

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURULMALI DÜĞÜMLERİN DÜĞÜM POLİNOMLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEKİYE ŞEVVAL SİNAN

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ KEMAL TAŞKÖPRÜ

BİLECİK, 2021
10425037

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURULMALI DÜĞÜMLERİN DÜĞÜM POLİNOMLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEKİYE ŞEVVAL SİNAN

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ KEMAL TAŞKÖPRÜ

BİLECİK, 2021
10425037

BEYAN

Burulmalı Düğümlerin Düğüm Polinomları Üzerine adlı yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezi/dönem projesinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim

Bu çalışmam, Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR
Destek alındı ise;	
Destekleyen Kurum:	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
Diğer;	

ZEKİYE ŞEVVAL SİNAN

04.10.2021

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Kemal TAŞKÖPRÜ' ye ve Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümündeki hocalarıma teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmam sırasında desteğini esirgemeyen ve yanımda olan babam Aziz SİNAN'a, annem Hanife SİNAN'a ve kardeşlerim Betül SİNAN ve Fatih Alp SİNAN'a derin duygularıyla teşekkür ederim.

ZEKİYE ŞEVVAL SİNAN

04.10.2021

ÖZET

BURULMALI DÜĞÜMLERİN DÜĞÜM POLİNOMLARI ÜZERİNE

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde düğümler için bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş düğüm polinomları hakkında temel bilgiler ve onların bazı özellikleri verilmiştir.

Bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölümde yönlendirilmiş burulmalı düğümlerin HOMFLY polinomları ile yönlendirilmemiş burulmalı düğümlerin Kauffman L ve F polinomları için formüller elde edilmiştir ve burulmalı düğümler için bahsedilen düğüm polinomları dördüncü mertebeden yineleme bağıntıları olarak tanımlanmıştır. Burada bazı sonuçları elde ederken $(2, n)$ -torus halkalarının düğüm polinomları ile ilgili önceki formüller ve bağıntılardan yararlanılmıştır. Ayrıca bulunan bağıntıların bazı yinelemeli özellikleri incelenerek üreten fonksiyonları, genel çözümleri ve açık formları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Burulmalı Düğüm, Yönlendirilmiş Düğüm, Yönlendirilmemiş Düğüm, HOMFLY Polinomu, Kauffman L ve F Polinomları.

ABSTRACT

ON KNOT POLYNOMIALS OF TWIST KNOTS

This study consists of four chapters. In the first chapter, it is given the introduction part. In the second chapter, some basic concepts for knots are introduced.

In the third chapter, basic information about oriented and unoriented knot polynomials and some of their properties are discussed.

In the fourth chapter, which is the original part of this study, the formulas for HOMFLY polynomials of oriented twist knots and Kauffman L and F polynomials of unoriented twist knots are obtained, and the mentioned knot polynomials for twist knots are defined as fourth-order recurrence relations. Here, the previous formulas and relations related to the knot polynomials of $(2, n)$ -torus links are used to obtain some results. In addition, some recursive properties of the relations found are examined and their generating functions, general solutions and explicit forms are given.

Keywords: Twist Knot, Oriented Knot, Unoriented Knot, HOMFLY Polynomial, Kauffman L and F Polynomials.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Düğüm ve Düğüm Diyagramları.....	3
2.2. Dğümlerin Bazı Özellikleri.....	7
3. DÜĞÜM POLİNOMLARI.....	11
3.1. Yönlendirilmiş Dğüm Polinomları.....	11
3.2. Yönlendirilmemiş Dğüm Polinomları.....	14
4. BURULMALI DÜĞÜMLERİN YÖNLENDİRİLMİŞ VE YÖNLENDİRİLMEMİŞ DÜĞÜM POLİNOMLARI.....	20
4.1. Burulmalı Dğümlerin HOMFLY Polinomları	20
4.2. Burulmalı Dğümlerin Kauffman L ve F Polinomları.....	26
KAYNAKLAR	34

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Trefoil	3
Şekil 2.2. Hopf halkası.....	3
Şekil 2.3. Trefoilin izdüşümü	3
Şekil 2.4. Doğrunun izdüşümü.....	4
Şekil 2.5. Yönlendirilmiş trefoil	5
Şekil 2.6. Kavşakların çaprazlanması.....	5
Şekil 2.7. Torus	5
Şekil 2.8. $(2,3)$ -Torus düğümü.....	6
Şekil 2.9. n -yarı burulmaya sahip burulmalı düğüm.....	6
Şekil 2.10. 1-yarı burulmalı düğüm ve trefoil.....	6
Şekil 2.11. 2-yarı burulmalı düğüm ve sekiz şekilli düğüm	6
Şekil 2.12. Reidemeister hareketleri	7
Şekil 2.13. Denk aşık düğüm diyagramları.....	8
Şekil 2.14. Sekiz şekilli düğüm.....	8
Şekil 2.15. $u(T)=1$	8
Şekil 2.16. 2- köprülü düğümler: Trefoil ve sekiz şekilli düğüm.....	9
Şekil 2.17. Trefoil ve ayna görüntüsü.....	9
Şekil 2.18. Sekiz şekil düğümün ayna görüntüsüne denkliği	10
Şekil 2.19. Sol el yönlendirmeye sahip trefoil.....	10
Şekil 3.1. Griftlik diyagramları	11
Şekil 3.2. Kavşaklar ve ayırmalar.....	14
Şekil 3.3. Reidemeister tip I. hareketleriyle ilgili diyagramlar	15
Şekil 4.1. n -yarı burulmaya (half-twist) sahip burulmalı düğüm diyagramı.....	20
Şekil 4.2. $(2,n)$ -torus halkası diyagramı.....	20

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler

K	: Düğüm diyagramı
$c(K)$	: Kavşak Sayısı
$u(K)$	: Dügümlenmeme Sayısı
K^*	: K 'nın Ayna Görüntüsü
$\varepsilon(P)$	: Kavşak İşareti
$w(K)$	: Burulma Sayısı
$\Delta_K(t)$	: Alexander Polinomu
$\nabla_K(z)$	: Alexander-Conway Polinomu
$V_K(t)$	: Jones Polinomu
$P_K(a, z)$	: Genelleştirilmiş HOMFLY Polinomu
$Q_K(x)$	: Genelleştirilmiş BLM/Ho Polinomu
$\langle K \rangle(A)$	: Parantez Polinomu
$N_K(A)$	: Normalize Edilmiş Prantez Polinomu
$L_K(a, x)$	: Genelleştirilmiş Kauffman L Polinomu
$F_K(a, x)$	: Genelleştirilmiş Kauffman F Polinomu
$\mathcal{K}_n$	: n -Yarı Burulmaya Sahip Yönlendirilmiş Burulmalı Düğüm
$\mathcal{K}_{(2,n)}$	: Yönlendirilmiş $(2, n)$ -Torus Halkası
$\mathfrak{K}_n$	: n -Yarı Burulmaya Sahip Yönlendirilmemiş Burulmalı Düğüm
$\mathfrak{K}_{(2,n)}$	: Yönlendirilmemiş $(2, n)$ -Torus Halkası

1. GİRİŞ

İlk olarak 19. yüzyılda C. F. Gauss'un çalışmaları ile temelleri atılan düğüm teorisi, topolojinin bir alt dalı olarak ele alınmıştır ve daha sonra bütün temel bilim dalları ile ilişkilendirilmiştir. Düğüm teorisinde, üç boyutlu uzayda rastgele seçilen basit kapalı bir eğrinin, yani düğümün, tipini belirlemek için ortaya çıkan problemlerle ilgili çalışmaların önemli bir kısmı, düğüm invaryantlarını bulma ve bu invaryantlar ile düğüm tiplerini belirlemek olmuştur. Bir düğümün veya halkanın, kavşak sayısı, bileşen sayısı, köprü sayısı, düğümlenmeme sayısı, halkalanma sayısı, renklenme sayısı gibi sayısal invaryantları; düğüm grubu, homotopi grubu, homoloji grubu gibi grupsal invaryantları bulunmaktadır (Kawauchi, 1996: 270; Manturov, 2018: 1; Murasugi, 1996: 47). Bunların dışında en kullanışlı invaryant düğüm polinomlarıdır. Bir düğüm polinomu, katsayıları, belirli bir düğümün bazı özelliklerini kodlayan bir düğüm invaryantıdır (Adams, 1994: 148).

Düğüm polinomlarıyla ilgili ilk çalışmayı 1928 yılında J. W. Alexander yapmıştır. Alexander her bir kavşak için denklem yazmış, Alexander matrisini oluşturmuş ve bu matrisin determinantının tek değişkenli bir Laurent polinomu olduğunu görmüştür (Alexander, 1928: 275). 1969'da J. Conway, yönlendirilmiş düğümler (veya halkalar) için giriftlik bağıntısını keşfetmiş ve bu bağıntıyı kullanarak Alexander polinomunu hesaplamanın daha kolay bir yolunu bulmuştur. Giriftlik bağıntısı, ilerleyen yıllarda düğüm invaryantları ile ilgili birçok çalışmanın temelini oluşturmuştur (Adams, 1994: 148; Conway, 1970: 337). 1984 yılında V. F. R. Jones, operatör cebirleri üzerinde yaptığı çalışmalar ile operatör cebirinde ortaya çıkan bir ilişkinin düğüm teorisinde meydana gelen bir ilişkiye çok benzediğini fark etmiştir. Bu onu Alexander-Conway polinomundan farklı olarak, Jones polinomu olarak adlandırılan yönlendirilmiş düğümler için yeni bir polinomun keşfine götürmüştür (Jones, 1985: 107). Jones'un bu buluşu sayesinde düğüm teorisindeki teorik çalışmalar farklı bilim dallarına uygulanmış ve bunların çözümü ile yeni çalışma alanları oluşturulmuştur. Kısa bir zaman dilimi içinde Jones polinomu değişik modellerle tanımlanmış, yine yönlendirilmiş halkalar için HOMFLY polinomunun keşfi duyurulmuştur. HOMFLY polinomu, yönlendirilmiş düğümler ve halkalar için iki değişkenli bir polinom invaryantıdır (Freyd vd., 1985: 240). 1986 yılında Brandt ve arkadaşları ile onlardan bağımsız olarak Ho, BLM/Ho polinomu olarak adlandırılan yönlendirilmemiş halkalar için bir polinom invaryantı keşfetmiştir. BLM/Ho polinomu, giriftlik diyagramlarına benzeyen yönlendirilmemiş diyagramlar ile elde edilen tek değişkenli bir Laurent polinomudur (Brandt vd., 1986: 563; Ho, 1985: 300). 1987'de L. H. Kauffman

tarafından, yönlendirilmemiş halkalar için yine giriftlik diyagramlarına benzeyen yönlendirilmemiş diyagramlar kullanılarak regüler izotopi invaryantı olan parantez polinomu ile L polinomu ve onların normalleştirilmesiyle kuşatan izotopi invaryantı olarak ifade edilen normalize edilmiş parantez polinomu ile F polinomunu tanımlamıştır (Kauffman, 1987: 395; Kauffman, 1990: 417; Kauffman, 2016:421).

Bazı düğüm ve halka tipleri için çeşitli düğüm invaryantlarının, genel formüller veya yineleme bağıntıları şeklinde verilebileceği görülmüştür. Burulmalı düğümlerin bazı düğüm invaryantları için formüller ve genel çözümler sunulmuştur (Allin ve Bozhüyük, 1996: 7; Hoste ve Shanahan, 2001: 625; Hoste ve Shanahan, 2004: 193; Dubois vd., 2009: 303; Garoufalidis ve Sun, 2010: 1571; Mathews, 2014: 2; Tran, 2016: 517; Şahin ve Şahin, 2019: 1270). Ayrıca, $(2,n)$ -torus halkasının Alexander-Conway polinomunun klasik Fibonacci polinomu olduğu iyi bilinmektedir (Kauffman, 2016: 115) ve $(2,n)$ -torus halkasının HOMFLY polinomunun genelleştirilmiş Fibonacci polinomuna karşılık geldiği gösterilmiştir (Taşköprü ve Altıntaş, 2015: 4). Diğer taraftan, $(2,n)$ -torus halkasının yönlendirilmemiş düğüm polinomlarının da yineleme bağıntıları olarak elde edilebileceği gösterilmiştir (Altıntaş vd., 2018: 35; Altıntaş ve Taşköprü, 2019: 9). Bunların yanında, 2-köprülülük halkaların Alexander-Conway ve HOMFLY polinomları için genel formüller ve yineleme bağıntıları verilmiştir (Koseleff ve Pecker, 2015: 215; Duzhin ve Shkolnikov, 2015: 350). Buradan hareketle tezde, torus halkaları gibi burulmalı düğümler için en genel düğüm polinomlarını veren formüller ispatlanmıştır, bu polinomların yineleme bağıntıları olarak tanımlanabildiği gösterilmiştir ve bu yineleme bağıntılarının bazı özellikleri incelenmiştir.

