zamanlarda $v = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	21
Çizelge 4.11 : Problem 4' ün farklı zamanlarda farklı viskosite değerleri ve $h = 0.01$ için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması	22
Çizelge 4.12 : Problem 4' ün farklı zamanlarda $v = 0.002$, $k = 0.005$ ve farklı h değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları	22
Çizelge 4.13 : Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskosite değerlerinde $h = 0.01$, $k = 0.002$ için L_2 ve L_∞ hata normları	23
Çizelge 4.14 : Problem 5' in $t = 0.1$ de $v = 1$, $k = 0.00005$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	23
Çizelge 4.15 : Problem 5' in $t = 0.1$ de farklı viskosite değerlerinde $h = 0.025$, $k = 0.0001$ için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması	24
Çizelge 4.16 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $v = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümü ile tam çözümünün karşılaştırılması	26
Çizelge 4.17 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $v = 1$, $h = 0.025$ ve farklı k değerleri için nümerik çözümü ile tam çözümünün karşılaştırılması.....	26
Çizelge 4.18 : Problem 1' in farklı zamanlarda $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ ve farklı v değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	27
Çizelge 4.19 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $v = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı h değerleri için elde edilen nümerik çözümlerdeki hata normlarının literatürdeki bazı çalışmalarda elde edilen hata normları ile karşılaştırılması.....	27
Çizelge 4.20 : Problem 2' nin $t = 0.1$ de $v = 0.5$, $k = 0.0001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	28
Çizelge 4.21 : Problem 2' nin $h = 0.1$, $k = 0.001$ ve farklı viskosite değerleri için nümerik çözümü ile tam çözümlerinin karşılaştırılması	28

Çizelge 4.22: Problem 2' nin farklı zaman adımlarında ve farklı viskozite değerlerinde $h = 0.1$ de $k = 0.01$ için L_2 ve L_∞ hata normları	29
Çizelge 4.23: Problem 3' ün $t = 0.1$ zamanında $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümler ile tam çözümün karşılaştırılması	29
Çizelge 4.24: Problem 3' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.01$, $k = 0.01$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	30
Çizelge 4.25: Problem 3' ün $t = 0.5$, $\nu = 0.01$, $h = 1/36$, $k = 0.025$ kapalı yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçların literatürdeki bazı sonuçlar ile karşılaştırılması	30
Çizelge 4.26: Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskozite değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.001$ için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	31
Çizelge 4.27: Problem 4' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.002$, $k = 0.005$ ve farklı h değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları	32
Çizelge 4.28: Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskozite değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.002$ için L_2 ve L_∞ hata normları	32
Çizelge 4.29: Problem 5' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.0001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	33
Çizelge 4.30: Problem 5' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $h = 0.0125$ ve farklı k değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	33
Çizelge 4.31: Problem 5' in $t = 0.1$ de farklı viskozite değerleri için $h = 0.0125$, $k = 0.00005$ olarak nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması ...	34
Çizelge 4.32: Problem 1' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümü ile tam çözümünün karşılaştırılması	35
Çizelge 4.33: Problem 1' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $h = 0.025$ ve farklı k değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	36
Çizelge 4.34: Problem 1' in $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ farklı viskozite değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	36
Çizelge 4.35: Problem 1' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00001$ farklı h değerleri için elde edilen nümerik çözümlerdeki hata normlarının literatürdeki bazı çalışmalarda elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması	37
Çizelge 4.36: Problem 2' nin $t = 0.1$ de $\nu = 0.5$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	37
Çizelge 4.37: Problem 2' nin $h = 0.1$, $k = 0.001$ ve farklı viskozite değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması	38
Çizelge 4.38: Problem 2' nin $h = 0.1$ de $k = 0.01$ ve farklı zaman adımlarında ve farklı viskozite değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları	38
Çizelge 4.39: Problem 3' ün $t = 0.1$ de $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	39
Çizelge 4.40: Problem 3' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.01$, $k = 0.005$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	39
Çizelge 4.41: Problem 3' ün $t = 0.5$, $\nu = 0.01$, $h = 1/36$, $k = 0.025$ Crank-Nicolson yöntemi ile bulunan nümerik sonuçların literatürdeki bazı sonuçlar ile karşılaştırılması	40
Çizelge 4.42: Problem 4' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.002$, $k = 0.005$ ve farklı h değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları	41

Çizelge 4.43: Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskosite değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.002$ için L_2 ve L_∞ hata normları.....	41
Çizelge 4.44: Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskosite değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.001$ için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması.....	42
Çizelge 4.45: Problem 5' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00005$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması	43
Çizelge 4.46: Problem 5' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $h = 0.0125$ ve farklı k değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması.....	43
Çizelge 4.47: Problem 5' in $t = 0.1$ de farklı viskosite değerleri için $h = 0.0125$, $k = 0.0005$ olarak nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	44



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 : Problem 1' in $\nu = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.05$ (kırmızı), $t = 0.1$ (mor), $t = 0.15$ (mavi), $t = 0.20$ (lacivert), $t = 0.25$ (sarı) gösterimi.	45
Şekil 4.2 : Problem 1' in $\nu = 0.1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.2$ (kırmızı), $t = 0.4$ (mor), $t = 0.6$ (mavi), $t = 0.8$ (lacivert), $t = 1.0$ (sarı) gösterimi.	46
Şekil 4.3 : Problem 1' in $\nu = 0.01$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.2$ (kırmızı), $t = 0.4$ (mor), $t = 0.6$ (mavi), $t = 0.8$ (lacivert), $t = 1.0$ (sarı) gösterimi.	47
Şekil 4.4 : Problem 1' in $\nu = 0.005$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.2$ (kırmızı), $t = 0.4$ (mor), $t = 0.6$ (mavi), $t = 0.8$ (lacivert), $t = 1.0$ (sarı) gösterimi.	48
Şekil 4.5 : Problem 2' nin $\nu = 0.5$, $k = 0.025$, $h = 0.1$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.0$ (kırmızı), $t = 5$ (mor), $t = 10$ (mavi) gösterimi.	49
Şekil 4.6 : Problem 2' nin $\nu = 1/8$, $k = 0.025$, $h = 0.1$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.0$ (kırmızı), $t = 5$ (mor), $t = 10$ (mavi) gösterimi.	50
Şekil 4.7 : Problem 2' nin $\nu = 1/24$, $k = 0.025$, $h = 0.1$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.0$ (kırmızı), $t = 5$ (mor), $t = 10$ (mavi) gösterimi.	51
Şekil 4.8 : Problem 3' ün $\nu = 0.01$, $k = 0.005$, $h = 0.02$ parametre değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ (soldan sağa) gösterimi.	52
Şekil 4.9 : Problem 4' ün $\nu = 0.01$, $k = 0.001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarında $t = 1$ (kırmızı), $t = 2$ (mor), $t = 3$ (mavi), $t = 4$ (lacivert), $t = 5$ (sarı) gösterimi.	53
Şekil 4.10 : Problem 5' in $\nu = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.025$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.1$ (kırmızı), $t = 0.2$ (mor), $t = 0.3$ (mavi), $t = 0.4$ (lacivert), $t = 0.5$ (sarı) gösterimi.	54
Şekil 4.11 : Problem 5' in $\nu = 0.1$, $k = 0.001$, $h = 0.025$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 1$ (kırmızı), $t = 2$ (mor), $t = 3$ (mavi), $t = 4$ (lacivert), $t = 5$ (sarı) gösterimi.	55
Şekil 4.12 : Problem 5' in $\nu = 0.01$, $k = 0.005$, $h = 0.025$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 5$ (kırmızı), $t = 10$ (mor), $t = 15$ (mavi), $t = 20$ (lacivert), $t = 25$ (sarı) gösterimi.	56
Şekil 4.13 : Problem 5' in $\nu = 0.005$, $k = 0.01$, $h = 0.025$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 5$ (kırmızı), $t = 10$ (mor), $t = 15$ (mavi), $t = 20$ (lacivert), $t = 25$ (sarı) gösterimi.	57

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

h	:	Konum Adım Uzunluğu
k	:	Zaman Adım Uzunluğu
v	:	Viskosite
Re	:	Reynold Sayısı
$U^{analitik}$	:	Analitik Çözüm
U_N	:	Yaklaşık Çözüm
L_2	:	Ortalama Hata
L_∞	:	Maksimum Hata
$\ e\ _1$	:	1-norm



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BURGERS DENKLEMİNİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

EZGİ GÜLEŞE

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

65+x sayfa

2024

Danışman: Prof. Dr. Emine Nesligül AKSAN

Bu yüksek lisans tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Burgers denklemi ile ilgili literatür araştırması verilmiştir.

İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan sonlu fark yöntemleri tanıtıldı.

Üçüncü bölümde, denklemin farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla birlikte göz önüne alınmasından beş model problem verildi.

Dördüncü bölümde, Rubin-Graves tipi lineerleştirme tekniği ile lineerleştirilmiş model problemlerin açık, kapalı, Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle nümerik çözümleri elde edilmiş ve bulunan çözümler çizelge ve grafikler yardımıyla sunulmuştur.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen nümerik sonuçların değerlendirilmesi yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Burgers Denklemi, Sonlu Fark Yöntemleri, Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme

ABSTRACT

Master Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF BURGERS EQUATION BY CLASSICAL FINITE DIFFERENCE METHOD

Ezgi GÜLEŞE

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

65+x pages

2024

Supervisor: Prof. Dr. Emine Nesligül AKSAN

This master's thesis consists of five chapters.

In the first chapter, a literature survey on Burgers equation is presented.

In the second chapter, finite difference methods that are going to be used in the thesis are introduced.

In the third chapter, five model problems are given considering the equation with different initial and boundary conditions.

In the fourth chapter, numerical solutions of model problems linearized with Rubin-Graves type linearization technique are obtained using explicit, implicit and Crank-Nicolson finite difference methods and the obtained solutions are shown with the help of tables and graphs.

In the fifth section, the numerical results obtained in the fourth section are evaluated.

Keywords: Burgers equation, Finite Difference Methods, Rubin-Graves Type Linearization

1. GİRİŞ

Burgers denklemi, viskoz akış, türbülans, gaz dinamiği, şok teorisi, trafik akışı, stokastik süreç, kozmoloji vb. gibi bilim alanlarında karşımıza çıkan en bilinen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden biridir.

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx}$$

şeklinde verilen Burgers denklemi ilk olarak 1915' te Bateman [1] tarafından tanıtıldı, burada ν viskozite katsayısıdır. Bu denklem, Hollandalı bilim adamı J. M. Burgers [2] tarafından türbülanslı sıvı hareketinin bir modeli olarak önerildi ve dikkate değer katkılarından dolayı denklem onun adı ile anıldı.

Viskozite katsayısının küçük değerleri için hız kesintileri, yani şoklar oluşur. Kreiss ve Kreiss [3], şokun çözüm üzerindeki etkisini incelemek için Burgers denklemini başlangıç ve homojen olmayan Dirichlet sınır şartları ile birlikte ele alarak şokun sınırdaki oluşumunu gösterdiler. Burgers denklemini çözmeye yönelik ilk girişimlerden biri, farklı başlangıç şartları ile birlikte denklemin otuz beş farklı analitik çözümünü sunan Benton ve Platzman [4] tarafından yapıldı. Rodin [5], Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla Burgers denklemi için sınır değer problemlerinin bazı yaklaşık ve tam çözümlerini inceledi. Varoğlu ve Finn [6], ağırlıklı kalan yöntemine dayalı bir sonlu eleman yöntemi geliştirdiler. Cadwell vd. [7] yine sonlu eleman yöntemiyle problemin çözümünü araştırdı ve burada yapılan çalışmanın bir genelleştirilmesi Cadwell ve Smith [8] tarafından verildi. $Re = \frac{1}{\nu}$, Reynold sayısı olmak üzere, büyük Reynold sayıları için sonlu eleman yöntemi ile bulunan çözümlerin sonlu fark yöntemleri yardımıyla elde edilen çözümlerden daha iyi olduğunu gösterdiler. Burgers denklemini çözmek için değişik sonlu eleman yöntemleri kullanıldı [9, 10]. Gelinas vd. [9] yüksek doğrulukla uygulanabilen bir sonlu eleman yöntemi sundular. Cadwell vd. [7], hareketli düğüm noktaları kullanarak geliştirdikleri sonlu eleman yöntemi ile Burgers denklemini çözdüler. Asaithambi [11], konumsal türevler için ikinci mertebeden sonlu fark denklemlerini ve Taylor seri açılımı kullanarak basit bir nümerik yöntem sundular. Kadalbajoo vd. [12], Burgers denklemini çözmek için kapalı bir şema geliştirdiler ve burada non-lineerliğin üstesinden gelmek için yarı lineerleştirme tekniği kullandılar. Crank-Nicolson şemasına dayalı bir nümerik yöntem, Kadalbajoo ve Awasthi [13] tarafından önerildi. Burada Burgers denklemini önce Hopf-Cole dönüşümünü kullanarak lineer ısı denklemine indirgeyip, ardından Crank-Nicolson şemasını kullanarak çözdüler. Bu çalışmada şemanın hem konumda hem de zamanda ikinci dereceden

doğrulukta olduğunu ve ayrıca şartsız kararlı olduğunu gösterdiler. Rashidi ve Erfani [14], Burgers denkleminin yaklaşık analitik çözümlerini geliştirmek için diferansiyel dönüşüm yöntemini kullandılar. Abbasbandy ve Darvishi [15, 16] Adomian ayrışım yöntemi ile denklemi çözdüler. 2015 yılında, Mukundan ve Awasthi [17], Burgers denklemini çözmek için yeni bir nümerik teknik sundular. Çizgiler yöntemi (MOL) kullanılarak yarı ayrıştırma ile tek boyutlu denklemi elde etmek için Hopf-Cole dönüşümünü kullandılar.

Kutluay vd. [18], bu tezde ele alınan problemin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla klasik açık sonlu fark yöntemini kullandılar. Burgers denkleminin bir başka nümerik çözümü Kutluay vd. [19] tarafından, kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde edildi. Çözüm sürecinde, denklemde yer alan lineer olmayan terime yarı lineerleştirmeye dayalı bir lineerleştirme tekniği uyguladılar. Elde edilen nümerik çözümleri literatürdeki nümerik çözümler ile karşılaştırdılar. L_2 ve L_∞ hata normlarını hesapladılar ve elde ettikleri çözümlerin oldukça iyi olduğunu gösterdiler. Kutluay ve Uçar [20], Coupled Burgers denklemini kuadratik B-spline fonksiyonlar yardımıyla sonlu eleman Galerkin yöntemini kullanarak çözdüler. Aksan vd. [21], lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan Burgers denklemini, zamanı ayrıştırma yöntemi kullanılarak p adet lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürdüler ve her bir lineer olmayan denklemi en küçük kareler yöntemiyle çözdüler. Farklı zaman adımlarındaki çeşitli viskosite değerleri için elde edilen nümerik çözümleri, tam çözümlerle karşılaştırarak her ikisinin de birbirleriyle uyum içinde olduğunu gösterdiler. $\nu = 0.01$ 'den küçük viskosite değerleri için tam çözüm bulunamazken, elde edilen nümerik çözümler için denklemin matematiksel yapısının bozulmadığını gösterdiler. Aksan [22], Burgers denkleminin kübik B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak nümerik çözümlerini elde etti. Aksan [23], Burgers denklemini kuadratik B-spline fonksiyonlar yardımıyla Galerkin sonlu eleman yöntemi uygulayarak çözmüştür. Aksan [24] Burgers denklemini çözmek için; zamanda ayrıştırma yöntemi üzerine inşa edilen Galerkin sonlu elemanlar yöntemi uygulamıştır ve her zaman adımı için elde edilen lineer olmayan denklem sistemi Newton yöntemini kullanılarak çözdü. Öziş vd. [25], bu tezde ele alınan problemin yaklaşık çözümünü elde etmek için kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Galerkin sonlu eleman yöntemini uyguladılar. Elde edilen nümerik çözümlerin, tam çözümün başarısız olduğu çok küçük viskosite " ν " değerleri için problemin matematiksel yapısına uygun olduğunu gösterdiler. Çalışmada elde ettikleri nümerik çözümler ile literatürde bulunan diğer nümerik çözümleri karşılaştırıp, yöntemin kararlılık analizini verdiler. Kutluay ve Esen

[26], Burgers denkleminin nümerik çözümünü, kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde ettiler. Şemayı, tam çözümleri bilinen test problemini çözmek için uyguladılar. Elde edilen nümerik çözümleri tam çözümlerle karşılaştırdılar ve çözüm yönteminin kararlılık analizini yaparak yöntemin şartsız kararlı olduğunu gösterdiler. Bir başka çalışmada Kutluay vd. [27], uygun sınır ve başlangıç şartları ile Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kuadratik B-spline fonksiyonları kullanarak en küçük kareler sonlu eleman yöntemi sundular. Yine Burgers benzeri denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yöntemi kullandılar. Yöntemin, küçük viskozite değerleri için nümerik çözümler elde etmekte başarılı olduğunu gösterdiler [28]. Uçar [29], yüksek lisans tezinde; Burgers denklemini, denklemdaki lineer olmayan terim yerine on yedi farklı lineerleştirme tekniği kullanarak sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümler elde etti. İnan ve Bahadır [30], lineer olmayan Burgers denklemini açık üstel sonlu fark yöntemi kullanarak çözdüler. Lineer olmayan Burgers denklemini lineer ısı denklemine dönüştürmek için Hopf-Cole dönüşümünü kullandılar. İnan ve Bahadır [31], ayrıca kapalı üstel sonlu fark yöntemini kullanarak da problemin nümerik çözümlerini elde ettiler. Bu çalışmada her zaman adımında lineer olmayan sistemi çözmek için Newton yöntemini kullandılar. İnan ve Bahadır [32], Burgers denkleminin Crank-Nicolson üstel sonlu fark çözümünü veren bir yöntem sundular. Bu çalışmada ayrıştırma için Crank-Nicolson şemasını ve her zaman adımında sistemi çözmek için de Newton-Raphson yöntemini kullandılar. İnan [33], alternatif bir Crank-Nicolson ve kapalı üstel sonlu fark yöntemi önererek; mevcut çalışmada Burgers denklemini Hopf-Cole dönüşümüyle lineer ısı denklemine indirgeyip nümerik çözüm elde ettiler. Önal ve Esen [34], kesirli Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak amacıyla Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi uyguladılar. Önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için L_2 ve L_∞ hata normlarını hesapladılar. Yağmurlu vd. [35], denklemini kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile çözdüler. Esen ve Taşbozan [36], kübik B-spline fonksiyonları yardımıyla kollokasyon yöntemiyle Burgers denklemini çözdüler. Esen vd. [37], zaman kesirli olan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için yeni bir yöntem kullandılar. Çelikten ve Aksan [38], iki boyutlu Burgers denklem sistemini alternating direction yöntemi ile çözdüler. Mevcut yöntem kullanılarak bulunan sayısal çözümler ile analitik çözümler ve bazı diğer araştırmacılar tarafından verilen sayısal çözümler ile karşılaştırıldı. Çalışmalarında, von-Neumann (Fourier) kararlılık analiz yöntemi kullanılarak yöntemin şartsız kararlı olduğunu gösterdiler. Ali vd. [39] lineer olmayan Burgers' denklemini B-spline sonlu eleman yöntemiyle sayısal olarak çözdüler. Kullandıkları yöntem sonlu elemanlar üzerinde

kübik B-spline kollokasyona dayanıyordu. Bunun amacı çözüm bölgesi üzerinde bağımlı değişkenin ve ilk iki mertebeden türevinin sürekliliği sağlamaktı. Dağ vd. [40] çalışmalarında bir boyutlu Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini sonlu elemanlar üzerinde kübik B-splineların kollokasyonlarına bağlı bir yöntemle elde ettiler. Önerilen methodun doğruluğunu üç tez problemiyle gösterdiler ve buldukları sayısal sonuçları tam çözüm ile iyi uyum içinde olduğu sonucuna vardılar. Soliman [41] Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini hem ağırlık hemde interpolasyon fonksiyonlarını kübik B-spline kullanarak Galerkin yöntemi ile elde etti. Yazar kullandığı yöntemin viskositenin çok küçükten çok büyüğe değişen aralıktaki değerleri için Burgers' denklemini etkin bir şekilde çözdüğünü gösterdi. Gardner vd. [42] zamana bağımlı ızgaralar üzerinde sonlu eleman yöntemini uygulayarak küçük viskosite katsayıları için bile doğru ve hassas sayısal çözümler elde ettiler.

