

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Alev TOKLU

BÜYÜK q -BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK
ÖZELLİKLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI – 2025

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Alev TOKLU

BÜYÜK q -BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

JÜRİ ÜYELERİ

Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Doç. Dr. Alper EKİNCİ

AĞRI-2025

	LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI	Doküman No	FR-211
		İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa No	1/1

BÜYÜK q -BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR danışmanlığında, Alev TOKLU tarafından hazırlanan bu çalışma, 15.08.2025 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza :

Üye : Doç. Dr. Alper EKİNCİ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet TEYFUR

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN



LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ BENZERLİK RAPORU

Doküman No	FR-213
İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
Revizyon Tarihi	
Revizyon No	00
Sayfa No	1 / 1

Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir		
Öğrenci Adı Soyadı	Alev TOKLU	
Numarası	226052268	
Ana Bilim Dalı	Matematik	
Bilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	
Programı		
Danışman Unvanı Adı Soyadı	Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	
Tez Başlığı	BÜYÜK q -BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ	
Bölümler	Turnitin Sonucu	En Yüksek Değer
Giriş	%3	% 25
Kuramsal Temeller/Kavramsal Çerçeve	%19	% 30
Materyal ve Yöntem	%16	% 30
Araştırma Bulguları	%16	% 20
Sonuç/Tartışma/Öneri	%0	% 20
TEZ (GENEL)	%17	% 25

17.07.2025

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Öğrenci Adı-Soyadı

Alev TOKLU

Danışman Adı-Soyadı

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN
------------	--------------	-----------

İçindekiler

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
Şekil Listesi	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Hipergeometrik Fonksiyonların Rolü	2
1.2. Riemann Dönüşüm Teoremi	4
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1. Yıldızlı Fonksiyonlar	6
2.1.1. Konveks Fonksiyonlar	7
2.2. α Mertebeden Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonlar	8
2.3. Konform Dönüşüm	10
2.4. Univalent Fonksiyonlar ve Schwarz Lemması	11
2.5. Subordinasyon Kavramı	12
2.5.1. Subordinasyonun Geometrik Yorumu	12
2.5.2. Subordinasyonun Genel Özellikleri	13
2.5.3. Subordinasyon ve Univalent Fonksiyonlar	13
2.5.4. Subordinasyonun Uygulamaları	14
2.5.5. Subordinasyon Yardımıyla Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonlar	14
3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Janowski Konveks ve Janowski Yıldızlı Fonksiyonlar	15
3.1.1. Janowski Konvekslik ve Janowski Yıldızlılık Yarıçapı	20
3.2. Bernoulli Lemniskatı	23
3.2.1. Bernoulli Lemniskat Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonlar	25
3.2.2. Lemniskat Konvekslik ve Yıldızlılık Yarıçapı	28
3.2.3. Geometrik Yorumlar	30
3.3. q -Gamma ve big q -Bessel Fonksiyonu	31

4. ARAŞTIRMA BULGULARI	36
4.1. Normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının Janowski yıldızılık ve konvekslik yarıçapı	40
4.2. Normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının Bernoulli lemniskat yıldızılık ve konvekslik yarıçapı	45
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	51
Kaynakça	52



ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
BÜYÜK q -BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK
ÖZELLİKLERİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Jüri: Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Assoc. Dr. Alper EKİNCİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu çalışmanın temel amacı, karmaşık düzlemin birim diski içinde analitik olan iki farklı şekilde normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonunun Janowski yıldızlılık, Janowski konvekslik, lemniskat yıldızlılık ve lemniskat konvekslik yarıçaplarının belirlenmesidir. Ayrıca, her bir fonksiyonun basit ve reel sayılar olan sonsuz sayıda sıfıra sahip olduğu eğerden hareketle bu fonksiyonlar için daha önce elde edilmiş sonsuz çarpım temsilleri ve reel tam fonksiyonların Laguerre–Pólya sınıfı, Hadamard çarpınlara ayırma teoreminin bu çalışmanın ayrılmaz bir parçasını oluşturduğunu belirtmek önemlidir.

2025, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler:Büyük q -Bessel fonksiyonu, Janowski yıldızlılık, Janowski konvekslik, lemniskat yıldızlılık, lemniskat konvekslik.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF BIG q -BESSEL FUNCTIONS

Advisor of Thesis: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Jury: Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Assoc. Prof. Dr. Alper EKİNCİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

The primary objective of this study is to determine the radii of Janowski starlikeness, Janowski convexity, lemniscate starlikeness, and lemniscate convexity for two differently normalized big q -Bessel functions, which are analytic in the unit disk of the complex plane. Furthermore, building upon the fact that each function has infinitely many simple and real zeros, we utilize previously obtained infinite product representations for these functions. It is essential to emphasize that the Laguerre-Pólya class of real entire functions and the Hadamard factorization theorem constitute integral parts of this work.

2025, 53 pages

Key Words: Big q -Bessel function, Janowski starlikeness, Janowski convexity, lemniscate starlikeness, lemniscate convexity.