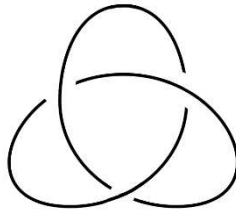
Bu tez çalışmasında, ikinci bölümde düğümler hakkında temel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde düğüm polinomları hakkında temel bilgilere değinilmiştir. Yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş düğüm polinomlarının tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Burada ayrıca düğüm polinomlarının birbirleri ile ilişkileri ve bazı örneklere de yer verilmiştir. Dördüncü bölümde $(2,n)$ -torus halkaları için verilen yineleme bağıntılarından da yararlanarak burulmalı düğümlerin yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş iki değişkenli düğüm polinomları olan, HOMFLY polinomu ve Kauffman L ve F polinomalarını veren formüller ispatlanmış ve bunların dördüncü mertebeden yineleme bağıntıları şeklinde tanımlanabildiği gösterilmiştir. Bu sayede, diğer düğüm polinomları ile ilgili formüller ve yineleme bağıntıları da elde edilmiştir. Ayrıca, bu yineleme bağıntılarının üreten fonksiyon, genel çözüm ve açık form gibi bazı yinelemeli özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Düzüm ve Düzüm Diyagramları

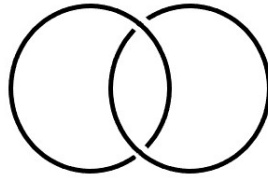
Tanım 2.1.1. X ve Y Hausdorff uzayı olmak üzere $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna bir yerleştirme (embedding) denir (Burde ve Zieschang, 1985: 1).

Tanım 2.1.2. S^1 birim çemberini 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayı içine yerleştiren ve görüntüsü K olan bir homeomorfizm var olmak üzere, S^1 'e homeomorf olan $\mathbb{R}^3$ 'ün bütün K altkümelerine bir düğüm denir (Crowell ve Fox, 1963: 4).



Şekil 2.1. Trefoil

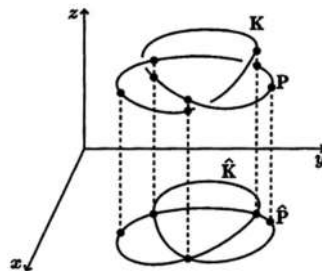
Tanım 2.1.3. $n \in \mathbb{N}$ için n tane düğümün ayırık birleşimine n - halka denir ve halkayı oluşturan her bir düğüme halkanın bileşenleri denir (Murasugi, 1996: 15; Yetter, 2001: 14).



Şekil 2.2. Hopf halkası

Çember (loop veya ilmek) ile çembere denk olan bütün düğümlere düğümlememiş (aşıkâr) düğüm denir. Halkalanmamış halkaya ise aşıkâr halka denir (Murasugi, 1996: 2-16).

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}^3$ de tanımlı olan $P(x, y, z)$ noktasını xy -düzleminde $P(x, y, 0)$ noktasına yansıtan p dönüşümüne izdüşüm fonksiyonu denir. K bir düğüm ise, $p(K) = \hat{K}$, K 'nın p izdüşüm fonksiyonu altındaki görüntüsü olup K 'nın xy -düzlemindeki izdüşümüdür. Burada $\hat{K}$ basit kapalı bir eğri değildir.

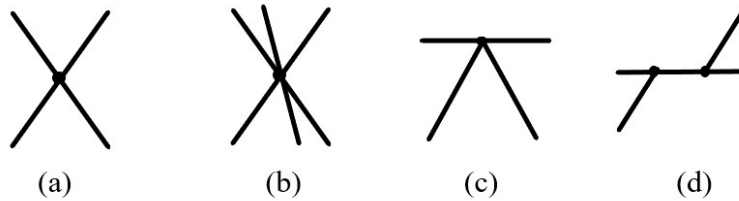


Şekil 2.3. Trefoilin izdüşümü

K üzerinde birkaç düğüm hareketi ile aşağıdaki koşulları uygulayarak $\hat{K}$ 'nın K ile olan ilişkisi sezgisel olarak görülür.

- i. Bir $\hat{K}$ izdüşümünün sınırlı sayıda kesişim noktası vardır.
- ii. $\hat{K}$ 'nın bir kesişim noktası q olsun. q nun K 'daki ters görüntüsü $p^{-1}(q) \cap K$, tam olarak iki noktaya sahiptir. (Şekil 2.4. (a))'de sağlarken (Şekil 2.4. (b))'de gösterildiği gibi birden çok nokta olamaz.
- iii. K düğümü bir poligon olarak ele alınırsa bir kenarı hiçbir zaman $\hat{K}$ 'nın bir çift noktası ile eşlenemez. (Şekil 2.4.(c))'de ve (Şekil 2.4. (d)) örneklerinde, K 'dan izdüşürülen poligonal bir doğru $\hat{K}$ 'nın köşe noktaları ile temas etmektedir. Bu durumların her ikisine de müsaade edilmez.

Bir $\hat{K}$ izdüşümü yukarıdaki koşulları sağlar ise K düğümünün regüler izdüşümü olarak adlandırılır (Murasugi, 1996: 26).

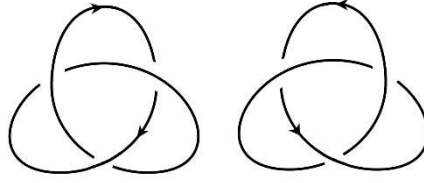


Şekil 2.4. Doğrunun izdüşümü

Tanım 2.1.5. K , $\mathbb{R}^3$ içinde bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p(K)$ izdüşüm fonksiyonunun ters görüntüsü $p^{-1}(a) \cap K$ birden fazla (n) noktasını içeriyorsa a ya $p(K)$ 'nın n -katlı noktası denir. Eğer $n=2$ ise a noktasına iki katlı kavşak noktası denir (Crowell ve Fox, 1963: 6; Kawauchi, 1996: 7).

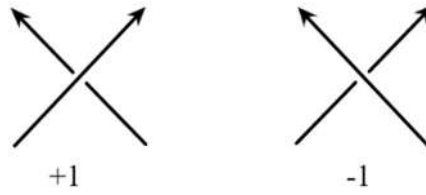
Tanım 2.1.6. Bir düğümün regüler izdüşümünde çift noktaya karşılık, alt yay veya üst yay bilgisi kesin değildir. Bunu kesinleştirmek için çift noktada kesişen yaylardan birinin komşuluğu kesilir. Bu şekilde elde edilen düğüm izdüşümüne bir düğüm diyagramı denir. Bir düğümün bir veya birden fazla izdüşümü yani düğüm diyagramı olabilir (Murasugi, 1996: 27).

Tanım 2.1.7. Bir düğüm üzerinde bir nokta belirlenip yön verilmiş ise o noktadan başlayarak saat yönünde ya da saat yönünün tersine gidilebilir. Bu şekilde yönün belirtildiği düğüme yönlendirilmiş düğüm denir (Adams, 1994: 10).



Şekil 2.5. Yönlendirilmiş trefoil

Tanım 2.1.8. Verilen yönlü bir düğüm diyagramının her bir kavşağındaki çaprazlanması için (Şekil 2.6.)’deki gibi bir sayı verebilir. +1 sayısı verilen çaprazlanmaya pozitif çaprazlanma, -1 sayısı verilen çaprazlanmaya negatif çaprazlanma denir (Murasugi, 1996: 65).

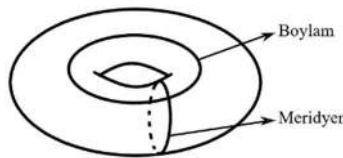


Şekil 2.6. Kavşakların çaprazlanması

Tanım 2.1.9. Bir yönlendirilmiş düğüm diyagramı boyunca sabit bir yönde ilerlerken üst ve alt kavşaklarının işaretleri ardışık olarak işaret değiştiriyor ise bu diyagrama alterne diyagram ve bu şekildeki diyagrama sahip düğüme de alterne düğüm denir (Adams, 1994: 7).

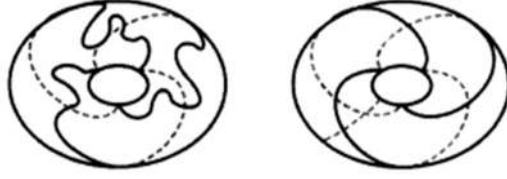
Tanım 2.1.10. Bir torus düğümü, standart olarak uzayda düğümlenmemiş olan bir torusun yüzeyine, torus yüzeyi üzerinde alt üst geçişleri olmadan yerleştirilen aşık ar olmayan bir düğümdür (Adams, 1994: 114).

Benzer şekilde torus halkaları, kendi kavşakları bir torusun yüzeyi üzerinden geçmeden, torus üzerine yerleştirilebilen halkalardır. Bir torus halkası, torus yüzeyi üzerinde enlemin etrafında (p) defa ve boylamın etrafında (q) defa dolaşılması ile elde edilir ve (p, q) – torus halkası olarak gösterilir. Eğer (p) ve (q) aralarında asal ise (p, q) – torus düğümü elde edilir (Adams, 1994: 108).



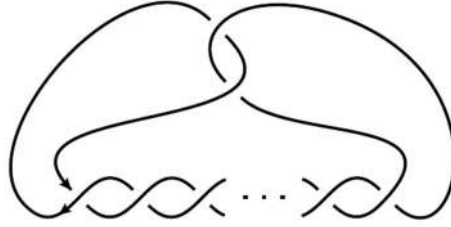
Şekil 2.7. Torus

Örnek 2.1.1. $(2,3)$ –torus düğümünün 2 kez enlem dolanımı 3 kez boylam salınımı yaptığı aşağıdaki (Şekil 2.8.)’de görülür ve bu bir trefoile karşılık gelir.



Şekil 2.8. $(2,3)$ –torus düğümü

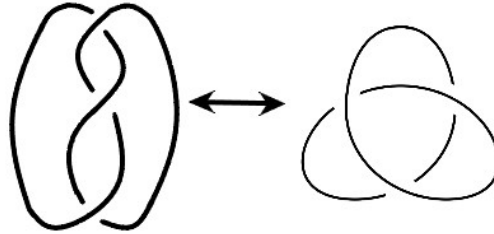
Tanım 2.1.11. Kapalı bir ilmeğin ardışık bükülerek ve kendisi ile halkalanmasıyla elde edilen düğüme burulmalı (twist) düğüm denir (Rolfsen, 2003: 112).



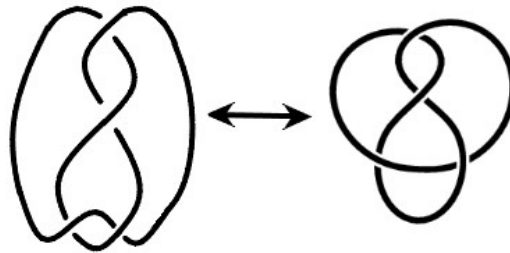
Şekil 2.9. n -yarı burulmaya sahip burulmalı düğüm

Bir burulmalı düğüm diyagramında ilmeğin kendisi ile halkalanması sonucu oluşan iki kavşak dışındaki her bir kavşak yarı burulma (half-twist) olarak ele alınmıştır.

Örnek 2.1.2. $n = 1$ için 1-yarı burulmaya sahip burulmalı düğüm trefoile ve $n = 2$ için 2-yarı burulmaya sahip burulmalı düğüm sekiz şekilli düğüme denktir.



Şekil 2.10. 1-yarı burulmalı düğüm ve trefoil



Şekil 2.11. 2-yarı burulmalı düğüm ve sekiz şekilli düğüm

2.2. Düğümlerin Bazı Özellikleri

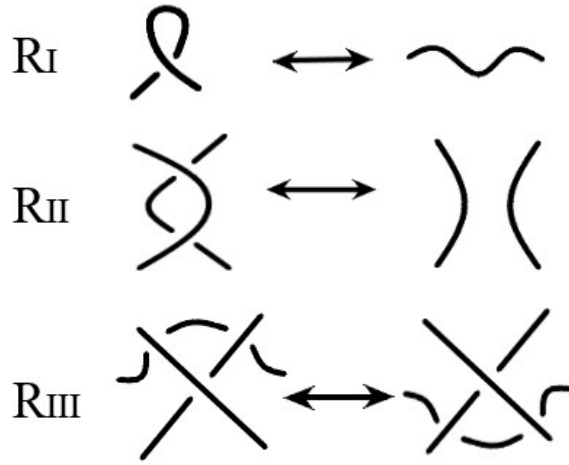
Bu kısımda ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı düğüm özellikleri verilmiştir ve tezde üzerinde çalışılan düğüm ailesi olan burulmalı düğümlerin bazı ilgili düğüm invaryantlarına değinilmiştir.