Bu tezde Burgers denklemini verilen çeşitli başlangıç ve sınır şartlarıyla birlikte ele alındı. Denklemin nümerik çözümleri sırasıyla açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edildi. Her üç yöntem için kararlılık analizi verilerek elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması çizelge ve grafikler halinde sunuldu.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu Fark Yöntemi, analitik açıdan çözülmesi zor olan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Bu yöntemde, fark denklemlerinden faydalanarak diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine yaklaşılr. Diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi, diferansiyel denklemler yerine cebirsel denklemlerin oluşturulması esasına dayanır. Yöntem doğası gereği bir takım avantaj ve dezavantajlara sahiptir. Yöntemin oldukça basit uygulanır olması, kolay programlanabilmesi, yüksek dereceli yaklaşımlar vermesi yöntemin avantajları arasında sayılırken, çalışılan problemin fiziksel özelliklerinin direkt olarak uygulanamıyor olması, yalnızca basit geometriler üzerinde uygulanılabilmesi ve bazı kararlılık kısıtlamaları yöntemin dezavantajları olarak sayılabilir.

Sonlu fark yöntemlerinde türevler için ileri fark, geri fark ve merkezi fark olmak üzere üç yaklaşım kullanılır.

Sonlu fark çözümü şu adımlardan oluşur:

- Çözüm bölgesi düğümlerden (grid) oluşan bir ızgaraya bölünür.
- Verilen denklemde görülen türevlerin yerine uygun sonlu fark şemaları yazılır. Bunun sonucunda çalışılan diferansiyel denklem; eğer denklem lineer ise lineer cebirsel denklem sistemi aksi halde yani diferansiyel denklem lineer değil ise lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir.
- Sonuçta bulunan cebirsel denklem sistemi ya direkt ya da öz yinelemeli (iterative) metotlardan biri yardımıyla çözülür.

Kısmi diferansiyel denklemde görülen türevler yerine Taylor seri açılımından elde edilen fark yaklaşımları;

$U(x, t)$ ifadesinde x ve t ile gösterilen bağımsız değişkenleri açısından yeterince türevlenebilen önceden tanımlı bir fonksiyon olarak verilmiş olsun. h ; x yönünde k ; t yönündeki artış miktarı olmak üzere $[0, l] \times [0, \infty)$ yarı sonsuz bölgesinde

bir (x_i, t_n) nodal noktası;

$$x_i = i\Delta x = ih \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, M$$

$$t_n = n\Delta t = nk \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile verilsin. Temsili bir $P(ih, nk)$ nodal noktasında verilen U fonksiyonu için hesaplanan değer

$$U_p = U(ih, nk) = U_i^n$$

ile ifade edilir. Bu gösterimin kullanılması ve kesme hatalarının atılması ile U fonksiyonunun x ve t yönündeki birinci ve ikinci mertebeden türevler yerine sırasıyla aşağıdaki sonlu fark yaklaşımları

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h} \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h} \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{k} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_i^n - 2U_{i+1}^n + U_{i+2}^n}{h^2} \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-2}^n - 2U_{i-1}^n + U_i^n}{h^2} \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \quad (2.1.8)$$

yazılır.

Burada (2.1.1)-(2.1.3) denklemlerine sırasıyla x yönünde birinci mertebeden türev için iki nokta ileri fark formülü, iki nokta geri fark formülü ve iki nokta merkezi fark formülü; (2.1.4) ve (2.1.5) denklemlerine t yönünde birinci mertebeden türev için iki nokta ileri ve iki nokta geri fark formülü denir. Benzer şekilde (2.1.6)-(2.1.8) denklemlerine sırasıyla x yönünde ikinci mertebeden türev için üç nokta ileri fark formülü, üç nokta geri fark formülü ve üç nokta merkezi fark formülü denir [43].

Sonlu fark yöntemlerinden sıklıkla başvurulanan ve klasik sonlu fark yöntemleri olarak adlandırılan yöntemler

- Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

dir.

Yöntemin uygulanışını göstermek için

$$U_t = \alpha U_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.1.9)$$

ısı denkleminin birlikte

$$U(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.1.10)$$

başlangıç şartı ile

$$U(0, t) = g_1(t), \quad t \geq 0 \quad (2.1.11)$$

$$U(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0$$

sınır şartlarını göz önüne alalım. İlk olarak çözüm bölgesi

$$x_i = ih$$

$$t_n = nk$$

olacak şekilde bir ızgaraya bölünür. x ve t değişkenleri sırasıyla h ve k ile gösterilen farklı adım uzunluklarına sahiptir. x , $[0, l]$ aralığında tanımlı olduğu için, $h = l/M$ dir. Burada amacımız U çözüm fonksiyonunun (x_i, t_n) düğüm noktalarında yaklaşık çözümünü hesaplamaktır.

Bir sonraki adım, diferansiyel denklemde görünen türevler yerine uygun fark yaklaşımlarının yazılmasıdır ki buna göre yöntemler isimlendirilir:

2.1.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi

(2.1.9) Isı denklemini, (2.1.10) başlangıç şartı ve (2.1.11) sınır şartlarıyla birlikte göz önüne alalım.

(2.1.9) Isı denkleminde görülen t açısından verilen birinci mertebeden türev yerine ileri fark yaklaşımının ve x' e göre ikinci mertebeden türev yerine n . zaman adımında merkezi fark

yaklaşımının yazılmasıyla yani

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2}$$

fark denklemlerinin (2.1.9) ısı denkleminde yazılmasıyla

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \alpha \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2}$$

elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesiyle

$$U_i^{n+1} = rU_{i-1}^n + (1 - 2r)U_i^n + rU_{i+1}^n \quad (2.1.12)$$

elde edilir. Burada $r = \frac{\alpha k}{h^2}$ dir. (2.1.12) Açık sonlu fark şeması matris formunda

$$A = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & \cdots & 0 \\ 0 & r & 1-2r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1-2r \end{bmatrix}$$

$$U^n = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ \vdots \\ U_{M-3}^n \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}, \quad U^{n+1} = \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-3}^{n+1} \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} rg_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ rg_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$U^{n+1} = AU^n + b$$

olarak ifade edilir. Bu $(M-1) \times (M-1)$ tipindeki denklem sisteminin ardışık olarak çözülmesiyle istenilen "t" zamanındaki çözüme ulaşılır [44].

2.1.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

(2.1.9) Isı denklemini, (2.1.10) başlangıç şartı ve (2.1.11) sınır şartlarıyla birlikte göz önüne alalım.

(2.1.9) Isı denkleminde görülen t açısından birinci mertebeden türev yerine ileri fark yaklaşımını ve x' e göre ikinci mertebeden türev yerine $(n+1)$. zaman adımında merkezi fark yaklaşımının yazılmasıyla yani

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2}$$

fark denklemlerinin ısı denkleminde yazılmasıyla

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \alpha \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2}$$

elde edilir. Basit bir düzenlemeyle,

$$-rU_{i-1}^{n+1} + (1+2r)U_i^{n+1} - rU_{i+1}^{n+1} = U_i^n, \quad i = 1(1)M-1 \quad (7) \quad (2.1.13)$$

elde edilir. Burada $r = \frac{\alpha k}{h^2}$ dir. (2.1.13) kapalı sonlu fark şeması matris formunda

$$A = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & & \\ -r & 1+2r & -r & & & \\ & -r & 1+2r & -r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & & -r & 1+2r \end{bmatrix}$$

$$U^n = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ \vdots \\ U_{M-3}^n \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}, \quad U^{n+1} = \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-3}^{n+1} \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} rg_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ rg_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$AU^{n+1} = U^n + b$$

olarak yazılabilir. Bu $(M-1) \times (M-1)$ tipindeki denklem sisteminin ardışık olarak çözülmesiyle istenilen "t" zamanındaki çözüme ulaşılır [44].

2.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

(2.1.9) Isı denklemini, (2.1.10) başlangıç şartı ve (2.1.11) sınır şartlarıyla birlikte göz önüne alalım.

Açık ve kapalı yöntemleri daha genel bir formülde birleştirmek mümkündür:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \alpha \left\{ \theta \left[\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} \right] + (1-\theta) \left[\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right] \right\} \quad (2.1.14)$$

Bu yaklaşıma (2.1.9) ısı denklemi için ağırlıklı averaj yaklaşımı denir. Açıkça bu yaklaşım $\theta = 0$ alındığında açık sonlu fark yaklaşımını verirken, $\theta = 1$ alındığında kapalı sonlu fark yaklaşımını verir. $\theta = 0.5$ özel durumu için Crank-Nicolson olarak bilinen bir kapalı sonlu fark yaklaşımı elde edilir.

(2.1.14) denkleminde $\theta = 0.5$ alınmasıyla

$$-rU_{i-1}^{n+1} + (2+2r)U_i^{n+1} - rU_{i+1}^{n+1} = rU_{i-1}^n + (2-2r)U_i^n + rU_{i+1}^n \quad (2.1.15)$$

elde ederiz. Burada $r = \frac{\alpha k}{h^2}$ dir. (2.1.15) Crank-Nicolson şemasında matris formu

$$A = \begin{bmatrix} 2+2r & -r & & & & \\ -r & 2+2r & -r & & & \\ & -r & 2+2r & -r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -r & 2+2r \\ & & & & -r & 2+2r \\ & & & & & -r & 2+2r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2-2r & r & & & & \\ r & 2-2r & r & & & \\ & r & 2-2r & r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r & 2-2r \\ & & & & r & 2-2r \\ & & & & & r & 2-2r \end{bmatrix}$$

$$U^n = \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ \vdots \\ U_{M-3}^n \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}, \quad U^{n+1} = \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-3}^{n+1} \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} r(g_1(t_{n+1}) + g_1(t_n)) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ r(g_2(t_{n+1}) + g_2(t_n)) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$AU^{n+1} = BU^n + b$$

olarak ifade edilir. Bu $(M-1) \times (M-1)$ tipindeki denklem sisteminin ardışık olarak çözülmesiyle istenen "t" zamanındaki çözüme ulaşılır [44].

2.1.4 Kararlılık Analizi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

ısı denklemini için ağırlıklı averaj yaklaşımı

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \alpha \left\{ \theta \left[\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right] \right\}$$

dir. Verilen bu ifade de $\theta = 0$, $\theta = 1/2$ ve $\theta = 1$ durumları sırasıyla açık sonlu fark yöntemine, Crank-Nicolson yöntemine ve kapalı sonlu fark yöntemine karşılık gelir.

Ağırlıklı averaj yaklaşımında Fourier yöntemi (von-Neumann yöntemi) kullanarak kararlılık analizini uygulayalım.

$$U_j^n = e^{i\beta p h} \xi^q, \quad i = \sqrt{-1}$$

şeklinde bir çözüm bulmaya çalışalım. Bu ifade ağırlıklı averaj yaklaşımında yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi - r\theta\xi \left(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h} \right) = 1 + r(1 - \theta) \left(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h} \right)$$

elde edilir. Burada $r = \frac{\alpha k}{h^2}$ dir. Euler formülü,

$$e^{i\beta h} = \cos \beta h + i \sin \beta h$$

kullanılmasıyla

$$\xi - r\theta\xi (2 \cos \beta h - 2) = 1 + r(1 - \theta) (2 \cos \beta h - 2)$$

elde edilir. Trigonometrik özdeşliklerin

$$\cos \beta h = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$$

kullanılmasıyla, ξ parametresi

$$\xi = \frac{1 - 4r(1 - \theta) \sin^2 \frac{\beta h}{2}}{1 + 4r\theta \sin^2 \frac{\beta h}{2}}$$

olarak bulunur.

• $\theta = 0$ ise açık sonlu fark yaklaşımının kararlılığı için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ dir. Bu durum r kararlılık parametresinin $r \leq \frac{1}{2}$ olması anlamına gelir.

- $\theta = 1$ ise kapalı sonlu fark yaklaşımının kararlılığı için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ dır. Bu durum r kararlılık parametresinin $r > 0$ olması anlamına gelir yani yaklaşım şartsız kararlıdır.

- $\theta = 1/2$ ise Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımının kararlılığı için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ dır. Bu durum r kararlılık parametresinin $r > 0$ olması anlamına gelir yani yaklaşım şartsız kararlıdır [29].



3. MODEL PROBLEMLER

Tezin bu kısmında

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx} \quad (3.0.1)$$

ile verilen Burgers denklemi için beş temel problem tanıtılacaktır.

Burgers denklemi analitik çözümü bilinen çok az sayıdaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden biridir. Denklem Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinen bir dönüşümle lineer ısı denkleminde dönüştürülerek analitik olarak çözülebilir.

Bu tezde ele alınacak model problemler ve onların analitik çözümleri şöyledir:

Problem 1 (3.0.1) Burgers denklemi

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ile birlikte göz önüne alınacaktır.

Bu problemin tam çözümü,

$$U(x, t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2\pi^2\nu t} a_n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2\nu t} a_n \cos(n\pi x)}$$

dir. Bu ifade de a_0 ve a_n ile gösterilen terimler Fourier katsayılarıdır ve sırasıyla,

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

biçiminde tanımlanır.

Problem 2 (3.0.1) Burgers denklemi

$$U(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left\{\frac{1}{4\nu}(x - 15)\right\} \right]$$

başlangıç şartları ve

$$U(0, t) = 1, \quad U(30, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ile birlikte ele alındı. Bu problem için analitik çözüm

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left\{\frac{1}{4\nu}\left(x - \frac{1}{2}t - 15\right)\right\} \right]$$

şeklindedir.

Problem 3 (3.0.1) Burgers denklemi

$$U(0,t) = 1, \quad U(1,t) = 0.2, \quad t \geq 0.$$

sınır şartları ile birlikte ele alınıp başlangıç şartı problemin

$$U(x,t) = \frac{[\alpha + \mu + (\alpha - \mu) \exp(\eta)]}{1 + \exp(\eta)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$

şeklindeki tam çözümünde $t = 0$ alınarak elde edilir. Burada α, β ve μ sabitler olup

$$\eta = \alpha(x - \mu t - \beta)/\nu$$

dır.

Problem 4 (3.0.1) Burgers denkleminin tam çözümü

$$U(x,t) = \frac{\nu}{1 + \nu t} \left\{ x + \tan \left(\frac{x}{2 + 2\nu t} \right) \right\}, \quad 0.5 \leq x \leq 1.5$$

dır. Bu problemde $t = 0$ için başlangıç, $x = 0.5$ ve $x = 1.5$ için sınır şartları problemin tam çözümünden elde edilir.

Problem 5 (3.0.1) Burgers denklemi

$$U(x,0) = \frac{2\nu\pi \sin(\pi x)}{\sigma + \cos(\pi x)}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

başlangıç şartı ve

$$U(0,t) = U(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

sınır şartları ile birlikte ele alındı. Burada $\sigma > 0$ parametredir.

Problemin tam çözümü,

$$U(x,t) = \frac{2\nu\pi e^{-\pi^2 \nu t} \sin(\pi x)}{\sigma + e^{-\pi^2 \nu t} \cos(\pi x)}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

şeklindedir.

4. BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

formunda göz önüne alınan Burgers denkleminin UU_x lineer olmayan terimi yerine Rubin-Graves tipi lineerleştirme tekniği kullanılarak denklemin her üç klasik sonlu fark yaklaşımı elde edildi. Kullanılan sayısal yöntemin doğruluğunu göstermek ve literatürdeki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırmak için

$$L_2 = \|U^{analitik} - U_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{analitik} - (U_N)_j|^2}$$

$$L_\infty = |U^{analitik} - U_N|_\infty = \max |U_j^{analitik} - (U_N)_j|$$

$$\|e\|_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left| \frac{U_j^{analitik} - (U_N)_j}{U_j^{analitik}} \right|$$

biçiminde verilen hata normları hesaplandı.