TEŞEKKÜR

Öncelikle yüksek lisans eğitimim süresinceengin bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen saygıdeğer danışmanım

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e

ve Matematik bölüm başkanı

Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

hocam başta olmak üzere Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinin her birine ve yüksek lisans eğitimim boyunca beni destekleyen aileme ve çocuklarım

Efe Kağan TOKLU ve Egemen Doruk TOKLU'ya
en içten teşekkürlerimi ifade etmek isterim.

Haziran 2025

Alev TOKLU

Şekil Listesi

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Subordinasyonun geometrik yorumu: $f(\mathfrak{z}) \prec g(\mathfrak{z})$ durumunda, $f(\mathfrak{z})$ 'nin görüntüsü $g(\mathfrak{z})$ 'nin görüntüsünün içinde kalır.	13
3.1 $A = 0.8$ ve $B = -0.5$ parametre değerleri için Janowski bölgesi	15
3.2 $f(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + \frac{\mathfrak{z}^2}{2}$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılığı	19
3.3 $f(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + \frac{\mathfrak{z}^2}{2}$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılığı ve konveksliği	19
3.4 $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{(1-\mathfrak{z})^{2(1-\alpha)}}$ ($0 < \alpha < 1/2$) fonksiyonunun Janowski yıldızlılığı ve konveksliği	19
3.5 $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{(1-\mathfrak{z})^2}$ Koebe fonksiyonunun parametrelerin bazı özel değerleri için Janowski yıldızlılık ve konvekslik yarıçapı	23
3.6 $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{(1-\mathfrak{z})^2}$ Koebe fonksiyonunun parametrelerin bazı özel değerleri için Janowski yarıçapları	23
3.7 $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{(1-\mathfrak{z})^2}$ Koebe fonksiyonu Janowski yarıçapları	23
3.8 Bernoulli lemniskatı	24
3.9 $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}}$ fonksiyonunun lemniskat konveksliği	30
3.10 $f(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + \frac{1}{2}\mathfrak{z}^2$ fonksiyonunun lemniskat konveksliği	30

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{A}$	Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	Ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}$	Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{LS}$	Leminiskat yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{LC}$	Lemniskat konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{J}(A, B)$	Janowski fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*[A, B]$	Janowski yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}[A, B]$	Janowski konveks fonksiyonların sınıfı
$R_{\mathcal{LS}}$	Lemniskat yıldızılık yarıçapı
$R_{\mathcal{LC}}$	Lemniskat konvekslik yarıçapı
$R_{[A, B]}^c$	Janowski konvekslik yarıçapı
$R_{[A, B]}^*$	Janowski yıldızılık yarıçapı
$\prec$	subordinasyon
Γ	Gamma fonksiyonu
Γ_q	q -gamma fonksiyonu
$\Re(\mathfrak{z})$	$\mathfrak{z}$ kompleks sayısının reel kısmı
D_q	q türev operatörü
${}_r\phi_r\left(\begin{matrix} \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r \\ \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r \end{matrix} \middle q, \mathfrak{z}\right)$	q hipergeometrik fonksiyon
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} \mathfrak{z}^n$	Gauss hipergeometrik serisi
${}_2F_1[a, b; c; \mathfrak{z}]$	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}_pF_q[a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \mathfrak{z}]$	Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

1. GİRİŞ

Analitik fonksiyonlar, kompleks düzlemde türevlenebilir olan fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar, Taylor serisi ile temsil edilebilir ve lokal olarak kuvvet serileri ile ifade edilir. Analitik fonksiyonlar, kompleks analizin temel yapı taşlarından biridir ve birçok matematiksel problemin çözümünde kullanılır. Geometrik Fonksiyon Teorisi, kompleks analiz alanında analitik fonksiyonların geometrik davranışlarını inceleyen bir alt disiplindir. Bu teori, özellikle birim disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ üzerinde tanımlı olan fonksiyonları temel alır ve bu fonksiyonların görüntü bölgelerinin şekli, büyüklüğü, konveksliği, yıldızlılığı gibi özelliklerini analiz eder. Bu tür geometrik özelliklerin incelenmesi, fonksiyonların yapısı hakkında derin bilgiler sunar.

Geometrik fonksiyon teorisinde normalize edilmiş analitik fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir ve eğer $f \in \mathcal{A}$ ise adına normalizasyon koşulları dediğimiz $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşullarını sağlayan fonksiyonlardan oluşur. Normalizasyon, analitik fonksiyonlar için bir *standart form* sağlar. Normalize etme, fonksiyonlar arasındaki farklılıkları netleştirerek sınıfların daha iyi analiz edilmesini sağlar. Bu alanda, özellikle birim disk üzerinde tanımlı analitik fonksiyonların normalizasyonu, fonksiyonların sınıflandırılması ve incelenmesinde büyük bir öneme sahiptir. Normalizasyon olmadan, fonksiyonlar orijinde keyfi davranışlar sergileyebilir, bu da geometrik özelliklerinin incelenmesini zorlaştırır. $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşulları, tüm fonksiyonların aynı "başlangıç noktasına" sahip olmasını sağlar. Daha açık bir ifadeyle, bu koşullar, fonksiyonun orijinde "merkezlenmiş" olmasını ve $z = 0$ noktasında türevinin 1 olmasını sağlar. Birim disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ üzerinde tanımlı bir normalize edilmiş analitik fonksiyon

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n,$$

şeklinde seri açılımı ile yazılabilir, burada $a_2, a_3, \dots$ katsayıları, fonksiyonun özelliklerine bağlı olarak belirlenir. Normalize edilmiş fonksiyonlar, genellikle Taylor serisi katsayıları $a_2, a_3, \dots$ cinsinden incelenir. Bu katsayılar, fonksiyonun geometrik davranışı hakkında önemli bilgiler taşır.

Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfının $\mathcal{A}$ ile gösterildiğinden bahsetmiştik. Bu sınıfa ait önemli bir alt sınıf ise *univalent* yani birebir ve analitik olan

fonksiyonların sınıfıdır ve bu sınıf $\mathcal{S}$ ile gösterilir. Univalent fonksiyonlar, birim diskte her iki farklı noktayı farklı değerlere götüren fonksiyonlardır. Bir başka ifadeyle, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim disk üzerinde tanımlı bir analitik fonksiyon $f(z)$ olsun, eğer bu fonksiyon birebir (univalent) ise, yani $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması için gerek ve yeter şart $z_1 = z_2$ olması ise, $f(z)$ fonksiyonu univalent olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların görüntü bölgeleri çoğunlukla karmaşık, fakat kontrol edilebilir geometrilere sahiptir. Örneğin, Koebe fonksiyonu $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, $\mathcal{S}$ sınıfının çarpıcı bir örneğidir; bu fonksiyonun görüntüsü tüm kompleks düzlemi (tek bir yarıçember hariç) kaplar. Bu fonksiyonlar, Riemann dönüşüm teoremi gibi temel sonuçlarda önemli bir rol oynar.

- Bieberbach tahmini (1985'te de Branges tarafından kanıtlanmıştır), normalize edilmiş univalent fonksiyonlar için $|a_n| \leq n$ olduğunu ifade eder.
- Fekete-Szegő problemi, $|a_3 - \mu a_2^2|$ ifadesinin maksimizasyonu ile ilgilidir ve fonksiyonun geometrik özelliklerini yansıtır.

Kompleks analizde önemli bir yere sahip olan Bieberbach tahmini, birim disk üzerinde univalent ve normalleştirilmiş fonksiyonların Taylor katsayıları üzerine getirdiği sınırlamalar nedeniyle yaklaşık yetmiş yıl boyunca çözülememiş önemli bir problemdir. 1916 yılında Ludwig Bieberbach tarafından ortaya atılan bu tahmin, her $f \in \mathcal{S}$ için

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad \text{şeklinde yazıldığında,} \quad |a_n| \leq n$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu ve eşitliğin yalnızca döndürülmüş Koebe fonksiyonu için sağlandığını öne sürmektedir.

Bu problem, 1985 yılında Louis de Branges tarafından çözülmüş ve onun ispatı, analitik fonksiyon teorisinin farklı tekniklerinin ustaca bir birleşimini içermektedir. de Branges'in yaklaşımı, özellikle Hilbert uzayı operatör teorisi, lineer fonksiyonel analiz, ve dikkat çekici şekilde, bazı özel fonksiyonların davranışlarını da temel alır.

Bu bağlamda, hipergeometrik fonksiyonlar, özellikle ispatın teknik bölümlerinde ortaya çıkan integral dönüşümleri ve fonksiyonel eşitsizliklerde temel rol oynamıştır. de Branges, belirli fonksiyonel eşitsizlikleri sağladığını göstermek için, hipergeometrik fonksiyonların katsayı büyüme özelliklerinden ve bazı pozitiflik kriterlerinden faydalanmıştır.

1.1. Hipergeometrik Fonksiyonların Rolü

İspatın merkezinde yer alan fonksiyonlar, belirli bir sınıfa ait olan tam fonksiyonlardır (tüm kompleks düzlemde analitik). Bu fonksiyonlar, aşağıdaki genel biçimde tanımlanan hipergeometrik serilerle yakından ilişkilidir:

$${}_2F_1(a, b; c; \mathfrak{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{\mathfrak{z}^n}{n!}$$

de Branges'ın yapısı, bu tür fonksiyonların özel değerlerinden ve özellikle Koebe fonksiyonu gibi fonksiyonların hipergeometrik temsillerinden yararlanarak çalışır. Koebe fonksiyonu:

$$k(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{(1 - \mathfrak{z})^2} = \mathfrak{z} + 2\mathfrak{z}^2 + 3\mathfrak{z}^3 + \dots$$

aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$k(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} \cdot {}_2F_1(1, 2; 1; \mathfrak{z})$$

Bu ifade, Koebe fonksiyonunun tüm Taylor katsayılarının tam olarak $a_n = n$ olduğunu ve dolayısıyla Bieberbach tahminindeki eşitlik durumunu sağladığını gösterir. de Branges, ispatında bu tip örnek fonksiyonları karşılaştırma ölçütü olarak kullanmış ve katsayılar üzerinde pozitiflik sağlayan fonksiyonel eşitsizlikler üretmiştir.