Tanım 2.2.1. K ve K' , $\mathbb{R}^3$ içinde yönlendirilmiş iki düğüm olsun. $\mathbb{R}^3$ 'de K 'dan K' 'ye yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizm varsa K düğümü K' düğümüne denktir denir (Murasugi, 1996: 11).

Teorem 2.2.1. K ve K' 'nin regüler iki düğüm diyagramı D ve D' olmak üzere

$$K \approx K' \Leftrightarrow D \approx D' \text{ (Murasugi, 1996: 50).}$$

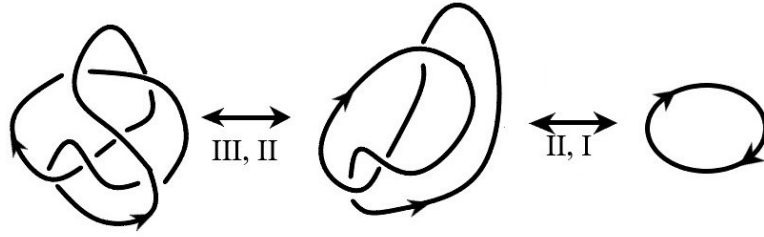
Tanım 2.2.2. Bir diyagramın aşağıda verilen üç tür hareketi veya bu hareketlerin terslerinin, sonlu sayıda uygulanmasıyla birinin diğerine deforme edilmesine Reidemeister hareketleri denir. Sonlu sayıda Reidemeister hareketlerinin uygulanmasıyla birbirine dönüşen diyagramlar denk düğüm diyagramlarıdır (Murasugi, 1996: 50).



Şekil 2.12. Reidemeister hareketleri

Tanım 2.2.3. Düğüm diyagramları üzerinde tip II. ve tip III. Reidemeister hareketleri ile elde edilen denkliğe regüler izotopi, tip I, tip II, ve tip III. Reidemeister hareketleri ile elde edilen denkliğe de kuşatan izotopi adı verilir (Kauffman, 2001: 17).

Örnek 2.2.1. (Şekil 2.13.)’de aşıkâr düğümün kuşatan izotopisi görülür.



Şekil 2.13. Denk aşıkâr düğüm diyagramları

Tanım 2.2.4. Bir düğüm (veya halka) invaryantı, düğüm diyagramlarının izotopiye göre denklik sınıflarından herhangi bir matematiksel yapıya tanımlı bir dönüşüm olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle; düğüm invaryantı, denk düğümlere aynı niceliği karşılık getiren ve bu şekilde düğümlerin sınıflandırılmasını sağlayan araçlardır (Aneziris, 1999: 35).

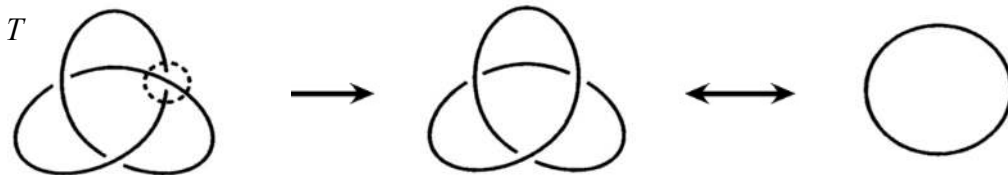
Tanım 2.2.5. Bir K düğümünün herhangi bir diyagramındaki birbirini üzerinden geçen yayların geçitlerinin, yani kavşakların minimum sayısına K ’nın kavşak sayısı denir ve $c(K)$ ile gösterilir (Murasugi, 1996: 56).



Şekil 2.14. Sekiz şekilli düğüm

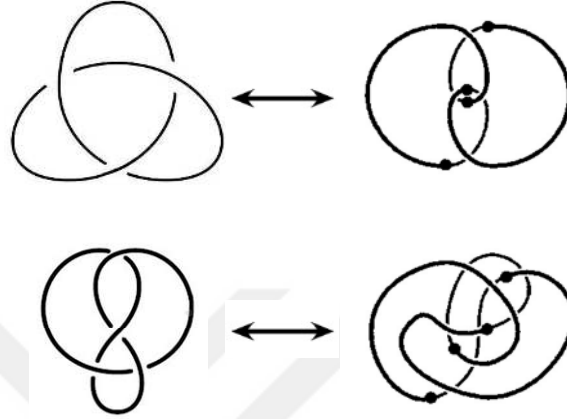
(Şekil 2.14.)’de verilen sekiz şekilli düğümün (Figure-eight) kavşak sayısı $c(K) = 4$ tür. Kavşak sayısı düğümün bir invaryantıdır. (Örnek 2.2.2.)’de (Şekil 2.18.)’den görülmektedir.

Tanım 2.2.6. Bir K düğümünün, aşıkâr düğüme denk olması için değiştirilmesi (geçitteki yayların yer değiştirilmesi) gereken minimum kavşak sayısına K ’nın düğümlenmeme sayısı denir ve $u(K)$ ile gösterilir. Düğümlenmeme sayısı düğümün bir invaryantıdır. Aşıkâr olmayan burulmalı düğümlerin düğümlenmeme sayısı 1’e eşittir (Adams, 1994: 57).



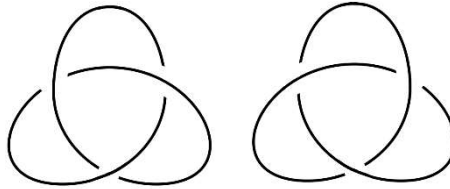
Şekil 2.15. $u(T) = 1$

Tanım 2.2.7. Bir düğümün regüler diyagramında en az bir üst kavşak noktası içeren fakat hiç alt kavşak noktası içermeyen yaya köprü denir. Bir K düğümünün bir regüler diyagramında maksimal üst kavşak noktasına sahip köprülerinin minimum sayısına K 'nın köprü sayısı denir. Köprü sayısı düğümün bir invaryantıdır. Bir düğümün aşıkâr düğüm olması için gerek ve yeter şart köprü sayısının 1 olmasıdır. Burulmalı düğümler 2-köprülü düğümlerdir (Adams, 1994: 64).



Şekil 2.16. 2- köprülü düğümler: Trefoil ve sekiz şekilli düğüm

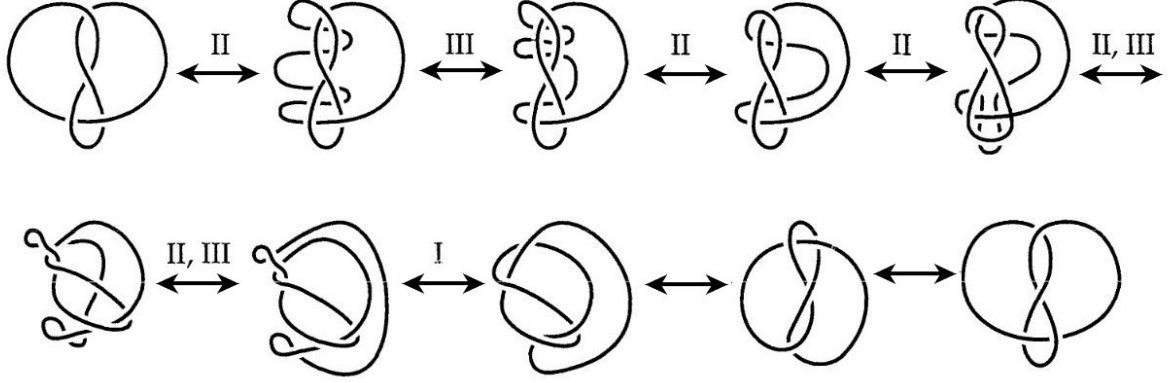
Tanım 2.2.8. Bir K düğümünün tüm kavşaklarının çaprazlamalarının yer değiştirilmesiyle elde edilen düğüme K 'nın ayna görüntüsü denir ve K^* ile gösterilir (Murasugi, 1996: 11).



Şekil 2.17. Trefoil ve ayna görüntüsü

Tanım 2.2.9. Ayna görüntüsüne denk olmayan düğümlere kiral (chiral) düğüm ve ayna görüntüsüne denk olan düğümlere de akiral veya amfikiral (achiral veya amphichiral) düğüm denir. Tüm akiral düğümlerin kavşak sayısı çift sayıdır (Murasugi, 1996: 43)

Örnek 2.2.2. (Şekil 2.17.)’den trefoil düğümü ayna görüntüsüne denk değildir. Yani trefoil bir kiral düğümdür. (Şekil 2.18.)’de sekiz şekilli düğüm ile ayna görüntüsü arasındaki kuşatan izotopisi görülmektedir. Sekiz şekilli düğüm bir akiral düğümdür.



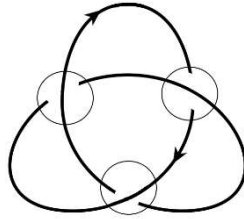
Şekil 2.18. Sekiz şekil düğümün ayna görüntüsüne denkliği

Tanım 2.2.10. $C(K)$, yönlendirilmiş bir K düğümünün tüm kavşaklarının kümesi olmak üzere K ’nın burulma sayısı (writhe)

$$w(K) = \sum_{p \in C(K)} \varepsilon(p)$$

ile tanımlanır. Burulma sayısı diyagramın tüm kavşaklarının işaretlerinin toplamıdır ve burada $\varepsilon(p)$, p kavşağının işaretidir (Murasugi, 1996: 68).

Örnek 2.2.3. Trefoilin burulma sayısı $w(k) = -1 - 1 - 1 = -3$ ’tür.



Şekil 2.19. Sol el yönlendirilmeye sahip trefoil

Burulma sayısı bir düğüm invariantı değildir. Kavşak işaretleri I. tip Reidemeister hareketi altında ± 1 olarak değiştiğinden burulma sayısı K ’nın bir invariantı olamaz (Murasugi, 1996: 64).

3. DÜĞÜM POLİNOMLARI

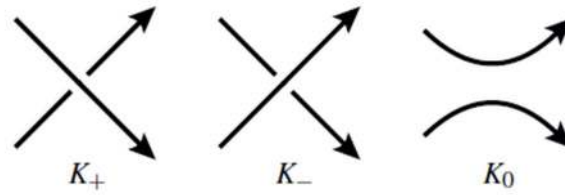
Düğüm polinomları, yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş düğüm (veya halka) diyagramları için farklı şekillerde tanımlanmıştır. Bu bölümde düğümleri sınıflandırmada sıklıkla yararlanılan ve önemli düğüm invaryantlarından olan düğüm polinomları hakkında temel bilgiler verilmiştir. Burada düğüm polinomlarının tanımları, bazı özellikleri ve birbirleri ile ilişkileri verilmiştir.

3.1. Yönlendirilmiş Düğüm Polinomları

Tanım 3.1.1. (Alexander-Conway Polinomu) Düğüm polinomlarından ilki olan Alexander polinomu 1928’de J. W. Alexander tarafından tanımlanmıştır (Alexander, 1928: 275). 1969’da J. Conway’in giriftlik bağıntısı (skein relation) ile tanımladığı Alexander polinomu, Alexander-Conway polinomu olarak adlandırılır (Conway, 1970: 338). Bir yönlendirilmiş K düğümünün (veya halkasının) kavşaklarından herhangi biri seçilerek,

- i. K aşık bir düğüm ise $\nabla_K(z) = 1$,
- ii. $\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \nabla_{K_0}(z)$ (Giriftlik bağıntısı)

aksiyomlarını, (Şekil 3.1.) de verilen K_+ , K_- , K_0 diyagramlarının kullanılarak çözümlenmesi ile sağlayan ve $\nabla_K(z)$ ile gösterilen Laurent polinomuna K ’nın Alexander-Conway polinomu denir. $\nabla_K(z)$ yukarıda belirtilen aksiyomlarla K halkasının bir kuşatan izotopi invaryantıdır (Conway, 1970: 338; Murasugi, 1996: 109).



Şekil 3.1. Giriftlik diyagramları

Alexander polinomu ile Alexander-Conway polinomu arasındaki ilişki

$$\Delta_K(t) = \nabla_K(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$$

ile verilmiştir (Jones, 1985: 107). Alexander-Conway polinomu, bir düğümü ayna görüntüsünden ayırt edemez (Ramadevi, 1994: 3205).