4.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi

Tezin bu alt bölümünde (3.0.1) ile verilen Burgers denklemine açık sonlu fark yöntemi uygulanacaktır. Bu amaçla denklemdaki " t " yönünde birinci mertebeden türev yerine

$$U_t \cong \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k}$$

ileri sonlu fark yaklaşımını, UU_x lineer olmayan terim yerine

$$UU_x \cong U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

sonlu fark yaklaşımı ve x yönünde ikinci mertebeden türev yerine de

$$U_{xx} \cong \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2}$$

açık merkezi fark yaklaşımı yazılmasıyla

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\nu k}{h^2} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) - \frac{k}{2h} U_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) \quad , \quad i = 1(1)M-1$$

şeklinde açık sonlu fark şeması bulunur.

4.1.1 Nümerik Sonuçlar

Bu tezin 3. bölümünde tanıtılan beş model problemin açık sonlu fark yöntemi ile bulunan nümerik sonuçları sunuldu.

Birinci problemin açık sonlu fark yöntemiyle bulunan sayısal çözümleri Çizelge 4.1-4.3' te sunuldu. Çizelge 4.1' de, $t = 0.1$ zamanında kinematik viskosite " $\nu = 1$ " için farklı konum adım uzunlukları ($h = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80$) alınarak elde edilen yaklaşık çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " h " küçüldükçe her iki hata normunun büyük oranda düştüğü görüldü. Çizelge 4.2' de, farklı zamanlarda $h = 0.005$, $k = 0.0001$ alınarak değişik viskosite değerleri ($\nu = 1, 0.1, 0.01$) için elde edilen yaklaşık çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması verildi. Çözümlerin birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir. Çizelge 4.3' te, $t = 0.1$ de $\nu = 1$ ve $k = 0.00001$ değerleri için değişik mesh uzunlukları alınarak bulunan yaklaşık çözümlerdeki $\|e\|_1$, L_2 ve L_∞ hata normlarının literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırılması verildi.

Çizelge 4.1 : Problem 1' in; $t = 0.1$ de $\nu = 1$ ve $k = 0.00001$ değerleri için farklı h değerlerine karşılık yaklaşık çözümler ile tam çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$	
0.1	0.11029	0.10972	0.10958	0.10954	0.10954
0.2	0.21127	0.21015	0.20987	0.20981	0.20979
0.3	0.29404	0.29242	0.29202	0.29192	0.29190
0.4	0.35063	0.34859	0.34808	0.34795	0.34792
0.5	0.37464	0.37233	0.37175	0.37161	0.37158
0.6	0.36219	0.35982	0.35923	0.35908	0.35905
0.7	0.31277	0.31061	0.31007	0.30993	0.30991
0.8	0.23002	0.22836	0.22794	0.22784	0.22782
0.9	0.12189	0.12098	0.12076	0.12070	0.12069
$L_2 \times 10^3$	2.20186	0.54044	0.12545	0.02175	
$L_\infty \times 10^3$	3.14769	0.77290	0.18040	0.03181	

Çizelge 4.2 : Problem 1' in; farklı zamanlarda $h = 0.005$, $k = 0.0001$ ve farklı viskosite değerleri için yaklaşık çözümleri ile analitik çözümlerin karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$ ($k = 0.00001$)		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Yaklaşık	Analitik	Yaklaşık	Analitik	Yaklaşık	Analitik
0.25	0.4	0.01357	0.01357	0.30887	0.30889	0.34188	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24072	0.24074	0.26894	0.26856
	0.8	0.00026	0.00026	0.19566	0.19568	0.22146	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16255	0.16256	0.18818	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02720	0.02720	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.01923	0.01924	0.56961	0.56963	0.66068	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44719	0.44721	0.52938	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35922	0.35924	0.43910	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29190	0.29192	0.37439	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04020	0.04020	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.01363	0.01363	0.62548	0.62544	0.91034	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48724	0.48721	0.76724	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37393	0.37392	0.64736	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28748	0.28747	0.55601	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02977	0.02977	0.22480	0.22481

Çizelge 4.3 : Problem 1' in ; $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı h değerleri için elde edilen nümerik çözümlerdeki hata normlarının literatürdeki bazı çalışmalarda elde edilen hata normları ile karşılaştırılması

Metot	h				
	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.01
$\ e\ _1$	0.008320	0.002043	0.000474	0.000082	0.000035
L_2	0.002202	0.000540	0.000125	0.000022	0.000009
L_∞	0.003148	0.000773	0.000180	0.000032	0.000014
$\ e\ _1$ [26]	0.00109	0.00026	0.00012	0.00008	
$\ e\ _1$ [28]	0.00476	0.00144	0.00038	0.00007	
$\ e\ _1$ [27]	0.01217	0.00694	0.00365	0.00186	
L_2 [31]		0.000579	0.000164	0.000060	0.000048
L_∞ [31]		0.000827	0.000234	0.000086	0.000068

Problem 2' nin açık sonlu fark yöntemiyle elde edilen nümerik çözümleri Çizelge 4.4-4.7' de verildi. Çizelge 4.4' te, $t = 2$ zamanında kinematik viskosite $\nu = 0.5$ ve $k = 0.0001$ için farklı konum adım uzunlukları(h) alınarak bulunan sayısal sonuçların problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması sunuldu. Çizelgeden " h " küçüldükçe her iki hata normunun azaldığı

görülmektedir. Çizelge 4.5’ te, $t = 2$ zamanında $h = 0.1$ farklı viskosite değerleri için değişik zaman adımları alınarak her iki hata normu verildi. Çok belirgin olmasada hata normlarının k nın küçülmesiyle azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.6’ da, farklı zamanlarda $h = 0.1$ ve $k = 0.0001$ çeşitli viskosite ($\nu = 1, 0.5, 0.1$) değerleri için elde edilen yaklaşık çözümlerin analitik çözümlerle kıyaslaması yapıp, uyum içinde oldukları görülmüştür. Çizelge 4.7’ de değişik zaman adımları alınarak $h = 0.1$ ve $k = 0.0001$ çeşitli viskosite ($\nu = 1, 0.25, 0.125, 0.025$) değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları verildi.

Çizelge 4.4 : Problem 2’nin $t = 2$ de $\nu = 0.5$, $k = 0.0001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
10	0.99753	0.99753	0.99753	0.99753	0.99753
12	0.98205	0.98202	0.98202	0.98201	0.98201
14	0.88089	0.88082	0.88080	0.88080	0.88080
16	0.49988	0.49997	0.49999	0.50000	0.50000
18	0.11918	0.11920	0.11920	0.11920	0.11920
20	0.01799	0.01799	0.01799	0.01799	0.01799
22	0.00247	0.00247	0.00247	0.00247	0.00247
24	0.00034	0.00034	0.00034	0.00034	0.00034
$L_2 \times 10^4$	2.04359	0.52737	0.15037	0.06037	
$L_\infty \times 10^4$	1.37792	0.35073	0.09470	0.03346	

Çizelge 4.5 : Problem 2’ nin farklı viskosite değerleri için $t = 2$ de $h = 0.1$ ve farklı zaman adımları alınarak L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması

ν	$k = 0.005$		$k = 0.0005$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.5	0.34018	0.19373	0.21328	0.14116
0.25	1.18751	0.98384	0.90363	0.82351
0.125	4.04741	4.67901	3.45201	4.29820

Çizelge 4.6 : Problem 2' nin $h = 0.1$, $k = 0.0001$ ve farklı viskosite değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$		$\nu = 0.5$		$\nu = 0.1$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
10	0.5	0.93246	0.93245	0.99478	0.99478	1.00000	1.00000
	1.0	0.93992	0.93991	0.99593	0.99593	1.00000	1.00000
	1.5	0.94661	0.94660	0.99683	0.99683	1.00000	1.00000
	2.0	0.95258	0.95257	0.99753	0.99753	1.00000	1.00000
15	0.5	0.53120	0.53121	0.56214	0.56218	0.77836	0.77730
	1.0	0.56217	0.56218	0.62242	0.62246	0.92795	0.92414
	1.5	0.59266	0.59267	0.67915	0.67918	0.97964	0.97702
	2.0	0.62245	0.62246	0.73107	0.73106	0.99450	0.99331
20	0.5	0.08510	0.08510	0.00858	0.00858	0.00000	0.00000
	1.0	0.09535	0.09535	0.01099	0.01099	0.00000	0.00000
	1.5	0.10669	0.10669	0.01407	0.01406	0.00000	0.00000
	2.0	0.11920	0.11920	0.01799	0.01799	0.00000	0.00000

Çizelge 4.7 : Problem 2' nin farklı zamanlarda $h = 0.1$, $k = 0.0001$ farklı viskosite değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları

		Nümerik Çözüm			
t		$\nu = 1$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.125$	$\nu = 0.025$
0.5	$L_2 \times 10^2$	0.05637	0.03407	0.16288	5.43450
	$L_\infty \times 10^1$	0.00571	0.00336	0.02171	1.24912
1.0	$L_2 \times 10^2$	0.07136	0.05754	0.25050	6.55754
	$L_\infty \times 10^1$	0.00660	0.00549	0.03264	1.43211
2.0	$L_2 \times 10^2$	0.09471	0.08817	0.34030	7.00145
	$L_\infty \times 10^1$	0.00859	0.00812	0.04264	1.54256
3.0	$L_2 \times 10^2$	0.11952	0.10704	0.38163	7.02423
	$L_\infty \times 10^1$	0.01107	0.00962	0.04680	1.54737

Problem 3' ün açık sonlu fark yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümleri Çizelge 4.8-4.10' da verildi. Çizelge 4.8' de, $t = 0.1$ zamanında $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ için farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.025, 0.0125, 0.01, 0.005$) alınarak elde edilen yaklaşık çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması sunuldu. Çizelgeden " h " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarında azalma olduğu görülmektedir. Çizelge 4.9' da, $t = 0.1$ zamanında $h = 0.05$ farklı viskosite değerleri için farklı zaman adımları alınarak L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Hata

normlarının k nın küçülmesiyle çok az da olsa azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.10' da farklı zamanlarda $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.025, 0.01$) alınarak elde edilen yaklaşık çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması verildi.

Çizelge 4.8 : Problem 3' ün $t = 0.1$ de $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	
0.1	0.98571	0.97852	0.97778	0.97683	0.97416
0.2	0.46543	0.47781	0.47949	0.48177	0.48347
0.3	0.20916	0.20812	0.20799	0.20782	0.20796
0.4	0.20019	0.20015	0.20015	0.20014	0.20015
0.5	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.6	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.7	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.8	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.9	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
$L_2 \times 10^3$	5.32159	1.74813	1.37476	0.95062	
$L_\infty \times 10^2$	1.80493	0.56635	0.42287	0.28294	

Çizelge 4.9 : Problem 3' ün $t = 0.1$ de farklı viskosite değerleri alınarak $h = 0.05$ ve farklı k değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları

ν	$k = 0.005$		$k = 0.0005$	
	$L_2 \times 10^2$	$L_\infty \times 10^1$	$L_2 \times 10^2$	$L_\infty \times 10^1$
0.01	2.14247	0.73389	1.97415	0.66280
0.03	2.22286	0.75116	2.14643	0.72897
0.05	4.54914	1.47228	4.46582	1.45121

Çizelge 4.10 : Problem 3' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	$t = 0.5$			$t = 1$		
	$h = 0.025$	$h = 0.01$	Tam Çözüm	$h = 0.025$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	1.00000	0.99996	0.99990	1.00000	1.00000	1.00000
0.3	1.00025	0.99616	0.99465	1.00000	1.00000	1.00000
0.4	0.77759	0.78899	0.78485	1.00000	1.00000	1.00000
0.5	0.23804	0.23664	0.23794	1.00000	0.99995	0.99990
0.6	0.20112	0.20073	0.20073	1.00044	0.99612	0.99465
0.7	0.20003	0.20001	0.20001	0.77809	0.78918	0.78485
0.8	0.20000	0.20000	0.20000	0.23751	0.23656	0.23794
0.9	0.20000	0.20000	0.20000	0.20112	0.20072	0.20073
$L_2 \times 10^3$	9.50782	2.04691		9.89092	2.06278	
$L_\infty \times 10^2$	3.45430	0.71294		3.54040	0.72519	

Problem 4' ün açık sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri Çizelge 4.11-4.13' te verildi. Çizelge 4.11' de, farklı zamanlarda $h = 0.01$ ve farklı viskozite ($\nu = 1, 0.1, 0.01$) değerleri için kararlılık kısıtlamasına bağlı kalarak elde edilen yaklaşık çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması verildi. Çözümlerin birbiriyle uyumu görülmektedir. Çizelge 4.12' de, farklı zamanlarda $\nu = 0.002$ ve $k = 0.005$ alarak farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.05, 0.025, 0.0125, 0.01$) için L_2 ve L_∞ hata normları verildi. " h " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarında azalma olduğu görülmektedir. Çizelge 4.13' te, farklı zamanlarda $h = 0.01$ ve $k = 0.002$ alarak farklı viskozite değerleri ($\nu = 0.005, 0.001$) için L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Çizelge 4.11 : Problem 4' ün farklı zamanlarda farklı viskozite değerleri ve $h = 0.01$ için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$ ($k = 0.00001$)		$\nu = 0.1$ ($k = 0.0001$)		$\nu = 0.01$ ($k = 0.001$)	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.75	0.4	0.73175	0.73175	0.10837	0.10837	0.01137	0.01137
	0.6	0.61797	0.61798	0.10559	0.10560	0.01134	0.01134
	0.8	0.53411	0.53411	0.10295	0.10295	0.01131	0.01131
	1.0	0.46986	0.46986	0.10043	0.10043	0.01128	0.01128
	3.0	0.21101	0.21101	0.08052	0.08052	0.01098	0.01098
1.00	0.4	0.98081	0.98082	0.14631	0.14631	0.01538	0.01538
	0.6	0.82692	0.82693	0.14246	0.14246	0.01533	0.01533
	0.8	0.71397	0.71397	0.13881	0.13881	0.01529	0.01529
	1.0	0.62767	0.62767	0.13533	0.13533	0.01525	0.01525
	3.0	0.28141	0.28141	0.10806	0.10806	0.01483	0.01483
1.25	0.4	1.23474	1.23476	0.18611	0.18611	0.01960	0.01960
	0.6	1.03861	1.03862	0.18104	0.18104	0.01954	0.01954
	0.8	0.89549	0.89549	0.17620	0.17623	0.01948	0.01948
	1.0	0.78654	0.78654	0.17167	0.17167	0.01943	0.01943
	3.0	0.35188	0.35188	0.13628	0.13628	0.01888	0.01888

Çizelge 4.12 : Problem 4' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.002$, $k = 0.005$ ve farklı h değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları

t		Nümerik Çözüm			
		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$
0.5	$L_2 \times 10^9$	0.66645	0.21751	0.10379	0.09026
	$L_\infty \times 10^9$	1.33344	0.43233	0.18912	0.15961
1.0	$L_2 \times 10^9$	1.28143	0.41788	0.20067	0.17486
	$L_\infty \times 10^9$	2.54235	0.79747	0.35304	0.29946
2.0	$L_2 \times 10^9$	2.40866	0.78774	0.38195	0.33375
	$L_\infty \times 10^9$	4.56629	1.43744	0.64579	0.55035
3.0	$L_2 \times 10^9$	3.43520	1.12751	0.55081	0.48230
	$L_\infty \times 10^9$	6.26899	2.00040	0.90700	0.77585

Çizelge 4.13 : Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskozite değerlerinde $h = 0.01$, $k = 0.002$ için L_2 ve L_∞ hata normları

t	$\nu = 0.005$		$\nu = 0.001$	
	$L_2 \times 10^9$	$L_\infty \times 10^9$	$L_2 \times 10^{11}$	$L_\infty \times 10^{11}$
0.1	0.24216	0.41880	0.30228	0.60414
0.2	0.47474	0.80148	0.59844	1.17657
0.3	0.70104	1.16561	0.89048	1.72665
0.4	0.92226	1.51450	1.17920	2.27068
0.5	1.13907	1.85121	1.46505	2.79286

Problem 5' in açık sonlu fark yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümleri Çizelge 4.14-4.15' te verildi. Çizelge 4.14' te, $t = 0.1$ zamanında $\nu = 1$ ve $k = 0.00005$ için farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$) alınarak elde edilen yaklaşık çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması sunuldu. Çizelgeden " h " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.15' te, farklı zamanlarda $h = 0.025$, $k = 0.0001$ alınarak değişik viskozite değerleri ($\nu = 0.01, 0.1, 1$) için elde edilen yaklaşık çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması verildi. Çözümlerin birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.14 : Problem 5' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00005$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.54403	0.53655	0.53467	0.53421	0.53427
0.2	1.07995	1.06279	1.05850	1.05747	1.05758
0.3	1.59496	1.56354	1.55581	1.55396	1.55409
0.4	2.06550	2.01280	2.00009	1.99704	1.99716
0.5	2.44855	2.36592	2.34641	2.34175	2.34179
0.6	2.67057	2.55121	2.52373	2.51719	2.51708
0.7	2.62079	2.46851	2.43442	2.42633	2.42602
0.8	2.17057	2.01340	1.97919	1.97111	1.97069
0.9	1.25459	1.14908	1.12663	1.12135	1.12102
$L_2 \times 10^1$	1.17313	0.25556	0.05025	0.00211	
$L_\infty \times 10^1$	1.99879	0.44115	0.08754	0.00430	

Çizelge 4.15 : Problem 5' in $t = 0.1$ de farklı viskozite değerlerinde $h = 0.025$, $k = 0.0001$ için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması

x	$\nu = 0.01$		$\nu = 0.1$		$\nu = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.1	0.00990	0.00990	0.09449	0.09449	0.53447	0.53427
0.2	0.02030	0.02030	0.19308	0.19308	1.05808	1.05758
0.3	0.03182	0.03182	0.30050	0.30051	1.55511	1.55409
0.4	0.04531	0.04531	0.42294	0.42298	1.99902	1.99716
0.5	0.06221	0.06221	0.56916	0.56927	2.34491	2.34179
0.6	0.08525	0.08526	0.75173	0.75193	2.52178	2.51708
0.7	0.12040	0.12042	0.98572	0.98522	2.43216	2.42602
0.8	0.18369	0.18383	1.26105	1.25314	1.97705	1.97069
0.9	0.32959	0.32986	1.30943	1.27173	1.12527	1.12102
$L_2 \times 10^1$	0.34830		0.13485		0.03645	
$L_\infty \times 10^1$	2.14843		0.44070		0.06490	

4.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

(3.0.1) Burgers denklemi kapalı formda

$$U_t + (UU_x)^{n+1} = \nu (U_{xx})^{n+1}$$

biçiminde yazılabilir. Burada t yönünde birinci mertebeden türev yerine

$$U_t \cong \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k}$$

ileri sonlu fark yaklaşımı, $(UU_x)^{n+1}$ lineer olmayan terim yerine

$$(UU_x)^{n+1} \cong U_i^{n+1} \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right) + U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) - U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

Rubin-Graves [45] yaklaşımı ve x yönünde ikinci mertebeden türev yerine de

$$(U_{xx})^{n+1} \cong \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2}$$

kapalı merkezi fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} + U_i^{n+1} \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right) + U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) - U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right) \\ & = \nu \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Basit bir düzenleme ile

$$U_{i-1}^{n+1} \left(-\frac{1}{2h} U_i^n - \frac{v}{h^2} \right) + U_i^{n+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} + \frac{2v}{h^2} \right) + U_{i+1}^{n+1} \left(\frac{U_i^n}{2h} - \frac{v}{h^2} \right) \\ = U_i^n \left(\frac{1}{k} + \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right), \quad i = 1(1)M-1$$

kapalı sonlu fark şeması elde edilir.