Özellikle, hipergeometrik fonksiyonların diferansiyel denklemlerle olan ilişkisi, ispatta kullanılan Hermit tipi fonksiyonel ilişkilerin analizinde büyük önem taşımıştır. Böylece, hipergeometrik fonksiyonların hem doğrudan temsilleri hem de türevsel özellikleri, ispat sürecinde yapı taşları hâline gelmiştir.

Louis de Branges'in 1985'te sunduğu ispat, yalnızca kompleks analizde değil, aynı zamanda fonksiyonel analiz ve özel fonksiyonlar kuramında da çığır açıcı bir örnek teşkil eder. Hipergeometrik fonksiyonlar, bu ispatta yalnızca örnek verici olarak değil, aynı zamanda daha derin yapısal bağlantılar kurmak amacıyla da kullanılmıştır. Bu nedenle, hipergeometrik fonksiyonlar yalnızca klasik özel fonksiyonlar sınıfında değil, aynı zamanda modern analitik tekniklerin de ayrılmaz bir parçası olarak değerlendirilebilir.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde, belirli nicelikleri maksimize veya minimize eden ekstremal fonksiyonlar bulmak önemlidir. Normalizasyon, bu tür problemlerin formüle edilmesi ve çözülmesi için tutarlı bir çerçeve sağlar. Ayrıca, normalizasyon, araştırmacıların fonksiyonların geometrik özelliklerine odaklanmasına olanak tanır. Bu özellikler şunları içerir:

- Univalentlik: Fonksiyonun birebir olup olmadığı.
- Yıldızlılık: Fonksiyonun birim disk, orijine göre yıldızlı bir bölgeye resmedip resmediği.
- Konvekslik: Fonksiyonun birim disk, konveks bir bölgeye resmedip resmediği.
- Yarıçap Problemleri: Bir fonksiyonun univalent, yıldızlı veya konveks kaldığı en büyük yarıçapın belirlenmesi.

Geometrik fonksiyon teorisi, Riemann dönüşüm teoremi gibi temel sonuçlarda önemli bir rol oynar.

1.2. Riemann Dönüşüm Teoremi

Riemann Dönüşüm Teoremi, kompleks analiz ve geometrik fonksiyon teorisinin temel yapı taşlarından biridir. Bu teorem, basit bağlantılı bölgeler arasında konform eşlemelerin varlığını garanti eder ve hem teorik hem de uygulamalı matematikte geniş bir kullanım alanına sahiptir. Teorem, univalent fonksiyonların incelenmesinde ve fiziksel problemlerin çözümünde kritik bir rol oynar. Riemann Dönüşüm Teoremi, aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Teorem 1.1 (Riemann Dönüşüm Teoremi) $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde, basit bağlantılı ve özdeş olmayan (yani tüm düzlem olmayan) herhangi bir D bölgesi için, birim disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ile D arasında konform bir eşleme (yani birebir ve analitik bir dönüşüm) vardır. Daha kesin olarak, bir $f : \mathbb{D} \rightarrow D$ konform dönüşümü bulunabilir.

Bu teorem, w_0 , D bölgesinde sabit bir nokta olmak üzere $f(0) = w_0$ ve $f'(0) > 0$ gibi ek koşullar altında benzersiz bir dönüşümün varlığını da garanti eder.

Riemann Dönüşüm Teoremi, aşağıdaki nedenlerle geometrik fonksiyonlar teorisinde büyük bir öneme sahiptir:

- Konform Eşleme: Teorem, basit bağlantılı bölgeler arasında konform eşlemelerin varlığını garanti eder. Bu, karmaşık geometrik şekillerin birim disk gibi daha basit bir bölgeye indirgenmesini sağlar.
- Univalent Fonksiyonlar: Teorem, univalent (birebir) fonksiyonların incelenmesinde temel bir araçtır. Birim disk üzerindeki univalent fonksiyonlar, Riemann Dönüşüm Teoremi sayesinde diğer bölgelerle ilişkilendirilebilir.

- Fiziksel Uygulamalar: Konform dönüşümler, akışkanlar dinamiği, elektrostatik ve ısı transferi gibi fiziksel problemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılır.

Riemann Dönüşüm Teoremi'nin ispatı, genellikle aşağıdaki adımları içerir:

1. D bölgesinin basit bağlantılı olduğu varsayılır.
2. D bölgesi ile birim disk $\mathbb{D}$ arasında bir konform eşleme bulmak için, önce D bölgesi birim diske homeomorfik (sürekli ve tersi sürekli) olarak eşlenir.
3. Daha sonra, bu homeomorfizmin analitik olduğu ve türevlenebilirliği sağlandığı gösterilir.
4. Son olarak, $f(0) = w_0$ ve $f'(0) > 0$ gibi ek koşullar altında eşlemenin benzersiz olduğu kanıtlanır.