Tanım 3.1.2. (Jones Polinomu) Bir yönlendirilmiş K düğümünün (veya halkasının) kavşaklarından herhangi birinin seçilerek

- i. K aşık bir düğüm ise $V_K(t) = 1$,
- ii. $t^{-1}V_{K_+}(t) - tV_{K_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{K_0}(t)$ (Giriftlik bağıntısı)

aksiyomlarını, (Şekil 3.1.) de verilen giriftlik diyagramlarının kullanılarak çözümlenmesi ile sağlayan ve $V_K(t)$ ile gösterilen Laurent polinomuna K 'nın Jones polinomu denir. $V_K(t)$, yukarıda belirtilen aksiyomlarla K halkasının bir kuşatan izotopi invaryantıdır (Jones, 1985: 107).

Jones polinomu, bir K düğümü ve onun ayna görüntüsü K^* olmak üzere

$$V_{K^*}(t) = V_K(t^{-1})$$

eşitliğini sağlar. Her akıral K düğümü için $V_K(t) = V_K(t^{-1})$ olur. Eğer $V_K(t) \neq V_K(t^{-1})$ ise K bir kiral düğümdür. Fakat bunun tersi doğru değildir (Örneğin; (Rolfsen, 2003: 398).’deki düğüm tablosuna göre 9_{42} düğümü) (Ramadevi, 1994: 3205).

Tanım 3.1.3. (HOMFLY Polinomu) Bir yönlendirilmiş K düğümünün (veya halkasının) kavşaklarından herhangi birinin seçilerek

$$i. \quad a^{-1}P_{K_+}(a, z) - aP_{K_-}(a, z) = zP_{K_0}(a, z) \quad (3.1)$$

$$ii. \quad P_{\bigcirc}(a, z) = 1. \quad (3.2)$$

aksiyomlarını, (Şekil 3.1.) de verilen giriftlik diyagramlarının kullanılarak çözümlenmesi ile sağlayan ve $P_K(a, z)$ ile gösterilen iki değişkenli Laurent polinomuna HOMFLY polinomu denir. $P_K(a, z)$, bir K halkasının yukarıdaki aksiyomlarla belirlenen bir kuşatan izotopi invaryantıdır (Freyd vd., 1985: 240; Doll ve Hoste, 1991: 748).

Burada $\bigcirc$, aşık bir düğümün sıfır kavşaklı diyagramıdır. (3.1) ve (3.2)’den, $\bigcirc\bigcirc$ iki bileşenli bir aşık halka ve $\delta = P_{\bigcirc\bigcirc}$ olmak üzere $a^{-1} - a = zP_{\bigcirc\bigcirc}$ veya $\delta = (a^{-1} - a)z^{-1}$ olur.

HOMFLY polinomu, Alexander-Conway polinomu ve Jones polinomunun bir genelleştirmesidir. $a = t$ ve $z = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ için Jones polinomu, $a = 1$ için Alexander-Conway

polinomu ve $a=1$ ve $z=(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$ için Alexander polinomunu verir (Doll ve Hoste, 1991: 759).

(3.1) eşitliği aşağıdaki gibi yazılarak HOMFLY polinomu kolayca hesaplanabilir.

$$P_{K_+} = azP_{K_0} + a^2P_{K_-}, \quad (3.3)$$

$$P_{K_-} = -a^{-1}zP_{K_0} + a^{-2}P_{K_+}. \quad (3.4)$$

Aşağıda HOMFLY polinomunun bazı özellikleri verilmiştir: (Freyd vd., 1985: 243)

- i. $\bigcirc_\mu$, μ bileşenli aşık bir halka ise $P_{\bigcirc_\mu}(a, z) = \delta^{\mu-1}$ dir.
- ii. $-K$, K 'nın ters yönlüsü olmak üzere, $P_{-K}(a, z) = P_K(a, z)$.
- iii. K^* , K 'nın ayna görüntüsü olmak üzere, $P_{K^*}(a, z) = P_K(a^{-1}, -z)$.
- iv. K_1 ve K_2 'nin bileşimi $K_1 \# K_2$ olmak üzere, $P_{K_1 \# K_2}(a, z) = P_{K_1}(a, z)P_{K_2}(a, z)$.
- v. K_1 ve K_2 'nin ayrık bileşimi $K_1 \sqcup K_2$ olmak üzere, $P_{K_1 \sqcup K_2}(a, z) = \delta P_{K_1}(a, z)P_{K_2}(a, z)$.

HOMFLY polinomu, (iii.) özelliğe göre Jones polinomuna kıyasla birçok düğümü ayna görüntüsünden daha iyi bir şekilde ayırt eder. Fakat, örneğin 10_{48} düğümü için HOMFLY polinomu bu düğümün kiralitesini ayırt edemez (Ramadevi, 1994: 3205).

Örnek 3.1.1. T sağ el yönlendirmeye sahip bir trefoil diyagramı olmak üzere T 'nin HOMFLY polinomu aşağıdaki gibi hesaplanır. T 'nin herhangi bir kavşağı üzerinden (3.3) uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
 P \left[\text{Trefoil} \right] &= az P \left[\text{Trefoil}_1 \right] + a^2 P \left[\text{Trefoil}_2 \right] \\
 &= az \left[az P \left[\text{Trefoil}_3 \right] + a^2 P \left[\text{Trefoil}_4 \right] \right] + a^2 P \left[\text{Trefoil}_5 \right] \\
 &= az \left(az + a^2 \left((a^{-1} - a) z^{-1} \right) \right) + a^2 \\
 &= az \left(az + az^{-1} - a^3 z^{-1} \right) + a^2 \\
 &= a^2 z^2 + a^2 - a^4 + a^2 \\
 P_T(a, z) &= a^2 z^2 - a^4 + 2a^2.
 \end{aligned}$$

HOMFLY polinomu;

- $a=1$ ve $z=t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$ için

$$\Delta_T(t)=t+t^{-1}-1$$

olacak şekilde T 'nin Alexander polinomunu verir.

- $a=1$ için

$$\nabla_T(z)=z^2+1$$

olacak şekilde T 'nin Alexander-Conway polinomunu verir.

- $a=t$ ve $z=t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$ için

$$V_T(t)=-t^4+t^3+t$$

olacak şekilde T 'nin Jones polinomunu verir.

3.2. Yönlendirilmemiş Düğüm Polinomları

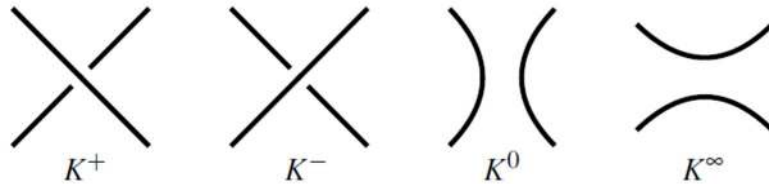
Tanım 3.2.1. (BLM/Ho Polinomu) Bir yönlendirilmemiş K düğümünün (veya halkasının) kavşaklarından herhangi birinin seçilerek,

$$i. \quad Q_{K^+}(x)+Q_{K^-}(x)=x(Q_{K^0}(x)+Q_{K^\infty}(x)), \quad (3.5)$$

$$ii. \quad Q_{\bigcirc}(x)=1 \quad (3.6)$$

aksiyomlarını, (Şekil 3.2.)'de verilen yönlendirilmemiş K^+ , K^- , K^0 ve K^∞ diyagramlarının kullanılarak çözümlenmesi ile sağlayan ve $Q_K(x)$ ile gösterilen tek değişkenli Laurent polinomuna BLM/Ho polinomu denir. $Q_K(x)$, bir K halkasının yukarıdaki aksiyomlarla belirlenen bir kuşatan izotopi invariantıdır (Brandt vd., 1986: 563; Ho, 1985: 300).

Şekil 3.2. Kavşaklar ve ayırmalar



Burada $\bigcirc$, aşıkâr düğümün sıfır kavşaklı diyagramıdır. (3.5) ve (3.6)'dan, $\bigcirc\bigcirc$ iki bileşenli bir aşıkâr halka ve $\mu=Q_{\bigcirc\bigcirc}(x)$ olmak üzere $Q_{\bigcirc\bigcirc}(x)=2x^{-1}-1$ veya $\mu=2x^{-1}-1$ olur.

Aşağıda BLM/Ho polinomunun bazı özellikleri verilmiştir: (Brandt vd., 1986: 564; Ho, 1985: 300)

- i. $\bigcirc_m$, m bileşenli aşıkarc halka ise $Q_{\bigcirc_m}(x) = \mu^{m-1} = (2x^{-1} - 1)^{m-1}$ dir.
- ii. K halkasının ayna görüntüsü K^* olmak üzere $Q_{K^*}(x) = Q_K(x)$.
- iii. K_1 ve K_2 halkalarının bileşimi $K_1 \# K_2$ olmak üzere $Q_{K_1 \# K_2}(x) = Q_{K_1}(x)Q_{K_2}(x)$.
- iv. K_1 ve K_2 halkalarının ayrık bileşimi $K_1 \sqcup K_2$ dir. $Q_{K_1 \sqcup K_2}(x) = \mu Q_{K_1}(x)Q_{K_2}(x)$

Tanım 3.2.2. (Parantez Polinomu) Bir yönlendirilmemiş K düğümünün (veya halkasının) kavşaklarından herhangi biri seçilerek

$$i. \quad \langle K^+ \rangle + \langle K^- \rangle = (A + A^{-1})(\langle K^0 \rangle + \langle K^\infty \rangle) \quad (3.7)$$

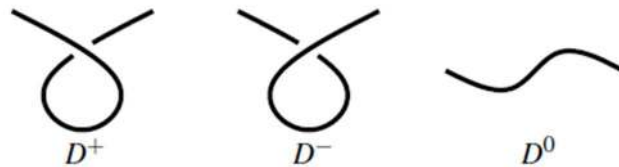
$$ii. \quad \langle \bigcirc \rangle = 1 \quad (3.8)$$

$$iii. \quad \langle D^+ \rangle = -A^3 \langle D^0 \rangle, \quad (3.9)$$

$$iv. \quad \langle D^- \rangle = -A^{-3} \langle D^0 \rangle, \quad (3.10)$$

aksiyomlarını, (Şekil 3.2.)’de verilen yönlendirilmemiş K^+ , K^- , K^0 ve K^∞ diyagramlarını kullanarak çözümlenmesi ile sağlayan ve $\langle K \rangle$ ile gösterilen A ’ya bağlı tek değişkenli Laurent polinomuna parantez polinomu (Kauffman bracket) denir. K halkası için $\langle K \rangle$, yukarıdaki aksiyomlarla belirlenen bir regüler izotopi invariantıdır (Kauffman, 1990: 430).

Burada $\bigcirc$, aşıkarc düğümün sıfır kavşaklı diyagramıdır ve D^+ , D^- , D^0 (Şekil 3.3.)’de çizilen yönlendirilmemiş diyagramlardır. Ayrıca (3.7), (3.9) ve (3.10)’dan $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle$ iki bileşenli bir aşıkarc halka ve $\rho = \langle \bigcirc \bigcirc \rangle$ olmak üzere $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = -A^2 - A^{-2}$ veya $\rho = -A^2 - A^{-2}$ olur.



Şekil 3.3. Reidemeister tip I. hareketiyle ilgili diyagramlar

Tanım 3.2.3. (Normalize Edilmiş Parantez Polinomu) Bir yönlendirilmemiş K düğümünün (veya halkasının) parantez polinomu $\langle K \rangle$ ve K 'nın yönlendirilmiş diyagramının burulma sayısı $w(K)$ olmak üzere

$$N_K = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle \quad (3.11)$$

ile tanımlı A 'ya bağlı tek değişkenli Laurent polinomuna normalize edilmiş parantez polinomu denir. Normalize edilmiş parantez polinomu, bir yarı-yönlendirilmiş düğüm polinomu olup K halka diyagramı için parantez polinomu ile ilişkili bir kuşatan izotopi invaryantıdır (Kauffman, 1990: 431).

Normalize edilmiş parantez polinomu, $N_K \left(t^{-1/4} \right) = V_K(t)$ ile birlikte Jones polinomunu verir (Kauffman, 1990: 431).