4.2.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, 3. bölümde tanıtılan beş model problemin kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar sunuldu.

Problem 1' in kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri Çizelge 4.16-4.19' da verildi. Çizelge 4.16' da, $t = 0.1$ zamanında viskozite $v = 1$ için farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$) alınarak elde edilen nümerik çözümlerin problemin tam çözümüyle karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " h " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.17' de, $t = 0.1$ zamanında $v = 1$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı zaman adım uzunluklarının ($k = 0.0002, 0.0001, 0.00005, 0.000025$) seçimi için elde edilen nümerik çözümlerle tam çözümün karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " k " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.18' de, farklı zaman değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ ve viskozitenin ($v = 1, 0.1, 0.01$) değerleri için elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümlerin karşılaştırılması verildi. Çözümlerin birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir. Çizelge 4.19' da, $t = 0.1$ zamanında $v = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı konum adım uzunlukları alınarak elde edilen nümerik çözümlerdeki L_2 , L_∞ ve $\|e\|_1$ hata normlarının literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırılması verildi.

Çizelge 4.16 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $v = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümü ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11030	0.10973	0.10959	0.10956	0.10954
0.2	0.21129	0.21017	0.20990	0.20983	0.20979
0.3	0.29407	0.29245	0.29205	0.29194	0.29190
0.4	0.35066	0.34862	0.34811	0.34798	0.34792
0.5	0.37468	0.37237	0.37179	0.37164	0.37158
0.6	0.36223	0.35985	0.35926	0.35911	0.35905
0.7	0.31280	0.31064	0.31010	0.30997	0.30991
0.8	0.23004	0.22838	0.22797	0.22786	0.22782
0.9	0.12190	0.12099	0.12077	0.12071	0.12069
$L_2 \times 10^3$	2.22733	0.56608	0.15114	0.04744	
$L_\infty \times 10^3$	3.18248	0.80904	0.21620	0.06757	

Çizelge 4.17 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $v = 1$, $h = 0.025$ ve farklı k değerleri için nümerik çözümü ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$k = 0.0002$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	$k = 0.000025$	
0.1	0.10969	0.10964	0.10961	0.10960	0.10954
0.2	0.21009	0.20999	0.20994	0.20991	0.20979
0.3	0.29232	0.29218	0.29210	0.29207	0.29190
0.4	0.34844	0.34827	0.34818	0.34814	0.34792
0.5	0.37213	0.37195	0.37186	0.37182	0.37158
0.6	0.35959	0.35942	0.35933	0.35929	0.35905
0.7	0.31039	0.31024	0.31016	0.31012	0.30991
0.8	0.22818	0.22807	0.22801	0.22798	0.22782
0.9	0.12088	0.12082	0.12079	0.12078	0.12069
$L_2 \times 10^4$	3.95856	2.67016	2.02613	1.70434	
$L_\infty \times 10^4$	5.60318	3.78896	2.88320	2.43056	

Çizelge 4.18 : Problem 1' in farklı zamanlarda $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ ve farklı ν değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01361	0.01357	0.30895	0.30889	0.34197	0.34191
	0.6	0.00190	0.00189	0.24078	0.24074	0.26901	0.26856
	0.8	0.00026	0.00026	0.19571	0.19568	0.22151	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16260	0.16256	0.18822	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01928	0.01924	0.56974	0.56963	0.66080	0.66071
	0.6	0.00268	0.00267	0.44731	0.44721	0.52949	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35935	0.35924	0.43920	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29202	0.29192	0.37447	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04024	0.04020	0.15019	0.15018
0.75	0.4	0.01366	0.01363	0.62565	0.62544	0.91041	0.91026
	0.6	0.00190	0.00189	0.48748	0.48721	0.76735	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37417	0.37392	0.64748	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28769	0.29043	0.55612	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02980	0.02977	0.22486	0.22481

Çizelge 4.19 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı h değerleri için elde edilen nümerik çözümlerdeki hata normlarının literatürdeki bazı çalışmalarda elde edilen hata normları ile karşılaştırılması

Metot	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$
$\ e\ _1$	0.008418	0.002141	0.000572	0.000180	0.000133
L_2	0.002227	0.000566	0.000151	0.000047	0.000035
L_∞	0.003182	0.000809	0.000216	0.000068	0.000050
$\ e\ _1$ [26]	0.00109	0.00026	0.00012	0.00008	
$\ e\ _1$ [28]	0.00476	0.00144	0.00038	0.00007	
$\ e\ _1$ [27]	0.01217	0.00694	0.00365	0.00186	
L_2 [31]		0.000579	0.000164	0.000060	0.000048
L_∞ [31]		0.000827	0.000234	0.000086	0.000068

Problem 2' nin kapalı sonlu fark yöntemiyle elde edilen nümerik çözümleri Çizelge 4.20-4.22' de verildi. Çizelge 4.20' de, $t = 0.1$ zamanında viskozite $\nu = 0.5$ ve $k = 0.0001$ için farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.4, 0.2, 0.1$) alınarak elde edilen nümerik çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " h " küçüldükçe L_2 ve L_∞

hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.21’ de, farklı zamanlarda ve farklı viskosite değerleri için $h = 0.1$ ve $k = 0.001$ alarak nümerik çözümler elde edildi. Nümerik çözümlerle analitik çözümlerin uyumlu olduğu görüldü. Çizelge 4.22’ de, değişik zamanda $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ çeşitli viskosite ($\nu = 1, 0.25, 0.125, 0.025$) değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları verildi.

Çizelge 4.20 : Problem 2’ nin $t = 0.1$ de $\nu = 0.5$, $k = 0.0001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.4$	$h = 0.2$	$h = 0.1$	
10	0.99364	0.99363	0.99363	0.99363
12	0.95485	0.95480	0.95479	0.95478
14	0.74079	0.74078	0.74078	0.74077
16	0.27877	0.27886	0.27888	0.27888
18	0.04975	0.04974	0.04974	0.04974
20	0.00704	0.00703	0.00703	0.00703
22	0.00096	0.00096	0.00096	0.00096
24	0.00013	0.00013	0.00013	0.00013
$L_2 \times 10^4$	2.30653	0.58002	0.14442	
$L_\infty \times 10^4$	1.67005	0.42210	0.10643	

Çizelge 4.21 : Problem 2’ nin $h = 0.1$, $k = 0.001$ ve farklı viskosite değerleri için nümerik çözümü ile tam çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$		$\nu = 0.5$		$\nu = 0.1$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
10	0.5	0.93246	0.93245	0.99478	0.99478	1.00000	1.00000
	1.0	0.93992	0.93991	0.99593	0.99593	1.00000	1.00000
	1.5	0.94660	0.94660	0.99683	0.99683	1.00000	1.00000
	2.0	0.95258	0.95257	0.99753	0.99753	1.00000	1.00000
15	0.5	0.53120	0.53121	0.56214	0.56218	0.77824	0.77730
	1.0	0.56217	0.56218	0.62241	0.62246	0.92781	0.92414
	1.5	0.59265	0.59267	0.67914	0.67918	0.97956	0.97702
	2.0	0.62245	0.62246	0.73105	0.73106	0.99447	0.99331
20	0.5	0.08510	0.08510	0.00858	0.00858	0.00000	0.00000
	1.0	0.09535	0.09535	0.01099	0.01099	0.00000	0.00000
	1.5	0.10669	0.10669	0.01407	0.01406	0.00000	0.00000
	2.0	0.11921	0.11920	0.01800	0.01799	0.00000	0.00000

Çizelge 4.22 : Problem 2' nin farklı zaman adımlarında ve farklı viskozite değerlerinde $h = 0.1$ de $k = 0.01$ için L_2 ve L_∞ hata normları

Nümerik Çözüm					
t		$\nu = 1$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.125$	$\nu = 0.025$
0.5	$L_2 \times 10^2$	0.05624	0.02951	0.13228	4.83842
	$L_\infty \times 10^1$	0.00570	0.00312	0.01965	1.07311
1.0	$L_2 \times 10^2$	0.07144	0.04890	0.19566	5.72187
	$L_\infty \times 10^1$	0.00660	0.00507	0.02862	1.26234
2.0	$L_2 \times 10^2$	0.09512	0.07278	0.25260	6.08551
	$L_\infty \times 10^1$	0.00858	0.00735	0.03626	1.32951
3.0	$L_2 \times 10^2$	0.12006	0.08650	0.27504	6.10637
	$L_\infty \times 10^1$	0.01107	0.00859	0.03917	1.33447

Problem 3' ün kapalı sonlu fark yöntemiyle elde edilen nümerik çözümleri Çizelge 4.23-4.25' de verildi. Çizelge 4.23' te $t = 0.1$ zamanında $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h ($h = 0.05, 0.025, 0.0125$) değerleri için nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması yapılmış ve " h " küçüldükçe nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklaştığı görülmüştür. Çizelge 4.24' te farklı zamanlarda $\nu = 0.01$, $k = 0.01$ ve farklı h konum adım uzunlukları için nümerik çözümleriyle analitik çözümünün karşılaştırılması yapıp " h " küçüldükçe nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmüştür. Çizelge 4.25' te $t = 0.5$ zamanında $\nu = 0.01$, $h = 1/36$, $k = 0.025$ için tam çözüm ve literatürdeki bazı çalışmalarda elde edilen yaklaşık çözümler ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.23 : Problem 3' ün $t = 0.1$ zamanında $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümler ile tam çözümün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	1.03816	0.98426	0.97725	0.97416
0.2	0.43839	0.46781	0.47991	0.48347
0.3	0.21308	0.20959	0.20854	0.20796
0.4	0.20040	0.20020	0.20016	0.20015
0.5	0.20001	0.20000	0.20000	0.20000
0.6	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.7	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.8	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.9	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
$L_2 \times 10^2$	1.92280	0.47521	0.12453	
$L_\infty \times 10^2$	6.39994	1.76648	0.46604	

Çizelge 4.24 : Problem 3' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.01$, $k = 0.01$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	$t = 0.5$			$t = 1$		
	$h = 0.025$	$h = 0.02$	Tam Çözüm	$h = 0.025$	$h = 0.02$	Tam Çözüm
0.1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	0.99999	0.99995	0.99990	1.00000	1.00000	1.00000
0.3	0.99709	0.99443	0.99465	1.00000	1.00000	1.00000
0.4	0.75540	0.76031	0.78485	1.00000	1.00000	1.00000
0.5	0.25498	0.25502	0.23794	0.99999	0.99991	0.99990
0.6	0.20239	0.20216	0.20073	0.99678	0.99378	0.99465
0.7	0.20009	0.20007	0.20001	0.75387	0.75887	0.78485
0.8	0.20000	0.20000	0.20000	0.25625	0.25652	0.23794
0.9	0.20000	0.20000	0.20000	0.20263	0.20240	0.20073
$L_2 \times 10^3$	7.69956	7.16760		8.15327	7.79487	
$L_\infty \times 10^2$	2.94442	2.45348		3.09791	2.59780	

Çizelge 4.25 : Problem 3' ün $t = 0.5$, $\nu = 0.01$, $h = 1/36$, $k = 0.025$ kapalı yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçların literatürdeki bazı sonuçlar ile karşılaştırılması

x	[42]	[39]	[40]	[41]	$\theta = 1$	Tam Çözüm
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.278	0.998	0.999	0.999	0.999	0.996	0.998
0.333	0.985	0.985	0.986	0.986	0.965	0.980
0.389	0.851	0.847	0.850	0.850	0.796	0.847
0.444	0.447	0.452	0.448	0.448	0.469	0.452
0.500	0.238	0.238	0.236	0.238	0.275	0.238
0.556	0.205	0.204	0.204	0.204	0.217	0.204
0.611	0.201	0.200	0.200	0.200	0.204	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200	0.200	0.201	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
1.00	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200

Problem 4' ün kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri Çizelge 4.26-4.28' de verildi. Çizelge 4.26' da, farklı zamanlarda ve farklı viskozite değerlerinde ($\nu = 1, 0.1, 0.01$), $h = 0.0125$, $k = 0.001$ için nümerik çözümleriyle analitik çözümünün karşılaştırılması verilmiştir. Çizelge 4.27' de farklı zamanlarda $\nu = 0.002$, $k = 0.005$ ve farklı h ($h = 0.05, 0.025, 0.0125$) değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları verilmiştir. " h " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarında azalma olduğu görülmektedir. Çizelge 4.28' de farklı zamanlarda ve farklı viskozite değerlerinde ($\nu = 0.005, 0.001$) $h = 0.0125$, $k = 0.002$ için L_2 ve L_∞ hata normları verildi.

Çizelge 4.26 : Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskozite değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.001$ için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.75	0.4	0.73183	0.73175	0.10837	0.10837	0.01137	0.01137
	0.6	0.61803	0.61798	0.10560	0.10560	0.01134	0.01134
	0.8	0.53414	0.53411	0.10295	0.10295	0.01131	0.01131
	1.0	0.46989	0.46986	0.10043	0.10043	0.01128	0.01128
	3.0	0.21101	0.21101	0.08052	0.08052	0.01098	0.01098
1.00	0.4	0.98094	0.98082	0.14631	0.14631	0.01538	0.01538
	0.6	0.82700	0.82693	0.14246	0.14246	0.01533	0.01533
	0.8	0.71402	0.71397	0.13881	0.13881	0.01529	0.01529
	1.0	0.62770	0.62767	0.13534	0.13533	0.01525	0.01525
	3.0	0.28142	0.28141	0.10806	0.10806	0.01483	0.01483
1.25	0.4	1.23486	1.23476	0.18611	0.18611	0.01960	0.01960
	0.6	1.03868	1.03862	0.18104	0.18104	0.01954	0.01954
	0.8	0.89553	0.89549	0.17623	0.17623	0.01948	0.01948
	1.0	0.78657	0.78654	0.17167	0.17167	0.01943	0.01943
	3.0	0.35189	0.35188	0.13628	0.13628	0.01888	0.01888

Çizelge 4.27 : Problem 4' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.002$, $k = 0.005$ ve farklı h değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları

t		Nümerik Çözüm		
		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
0.5	$L_2 \times 10^9$	0.54058	0.09220	0.03197
	$L_\infty \times 10^9$	1.12338	0.21909	0.03856
1.0	$L_2 \times 10^9$	1.03527	0.17334	0.06330
	$L_\infty \times 10^9$	2.13910	0.39844	0.07680
2.0	$L_2 \times 10^9$	1.93342	0.31626	0.01243
	$L_\infty \times 10^9$	3.83162	0.69300	0.01523
3.0	$L_2 \times 10^9$	2.74277	0.44088	0.01835
	$L_\infty \times 10^9$	5.18650	0.93140	0.02266

Çizelge 4.28 : Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskozite değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.002$ için L_2 ve L_∞ hata normları

t	$\nu = 0.005$		$\nu = 0.001$	
	$L_2 \times 10^{10}$	$L_\infty \times 10^{10}$	$L_2 \times 10^{12}$	$L_\infty \times 10^{11}$
0.1	0.40214	0.48300	1.43085	0.36541
0.2	0.79941	0.96403	2.81516	0.70787
0.3	1.19275	1.44310	4.16718	1.03049
0.4	1.58253	1.92020	5.49318	1.34395
0.5	1.96896	2.39537	6.79688	1.65060

Problem 5' in kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri Çizelge 4.29-4.31' de verildi. Çizelge 4.29' da, $t = 0.1$ zamanında $\nu = 1$ ve $k = 0.0001$ için farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$) alınarak elde edilen nümerik çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " h " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.30' da, $t = 0.1$ zamanında $\nu = 1$ ve $h = 0.0125$ alınarak farklı zaman adım uzunluklarının ($k = 0.0002, 0.0001, 0.00005, 0.000025$) seçimi için elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması verildi. Bu çizelgeden " k " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.31' de, $t = 0.1$ de farklı viskozite değerleri için $h = 0.0125$, $k = 0.00005$ alarak nümerik çözümleriyle analitik çözümlerinin karşılaştırılması verilmiştir. Çözümlerin birbirleriyle uyumu görülmektedir.