Bu çalışmanın temel amacı, karmaşık düzlemin birim diski içinde analitik olan iki farklı şekilde normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonunun Janowski yıldızlılık (starlikeness), Janowski konvekslik, Lemniskat yıldızlılık ve Lemniskat konvekslik yarıçaplarının belirlenmesidir. Ayrıca, her bir fonksiyonun basit ve reel sayılar olan sonsuz sayıda sıfıra sahip olduğu gerçeğinden hareketle bu fonksiyonlar için daha önce elde edilmiş sonsuz çarpım temsilleri ve reel tam fonksiyonların Laguerre–Pólya sınıfı, Hadamard çarpanlara ayırma teoreminin bu çalışmanın ayrılmaz bir parçasını oluşturduğunu belirtmek önemlidir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, tezin temel sonuçlarının elde edilmesinde önemli yer tutacak olan, ünivalent fonksiyonların temel alt sınıflarına ve bu sınıflara ait bazı önemli tanımlara, teoremlere ve örneklerle yer verilmiştir.

2.1. Yıldızıl Fonksiyonlar

Bir $S \subset \mathbb{C}$ bölgesi ve $x_0 \in S$ bu bölge içinde bir nokta olsun. Eğer bu $x_0 \in S$ noktasından kümedeki her diğer noktaya çizilen doğru parçası tamamen S bölgesinin içinde kalıyorsa, yani

$$\forall x \in S, \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x_0 + tx \in S$$

ise, bu bölgeye $x_0 \in S$ noktasına göre yıldızıl (star-shaped ya da starlike) bölge denir. Özel olarak $x_0 \in S$ noktası orijin olarak alınırsa S bölgesine orijine göre yıldızıl ya da kısaca yıldızıl bölge denir. Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için $f(\mathbb{D})$ kümesi orijine göre yıldızıl ise yani herhangi bir $z \in \mathbb{D}$ ve her $t \in [0, 1]$ için, $tf(z) \in f(\mathbb{D})$ koşulu sağlanıyorsa, bu fonksiyona yıldızıl fonksiyon denir. Geometrik fonksiyon teorisinde bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskinin görüntüsü yıldızıl bir bölge ise bu fonksiyon yıldızıl fonksiyon olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların sınıfı genellikle $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir.

Bu tür fonksiyonlar için aşağıdaki karakterizasyon sıkça kullanılır:

$$\Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0.$$

Bu ifade, orijine giden her doğru parçasının görüntü altında da bir doğru parçası olarak kalmasını garanti eder.

Teorem 2.1 (Yıldızıl Fonksiyonlar için Diferansiyel Koşul) *Bir $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu birim disk içinde holomorfik, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olmak üzere*

$$\Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f yıldızıl (starlike) bir fonksiyondur.

Örnek olarak

$$f(z) = \frac{z}{1-z}, \quad f(z) = -\log(1-z), \quad f(z) = ze^z$$

fonksiyonlarının her biri yıldızlı fonksiyondur.

2.1.1. Konveks Fonksiyonlar

Karmaşık düzlemde bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilmiş olsun. Eğer $\forall z_1, z_2 \in D$ için bu noktaları birleştiren doğru parçası bütünüyle D içinde kalıyorsa, bu durumda D bölgesi konveks (dışbükey ya da çıkıntısız) olarak adlandırılır. Yani,

$$\forall z_1, z_2 \in D, \quad \forall t \in [0, 1], \quad tz_1 + (1-t)z_2 \in D$$

şartı sağlanırsa D konveks bir bölgedir. Bir $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfik ve ünivalent fonksiyonu için $f(\mathbb{D})$ konveks bir bölge ise, bu fonksiyon konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Bir başka ifadeyle, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, eğer tanım kümesi $D \subseteq \mathbb{C}$ konveks olmak üzere

$$f(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \leq \lambda f(z_1) + (1-\lambda)f(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in D, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

eşitsizliği sağlıyorsa f fonksiyonu konveks (dışbükey) fonksiyon olarak adlandırılır. Bu tanıma göre, z_1 ve z_2 noktaları arasında alınan herhangi bir ara noktanın fonksiyon değeri, bu iki uç noktanın fonksiyon değerlerinin ağırlıklı ortalamasından büyük olmaz. Geometrik fonksiyon teorisinde bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ birim diskinin görüntüsü konveks bir bölge ise bu f fonksiyonu konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Konveks fonksiyonların sınıfı genellikle $\mathcal{K}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2 (Konveks Fonksiyonlar için Diferansiyel Koşul) *Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, yani birim disk $\mathbb{D}$ üzerinde analitik ve normalize edilmişse ($f(0) = 0$, $f'(0) = 1$), verilmiş olsun. Bu durumda,*

$$\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

diferansiyel koşulu sağlanıyorsa f konveks fonksiyondur.

Aşağıdaki fonksiyon konveks bir fonksiyondur:

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

Bu fonksiyon $\mathbb{D}$ içinde analitik ve normalize edilmiş bir fonksiyondur. Türevlerini hesaplayalım:

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$$

Diferansiyel koşulu hesaplayalım:

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1 + \frac{z \cdot \frac{2}{(1-z)^3}}{\frac{1}{(1-z)^2}} = 1 + \frac{2z}{1-z}$$

Bu ifadede $z \in \mathbb{D}$ için reel kısmın pozitif olduğunu gözlemleyebiliriz.