Tanım 3.2.4. (Kauffman L Polinomu) Bir yönlendirilmemiş K düğümünün (veya halkasının) kavşaklarından herhangi biri seçilerek,

$$\text{i. } L_{K^+}(a, x) + L_{K^-}(a, x) = x(L_{K^0}(a, x) + L_{K^\infty}(a, x)), \quad (3.12)$$

$$\text{ii. } L_{\bigcirc}(a, x) = 1, \quad (3.13)$$

$$\text{iii. } L_{D^+}(a, x) = aL_{D^0}(a, x), \quad (3.14)$$

$$\text{iv. } L_{D^-}(a, x) = a^{-1}L_{D^0}(a, x), \quad (3.15)$$

aksiyomlarını, (Şekil 3.2.)'de verilen yönlendirilmemiş K^+ , K^- , K^0 ve K^∞ diyagramlarını kullanarak çözümlenmesi sağlayan ve $L(a, x)$ ile gösterilen iki değişkenli Laurent polinomuna Kauffman L polinomu denir. K halkası için $L(a, x)$, yukarıdaki aksiyomlarla belirlenen bir regüler izotopi invaryantıdır (Kauffman, 1990: 439).

Burada $\bigcirc$, aşıkâr düğümün sıfır kavşaklı diyagramıdır ve D^+ , D^- , D^0 (Şekil 3.3.) de çizilen yönlendirilmemiş diyagramlardır. (3.12), (3.14) ve (3.15)'dan $\bigcirc\bigcirc$ iki bileşenli bir aşıkâr halka ve $\sigma = L_{\bigcirc\bigcirc}(a, x)$ olmak üzere $L_{\bigcirc\bigcirc}(a, x) = (a + a^{-1})x^{-1} - 1$ veya $\sigma = (a + a^{-1})x^{-1} - 1$ olur.

Kauffman L polinomu, BLM/Ho polinomunun iki değişkenli bir genelleştirmesidir. (3.5) ve (3.6)'dan $Q_K(x) = L_K(1, x)$ kısıtlanması ile Kauffman L polinomu K halkasının bir kuşatan izotopi invariantı olur. Ayrıca Kauffman L polinomu, $\langle K \rangle(A) = L_K(-A^3, A + A^{-1})$ ile birlikte parantez polinomunu verir (Kauffman, 1990: 432).

Tanım 3.2.5. (Kauffman F Polinomu) Bir yönlendirilmemiş K düğümünün (veya halkasının) Kauffman L polinomu $L_K(a, x)$ ve K 'nın yönlendirilmiş diyagramının burulma sayısı $w(K)$ olmak üzere

$$F_K(a, x) = a^{-w(K)} L_K(a, x) \quad (3.16)$$

ile tanımlı iki değişkenli Laurent polinomuna Kauffman F polinomu denir. Kauffman F polinomu, bir yarı-yönlendirilmiş düğüm polinomu olup K halka diyagramı için L polinomu ile ilişkili bir kuşatan izotopi invariantıdır (Kauffman, 1990: 428).

Kauffman F polinomu, $Q_K(x) = F_K(1, x)$, $N_K(A) = F_K(-A^3, A + A^{-1})$ ve $V_K(t) = F_K(-t^{3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4})$ ile birlikte sırasıyla BLM/Ho polinomunu, normalize edilmiş parantez polinomunu ve Jones polinomunu verir (Kauffman, 1990: 432).

Kauffman L ve F polinomlarının bazı özellikleri aşağıdaki gibi listelenmiştir: (Kauffman, 1990: 423)

- i. $\bigcirc_m$, m bileşenli aşık halka ise $L_{\bigcirc_m}(a, x) = F_{\bigcirc_m}(a, x) = \sigma^{m-1} = \left((a + a^{-1})x^{-1} - 1\right)^{m-1}$ olur.
- ii. K halkasının ayna görüntüsü K^* olmak üzere $L_{K^*}(a, x) = L_K(a^{-1}, x)$ ve $F_{K^*}(a, x) = F_K(a^{-1}, x)$ olur.
- iii. K_1 ve K_2 halkalarının bileşimi $K_1 \# K_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_{K_1 \# K_2}(a, x) &= L_{K_1}(a, x) L_{K_2}(a, x), \\ F_{K_1 \# K_2}(a, x) &= F_{K_1}(a, x) F_{K_2}(a, x). \end{aligned}$$

- iv. K_1 ve K_2 halkalarının ayrık bileşimi $K_1 \sqcup K_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_{K_1 \sqcup K_2}(a, x) &= \delta L_{K_1}(a, x) L_{K_2}(a, x), \\ F_{K_1 \sqcup K_2}(a, x) &= \delta F_{K_1}(a, x) F_{K_2}(a, x). \end{aligned}$$

Kauffman L ve F polinomu (ii.) özelliğine göre HOMFLY polinomuna kıyasla birçok düğümü ayna görüntüsünden daha iyi bir şekilde ayırt eder (Kauffman, 1990: 417).

Örnek 3.2.1. T sağ el trefoilin yönlendirilmemiş bir diyagramı olmak üzere T 'nin Kauffman L polinomu ve Kauffman F polinomu aşağıdaki gibi hesaplanır. T 'nin bir kavşağı üzerinden (3.12) uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
L \left[\text{diagram} \right] &= x L \left[\text{diagram} \right] + x L \left[\text{diagram} \right] - L \left[\text{diagram} \right] \\
&= a^{-2} x L \left[\text{diagram} \right] + x \left[x a^{-1} L \left[\text{diagram} \right] + x a L \left[\text{diagram} \right] - L \left[\text{diagram} \right] \right] - a L \left[\text{diagram} \right] \\
&= a^{-2} x + a^{-1} x^2 + a x^2 - x \left((a + a^{-1}) x^{-1} - 1 \right) - a \\
&= a^{-2} x + a x^2 - a + a^{-1} x^2 - a^{-1} + x - a \\
L_T(a, x) &= (a + a^{-1}) x^2 + (1 + a^{-2}) x - 2a - a^{-1}.
\end{aligned}$$

Kauffman L polinomu;

- $a = 1$ için

$$Q_T(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

olacak şekilde T 'nin BLM/Ho polinomunu verir.

- $a = -A^3$ ve $x = A + A^{-1}$ için

$$\langle T \rangle(A) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

olacak şekilde T 'nin parantez polinomunu verir.

T 'nin yönlendirilmiş diyagramı için burulma sayısı $w(T) = 1 + 1 + 1 = 3$ 'dür. Buradan (3.11) eşitliğinden T 'nin Kauffman F polinomu hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
F_T(a, x) &= a^{-3} \left((a + a^{-1}) x^2 + (1 + a^{-2}) x - 2a - a^{-1} \right) a \\
&= a^{-5} x + a^{-4} x^2 - a^{-4} + a^{-3} x + a^{-2} x^2 - 2a^{-2}
\end{aligned}$$

olur.

Kauffman F polinomu;

- $a = 1$ için

$$Q_T(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

olacak şekilde T 'nin BLM/Ho polinomunu verir.

- $a = -A^3$ ve $x = A + A^{-1}$ için

$$N_T(A) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

olacak şekilde T 'nin normalize edilmiş parantez polinomunu verir.

- $a = -t^{3/4}$ ve $x = t^{-1/4} + t^{1/4}$ için

$$V_T(t) = -t^4 + t^3 + t$$

olacak şekilde T 'nin Jones polinomunu verir.

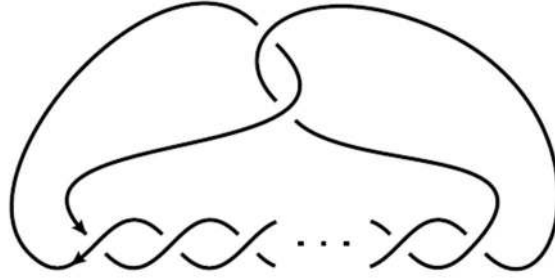


4. BURULMALI DÜĞÜMLERİN YÖNLENDİRİLMİŞ VE YÖNLENDİRİLMEMİŞ DÜĞÜM POLİNOMLARI

Bu bölümde burulmalı düğümlerin yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş düğüm polinomları için formüller ispatlanmıştır ve bu polinomların yineleme bağıntıları olarak tanımlanabildiği gösterilmiştir. Burada yineleme bağıntılarının üreten fonksiyon, kapalı form ve açık formül gibi bazı özellikleri incelenirken (Graham vd., 1994)' den yararlanılmıştır.

4.1. Burulmalı Düğümlerin HOMFLY Polinomları

$\mathcal{K}_n$, (Şekil 4.1.)'de burulmalı düğümünün yönlendirilmiş bir diyagramı ve $\mathcal{K}_{(2,n)}$, (Şekil 4.2.) de çizilen $(2,n)$ -torus halkasının yönlendirilmiş bir diyagramı olsun. Tezin bundan sonraki kısmında kolaylık olması adına $\mathcal{K}_n$ 'nin HOMFLY polimonu için $P_{\mathcal{K}_n}(a, z)$ yerine P_n kullanılmıştır.



Şekil 4.1. n -yarı burulmaya (half-twist) sahip burulmalı düğüm diyagramı



Şekil 4.2. $(2,n)$ -torus halkası diyagramı

Teorem 4.1.1. $\mathcal{K}_n$ burulmalı düğümünün HOMFLY polinomu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$P_n = \begin{cases} azP_{\mathcal{K}_{(2,n+1)}} + a^2 & n \text{ tek ise,} \\ -a^{-1}zP_{\mathcal{K}_{(2,n)}} + a^{-2} & n \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (4.1)$$

ve

$$P_n = (a^2 + 1)P_{n-2} - a^2P_{n-4}, \quad n \geq 4. \quad (4.2)$$

İspat. $\mathcal{K}_n$ diyagramının halkalanmış kavşaklarına griftlik ilişkileri uygulansın. Bu durumda $\mathcal{K}_n$; n tek ise sağ el ve n çift ise sol el yönlendirmeye sahip olur. n 'nin tek olması durumunda, kavşak değiştirilirse (yani K_- uygulanır ise) elde edilen diyagrama ikinci Reidemeister hareketi ve ardından birinci Reidemeister hareketi peş peşe uygulanarak sıfır kavşaklı aşıkardüğüm elde edilir. Kavşak düzgünleştirilirse (yani K_0 uygulanır ise) elde edilen diyagram, $n+1$ 'in çift olduğu dikkate alınarak, bileşenleri ters yönlü olan $\mathcal{K}_{(2,n+1)}$ torus halkasıdır. n 'nin çift olduğu durumu için ise benzer şekilde ilerlenerek (3.1) ve (3.2) aksiyomlarından (4.1) eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan, $\mathcal{K}_n$ diyagramının belirlenmiş bir yarı burulmasına (Şekil 3.1.)'e göre griftlik ilişkileri uygulansın. Kavşak değiştirilir ise (yani K_- uygulanır ise) elde edilen diyagram, ikinci Reidemeister hareketinin uygulanmasıyla $\mathcal{K}_{(n-2)}$ burulmalı düğümüdür. Kavşak düzgünleştirilirse (yani K_0 uygulanır ise), $n-1$ kez birinci Reidemeister hareketinin uygulanmasıyla $(2,2)$ -torus halkası, yani Hopf halkası, elde edilir. Eğer n tek ise, elde edilen $(2,2)$ -torus halkasının bileşenleri ters yönlü olacak şekilde sağ el yönlendirmeye sahip olduğu ve n çift ise, elde edilen $(2,2)$ -torus halkasının bileşenleri aynı yönlü olacak şekilde sol el yönlendirmeye sahip olduğu dikkate alınarak, (3.1) aksiyomundan aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$P_n = azP_{\mathcal{K}_{(2,2)}} + a^2P_{n-2}$$

ve

$$P_{n-2} = azP_{\mathcal{K}_{(2,2)}} + a^2P_{n-4}.$$

Dolayısıyla son iki denklemden (4.2) yineleme bağıntısı elde edilir.

Böylece, Teorem 4.1.1' deki (4.2) bağıntısı, başlangıç koşullarıyla birlikte dördüncü dereceden bir yineleme bağıntısı olarak tanımlanabilir.

Tanım 4.1.1. $n \geq 4$ olmak üzere burulmalı düğümlerin yönlendirilmiş diyagramları $\mathcal{K}_n$ için HOMFLY polinomları dizisi $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$P_0 = 1, P_1 = a^2z^2 - a^4 + 2a^2, P_2 = a^2 - z^2 + a^{-2} - 1, P_3 = (a^4 + a^2)z^2 - a^6 + a^4 + a^2 \quad (4.3)$$

başlangıç koşulları ile

$$P_n = (a^2 + 1)P_{n-2} - a^2P_{n-4}$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Ayrıca, K diyagramının ayna görüntüsü K^* olmak üzere $P_{K^*}(a, z) = P_K(a^{-1}, -z)$ olduğundan $P_{\mathcal{K}_n^*}(a, z)$ yerine P_{-n} kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilebilir.

$$P_{-n} = (a^{-2} + 1)P_{-(n-2)} - a^{-2}P_{-(n-4)}.$$

(4.2) yineleme bağıntısının karakteristik denklemi,

$$\lambda^4 - (a^2 + 1)\lambda^2 + a^2 = 0$$

olacak şekilde dördüncü dereceden bir denklemdir ve bu denklemin kökleri

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -a, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -1 \quad (4.4)$$

ile verilir.