Çizelge 4.29 : Problem 5' in $t = 0.1$ de $v = 1$, $k = 0.0001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.54448	0.53710	0.53526	0.53483	0.53427
0.2	1.08093	1.06397	1.05977	1.05879	1.05758
0.3	1.59662	1.56552	1.55793	1.55615	1.55409
0.4	2.06808	2.01582	2.00329	2.00035	1.99716
0.5	2.45232	2.37021	2.35093	2.34640	2.34179
0.6	2.67571	2.55684	2.52961	2.52322	2.51708
0.7	2.62707	2.47510	2.44122	2.43329	2.42602
0.8	2.17687	2.01971	1.98565	1.97771	1.97069
0.9	1.25876	1.15310	1.13071	1.12551	1.12102
$L_2 \times 10^1$	1.21150	0.29593	0.09205	0.04444	
$L_\infty \times 10^1$	2.06179	0.50775	0.15601	0.07398	

Çizelge 4.30 : Problem 5' in $t = 0.1$ de $v = 1$, $h = 0.0125$ ve farklı k değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$k = 0.0002$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	$k = 0.000025$	
0.1	0.53525	0.53483	0.53462	0.53452	0.53427
0.2	1.05970	1.05879	1.05834	1.05812	1.05758
0.3	1.55767	1.55615	1.55541	1.55504	1.55409
0.4	2.00264	2.00035	1.99923	1.99868	1.99716
0.5	2.34962	2.34640	2.34483	2.34405	2.34179
0.6	2.52740	2.52322	2.52118	2.52018	2.51708
0.7	2.43812	2.43329	2.43094	2.42978	2.42602
0.8	1.98227	1.97771	1.97548	1.97438	1.97069
0.9	1.12839	1.12551	1.12410	1.12341	1.12102
$L_2 \times 10^2$	0.74226	0.44442	0.29904	0.22739	
$L_\infty \times 10^2$	1.22658	0.73980	0.50206	0.38512	

Çizelge 4.31 : Problem 5' in $t = 0.1$ de farklı viskozite değerleri için $h = 0.0125$, $k = 0.00005$ alarak nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması

x	$\nu = 0.01$		$\nu = 0.1$		$\nu = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.1	0.00990	0.00990	0.09449	0.09449	0.53462	0.53427
0.2	0.02030	0.02030	0.19308	0.19308	1.05834	1.05758
0.3	0.03182	0.03182	0.30051	0.30051	1.55541	1.55409
0.4	0.04531	0.04531	0.42297	0.42298	1.99923	1.99716
0.5	0.06221	0.06221	0.56925	0.56927	2.34483	2.34179
0.6	0.08526	0.08526	0.75189	0.75193	2.52118	2.51708
0.7	0.12041	0.12042	0.98542	0.98522	2.43094	2.42602
0.8	0.18380	0.18383	1.25535	1.25314	1.97548	1.97069
0.9	0.32995	0.32986	1.28139	1.27173	1.12410	1.12102
$L_2 \times 10^2$	0.70711		0.34243		0.29904	
$L_\infty \times 10^2$	4.05789		1.11053		0.50206	

4.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu kısımda (3.0.1) ile verilen Burgers denkleminde görülen t yönünde birinci mertebeden türev yerine

$$U_t \cong \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k}$$

ileri sonlu fark yaklaşımını UU_x lineer olmayan terimi yerine

$$UU_x = \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2}$$

Crank-Nicolson yaklaşımı ve bu yaklaşımdaki $(UU_x)^{n+1}$ yerine de Rubin-Graves yaklaşımı

$$(UU_x)^{n+1} \cong U_i^{n+1} \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right) + U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) - U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

ve eşitliğin sağ tarafındaki x yönünde ikinci mertebeden türev yerine de

$$U_{xx} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right]$$

Crank-Nicolson fark yaklaşımı yazılır. Basit bir düzenleme ile Burgers denklemin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\begin{aligned} & U_{i-1}^{n+1} \left(-\frac{1}{4h} U_i^n - \frac{\nu}{2h^2} \right) + U_i^{n+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{4h} + \frac{\nu}{h^2} \right) + U_{i+1}^{n+1} \left(\frac{U_i^n}{4h} - \frac{\nu}{2h^2} \right) \\ & = U_{i-1}^n \left(\frac{\nu}{2h^2} \right) + U_i^n \left(\frac{1}{k} - \frac{\nu}{h^2} \right) + U_{i+1}^n \left(\frac{\nu}{2h^2} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.3.1 Nümerik Sonuçlar

Bu tezin 3. bölümde tanıtılan beş model problemin Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile bulunan sayısal sonuçlar sunuldu.

Problem 1' in Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle bulunan sayısal çözümleri Çizelge 4.32-4.35' te verildi. Çizelge 4.32' de, $t = 0.1$ zamanında viskozite $\nu = 1$ ve $k = 0.00001$ için farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$) alınarak elde edilen nümerik çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " h " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.33' te, $t = 0.1$ zamanında $\nu = 1$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı zaman adım uzunluklarının ($k = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0025$) farklı seçimi için elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " k " küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.34' te, farklı zamanlarda $h = 0.0125$, $k = 0.0001$ alınarak viskozitenin değişen değerleri ($\nu = 1, 0.1, 0.01$) için elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümlerin karşılaştırılması verildi. Çözümlerin birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir. Çizelge 4.35' te, $t = 0.1$ zamanında $\nu = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı konum adım uzunlukları alınarak elde edilen nümerik çözümlerdeki L_2 , L_∞ ve $\|e\|_1$ hata normlarının, literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırılması verildi.

Çizelge 4.32 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümü ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.11029	0.10973	0.10959	0.10955	0.10954
0.2	0.21128	0.21016	0.20989	0.20982	0.20979
0.3	0.29406	0.29244	0.29203	0.29193	0.29190
0.4	0.35064	0.34860	0.34809	0.34797	0.34792
0.5	0.37466	0.37235	0.37177	0.37163	0.37158
0.6	0.36221	0.35984	0.35924	0.35909	0.35905
0.7	0.31279	0.31062	0.31008	0.30995	0.30991
0.8	0.23003	0.22837	0.22796	0.22785	0.22782
0.9	0.12189	0.12099	0.12076	0.12071	0.12069
$L_2 \times 10^3$	2.21459	0.55326	0.13829	0.03457	
$L_\infty \times 10^3$	3.16508	0.79095	0.19830	0.04957	

Çizelge 4.33 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $h = 0.025$ ve farklı k değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$k = 0.1$	$k = 0.05$	$k = 0.025$	$k = 0.0025$	
0.1	0.09470	0.10753	0.10903	0.10958	0.10954
0.2	0.18268	0.20591	0.20883	0.20987	0.20979
0.3	0.25710	0.28640	0.29057	0.29202	0.29190
0.4	0.31097	0.34120	0.34635	0.34808	0.34792
0.5	0.33768	0.36416	0.36990	0.37175	0.37158
0.6	0.33189	0.35161	0.35742	0.35923	0.35905
0.7	0.29100	0.30324	0.30850	0.31007	0.30991
0.8	0.21666	0.22276	0.22678	0.22794	0.22782
0.9	0.11573	0.11795	0.12013	0.12076	0.12069
$L_2 \times 10^2$	2.43406	0.53141	0.11933	0.01251	
$L_\infty \times 10^2$	3.69544	0.75202	0.16785	0.01799	

Çizelge 4.34 : Problem 1' in $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ farklı viskozite değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.25	0.4	0.01358	0.01357	0.30892	0.30889	0.34193	0.34191
	0.6	0.00189	0.00189	0.24076	0.24074	0.26898	0.26856
	0.8	0.00026	0.00026	0.19570	0.19568	0.22149	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.16259	0.16256	0.18820	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.02722	0.02720	0.07512	0.07511
0.50	0.4	0.01925	0.01924	0.56970	0.56963	0.66076	0.66071
	0.6	0.00267	0.00267	0.44728	0.44721	0.52945	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.35932	0.35924	0.43916	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.29200	0.29192	0.37443	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.04023	0.04020	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.01364	0.01363	0.62566	0.62544	0.91046	0.91026
	0.6	0.00189	0.00189	0.48747	0.48721	0.76733	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.37415	0.37392	0.64744	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.28766	0.28747	0.55608	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.02979	0.02977	0.22484	0.22481

Çizelge 4.35 : Problem 1' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00001$ farklı h değerleri için elde edilen nümerik çözümlerdeki hata normlarının literatürdeki bazı çalışmalarda elde edilen hata normlarıyla karşılaştırılması

Metot	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$
$\ e\ _1$	0.008369	0.002092	0.000523	0.000131	0.000084
L_2	0.002215	0.000553	0.000138	0.000035	0.000022
L_∞	0.003165	0.000791	0.000198	0.000050	0.000032
$\ e\ _1$ [26]	0.00109	0.00026	0.00012	0.00008	
$\ e\ _1$ [28]	0.00476	0.00144	0.00038	0.00007	
$\ e\ _1$ [27]	0.01217	0.00694	0.00365	0.00186	
L_2 [31]		0.000579	0.000164	0.000060	0.000048
L_∞ [31]		0.000827	0.000234	0.000086	0.000068

Problem 2' nin Crank-Nicolson sonlu fark yöntemiyle bulunan nümerik çözümleri Çizelge 4.36-4.38' de verildi. Çizelge 4.36' da, $t = 0.1$ zamanında viskozite $\nu = 0.5$ ve $k = 0.0001$ için farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.4, 0.2, 0.1$) alınarak elde edilen nümerik çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " h " küçüldükçe her iki hata normunun azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.37' de, farklı zaman ve farklı viskozite değerleri için $h = 0.1$, $k = 0.001$ alarak L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Çok belirgin olmasada hata normlarının k nın küçülmesiyle azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.38' de, değişik zamanda $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ çeşitli viskozite ($\nu = 1, 0.25, 0.125, 0.025$) değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları verildi.

Çizelge 4.36 : Problem 2' nin $t = 0.1$ de $\nu = 0.5$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.4$	$h = 0.2$	$h = 0.1$	
10	0.99364	0.99363	0.99363	0.99363
12	0.95485	0.95480	0.95479	0.95478
14	0.74079	0.74078	0.74078	0.74077
16	0.27877	0.27876	0.27888	0.27888
18	0.04976	0.04974	0.04974	0.04974
20	0.00704	0.00703	0.00703	0.00703
22	0.00096	0.00096	0.00096	0.00096
24	0.00013	0.00013	0.00013	0.00013
$L_2 \times 10^4$	2.30774	0.58119	0.14557	
$L_\infty \times 10^4$	1.67035	0.42263	0.10681	

Çizelge 4.37 : Problem 2' nin $h = 0.1$, $k = 0.001$ ve farklı viskozite değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$		$\nu = 0.5$		$\nu = 0.1$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
10	0.5	0.93246	0.93245	0.99478	0.99478	1.00000	1.00000
	1.0	0.93992	0.93991	0.99593	0.99593	1.00000	1.00000
	1.5	0.94660	0.94660	0.99683	0.99683	1.00000	1.00000
	2.0	0.95258	0.95257	0.99753	0.99753	1.00000	1.00000
15	0.5	0.53120	0.53121	0.56214	0.56218	0.77835	0.77730
	1.0	0.56217	0.56218	0.62242	0.62246	0.92794	0.92414
	1.5	0.59266	0.59267	0.67915	0.67918	0.97963	0.97702
	2.0	0.62245	0.62246	0.73106	0.73106	0.99450	0.99331
20	0.5	0.08510	0.08510	0.00858	0.00858	0.00000	0.00000
	1.0	0.09535	0.09535	0.01099	0.01099	0.00000	0.00000
	1.5	0.10669	0.10669	0.01407	0.01406	0.00000	0.00000
	2.0	0.11920	0.11920	0.01800	0.01799	0.00000	0.00000

Çizelge 4.38 : Problem 2' nin $h = 0.1$ de $k = 0.01$ ve farklı zaman adımlarında ve farklı viskozite değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları

t		Nümerik Çözüm			
		$\nu = 1$	$\nu = 0.25$	$\nu = 0.125$	$\nu = 0.025$
0.5	$L_2 \times 10^2$	0.05637	0.03398	0.16278	5.43800
	$L_\infty \times 10^1$	0.00571	0.00335	0.02173	1.24948
1.0	$L_2 \times 10^2$	0.07136	0.05736	0.250261	6.56259
	$L_\infty \times 10^1$	0.00660	0.00549	0.03265	1.43365
2.0	$L_2 \times 10^2$	0.09471	0.08782	0.33982	7.00746
	$L_\infty \times 10^1$	0.00859	0.00811	0.04264	1.54442
3.0	$L_2 \times 10^2$	0.11951	0.10655	0.38100	7.03024
	$L_\infty \times 10^1$	0.01107	0.00961	0.04680	1.54922

Problem 3' ün Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile bulunan nümerik çözümleri Çizelge 4.39-4.41' de verildi. Çizelge 4.39' da $t = 0.1$ zamanında $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h ($h = 0.05, 0.025, 0.0125$) değerleri için nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması yapılmış ve " h " küçüldükçe nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklaştığı görülmüştür. Çizelge 4.40' ta farklı zamanlarda $\nu = 0.01$, $k = 0.05$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleriyle tam çözümün karşılaştırılması yapıp " h " küçüldükçe nümerik çözümlerin analitik çözüme

yaklaştığı görülmüştür. Çizelge 4.41’ de $t = 0.5$ zamanında $\nu = 0.01$, $h = 1/36$, $k = 0.025$ için analitik çözüm ve literatürdeki bazı çalışmalarda elde edilen yaklaşık çözümler ile uyumlu olduğu görüldü.

Çizelge 4.39 : Problem 3’ ün $t = 0.1$ de $\nu = 0.01$, $k = 0.001$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	1.03968	0.98499	0.97788	0.97416
0.2	0.43738	0.46663	0.47888	0.48347
0.3	0.21286	0.20937	0.20833	0.20796
0.4	0.20039	0.20019	0.20016	0.20015
0.5	0.20001	0.20000	0.20000	0.20000
0.6	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.7	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.8	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
0.9	0.20000	0.20000	0.20000	0.20000
$L_2 \times 10^2$	1.95682	0.50188	0.14417	
$L_\infty \times 10^2$	6.55162	1.75999	0.49905	

Çizelge 4.40 : Problem 3’ ün farklı zamanlarda $\nu = 0.01$, $k = 0.005$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	$t = 0.5$			$t = 1$		
	$h = 0.025$	$h = 0.02$	Tam Çözüm	$h = 0.025$	$h = 0.02$	Tam Çözüm
0.1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	1.00000	0.99999	0.99990	1.00000	1.00000	1.00000
0.3	1.00017	0.99843	0.99465	1.00000	1.00000	1.00000
0.4	0.77502	0.78203	0.78485	1.00000	1.00000	1.00000
0.5	0.23958	0.23906	0.23794	1.00000	0.99999	0.99990
0.6	0.20122	0.20104	0.20073	1.00038	0.99855	0.99465
0.7	0.20003	0.20003	0.20001	0.77524	0.78222	0.78485
0.8	0.20000	0.20000	0.20000	0.23919	0.23886	0.23794
0.9	0.20000	0.20000	0.20000	0.20123	0.20105	0.20073
$L_2 \times 10^3$	8.80566	5.38846		9.13028	5.53895	
$L_\infty \times 10^2$	3.34706	1.89754		3.43212	1.95010	

Çizelge 4.41 : Problem 3' ün $t = 0.5$, $\nu = 0.01$, $h = 1/36$, $k = 0.025$ Crank-Nicolson yöntemi ile bulunan nümerik sonuçların literatürdeki bazı sonuçlar ile karşılaştırılması

x	[42]	[39]	[40]	[41]	$\theta = 0.5$	Tam Çözüm
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.278	0.998	0.999	0.999	0.999	1.000	0.998
0.333	0.985	0.985	0.986	0.986	1.009	0.980
0.389	0.851	0.847	0.850	0.850	0.855	0.847
0.444	0.447	0.452	0.448	0.448	0.413	0.452
0.500	0.238	0.238	0.236	0.238	0.239	0.238
0.556	0.205	0.204	0.204	0.204	0.206	0.204
0.611	0.201	0.200	0.200	0.200	0.201	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
1.00	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200

Problem 4' ün Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile bulunan sayısal çözümleri Çizelge 4.42-4.44' te verildi. Çizelge 4.42' de farklı zamanlarda $\nu = 0.002$, $k = 0.005$ ve farklı h ($h = 0.05, 0.025, 0.0125$) değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları verilmiştir. Çizelge 4.43' te farklı zamanlarda ve farklı viskosite değerlerinde ($\nu = 0.005, 0.001$) $h = 0.0125$, $k = 0.002$ için L_2 ve L_∞ hata normları verilmiştir. Çizelge 4.44' te farklı zamanlarda ve farklı viskosite değerlerinde ($\nu = 1, 0.1, 0.01$) $h = 0.0125$, $k = 0.001$ için sayısal çözümlerle analitik çözümlerin karşılaştırılması verildi.