Not 2.1 Yukarıdaki teoremden verilen konveks fonksiyonlar için diferansiyel koşulu, geometrik olarak konvekslik gibi bir özelliği, analitik diferansiyel ifadeyle ilişkilendirir. Konveks fonksiyonlar, aynı zamanda yıldızlı fonksiyonların bir alt kümesidir. Özellikle konformal dönüşümlerin konvekslik koşulları da bu eşitsizlikle test edilebilir. Eğer $f(\mathbb{D})$ kümesi konveks bir bölge ise, f fonksiyonuna konveks denir. Konveks fonksiyonlar için şu karakterizasyon geçerlidir:

$$\Re \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0.$$

Bu koşul, fonksiyonun türevlerinin yön değişimlerinin belirli sınırlar içinde olduğunu gösterir ve bu da, görüntü kümesinin konveks olmasını garanti eder. Her konveks fonksiyon aynı zamanda yıldızlı bir fonksiyondur, yani $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^*$.

2.2. α Mertebeden Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonlar

Geometrik Fonksiyon Teorisi (GFT), karmaşık analizde tanımlı tekil olmayan fonksiyonların geometrik ve topolojik özelliklerini inceler. Bu alanın temel sınıflarından ikisi yıldızlı ve konveks fonksiyonlardır. Bu sınıfların α mertebeden genelleştirilmiş halleri, fonksiyonların geometrik davranışlarını parametrik olarak kontrol etme imkânı sağlar.

Tanım 2.1 (α Mertebeden Yıldızlı Fonksiyonlar) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için

$$\Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \quad \text{tüm } z \in \mathbb{D} \text{ için}$$

şartı sağlanıyorsa, f fonksiyonu α mertebeden yıldızlı olarak adlandırılır ve

$$\mathcal{S}^*(\alpha) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \right\}$$

ile gösterilir. Burada $0 \leq \alpha < 1$ alınır.

Not 2.2 • $\alpha = 0$ için klasik yıldızlı fonksiyonlar elde edilir: $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$

• $\alpha \rightarrow 1^-$ için sınıf daralır.

Tanım 2.2 (α Mertebeden Konveks Fonksiyonlar) Benzer şekilde, $f \in \mathcal{A}$ için

$$\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha \quad \forall z \in \mathbb{D} \text{ için}$$

şartı sağlanıyorsa, f fonksiyonu α mertebeden konveks olarak adlandırılır ve

$$\mathcal{K}(\alpha) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha \right\}$$

ile gösterilir.

Not 2.3 • $\alpha = 0$ için klasik konveks fonksiyonlar elde edilir: $\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}$

• $\mathcal{K}(\alpha) \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$ her α için geçerlidir.

Örnek 2.1 • $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ Bu fonksiyon her $0 \leq \alpha < 1$ için $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfına aittir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \frac{zf'(z)}{f(z)} &= 1 + \frac{2(1-\alpha)z}{1-z} \\ \Rightarrow \Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) &= \Re \left(1 + \frac{2(1-\alpha)z}{1-z} \right) > \alpha \quad (z \in \mathbb{D}) \end{aligned}$$

• $f(z) = -\log(1-z)$ Bu fonksiyonun türevleri:

$$f'(z) = \frac{1}{1-z}, \quad f''(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} &= 1 + \frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z} \\ \Rightarrow \Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) &= \Re \left(\frac{1}{1-z} \right) > \frac{1}{2} \quad (z \in \mathbb{D}) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $f \in \mathcal{K}(1/2) \subset \mathcal{K}(\alpha)$ her $\alpha < \frac{1}{2}$ için geçerlidir.

Not 2.4 • $\mathcal{K}(\alpha) \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$ içerme ilişkisi her $0 \leq \alpha < 1$ için geçerlidir.

• Bu sınıflar normaldir ve Koebe fonksiyonu gibi ekstremal fonksiyonları içerir.

α mertebeden yıldızlı ve konveks fonksiyonların geometrik fonksiyon teorisindeki önemi

- α parametrizasyonu, klasik yıldızlı ($\alpha = 0$) ve konveks ($\alpha = 0$) fonksiyonların daha dar veya daha genelleşmiş sınıflarını tanımlamamıza olanak tanır.
- Bu sınıflar büyüme, distorsiyon ve kaplama teoremleri gibi klasik GFT sonuçlarının keskinleştirilmiş versiyonlarını sağlar.
- α arttıkça fonksiyonlar daha sıkı sınırlara zorlanır: $\alpha \rightarrow 1$ durumunda sınıf daralır ve geometrik yapı sertleşir.
- $\mathcal{K}(\alpha) \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$ kapsaması sayesinde, konvekslik ve yıldızlılık arasındaki bağ daha net kurulur.
- Diferansiyel subordinasyon, Loewner teorisi, konformal haritalama gibi daha ileri konularda bu fonksiyonlar doğrudan uygulanır.
- Fiziksel uygulamalarda (örneğin: aerodinamik çalışmalar, potansiyel akışlar) konformal kaplamalar yıldızlı ya da konveks çarpım alanları ile modellenir.