Aşağıda Tanım 4.1.1 kullanılarak burulmalı düğümlerin HOMFLY polinomları listelenmiştir.

n	$P_n(a, z)$
0	1
1	$a^2z^2 - a^4 + 2a^2$
2	$-z^2 + a^2 + a^{-2} - 1$
3	$(a^4 + a^2)z^2 - a^6 + a^4 + a^2$
4	$-(a^2 + 1)z^2 + a^4 - a^2 + a^{-2}$
5	$(a^6 + a^4 + a^2)z^2 - a^8 + a^6 + a^2$
6	$-(a^4 + a^2 + 1)z^2 + a^6 - a^4 + a^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$

Önerme 4.1.1. $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için üreten fonksiyon

$$g_P(\lambda) = \frac{-a^2\lambda^3 + (a^{-2} - z^2 - 2)\lambda^2 + (a^2z^2 - a^4 + 2a^2)\lambda + 1}{a^2\lambda^4 - (a^2 + 1)\lambda^2 + 1} \quad (4.5)$$

eşitliği ile verilir.

İspat. $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ 'nin üreten fonksiyonu genel olarak aşağıdaki formdadır

$$g_P(\lambda) = P_0 + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + \dots$$

Buradan, $(a^2 + 1)\lambda^2 g_P(\lambda)$ ve $-a^2\lambda^4 g_P(\lambda)$ çarpımları yapılarak ve (4.2) kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} (1 - (a^2 + 1)\lambda^2 + a^2\lambda^4)g_P(\lambda) &= P_0 + P_1\lambda + (P_2 - (a^2 + 1)P_0)\lambda^2 + (P_3 - (a^2 + 1)P_1)\lambda^3 \\ &\quad + \sum_{n=4}^{\infty} (P_n - (a^2 + 1)P_{n-2} + a^2P_{n-4})\lambda^n \\ &= P_0 + P_1\lambda + (P_2 - (a^2 + 1)P_0)\lambda^2 + (P_3 - (a^2 + 1)P_1)\lambda^3. \end{aligned}$$

Dolayısıyla (4.5) eşitliği, (4.3)'teki başlangıç koşulları kullanılarak elde edilir.

Önerme 4.1.2. P_n yineleme bağıntısının genel çözümü

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(a^2 + a + 1)(a^4 - a^2(z^2 + 2) + 1)}{2a^2(a + 1)}, & C &= \frac{a^4 - a^2z^2 + 1}{2a^2}, \\ B &= \frac{(a^2 - a + 1)(a^4 - a^2(z^2 + 2) + 1)}{2a^2(a - 1)}, & D &= -\frac{(a^2 + 1)(a^4 - a^2(z^2 + 2) + 1)}{2a^2(a^2 - 1)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$P_n = Aa^n + B(-a)^n + C + D(-1)^n, \quad n \geq 0,$$

eşitliği ile verilir.

İspat. $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin kapalı formu

$$P_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n + D\lambda_4^n, \quad n \geq 0$$

eşitliği ile verilebilir.

O halde (4.3) ve (4.4)'den aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
P_0 &= A + B + C + D = 1, \\
P_1 &= A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\lambda_3 + D\lambda_4 = a^2 z^2 - a^4 + 2a^2, \\
P_2 &= A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 + C\lambda_3^2 + D\lambda_4^2 = a^2 - z^2 + a^{-2} - 1, \\
P_3 &= A\lambda_1^3 + B\lambda_2^3 + C\lambda_3^3 + D\lambda_4^3 = a^4 z^2 + a^2 z^2 - a^6 + a^4 + a^2.
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemi çözülerek A, B, C ve D değerleri bulunur. Ayrıca $x^n - y^n = (x - y) \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$ eşitliği dikkate alındığında $(a-1)$ çarpanlarının sadeleşeceği görülebilir.

Önerme 4.1.3. $n \geq 2$ olmak üzere, $\mathcal{K}_n$ burulmalı düğümünün HOMFLY polinomu için açık formülü

$$P_n = \begin{cases} \frac{z^2}{a+1} \left(\sum_{i=0}^n a^{i+2} \right) - a^{n+3} + a^{n+1} + a^2 & n \text{ tek ise,} \\ -\frac{z^2}{a+1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i \right) + a^n - a^{n-2} + a^{-2} & n \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (4.6)$$

şeklinde verilir.

İspat. (Duzhin ve Shkolnikov, 2015: 350)'deki (Sonuç 1)'den, $(2, n)$ -torus halkası $\mathcal{K}_{(2,n)}$ 'nin HOMFLY polinomu için açık formülü, n 'nin çift olduğu ve bileşenlerin ters yönlü olduğu göz önünde bulundurularak tezdeki notasyonların uygulanması ile

$$P_{\mathcal{K}_{(2,n)}} = \left(\frac{a^n - 1}{a - a^{-1}} \right) z - a^n (a - a^{-1}) z^{-1} \quad (4.7)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, (4.6) da ki formüller (4.1) ve (4.7) kullanılarak elde edilir.

Sonuç 4.1.1. HOMFLY polinomu, $a = t$ ve $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ için Jones polinomunu, $a = 1$ için Alexander-Conway polinomunu ve $a = 1$ ve $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ için Alexander polinomunu sağladığı iyi bilinmektedir. Buradan $\mathcal{K}_n$ burulmalı düğümünün bahsedilen düğüm polinomları için yineleme bağıntıları ve bunların ilgili özellikleri elde edilebilir.

- $\mathcal{K}_n$ 'nin Alexander polinomu için kolaylık adına $\Delta_{\mathcal{K}_n}(t)$ yerine Δ_n kullanılarak, $\mathcal{K}_n$ burulmalı düğümünün Alexander polinomu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\Delta_n = \begin{cases} \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{\mathcal{K}_{(2,n+1)}} + 1 & n \text{ tek ise,} \\ -\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) \Delta_{\mathcal{K}_{(2,n)}} + 1 & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Ayrıca $n \geq 4$ olmak üzere $\mathcal{K}_n$ için Alexander polinomları dizisi $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = t - 1 + t^{-1}, \quad \Delta_2 = -t + 3 - t^{-1}, \quad \Delta_3 = 2t - 3 + 2t^{-1}$$

başlangıç koşulları ile

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-2} - \Delta_{n-4}$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

- $\mathcal{K}_n$ 'nin Alexander-Conway polimonu için kolaylık adına $\nabla_{\mathcal{K}_n}(t)$ yerine ∇_n kullanılarak, $\mathcal{K}_n$ burulmalı düğümünün Alexander-Conway polinomu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\nabla_n = \begin{cases} z\nabla_{\mathcal{K}_{(2,n+1)}} + 1 & n \text{ tek ise,} \\ -z\nabla_{\mathcal{K}_{(2,n)}} + 1 & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Ayrıca $n \geq 4$ olmak üzere $\mathcal{K}_n$ için Alexander-Conway polinomları dizisi $\{\nabla_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\nabla_0 = 1, \quad \nabla_1 = z^2 + 1, \quad \nabla_2 = -z^2 + 1, \quad \nabla_3 = 2z^2 + 1$$

başlangıç koşulları ile

$$\nabla_n = 2\nabla_{n-2} - \nabla_{n-4}$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

- $\mathcal{K}_n$ 'nin Jones polimonu için kolaylık adına $V_{\mathcal{K}_n}(t)$ yerine V_n kullanılarak, $\mathcal{K}_n$ burulmalı düğümünün Jones polinomu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$V_n = \begin{cases} (t^{3/2} - t^{1/2})V_{\mathcal{K}_{(2,n+1)}} + t^2 & n \text{ tek ise,} \\ (t^{-3/2} - t^{-1/2})V_{\mathcal{K}_{(2,n)}} + t^{-2} & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Ayrıca $n \geq 4$ olmak üzere $\mathcal{K}_n$ için Jones polinomları dizisi $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$V_0 = 1, \quad V_1 = -t^4 + t^3 + t, \quad V_2 = t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}, \quad V_3 = -t^6 + t^5 - t^4 + 2t^3 - t^2 + t$$

başlangıç koşulları ile

$$V_n = (t^2 + 1)V_{n-2} - t^2V_{n-4}$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

4.2. Burulmalı Düğümlerin Kauffman L ve F Polinomları

$\mathfrak{R}_n$, (Şekil 4.1)'de çizilen burulmalı düğümün yönlendirilmemiş bir diyagramı ve $\mathfrak{R}_{(2,n)}$, (Şekil 4.2) de çizilen $(2,n)$ -torus halkasının yönlendirilmemiş bir diyagramı olsun. Tezin bundan sonraki kısmında kolaylık olması adına $\mathfrak{R}_n$ 'nin Kauffman L polinomu için $L_{\mathfrak{R}_n}(a, x)$ yerine L_n kullanılmıştır.

Teorem 4.2.1. $\mathfrak{R}_n$ burulmalı düğümünün Kauffman L polinomu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$L_n = a^{-1}xL_{\mathfrak{R}_{(2,n)}} + xL_{\mathfrak{R}_{(2,n+1)}} - a^n \quad (4.8)$$

ve

$$L_n = xL_{n-1} + (a^2 - 1)L_{n-2} - a^2xL_{n-3} + a^2L_{n-4}, \quad n \geq 4. \quad (4.9)$$

İspat. $\mathfrak{R}_n$ diyagramının halkalanmış kavşaklarına aksiyom (3.6) ve (Şekil 3.2.)'deki kavşaklar ve ayırmalar uygulansın. Kavşak değiştirildiğinde (yani K^- uygulanır ise), ikinci Reidemeister hareketinin n kez uygulanmasıyla ve birinci Reidemeister hareketiyle bir aşıkâr düğüm diyagramı elde edilir. Kavşak düzgünleştirilir ise (yani K^0 uygulanırsa) $\mathfrak{R}_{(2,n+1)}$ torus halkası elde edilir. Daha sonra kavşak ayrıldığında (yani K^∞ uygulandığında) ortaya çıkan diyagram, birinci Reidemeister hareketi uygulandığında bir $\mathfrak{R}_{(2,n)}$ torus halkası diyagramı bulunur. Böylece (4.8) eşitliği (3.13), (3.14) ve (3.15) aksiyomları kullanılarak elde edilir.

Diğer taraftan, $\mathfrak{R}_n$ diyagramının belirlenmiş bir yarı burulmasına aksiyom (3.12) ve (Şekil 3.2.)'deki kavşaklar ve ayırmalar uygulansın. Kavşak değiştirilir ise (yani K^- uygulanır ise) elde edilen diyagrama ikinci Reidemeister hareketi uygulanmasıyla $\mathfrak{R}_{n-2}$ burulmalı düğümü elde edilir. Kavşak düzgünleştirilirse (yani K^0 uygulanırsa) $\mathfrak{R}_{n-1}$ burulmalı düğümü elde edilir. Daha sonra kavşak ayrılırsa (yani K^∞ uygulanır ise) $n-1$ kez Reidemeister hareketi uygulanmasıyla elde edilen diyagram $(2,2)$ -torus halkası, yani Hopf halkası olur. Eğer n tek ise, elde edilen $(2,2)$ -torus halkalarının tüm kavşaklarının sağ el diyagramı olduğu ve n çift ise, elde edilen $(2,2)$ -torus halkalarının tüm kavşaklarının sol el diyagramı olduğu dikkate alınarak (3.13) ve (3.14) aksiyomlarından aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$L_n = xL_{n-1} + a^{n-1}xL_{\mathfrak{R}_{(2,2)}} - L_{n-2}$$

ve

$$L_{n-2} = xL_{n-3} + a^{n-3}xL_{\mathfrak{R}_{(2,2)}} - L_{n-4}.$$

Dolayısıyla son iki denklemden (4.9) bağıntısı elde edilir.

Böylece, Teorem 4.2.1'deki (4.9) bağıntısı, başlangıç koşullarıyla birlikte dördüncü dereceden bir yineleme bağıntısı olarak tanımlanabilir.