Çizelge 4.42 : Problem 4' ün farklı zamanlarda $\nu = 0.002$, $k = 0.005$ ve farklı h değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları

		Nümerik Çözüm		
t		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
0.5	$L_2 \times 10^9$	2.75020	3.94053	4.75442
	$L_\infty \times 10^8$	1.13448	2.14747	2.93617
1.0	$L_2 \times 10^9$	4.44805	5.27320	5.89974
	$L_\infty \times 10^8$	1.74459	2.59094	3.16834
2.0	$L_2 \times 10^9$	6.71828	6.77574	7.17355
	$L_\infty \times 10^8$	2.37916	2.91650	3.32100
3.0	$L_2 \times 10^9$	8.37947	7.75309	7.97799
	$L_\infty \times 10^8$	2.71704	3.05659	3.37707

Çizelge 4.43 : Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskosite değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.002$ için L_2 ve L_∞ hata normları

t	$\nu = 0.005$		$\nu = 0.001$	
	$L_2 \times 10^8$	$L_\infty \times 10^8$	$L_2 \times 10^{10}$	$L_\infty \times 10^9$
0.1	0.93124	6.51748	1.71639	1.43399
0.2	1.18860	7.34043	2.52361	1.99973
0.3	1.35233	7.70617	3.04568	2.29788
0.4	1.47494	7.92084	3.43654	2.48550
0.5	1.57387	8.06386	3.75222	2.61681

Çizelge 4.44 : Problem 4' ün farklı zamanlarda ve farklı viskozite değerlerinde $h = 0.0125$, $k = 0.001$ için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	t	$\nu = 1.0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam
0.75	0.4	0.73143	0.73175	0.10837	0.10837	0.01137	0.01137
	0.6	0.61774	0.61798	0.10559	0.10560	0.01134	0.01134
	0.8	0.53393	0.53411	0.10295	0.10295	0.01131	0.01131
	1.0	0.46972	0.46986	0.10043	0.10043	0.01128	0.01128
	3.0	0.21098	0.21101	0.08051	0.08052	0.01098	0.01098
1.00	0.4	0.98038	0.98082	0.14631	0.14631	0.01538	0.01538
	0.6	0.82661	0.82693	0.14246	0.14246	0.01533	0.01533
	0.8	0.71373	0.71397	0.13881	0.13881	0.01529	0.01529
	1.0	0.62748	0.62767	0.13533	0.13533	0.01525	0.01525
	3.0	0.28137	0.28141	0.10805	0.10806	0.01483	0.01483
1.25	0.4	1.23419	1.23476	0.18611	0.18611	0.01960	0.01960
	0.6	1.03820	1.03862	0.18103	0.18104	0.01954	0.01954
	0.8	0.89518	0.89549	0.17623	0.17623	0.01948	0.01948
	1.0	0.78630	0.78654	0.17167	0.17167	0.01943	0.01943
	3.0	0.35183	0.35188	0.13627	0.13628	0.01888	0.01888

Problem 5' in Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik çözümleri Çizelge 4.45-4.47' de verildi. Çizelge 4.45' te, $t = 0.1$ zamanında $\nu = 1$ ve $k = 0.00005$ için farklı konum adım uzunlukları ($h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$) alınarak elde edilen nümerik çözümlerin problemin analitik çözümüyle karşılaştırılması verildi. Çizelgeden " h " küçüldükçe her iki hata normunun azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.46' da, $t = 0.1$ zamanında $\nu = 1$ ve $h = 0.0125$ alınarak farklı zaman adım uzunluklarının ($k = 0.0002, 0.0001, 0.00005, 0.000025$) seçimi için elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması verildi. Çizelgede " k " küçüldükçe her iki hata normunun azaldığı görülmektedir. Çizelge 4.47' de, $t = 0.1$ de farklı viskozite değerleri ($\nu = 1, 0.1, 0.01$) için $h = 0.0125$, $k = 0.0005$ alarak nümerik çözümleri ile analitik çözümlerinin karşılaştırılması verilmiştir. Çözümlerin birbirleriyle uyumu görülmektedir.

Çizelge 4.45 : Problem 5' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $k = 0.00005$ ve farklı h değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.54418	0.53674	0.53486	0.53442	0.53427
0.2	1.08028	1.06318	1.05892	1.05791	1.05758
0.3	1.59551	1.56420	1.55652	1.55468	1.55409
0.4	2.06636	2.01381	2.00115	1.99813	1.99716
0.5	2.44981	2.36735	2.34791	2.34329	2.34179
0.6	2.67229	2.55309	2.52568	2.51918	2.51708
0.7	2.62288	2.47070	2.43667	2.42863	2.42602
0.8	2.17266	2.01550	1.98133	1.97329	1.97069
0.9	1.25598	1.15041	1.12798	1.12272	1.12102
$L_2 \times 10^1$	1.18591	0.26898	0.06409	0.01568	
$L_\infty \times 10^1$	2.01976	0.46329	0.11025	0.02698	

Çizelge 4.46 : Problem 5' in $t = 0.1$ de $\nu = 1$, $h = 0.0125$ ve farklı k değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümünün karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$k = 0.0002$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	$k = 0.000025$	
0.1	0.53442	0.53442	0.53442	0.53442	0.53427
0.2	1.05792	1.05791	1.05791	1.05791	1.05758
0.3	1.55471	1.55469	1.55468	1.55468	1.55409
0.4	1.99817	1.99814	1.99813	1.99813	1.99716
0.5	2.34333	2.34330	2.34329	2.34329	2.34179
0.6	2.51924	2.51919	2.51918	2.51918	2.51708
0.7	2.42869	2.42864	2.42863	2.42863	2.42602
0.8	1.97335	1.97330	1.97329	1.97329	1.97069
0.9	1.12275	1.12273	1.12272	1.12272	1.12102
$L_2 \times 10^3$	1.60528	1.57548	1.56801	1.56614	
$L_\infty \times 10^3$	2.75687	2.70999	2.69821	2.69527	

Çizelge 4.47 : Problem 5' in $t = 0.1$ de farklı viskosite değerleri için $h = 0.0125$, $k = 0.0005$ olarak nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması

x	$\nu = 0.01$		$\nu = 0.1$		$\nu = 1$	
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	
0.1	0.00990	0.00990	0.09449	0.09449	0.53442	0.53427
0.2	0.02030	0.02030	0.19308	0.19308	1.05792	1.05758
0.3	0.03182	0.03182	0.30051	0.30051	1.55470	1.55409
0.4	0.04531	0.04531	0.42297	0.42298	1.99815	1.99716
0.5	0.06221	0.06221	0.56924	0.56927	2.34330	2.34179
0.6	0.08526	0.08526	0.75188	0.75193	2.51919	2.51708
0.7	0.12041	0.12042	0.98537	0.98522	2.42862	2.42602
0.8	0.18380	0.18383	1.25516	1.25314	1.97328	1.97069
0.9	0.32994	0.32986	1.28083	1.27173	1.12271	1.12102
$L_2 \times 10^2$	0.70354		0.32265		0.15666	
$L_\infty \times 10^2$	4.03793		1.05057		0.26877	

Model problemlerin grafikleri Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen nümerik çözümler kullanılarak çizildi.

Problem 1' in $\nu = 1, 0.1, 0.001, 0.005$ viskosite değerleri için farklı zamanlarda yaklaşık çözümleri ile analitik çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 4.1-4.4' te verilmiştir. Şekil 4.4' te $\nu = 0.005$ analitik çözümün bozulduğu buna karşın nümerik çözümün problemin doğasına uygun davrandığı görüldü.

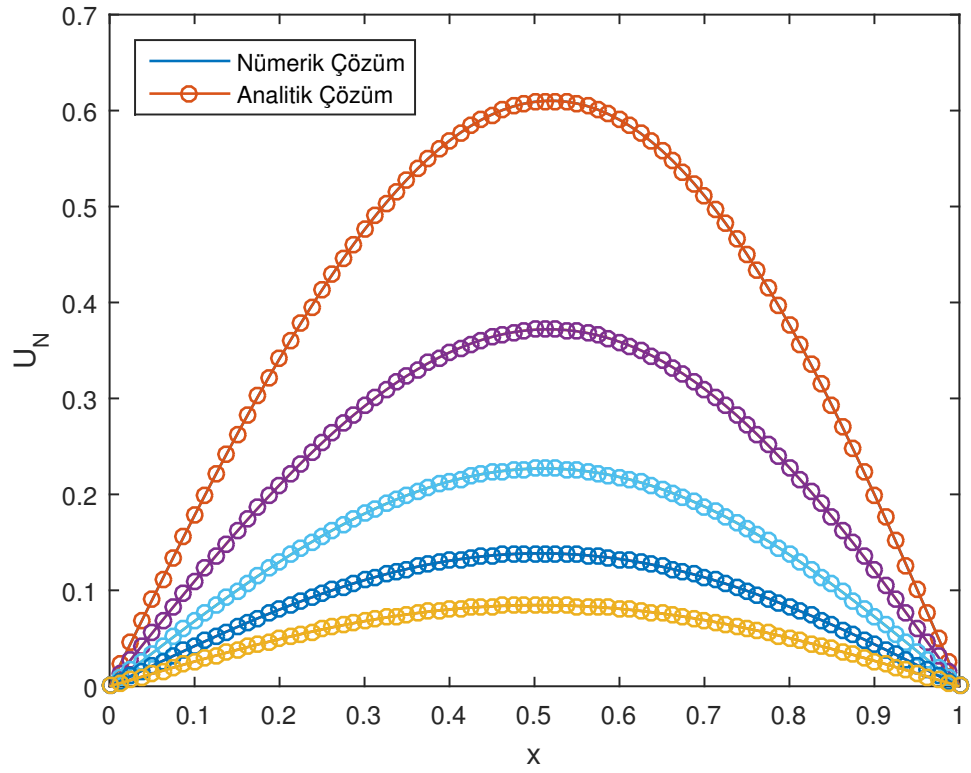
Problem 2' nin $\nu = 1/2, 1/8, 1/24$ viskosite değerleri için farklı zamanlarda yaklaşık çözümleri ile analitik çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 4.5-4.7' de verilmiştir.

Problem 3' ün $\nu = 0.01$ viskosite değeri için farklı zamanlarda yaklaşık çözümleri ile analitik çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 4.8' de verilmiştir.

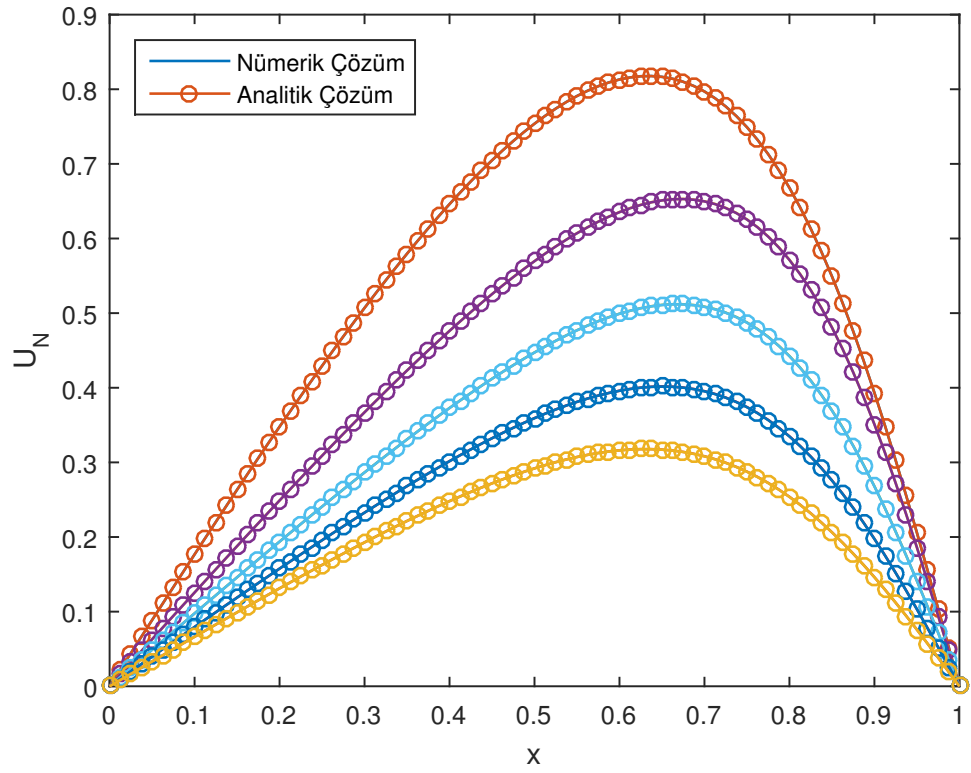
Problem 4' ün $\nu = 0.01$ viskosite değeri için farklı zamanlarda yaklaşık çözümleri ile analitik çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 4.9' de verilmiştir.

Problem 5' in $\nu = 1, 0.1, 0.01, 0.005$ viskosite değerleri için farklı zamanlarda yaklaşık çözümleri ile analitik çözümlerinin karşılaştırılması Şekil 4.10-4.13' te verilmiştir.

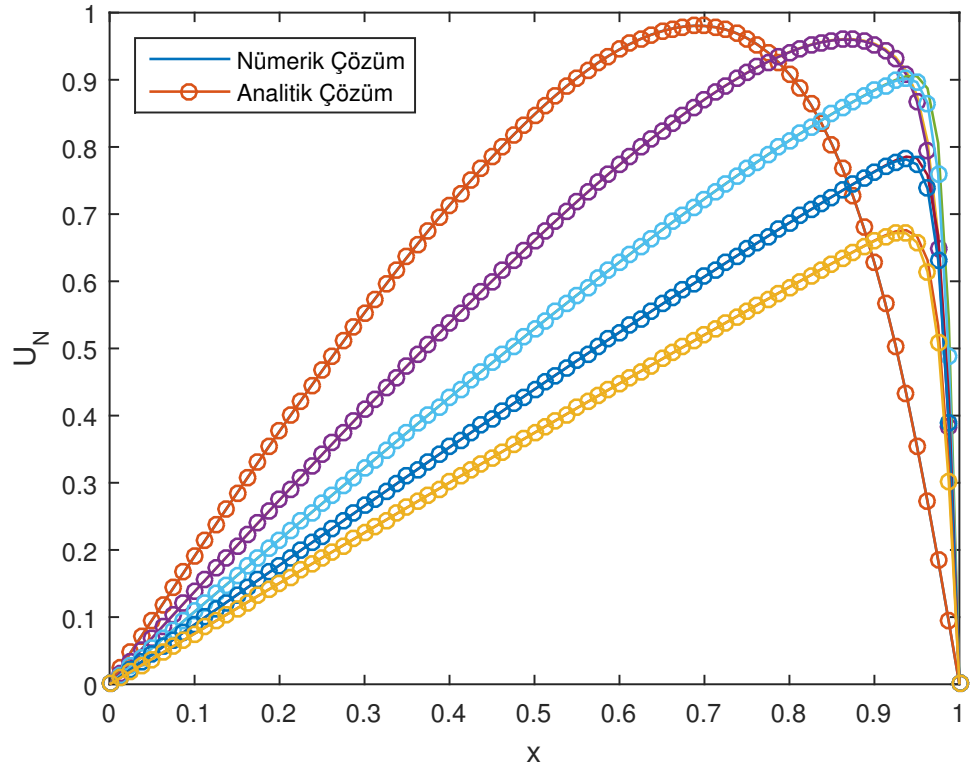
Her bir problem için elde edilen yaklaşık çözümler ile analitik çözümlerin uyumu (4.1)-(4.13)' ten açıkça görülmektedir.



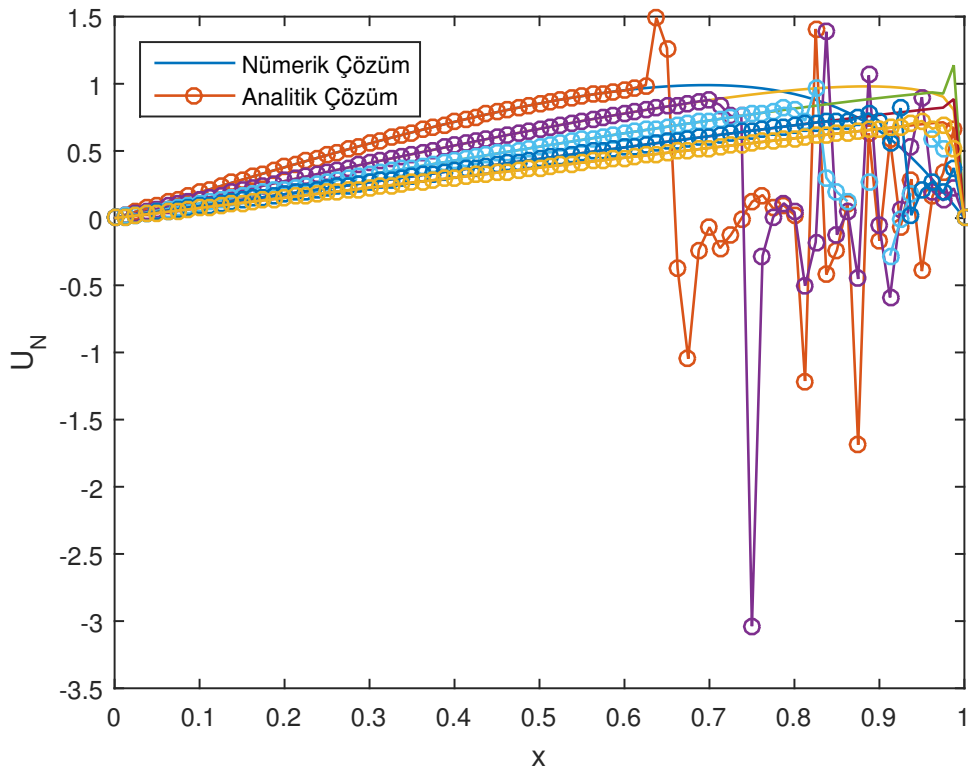
Şekil 4.1 : Problem 1' in $\nu = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.05$ (kırmızı), $t = 0.1$ (mor), $t = 0.15$ (mavi), $t = 0.20$ (lacivert), $t = 0.25$ (sarı) gösterimi.