şeklinde maddelenebilir. Ayrıca aşağıdaki, karşılaştırma tablosu konunun daha net olarak anlaşılmasına yardımcı olacaktır:

Özellik	$\mathcal{S}^*(\alpha)$	$\mathcal{K}(\alpha)$
Geometrik anlam	Yıldızlı	Konveks
$\alpha = 0$ durumu	Klasik yıldızlı fonk.	Klasik konveks fonk.
$\alpha \rightarrow 1$ durumu	Daralan sınıf	Daha düzgün fonk.
Kapsama	Yok	$\subset \mathcal{S}^*(\alpha)$
Uygulama	Konformal tasarım, subordinasyon	Konveks analiz, Loewner

2.3. Konform Dönüşüm

Konform dönüşüm, bir bölgenin her noktasında açığı koruyan holomorf bir fonksiyondur. Daha açık bir ifadeyle, eğer f fonksiyonu bir bölgede türevlenebilir ve türevi sıfırdan farklıysa, f konformdur.

Tanım 2.3 Bir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu Ω açık bir altkümesi üzerinde türevlenebilir ve türevi $f'(z) \neq 0$ ise f konform dönüşümdür.

Möbius dönüşümleri konform dönüşümlere örnek teşkil eder. Genel formu:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

şeklindedir.

Teorem 2.3 *Eğer f konform ise, f lokal olarak izomorftir. Yani her $z_0 \in \Omega$ için, f bir çevrede birebirdir.*

İspat f holomorf ve $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan, lokal tersleme teoremi uygulanabilir. Bu da gösterir ki f lokal olarak birebirdir.

Örnek 2.2 *Fonksiyon $f(z) = e^z$ birim disk içinde konformdur çünkü türevi $f'(z) = e^z \neq 0$ 'dır.*

2.4. Univalent Fonksiyonlar ve Schwarz Lemması

Bir fonksiyon f , bir bölge D 'de holomorf ve birebir (injective) ise, bu fonksiyona *univalent* fonksiyon denir. Geometrik Fonksiyon Teorisi'nin temel çalışma alanlarından biri birim disk içindeki $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ univalent fonksiyonlardır.

Univalent fonksiyonlarla ilgili temel sonuçlardan biri Schwarz Lemmasıdır. Bu lemma şöyle der:

Eğer f fonksiyonu $\mathbb{D}$ 'de holomorf, $f(0) = 0$ ve $|f(z)| \leq 1$ ise, o zaman:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{ve} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Eşitlik ancak ve ancak $f(z) = e^{i\theta}z$ biçiminde ise sağlanır, burada $\theta \in \mathbb{R}$ sabittir.

Schwarz Lemması, univalent fonksiyonların büyüme ve dönme sınırlamalarını analiz etmekte güçlü bir araçtır. Bu lemma, aynı zamanda Koebe fonksiyonu gibi ekstremal fonksiyonların da karakterizasyonunda rol oynar. Özellikle normalize edilmiş sınıflarda, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşulları altında, Schwarz Lemması ve onun genellemeleri geometrik özelliklerin (yıldızılık, konvekslik vb.) incelenmesinde kullanılabilir.

Not 2.5 (Schwarz Lemması'nın Önemi) • *Univalent fonksiyonların sınırları:*

Schwarz Lemması, normalize edilmiş univalent fonksiyonların büyüme ve dönme sınırlarını belirler.

- *Geometrik haritalama: Schwarz Lemması, birim diskten başka bölgelere yapılan holomorfik dönüşümlerin değer bölgesini kontrol etmede kullanılır.*
- *Sabit nokta analizi: Dinamik sistemler ve sabit nokta teoremleriyle ilişkili olarak Schwarz Lemması, birim disk içindeki iteratif davranışların incelenmesinde önemli rol oynar.*
- *Koebe fonksiyonu ve ekstremal örnekler: Schwarz Lemması, Koebe fonksiyonu gibi maksimum distorsiyon yaratan fonksiyonların analizinde temel araçtır.*
- *Geometrik özelliklerin tespiti: Schwarz Lemması ve genellemeleri, yıldızlı, konveks veya yakın konveks fonksiyonların karakterizasyonunda kullanılır.*

Bu nedenlerle Schwarz Lemması, Geometrik Fonksiyon Teorisi'nin adeta yapıtaşlarından biri olup, hem teorik analizde hem de uygulamalı kompleks analizde merkezi bir rol oynamaktadır.

2.5. Subordinasyon Kavramı

Subordinasyon, kompleks analizde iki analitik fonksiyon arasındaki bir ilişkiyi ifade eden önemli bir kavramdır. Bu kavram, geometrik fonksiyonlar teorisinde, özellikle univalent fonksiyonlar ve bunların alt sınıflarının incelenmesinde yaygın olarak kullanılır. Bu kısımda, subordinasyonun tanımını, temel özelliklerini, örneklerini ve bazı uygulamalarını inceleyeceğiz.