Tanım 4.2.1. $n \geq 4$ olmak üzere burulmalı düğümlerin yönlendirilmemiş diyagramları $\mathfrak{R}_n$ için Kauffman L polinomları dizisi $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$\begin{aligned} L_0 &= a^{-2}, \quad L_1 = (a + a^{-1})x^2 + (a^{-2} + 1)x - 2a - a^{-1}, \\ L_2 &= (a + a^{-1})x^3 + (a^2 + a^{-2} + 2)x^2 - (a + a^{-1})x - a^2 - a^{-2} - 1, \\ L_3 &= (a + a^{-1})x^4 + (a^2 + a^{-2} + 2)x^3 + (a^3 - a - 2a^{-1})x^2 - (2a^{-2} + 2)x - a^3 + a + a^{-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

başlangıç koşulları ile

$$L_n = xL_{n-1} + (a^2 - 1)L_{n-2} - a^2xL_{n-3} + a^2L_{n-4}$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Ayrıca K diyagramının ayna görüntüsü K^* olmak üzere $L_{K^*}(a, x) = L_K(a^{-1}, x)$ olduğundan $L_{\mathfrak{R}_n^*}(a, x)$ 'nin yerine L_{-n} kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilebilir

$$L_{-n} = xL_{-(n-1)} + (a^{-2} - 1)L_{-(n-2)} - a^{-2}xL_{-(n-3)} + a^{-2}L_{-(n-4)}.$$

(4.9) yineleme bağıntısının karakteristik denklemi,

$$\lambda^4 - x\lambda^3 - (a^2 - 1)\lambda^2 + a^2x\lambda - a^2 = 0$$

olacak şekilde dördüncü dereceden bir denklemdir ve bu denklemin kökleri,

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -a, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4}), \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4}) \quad (4.11)$$

ile verilir.

Aşağıda Tanım 4.2.1 kullanılarak burulmalı düğümlerin Kauffman L polinomları listelenmiştir.

n	$L_n(a, x)$
0	a^{-2}
1	$(a+a^{-1})x^2 + (a^{-2}+1)x - 2a - a^{-1}$
2	$(a+a^{-1})x^3 + (a^2+a^{-2}+2)x^2 - (a+a^{-1})x - a^2 - a^{-2} - 1$
3	$(a+a^{-1})x^4 + (a^2+a^{-2}+2)x^3 + (a^3-a-2a^{-1})x^2 - (2a^{-2}+2)x - a^3 + a + a^{-1}$
4	$(a+a^{-1})x^5 + (a^2+a^{-2}+2)x^4 - (3a+2a^{-1}-a^{-3})x^3 - (3a^2+4-a^{-4})x^2 + (2a+2a^{-1})x + a^2 + 1 + a^{-4}$
5	$(a+a^{-1})x^6 + (a^2+a^{-2}+2)x^5 - (4a+3a^{-1}-a^{-3})x^4 - (4a^2+6+a^{-2}-a^{-4})x^3 + (4a+3a^{-1}+a^{-5})x^2 + (3a^2+3)x - a - a^{-1} - a^{-5}$
6	$(a+a^{-1})x^7 + (a^2+a^{-2}+2)x^6 - (5a+4a^{-1}-a^{-3})x^5 - (5a^2+8+2a^{-2}-a^{-4})x^4 + (7a+5a^{-1}-a^{-3}+a^{-5})x^3 + (6a^2+7+a^{-6})x^2 - (3a+3a^{-1})x - a^2 - 1 - a^{-6}$
$\vdots$	$\vdots$

Önerme 4.2.1. $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için üreten fonksiyon

$$g_L(\lambda) = \frac{a^3\lambda^3 + ((a^2+1)x^2 + ax - a^2 - 2)\lambda^2 + ((a+a^{-1})x^2 + x - 2a - a^{-1})\lambda + a^{-2}}{-a^2\lambda^4 + a^2x\lambda^3 - (a^2-1)\lambda^2 - x\lambda + 1} \quad (4.12)$$

eşitliği ile verilir.

İspat. $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ 'nin üreten fonksiyonu genel olarak aşağıdaki formdadır.

$$g_L(\lambda) = L_0 + L_1\lambda + L_2\lambda^2 + \dots$$

Buradan, $x\lambda g_L(\lambda)$, $(a^2-1)\lambda^2 g_L(\lambda)$, $-a^2x\lambda^3 g_L(\lambda)$ ve $a^2\lambda^4 g_L(\lambda)$ ile çarpımları yapılarak ve (4.9) kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} (1-x\lambda - (a^2-1)\lambda^2 + a^2x\lambda^3 - a^2\lambda^4)g_L(\lambda) &= L_0 + (L_1 - xL_0)\lambda + (L_2 - xL_1 - (a^2-1)L_0)\lambda^2 \\ &\quad + (L_3 - xL_2 - (a^2-1)L_1 + a^2xL_0)\lambda^3 \\ &\quad + \sum_{n=4}^{\infty} (L_n - xL_{n-1} - (a^2-1)L_{n-2} + a^2xL_{n-3} - a^2L_{n-4})\lambda^n \\ &= L_0 + (L_1 - xL_0)\lambda + (L_2 - xL_1 - (a^2-1)L_0)\lambda^2 \\ &\quad + (L_3 - xL_2 - (a^2-1)L_1 + a^2xL_0)\lambda^3. \end{aligned}$$

Dolayısıyla (4.5) eşitliği, (4.3)'teki başlangıç koşulları kullanılarak elde edilir.

Önerme 4.2.2. (4.8) yineleme bağıntısının genel çözümü

$$A = \frac{a^2(x^2-1) + ax + x^2 - 1}{a^2 - ax + 1}, \quad B = 0$$

$$C = \frac{(a^2+1)\left(2a^3 + a^2\left(x^3 + x^2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x^2-4} - 3x\right) + a\left(-x^2 + x\sqrt{x^2-4} + 2\right) - \sqrt{x^2-4} - x\right)}{2a^2\sqrt{x^2-4}(-a^2+ax-1)},$$

$$D = \frac{(a^2 + 1) \left(-2a^3 + a^2 \left(-x^3 + x^2 \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 4} + 3x \right) + a \left(x^2 + x \sqrt{x^2 - 4} - 2 \right) - \sqrt{x^2 - 4} + x \right)}{2a^2 \sqrt{x^2 - 4} (-a^2 + ax - 1)}$$

olmak üzere

$$L_n = Aa^n + B(-a)^n + C \left(\frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right) \right)^n + D \left(\frac{1}{2} \left(x - \sqrt{x^2 - 4} \right) \right)^n, \quad n \geq 0 \quad (4.13)$$

eşitliği ile verilir.

İspat. $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin kapalı formu

$$L_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n + D\lambda_4^n, \quad n \geq 0$$

eşitliği ile verilir.

O halde (4.10) ve (4.11)'den aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} L_0 &= A + B + C + D = a^{-2}, \\ L_1 &= A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\lambda_3 + D\lambda_4 = (a + a^{-1})x^2 + (a^{-2} + 1)x - 2a - a^{-1}, \\ L_2 &= A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 + C\lambda_3^2 + D\lambda_4^2 = (a + a^{-1})x^3 + (a^2 + a^{-2} + 2)x^2 - (a + a^{-1})x - a^2 - a^{-2} - 1, \\ L_3 &= A\lambda_1^3 + B\lambda_2^3 + C\lambda_3^3 + D\lambda_4^3 = (a + a^{-1})x^4 + (a^2 + a^{-2} + 2)x^3 + (a^3 - a - 2a^{-1})x^2 \\ &\quad - (2a^{-2} + 2)x - a^3 + a + a^{-1}. \end{aligned}$$

Bu denklem sistemi çözülerek A , B , C ve D değerleri bulunur.

Tezin bundan sonraki kısmında kolaylık olması adına $\mathfrak{K}_n$ 'nin Kauffman F polinomu $F_{\mathfrak{K}_n}(a, x)$ yerine F_n kullanılmıştır.

Önerme 4.2.3. $\mathfrak{K}_n$ burulmalı düğümünün yönlendirilmemiş diyagramları için Kauffman F polinomları dizisi $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, \quad F_1 = (a^{-2} + a^{-4})x^2 + (a^{-3} + a^{-5})x - 2a^{-2} - a^{-4}, \\ F_2 &= (a + a^{-1})x^3 + (a^2 + a^{-2} + 2)x^2 - (a + a^{-1})x - a^2 - a^{-2} - 1, \\ F_3 &= (a^{-4} + a^{-6})x^4 + (a^{-3} + a^{-7} + 2a^{-5})x^3 + (a^{-2} - a^{-4} - 2a^{-6})x^2 - (2a^{-7} + 2a^{-5})x - a^{-2} + a^{-4} + a^{-6} \end{aligned} \quad (4.14)$$

başlangıç koşullarıyla birlikte

$$F_n = \begin{cases} a^{-5}xF_{n-1} + (1-a^{-2})F_{n-2} - a^{-5}xF_{n-3} + a^{-2}F_{n-4} & n \text{ tek ise} \\ a^3xF_{n-1} + (1-a^{-2})F_{n-2} - a^3xF_{n-3} + a^{-2}F_{n-4} & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad n \geq 4 \quad (4.15)$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Ayrıca F_n için aşağıdaki

$$F_n = \begin{cases} a^{-3}xF_{\mathfrak{R}_{(2,n)}} + a^{-1}xF_{\mathfrak{R}_{(2,n+1)}} - a^{-2} & n \text{ tek ise,} \\ axF_{\mathfrak{R}_{(2,n)}} + a^3xF_{\mathfrak{R}_{(2,n+1)}} - a^2 & n \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (4.16)$$

eşitlik sağlanır.

İspat. n sırasıyla tek ve çift olduğunda, $w(\mathfrak{R}_n) = n+2$ ve $w(\mathfrak{R}_n) = n-2$ olduğu dikkate alınır, (4.15) ve (4.16), (3.15) ve Tanım 4.2.1’de (4.10) bağıntısı kullanılarak elde edilir.

Ek olarak, K diyagramının ayna görüntüsü K^* olmak üzere $F_{K^*}(a, x) = F_K(a^{-1}, x)$ olduğundan $F_{\mathfrak{R}_n^*}(a, x)$ yerine F_{-n} kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilebilir

$$F_{-n} = \begin{cases} a^5xF_{-(n-1)} + (1-a^2)F_{-(n-2)} - a^5xF_{-(n-3)} + a^2F_{-(n-4)} & n \text{ tek ise,} \\ a^{-3}xF_{-(n-1)} + (1-a^2)F_{-(n-2)} - a^{-3}xF_{-(n-3)} + a^2F_{-(n-4)} & n \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (4.17)$$

Benzer gösterimler kullanarak, $\mathfrak{R}_n^*$ ’nın ayna görüntüsü için (4.16) eşitliğinden F_{-n} hesaplanabilir.

Önerme 4.2.4. (4.14) yineleme bağıntısının genel çözümü

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2(x^2-1) + ax + x^2 - 1}{a^2 - ax + 1}, \quad B=0, \\ C &= \frac{(a^2+1)\left(2a^3 + a^2\left(x^3 + x^2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x^2-4} - 3x\right) + a\left(-x^2 + x\sqrt{x^2-4} + 2\right) - \sqrt{x^2-4} - x\right)}{2a^2\sqrt{x^2-4}(-a^2 + ax - 1)}, \\ D &= \frac{(a^2+1)\left(-2a^3 + a^2\left(-x^3 + x^2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x^2-4} + 3x\right) + a\left(x^2 + x\sqrt{x^2-4} - 2\right) - \sqrt{x^2-4} + x\right)}{2a^2\sqrt{x^2-4}(-a^2 + ax - 1)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$F_n = \begin{cases} a^{-n-2} \left(Aa^n + B(-a)^n + C \left(\frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 4}) \right)^n + D \left(\frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 - 4}) \right)^n \right) & n \text{ tek ise,} \\ a^{-n+2} \left(Aa^n + B(-a)^n + C \left(\frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 4}) \right)^n + D \left(\frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 - 4}) \right)^n \right) & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad n \geq 0$$

eşitliği ile verilir.

İspat. n sırasıyla tek ve çift olduğunda $w(\mathfrak{K}_n) = n+2$ ve $w(\mathfrak{K}_n) = n-2$ olduğu dikkate alınarak (3.15) ve (4.13)'den istenen eşitlik elde edilir.