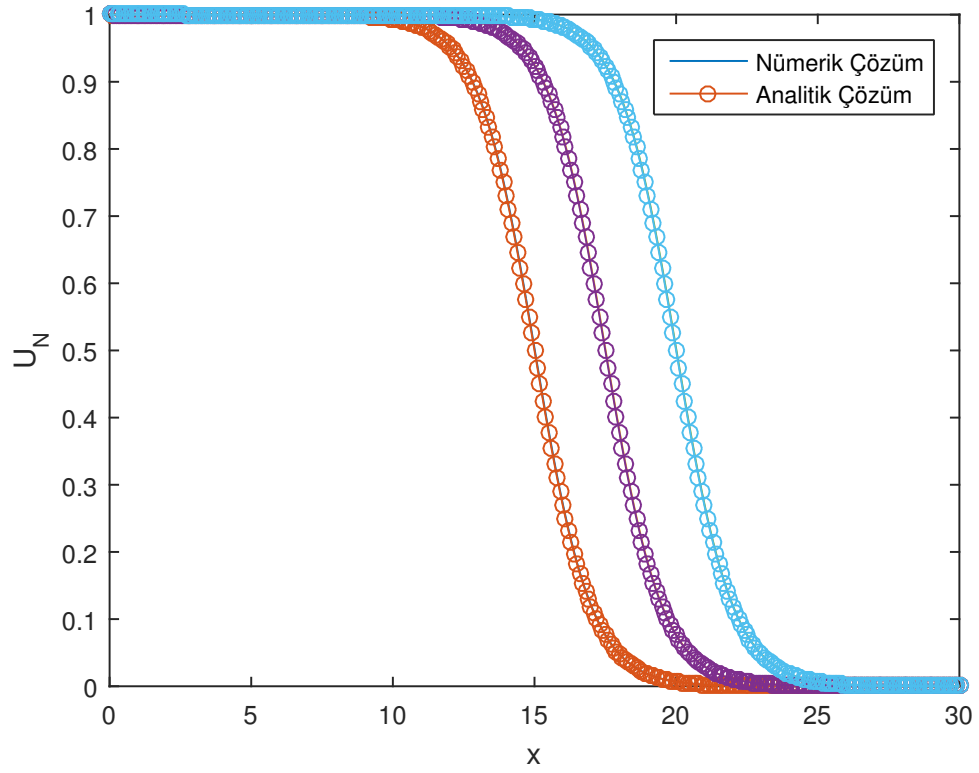
Şekil 4.2 : Problem 1' in $\nu = 0.1$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.2$ (kırmızı), $t = 0.4$ (mor), $t = 0.6$ (mavi), $t = 0.8$ (lacivert), $t = 1.0$ (sarı) gösterimi.



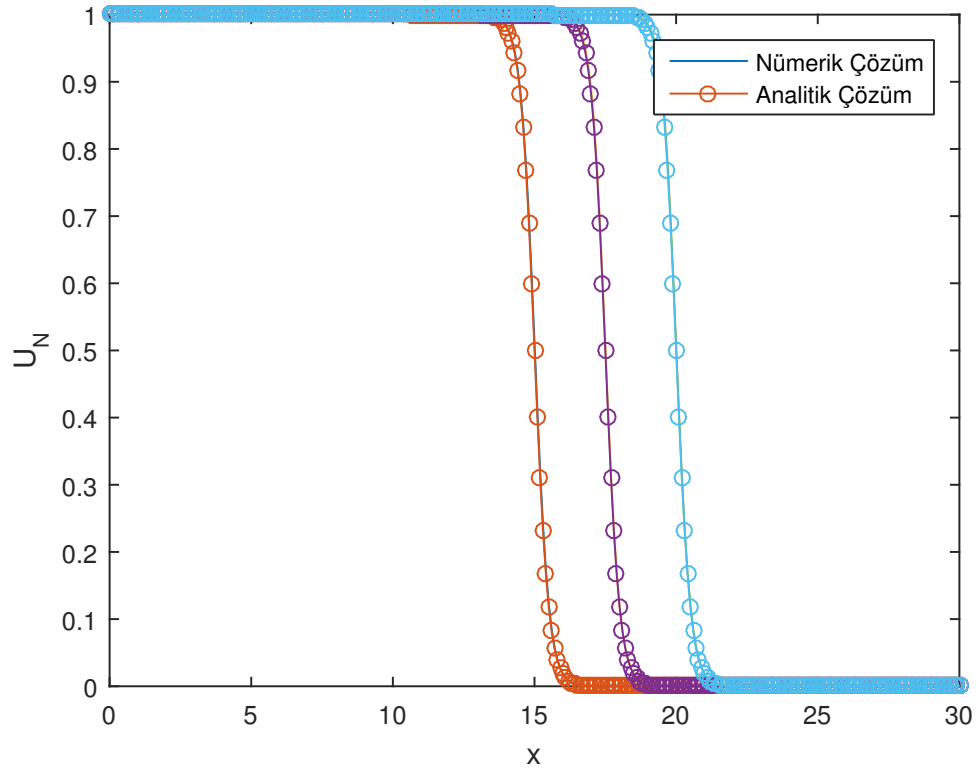
Şekil 4.3 : Problem 1' in $\nu = 0.01$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.2$ (kırmızı), $t = 0.4$ (mor), $t = 0.6$ (mavi), $t = 0.8$ (lacivert), $t = 1.0$ (sarı) gösterimi.



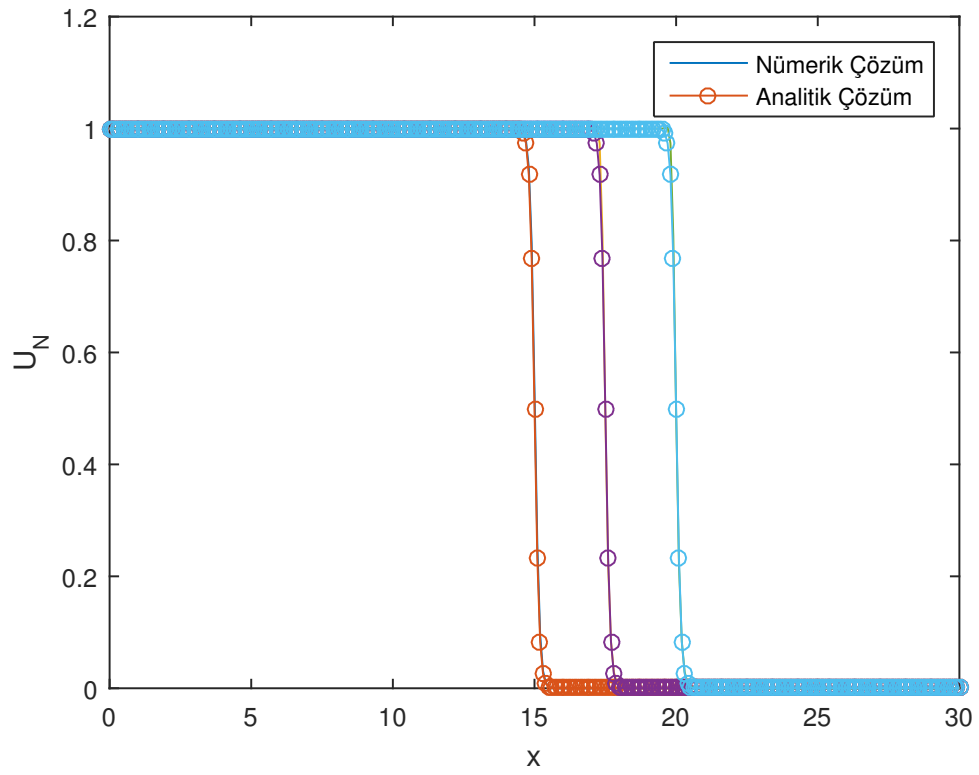
Şekil 4.4 : Problem 1' in $\nu = 0.005$, $k = 0.0001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.2$ (kırmızı), $t = 0.4$ (mor), $t = 0.6$ (mavi), $t = 0.8$ (lacivert), $t = 1.0$ (sarı) gösterimi.



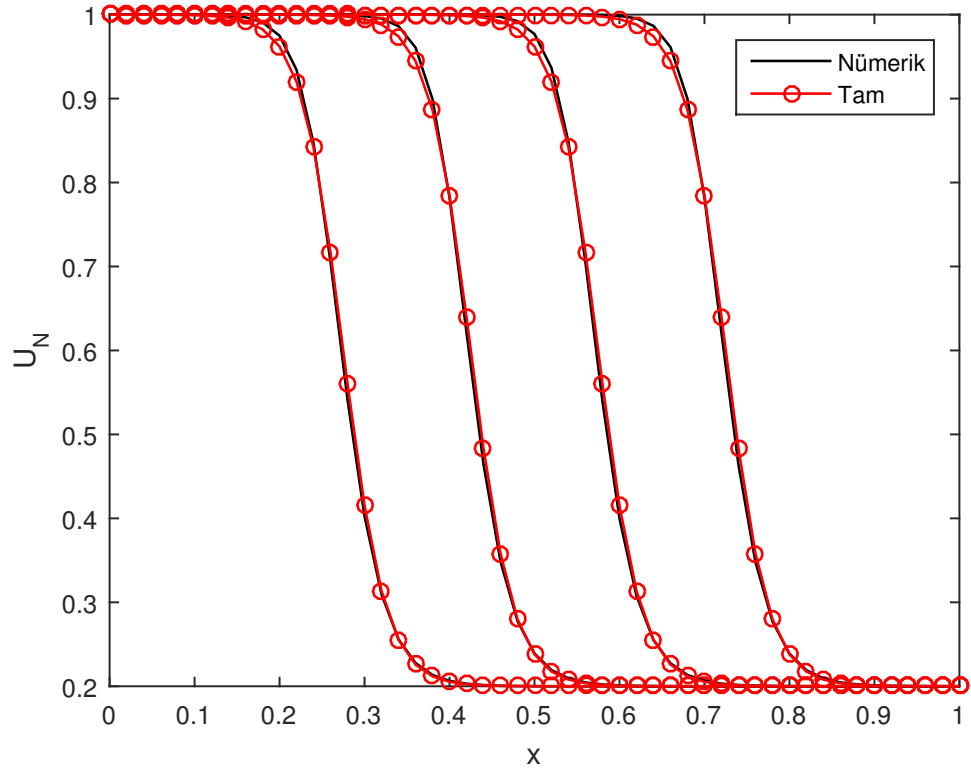
Şekil 4.5 : Problem 2' nin $\nu = 0.5$, $k = 0.025$, $h = 0.1$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.0$ (kırmızı), $t = 5$ (mor), $t = 10$ (mavi) gösterimi.



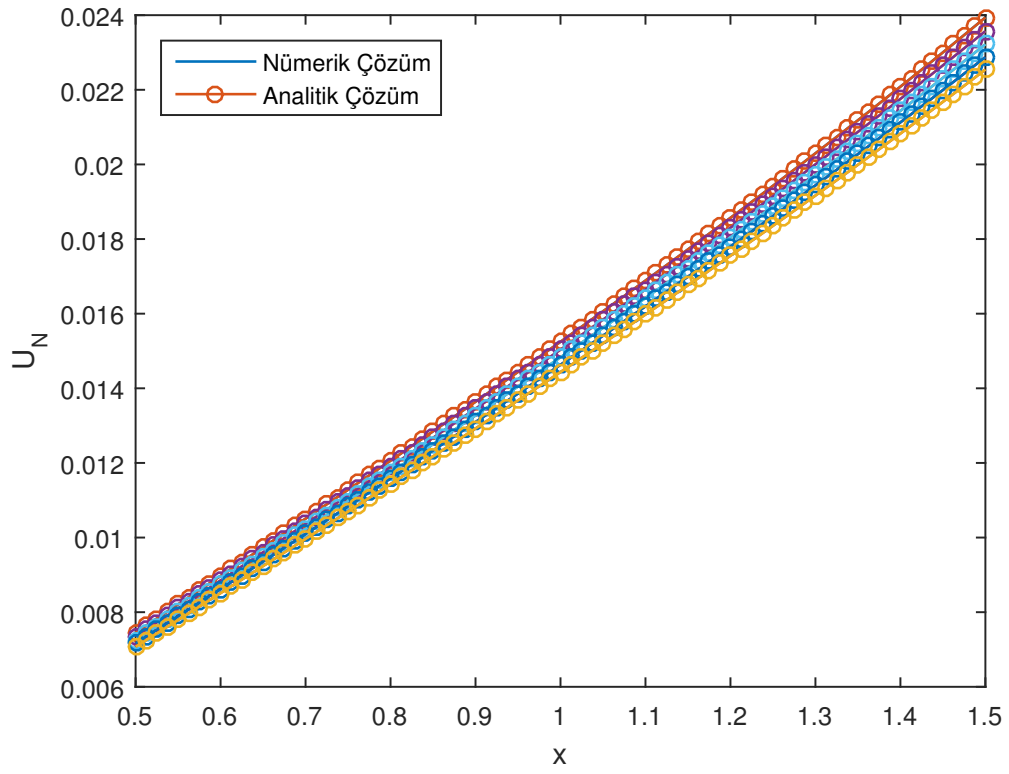
Şekil 4.6 : Problem 2' nin $\nu = 1/8$, $k = 0.025$, $h = 0.1$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.0$ (kırmızı), $t = 5$ (mor), $t = 10$ (mavi) gösterimi.



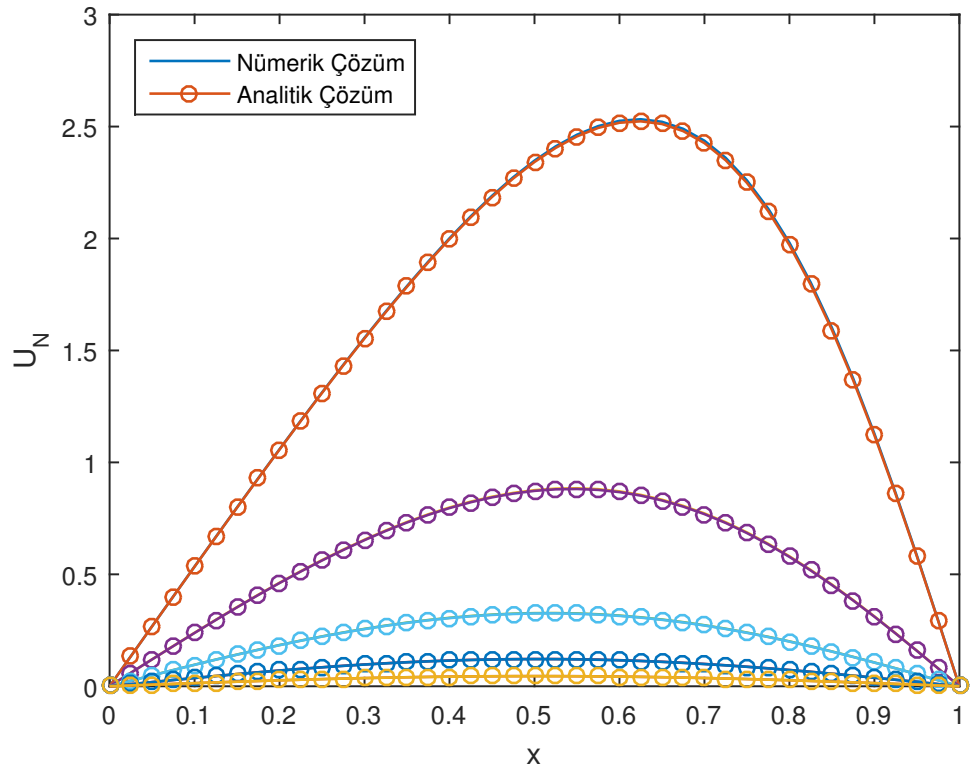
Şekil 4.7 : Problem 2' nin $\nu = 1/24$, $k = 0.025$, $h = 0.1$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.0$ (kırmızı), $t = 5$ (mor), $t = 10$ (mavi) gösterimi.



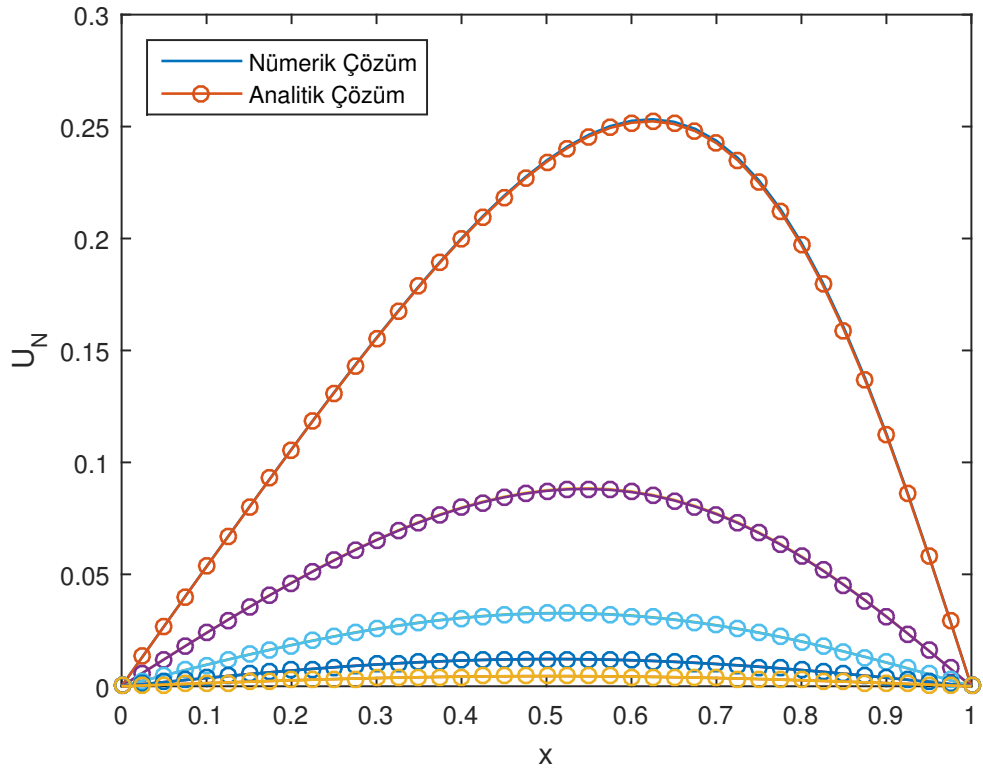
Şekil 4.8 : Problem 3' ün $\nu = 0.01$, $k = 0.005$, $h = 0.02$ parametre değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ (soldan sağa) gösterimi.



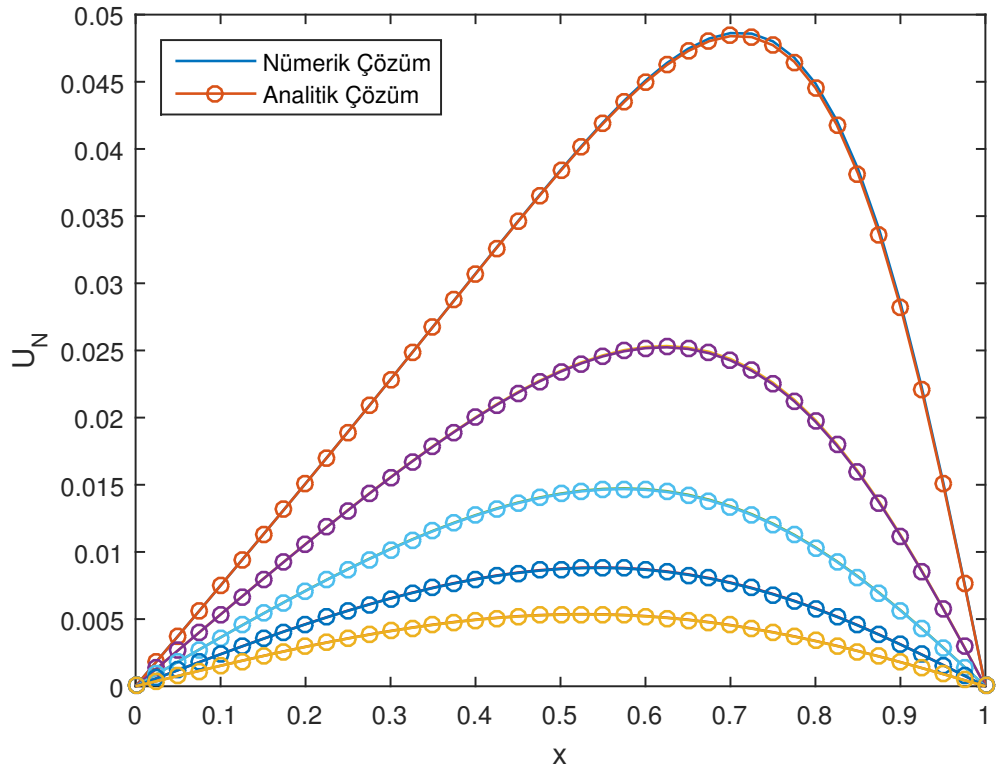
Şekil 4.9 : Problem 4' ün $\nu = 0.01$, $k = 0.001$, $h = 0.0125$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarında $t = 1$ (kırmızı), $t = 2$ (mor), $t = 3$ (mavi), $t = 4$ (lacivert), $t = 5$ (sarı) gösterimi.



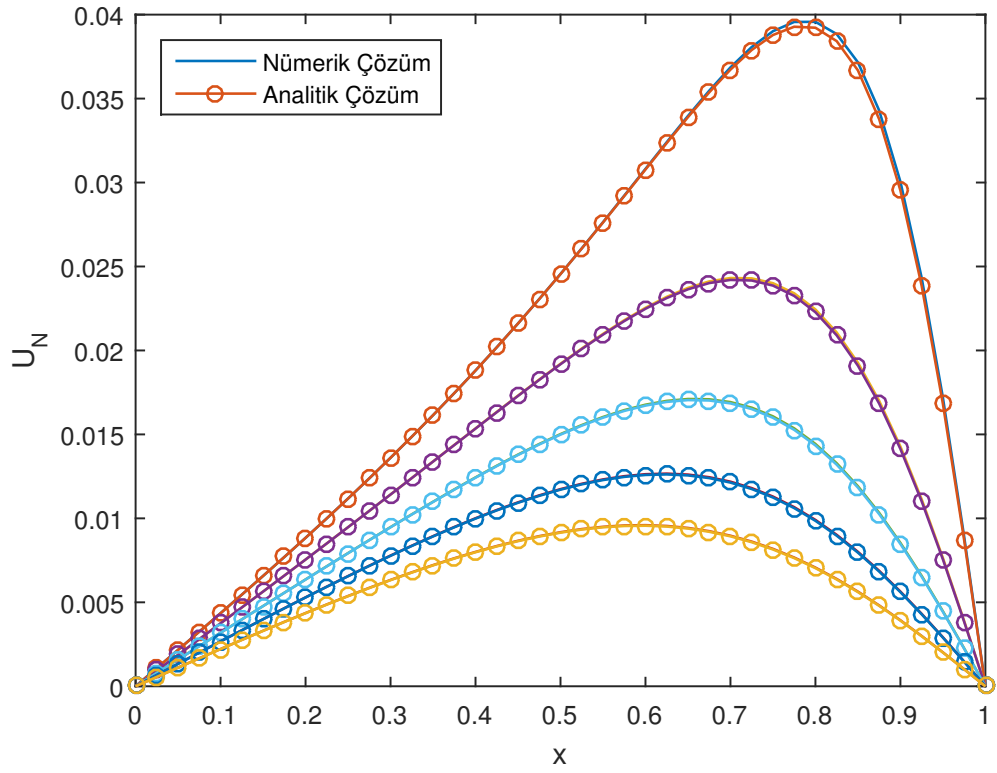
Şekil 4.10 : Problem 5' in $\nu = 1$, $k = 0.0001$, $h = 0.025$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 0.1$ (kırmızı), $t = 0.2$ (mor), $t = 0.3$ (mavi), $t = 0.4$ (lacivert), $t = 0.5$ (sarı) gösterimi.



Şekil 4.11 : Problem 5' in $\nu = 0.1$, $k = 0.001$, $h = 0.025$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 1$ (kırmızı), $t = 2$ (mor), $t = 3$ (mavi), $t = 4$ (lacivert), $t = 5$ (sarı) gösterimi.



Şekil 4.12 : Problem 5' in $\nu = 0.01$, $k = 0.005$, $h = 0.025$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 5$ (kırmızı), $t = 10$ (mor), $t = 15$ (mavi), $t = 20$ (lacivert), $t = 25$ (sarı) gösterimi.



Şekil 4.13 : Problem 5' in $\nu = 0.005$, $k = 0.01$, $h = 0.025$ parametre değerleri için elde edilen nümerik çözümlerinin farklı zamanlarda $t = 5$ (kırmızı), $t = 10$ (mor), $t = 15$ (mavi), $t = 20$ (lacivert), $t = 25$ (sarı) gösterimi.

4.4 Kararlılık Analizi

(3.0.1) ile verilen Burgers denklemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

için ağırlıklı averaj yaklaşımı,

$$\begin{aligned} \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \hat{U} \left[\theta \left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right) \right] = \\ \nu \left[\theta \left(\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

dir. Burada $\theta = 0, 1, 1/2$ durumları sırasıyla açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemlerini ifade eder.

Şimdi, (4.4.1) ile verilen yaklaşıma kararlılık testi için von-Neumann yöntemi uygulanacaktır.

Yöntemi uygulama amacıyla U_m^n ifadesi yerine

$$U_m^n = e^{i\beta ph} \xi q, \quad i = \sqrt{-1}$$

alınır. Basit bir düzenleme ile

$$\begin{aligned} \xi \left(\frac{1}{k} + \hat{U} \theta \left(\frac{e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}}{2h} \right) - \nu \theta \left(\frac{e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}}{h^2} \right) \right) = \\ \frac{1}{k} - \hat{U} (1 - \theta) \left(\frac{e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}}{2h} \right) + \nu (1 - \theta) \left(\frac{e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}}{h^2} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede

$$e^{i\beta h} = \cos \beta h + i \sin \beta h$$

olarak bilinen euler formülün kullanılmasıyla

$$\xi = \frac{\frac{1}{k} - \hat{U} (1 - \theta) \left(\frac{i \sin \beta h}{h} \right) + \nu (1 - \theta) \left(\frac{2 \cos \beta h - 2}{h^2} \right)}{\frac{1}{k} + \hat{U} \theta \left(\frac{i \sin \beta h}{h} \right) - \nu \theta \left(\frac{2 \cos \beta h - 2}{h^2} \right)}$$

elde edilir. Burada

$$\cos \beta h = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\xi = \frac{1 - (1 - \theta) \left[\frac{4\nu k}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \frac{\hat{U} k}{h} \sin \beta h \right]}{1 + \theta \left[\frac{4\nu k}{h^2} \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \frac{\hat{U} k}{h} \sin \beta h \right]}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlikte $r = k/h^2$ olmak üzere

$$\xi = \frac{1 - (1 - \theta) \left[4vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h \right]}{1 + \theta \left[4vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i \frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h \right]}$$

elde edilir.

$\theta = 0$ değeri için (4.4.1) denklemi ile verilen yaklaşım ise açık sonlu fark yaklaşımını ifade eder. Bu durumda ele alınan yöntemin kararlılığı için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ olmasıdır. $|\xi| \leq 1$ ise $0 \leq |\xi|^2 \leq 1$ olur.

$$|\xi|^2 = \left(1 - 4vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{U}k}{h} \sin \beta h \right)^2$$

eşitliği $|\xi|^2 \leq 1$ ifadesinde

$$\sin \beta h = 2 \sin \frac{\beta h}{2} \cos \frac{\beta h}{2}$$

yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$1 - 8vr \sin^2 \frac{\beta h}{2} + 16v^2 r^2 \sin^4 \frac{\beta h}{2} + \frac{\hat{U}^2 k^2}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \cos^2 \frac{\beta h}{2} \leq 1$$

elde edilir. Buradan

$$r \left[\hat{U}^2 h^2 + (4v^2 - \hat{U}^2 h^2) \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right] \leq 2v$$

bulunur. Kararlılık için r parametresinin

$$r \leq \min \left(\frac{2v}{\hat{U}^2 h^2}, \frac{1}{2v} \right)$$

şartını sağlayacak biçimde $r = k/h^2$ olarak seçilmesi gerekir.

$\theta = 1$ değeri için (4.4.1) denklemi ile verilen yaklaşım ise kapalı sonlu fark yaklaşımını ifade eder. Bu durumda ele alınan yöntemin kararlılığı için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ olmasıdır. $r > 0$ şartı her zaman sağlanacağı için kapalı sonlu fark yönteminin şartsız kararlı olduğu sonucuna varılır.

$\theta = 1/2$ değeri için (4.4.1) denklemi ile verilen yaklaşım ise Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımını ifade eder. Bu durumda ele alınan yöntemin kararlılığı için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ eşitsizliğin sağlanmasıdır. $r > 0$ şartı her zaman sağlanacağı için Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin şartsız kararlı olduğu sonucuna varılır [29].

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında farklı başlangıç ve sınır şartları ile birlikte göz önüne alınan Burgers denkleminin; denklemde görülen $U \frac{\partial U}{\partial x}$ lineer olmayan terimi yerine bir lineerleştirme tekniği olan Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak sonlu fark yöntemleriyle yaklaşık çözümleri elde edildi. Seçilen viskozite değerleri için farklı zamanlarda elde edilen yaklaşık çözümlerin analitik çözümler ile karşılaştırılması çizelge ve grafikler verilerek yapıldı. Elde edilen yaklaşık çözümler ile literatürde verilen yaklaşık çözümler ve analitik çözümler ile uyumlu olduğu görüldü.

Sonuç olarak burada uygulanan lineerleştirme tekniği Burgers denklemine benzeyen diğer lineer olmayan denklemlere de uygulanarak sonlu fark yöntemleriyle yaklaşık çözümler kolaylıkla elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Bateman, H.** (1915). Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review*, 43(4), 163–170.
- [2] **Burgers, J.M.**, (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, Inc., New York, N. Y., s.171–199, edited by Richard von Mises and Theodore von Kármán,.
- [3] **Kreiss, G. ve Kreiss, H.O.** (1986). Convergence to steady state of solutions of Burgers' equation, *Applied Numerical Mathematics. An IMACS Journal*, 2(3-5), 161–179.
- [4] **Benton, E.R. ve Platzman, G.W.** (1972). A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics*, 30, 195–212.
- [5] **Rodin, E.Y.** (1970). On some approximate and exact solutions of boundary value problems for Burgers' equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 30, 401–414.
- [6] **Varoğlu, E. ve Finn, W.D.L.** (1980). Space-time finite elements incorporating characteristics for the Burgers equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 16(Special Issue), 171–184.
- [7] **Caldwell, J., Wanless, P. ve Cook, A.E.** (1981). A finite element approach to Burgers' equation, *Applied Mathematical Modelling*, 5(3), 189–193.
- [8] **Caldwell, J. ve Smith, P.** (1982). Solution of Burgers' equation with a large Reynolds number, *Applied Mathematical Modelling*, 6(5), 381–385.
- [9] **Gelinas, R.J., Doss, S.K. ve Miller, K.** (1981). The moving finite element method: applications to general partial differential equations with multiple large gradients, *Journal of Computational Physics*, 40(1), 202–249.
- [10] **Öziş, T., Aksan, E.N. ve Özdeş, A.** (2003). A finite element approach for solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 139(2-3), 417–428.
- [11] **Asaithambi, A.** (2010). Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation, *Applied Mathematics and Computation*, 216(9), 2700–2708.
- [12] **Kadalbajoo, M.K., Sharma, K.K. ve Awasthi, A.** (2005). A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers' equations, *Applied Mathematics and Computation*, 170(2), 1365–1393.
- [13] **Kadalbajoo, M.K. ve Awasthi, A.** (2006). A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 182(2), 1430–1442.
- [14] **Rashidi, M.M. ve Erfani, E.** (2009). New analytical method for solving Burgers' and nonlinear heat transfer equations and comparison with HAM, *Computer Physics Communications. An International Journal and Program Library for Computational Physics and Physical Chemistry*, 180(9), 1539–1544.

- [15] **Abbasbandy, S. ve Darvishi, M.T.** (2005). A numerical solution of Burgers' equation by modified Adomian method, *Applied Mathematics and Computation*, 163(3), 1265–1272.
- [16] **Abbasbandy, S. ve Darvishi, M.T.** (2005). A numerical solution of Burgers' equation by time discretization of Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 170(1), 95–102.
- [17] **Mukundan, V. ve Awasthi, A.** (2015). Efficient numerical techniques for Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 262, 282–297.
- [18] **Kutluay, S., Bahadir, A.R. ve Özdeş, A.** (1999). Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103(2), 251–261.
- [19] **Kutluay, S., Ucar, Y. ve Yagmurlu, N.M.** (2016). Numerical solutions of the modified Burgers equation by a cubic B-spline collocation method, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39(4), 1603–1614.
- [20] **Kutluay, S. ve Ucar, Y.** (2013). Numerical solutions of the coupled Burgers' equation by the Galerkin quadratic B-spline finite element method, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(17), 2403–2415.
- [21] **Aksan, E.N., Özdeş, A. ve Öziş, T.** (2006). A numerical solution of Burgers' equation based on least squares approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 176(1), 270–279.
- [22] **Aksan, E.** (2018). An application of cubic B-Spline finite element method for the Burgers' equation, *Thermal Science*, 22(Suppl. 1), 195–202.
- [23] **Aksan, E.N.** (2006). Quadratic B-spline finite element method for numerical solution of the Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 174(2), 884–896.
- [24] **Aksan, E.N.** (2005). A numerical solution of Burgers' equation by finite element method constructed on the method of discretization in time, *Applied Mathematics and Computation*, 170(2), 895–904.
- [25] **Öziş, T., Esen, A. ve Kutluay, S.** (2005). Numerical solution of Burgers' equation by quadratic B-spline finite elements, *Applied Mathematics and Computation*, 165(1), 237–249.
- [26] **Kutluay, S. ve Esen, A.** (2004). A lumped Galerkin method for solving the Burgers equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 81(11), 1433–1444.
- [27] **Kutluay, S., Esen, A. ve Dag, I.** (2004). Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167(1), 21–33.
- [28] **Kutluay, S. ve Esen, A.** (2004). A linearized numerical scheme for Burgers-like equations, *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 295–305.
- [29] **Uçar, Y.** (2005). *1-Boyutlu Burgers Tipi Denklemlerin Sonlu Fark Çözümleri* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksel Lisans Tezi, Malatya, Türkiye, yüksel lisans tezi.

- [30] **İnan, B. ve Bahadır, A.** (2013). An explicit exponential finite difference method for the Burgers' equation, *An explicit exponential finite difference method for the Burgers' equation*, 2(10), 61–72.
- [31] **İnan, B. ve Bahadır, A.** (2013). Numerical solution of the one-dimensional Burgers' equation: Implicit and fully implicit exponential finite difference methods, *Pramana*, 81(4), 547–556.
- [32] **İnan, B. ve Bahadır, A.** (2014). A numerical solution of the Burgers' equation using a Crank-Nicolson exponential finite difference method, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 4(5), 849–860.
- [33] **İnan, B.** (2015). On the Implicit Exponential Finite Difference Method for the Generalized Burgers-Fisher Equation, *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 13(4), 449–461.
- [34] **Onal, M. ve Esen, A.** (2020). A Crank-Nicolson approximation for the time fractional Burgers equation, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 5(2), 177–184.
- [35] **Yağmurlu, N., Uçar, Y. ve Esen, A.** (2020). Collocation Method for the KdV-Burgers-Kuramoto Equation with Caputo Fractional Derivative, *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 1(1), 1–13.
- [36] **Esen, A. ve Tasbozan, O.** (2016). Numerical solution of time fractional Burgers equation by cubic B-spline finite elements, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(3), 1325–1337.
- [37] **Esen, A., Bulut, F. ve Oruç, Ö.** (2016). A unified approach for the numerical solution of time fractional Burgers' type equations, *The European Physical Journal Plus*, 131(4).
- [38] **Celikten, G. ve Aksan, E.** (2019). Alternating direction implicit method for numerical solutions of 2-D burgers equations, *Thermal Science*, 23(Suppl. 1), 243–252.
- [39] **Ali, A., Gardner, G. ve Gardner, L.** (1992). A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(3), 325–337.
- [40] **Dağ, I., Irk, D. ve Saka, B.** (2005). A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, *Applied Mathematics and Computation*, 163(1), 199–211.
- [41] **Soliman, A.A.** (2012). A Galerkin Solution for Burgers' Equation Using Cubic B-Spline Finite Elements, *Abstract and Applied Analysis*, 2012(1).
- [42] **Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. ve Ali, A.H.A.** (1991). A method of lines solutions for Burgers' equation, *Computer Mech.*, 1551–1561, Balkema/Rotterdam.
- [43] **Smith, G.D.** (1985). *Numerical solution of partial differential equations*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, third sürüm, finite difference methods.
- [44] **Kincaid, D. ve cheney W.** (2002). *Numerical analysis mathematics of scientific computing*, The sally series.

- [45] **Rubin, S.G. ve Graves, R.A.** (1975). *A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*, U.S. National Aeronautics and Space Administration.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Ezgi GÜLEŞE

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2020, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2021-Devam ediyor Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak çalışıyor