Sonuç 4.2.1. $n \geq 1$ için $\{L_n\}$ ve $\{F_n\}$ 'nin açık formu

$$L_n = a^{-1}xR_{n+2} + (ax^2 + a^{-2}x - a - a^{-1})R_{n+1} + (x^2 - ax + a^2 - a^{-2})R_n + (-x + a + a^{-1})R_{n-1} - a^n \quad (4.18)$$

ve

$$F_n = \begin{cases} a^{-1}xS_{n+2} + (a^2x^2 + a^{-3}x - a^2 - 1)S_{n+1} + (x^2 - a^3x + a^4 + a^2 - a^{-2} - 1)S_n + (-ax + a^2 + 1)S_{n-1} - a^{-2} & n \text{ tek ise,} \\ a^3xS_{n+2} + (a^6x^2 + ax - a^6 - a^4)S_{n+1} + (a^4x^2 - a^7x + a^8 + a^6 - a^4 - a^2)S_n + (-a^5x + a^6 + a^4)S_{n-1} - a^2 & n \text{ çift ise.} \end{cases} \quad (4.19)$$

Burada $\{R_n\}$ ve $\{S_n\}$ sırasıyla $r = a + x$, $s = -(1 + ax)$, $t = a$ ve $r = a^2 + ax$, $s = -(a^2 + a^3x)$, $t = a^4$ için $G_0 = G_1 = 0$, $G_2 = 1$ başlangıç koşullarıyla aşağıdaki $\{G_n\}$ dizisinin özel durumudur.

$$G_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n-2-i-2j}{i+j} \binom{i+j}{j} r^{n-2-2i-3j} s^i (-1)^i t^j.$$

İspat. (Altıntaş ve Taşköprü, 2019: 9) Teorem 2.3 ve Teorem 2.4'den, $\mathfrak{K}_{(2,n)}$ 'nin Kauffman L ve F polinom dizilerinin açık formu aşağıdaki şekilde verilmiştir

$$L_{\mathfrak{K}_{(2,n)}} = (a^{-1})R_{n+1} + (ax - (a + a^{-1})x^{-1})R_n + ((1 + a^2)x^{-1} - a)R_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (4.20)$$

ve

$$F_{\mathfrak{K}_{(2,n)}} = S_{n+1} + (a^3x - (a^3 + a)x^{-1})S_n + ((a^5 + a^3)x^{-1} - a^4)S_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (4.21)$$

Böylece (4.18) formülü, (4.8) ve (4.20) kullanılarak elde edilir. Ayrıca (4.19) formülü, sırasıyla n tek ve çift olduğunda $w(\mathfrak{K}_n) = n + 2$ ve $w(\mathfrak{K}_n) = n - 2$ olduğu dikkate alınarak, (4.16) ve (4.21) eşitliklerinin kullanılması ile elde edilir.

Sonuç 4.2.2. Kauffman L polinomunun $a = 1$ için BLM/Ho polinomunu ve $a = -A^3$ ve $x = A + A^{-1}$ için parantez polinomunu sağladığı iyi bilinmektedir. Ayrıca Kauffman F polinomunun $a = 1$ için BLM/Ho polinomunu, $a = -A^3$ ve $x = A + A^{-1}$ için normalize edilmiş parantez polinomunu ve $a = -t^{3/2}$ ve $x = t^{-1/4} + t^{1/4}$ için Jones polinomunu sağladığı da iyi bilinmektedir. Bu durumda $\mathfrak{K}_n$ burulmalı düğümünün bahsedilen düğüm polinomları için yineleme bağıntıları ve bunların ilgili özellikleri kolaylıkla elde edilebilir.

- $\mathfrak{K}_n$ 'nin BLM/Ho polimonu için kolaylık adına $Q_{\mathfrak{K}_n}(x)$ yerine Q_n kullanılarak, $\mathfrak{K}_n$ burulmalı düğümünün BLM/Ho polinomu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$Q_n = xQ_{\mathfrak{K}_{(2,n)}} + xQ_{\mathfrak{K}_{(2,n+1)}} - 1.$$

Ayrıca $n \geq 4$ olmak üzere $\mathfrak{K}_n$ için BLM/Ho polinomları dizisi $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$Q_0 = 1, Q_1 = 2x^2 + 2x - 3, Q_2 = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3, Q_3 = 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1$$

başlangıç koşulları ile

$$Q_n = xQ_{n-1} - xQ_{n-3} + Q_{n-4}$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

- $\mathfrak{K}_n$ burulmalı düğümünün parantez polinomu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\langle \mathfrak{K}_n \rangle = (-A^{-2} - A^{-4}) \langle \mathfrak{K}_{(2,n)} \rangle + (A + A^{-1}) \langle \mathfrak{K}_{(2,n+1)} \rangle - (-A^3)^n$$

Ayrıca $n \geq 4$ olmak üzere $\mathfrak{K}_n$ için parantez polinomları dizisi $\{\langle \mathfrak{K}_n \rangle\}_{n=0}^{\infty}$

$$\langle \mathfrak{K}_0 \rangle = A^{-6}, \langle \mathfrak{K}_1 \rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}, \langle \mathfrak{K}_2 \rangle = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8},$$

$$\langle \mathfrak{K}_3 \rangle = -A^{11} + A^7 - 2A^3 + A^{-1} - A^{-5} + A^{-9}$$

başlangıç koşulları ile

$$\langle \mathfrak{K}_n \rangle = (A + A^{-1}) \langle \mathfrak{K}_{n-1} \rangle + (A^6 - 1) \langle \mathfrak{K}_{n-2} \rangle - (A^7 + A^{-5}) \langle \mathfrak{K}_{n-3} \rangle + A^6 \langle \mathfrak{K}_{n-4} \rangle$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

- $\mathfrak{R}_n$ 'nin yönlendirilmiş diyagramının normalize edilmiş parantez polimonu için kolaylık adına $N_{\mathfrak{R}_n}(A)$ yerine N_n kullanılarak, $\mathfrak{R}_n$ burulmalı düğümünün normalize edilmiş parantez polinomu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$N_n = \begin{cases} -(A^{-8} + A^{-10})N_{\mathfrak{R}_{(2,n)}} - (A^{-2} + A^{-4})N_{\mathfrak{R}_{(2,n+1)}} - A^{-6} & n \text{ tek ise,} \\ -(A^4 + A^2)N_{\mathfrak{R}_{(2,n)}} - (A^{10} + A^8)N_{\mathfrak{R}_{(2,n+1)}} - A^6 & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Ayrıca $n \geq 4$ olmak üzere $\mathfrak{R}_n$ için normalize edilmiş parantez polinomları dizisi

$$\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$N_0 = 1, N_1 = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}, N_2 = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}, \\ N_3 = A^{-4} - A^{-8} + 2A^{-12} - A^{-16} + A^{-20} - A^{-24}$$

başlangıç koşulları ile

$$N_n = \begin{cases} -(A^{-14} + A^{-16})N_{n-1} + (1 - A^{-6})N_{n-2} + (A^{-14} + A^{-16})N_{n-3} + A^{-6}N_{n-4} & n \text{ tek ise} \\ -(A^{10} + A^8)N_{n-1} + (1 - A^{-6})N_{n-2} + (A^{10} + A^8)N_{n-3} + A^{-6}N_{n-4} & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

- $\mathfrak{R}_n$ 'nin yönlendirilmiş diyagramının Jones polimonu için kolaylık adına $V_{\mathfrak{R}_n}(t)$ yerine V_n kullanılarak, $\mathfrak{R}_n$ burulmalı düğümünün Jones polinomu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$V_n = \begin{cases} -(t^2 + t^{5/2})V_{\mathfrak{R}_{(2,n)}} - (t^{1/2} + t)V_{\mathfrak{R}_{(2,n+1)}} - t^{3/2} & n \text{ tek ise,} \\ -(t^{-1} + t^{-1/2})V_{\mathfrak{R}_{(2,n)}} - (t^{-2} + t^{-5/2})V_{\mathfrak{R}_{(2,n+1)}} - t^{-3/2} & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Ayrıca $n \geq 4$ olmak üzere $\mathfrak{R}_n$ için Jones polinomları dizisi $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$V_0 = 1, V_1 = -t^4 + t^3 + t, V_2 = t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}, V_3 = -t^6 + t^5 - t^4 + 2t^3 - t^2 + t$$

başlangıç koşulları ile

$$V_n = \begin{cases} -(t^{7/2} + t^4)V_{n-1} + (1 - t^{3/2})V_{n-2} + (t^{7/2} + t^4)V_{n-3} + t^{3/2}V_{n-4} & n \text{ tek ise} \\ -(t^{-5/2} + t^{-2})V_{n-1} + (1 - t^{3/2})V_{n-2} + (t^{-5/2} + t^{-2})V_{n-3} + t^{3/2}V_{n-4} & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

KAYNAKLAR

- Adams, C. C.** (1994). *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*, W.H. Freeman and Company, New York.
- Alexander, J. W.** (1928). Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2), 275-306.
- Allin, Y., & Bozhüyük, M. E.** (1996). The group of twist knots. *Mathematical and Computational Applications*, 1(2), 7-15.
- Altıntaş, İ., Taşköprü, K., & Beyaztaş, M.** (2018). Bracket polynomials of torus links as Fibonacci polynomials. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 5(3), 35-43.
- Altıntaş, İ., & Taşköprü, K.** (2019). Unoriented knot polynomials of torus links as Fibonacci-type polynomials. *Asian-European Journal of Mathematics*, 12(04), 1950053.
- Aneziris, C. N.** (1999). *The mystery of knots*. Computer programming for knot tabulation. Series on Knots and Everything 20, World Scientific.
- Berceanu, B., & Nizami, A. R.** (2014). A recurrence relation for the Jones polynomial. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 51(3), 443-462.
- Brandt, R. D., Lickorish, W. R., & Millett, K. C.** (1986). A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Inventiones mathematicae*, 84(3), 563-573.
- Burde, G., & Zieschang, H.** (1985). *Knots*. Studies in Math. 5, Walter de Gruyter, Berlin New York.
- Conway, J. H.** (1970). An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra*, Pergamon Press. New York, pp. 329-358.
- Crowell, R. H., & Fox, R. H.** (1963). *Introduction to knot theory*. Springer-Verlag, New York.
- Doll, H., & Hoste, J.** (1991). A tabulation of oriented links. *Mathematics of Computation*, 57(196), 747-761.

- Dubois, J., Huynh, V., & Yamaguchi, Y.** (2009). Non-abelian Reidemeister torsion for twist knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 18(03), 303-341.
- Duzhin, S., & Shkolnikov, M.** (2015). A formula for the HOMFLY polynomial of rational links. *Arnold Mathematical Journal*, 1(4), 345-359.
- Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W. R., Millett, K., & Ocneanu, A.** (1985). A new polynomial invariant of knots and links. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, 12(2), 239-246.
- Garoufalidis, S., & Sun, X.** (2010). The non-commutative A-polynomial of twist knots. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 19(12), 1571-1595.
- Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O.** (1994) Concrete mathematics: A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley.
- Ho, C. F.** (1985). A polynomial invariant for knots and links—preliminary report. *Abstracts American Mathematical Society*, 6, 300.
- Hoste, J., & Shanahan, P. D.** (2001). Trace fields of twist knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 10(4), 625-639.
- Hoste, J., & Shanahan, P. D.** (2004). A formula for the A-polynomial of twist knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 13(2), 193-209.
- Jones, V. F.** (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12, 103-111.
- Kauffman, L. H.** (1987). State models and the Jones polynomial. *Topology*, 26(3), 395-407.
- Kauffman, L. H.** (1990). An invariant of regular isotopy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 318(2), 417-471.
- Kauffman, L. H.** (2001). *Knots and physics*. World scientific Pub. Co., Singapore.
- Kauffman, L. H.** (2016). *On Knots*, Vol. 115 of Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, New Jersey.
- Kawauchi, A.** (1996). *A survey of knot theory*. Birkhauser-Verlag, Basel-Boston- Berlin.
- Koseleff, P. V., & Pecker, D.** (2015). On Alexander–Conway polynomials of two-bridge links. *Journal of Symbolic Computation*, 68, 215-229.

- Manturov, V. O.** (2018). *Knot theory: Second edition*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton.
- Mathews, D. V.** (2014). An explicit formula for the A-polynomial of twist knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 23(9), 145004.
- Murasugi, K.** (1996). *Knot theory and its applications*. Birkhauser Boston.
- Ramadevi, P., Govindarajan, T. R., & Kaul, R. K.** (1994). Chirality of knots 942 and 1071 and Chern-Simons theory. *Modern Physics Letters A*, 9(34), 3205-3217.
- Rolfsen, D.** (2003). *Knots and links*. Mathematics Lecture Series, Berkeley, Calif.: Publish or Perish, Inc., 7.
- Şahin, A., & Şahin, B.** (2019). Jones polynomial for graphs of twist knots. *Applications & Applied Mathematics*, 14(2), 1269-1278.
- Taşköprü, K., & Altıntaş, İ.** (2015). HOMFLY polynomials of torus links as generalized Fibonacci polynomials. *The Electronic Journal of Combinatorics*, P4-8.
- Tran, A. T.** (2016). Reidemeister torsion and Dehn surgery on twist knots. *Tokyo Journal of Mathematics*, 39(2), 517-526.
- Yetter, D. N.** (2001). *Functorial knot theory: Categories of tangles, coherence, categorical deformations and topological invariants*. World Scientific, Singapore.