Tanım 2.4 (Subordinasyon) f ve g , birim disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ üzerinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. Eğer bir birim disk üzerinde analitik ϕ fonksiyonu ve $|\phi(z)| \leq |z|$ koşulu ile

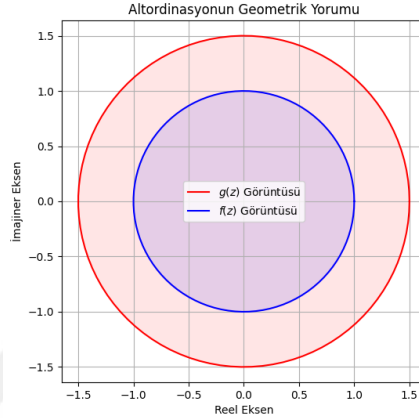
$$f(z) = g(\phi(z))$$

şeklinde yazılabiliyorsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna **subordinate** olarak adlandırılır. Bu durumda, $f \prec g$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, $f(z) = z$ ve $g(z) = \frac{z}{1-z}$ olsun. Bu durumda, $\phi(z) = \frac{z}{1+z}$ fonksiyonu ile $f(z) = g(\phi(z))$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, $f \prec g$.

2.5.1. Subordinasyonun Geometrik Yorumu

Subordinasyon, fonksiyonların geometrik davranışlarını karşılaştırmak için kullanılır. Subordinasyon, f fonksiyonunun görüntü bölgesinin, g fonksiyonunun görüntü bölgesinin bir alt kümesi olduğu anlamına gelir, yani, $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$. Bu durum, aşağıdaki şekilde gösterilebilir:



Şekil 2.1. Subordinasyonun geometrik yorumu: $f(z) \prec g(z)$ durumunda, $f(z)$ 'nin görüntüsü $g(z)$ 'nin görüntüsünün içinde kalır.

Şekil 2.1'de, $f(z)$ fonksiyonunun görüntüsü (mavi bölge), $g(z)$ fonksiyonunun görüntüsünün (kırmızı bölge) içinde kalmaktadır. Bu, $f(z) \prec g(z)$ ilişkisinin geometrik olarak nasıl yorumlandığını göstermektedir.

2.5.2. Subordinasyonun Genel Özellikleri

- Yansıma: Her $f(z)$ fonksiyonu kendisine subordinate edilir, yani $f(z) \prec f(z)$.
- Geçişme: Eğer $f(z) \prec g(z)$ ve $g(z) \prec h(z)$ ise, $f(z) \prec h(z)$ olur.
- Lineerlik: Eğer $f \prec g$ ve $h \prec k$ ise, $af + bh \prec ag + bk$ (burada a ve b kompleks sabitlerdir).
- Schwarz Fonksiyonu: Subordinasyon, bir Schwarz fonksiyonu $w(z)$ aracılığıyla tanımlanır. Bu fonksiyon, $w(0) = 0$ ve $|w(z)| \leq |z|$ koşullarını sağlar.

2.5.3. Subordinasyon ve Univalent Fonksiyonlar

Eğer g bir univalent fonksiyon ise, $f \prec g$ olması için gerek ve yeter koşul, $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ olmasıdır.

2.5.4. Subordinasyonun Uygulamaları

Subordinasyon, kompleks diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışını incelemek için de kullanılır. Örneğin, bir diferansiyel denklemin çözümünün belirli bir fonksiyona subordinate olması, çözümün geometrik özelliklerini belirlemeye yardımcı olur.

Subordinasyon, univalent fonksiyonların alt sınıflarının (yıldızıl, konveks, Janowski sınıfları gibi) incelenmesinde yaygın olarak kullanılır. Özellikle, fonksiyonların geometrik özelliklerini analiz etmek için bir araç olarak kullanılır.

2.5.5. Subordinasyon Yardımıyla Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar, subordinasyon kavramı kullanılarak tanımlanabilir. Örneğin, bir $f(z)$ fonksiyonu, eğer:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z},$$

ise, yıldızıldır. Benzer şekilde, eğer:

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+z}{1-z},$$

ise, $f(z)$ konvektir.

Eğer g bir yıldızıl fonksiyon ise ve $f \prec g$ ise, o zaman f de bir yıldızıl fonksiyondur. Bu, subordinasyonun yıldızılık özelliğini koruduğunu gösterir.

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda tezimizin bulgular kısmında istifade edeceğimiz bazı tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

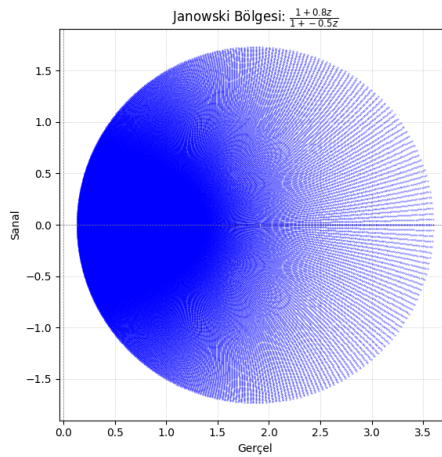
3.1. Janowski Konveks ve Janowski Yıldızıl Fonksiyonlar

Janowski sınıfı ve onun alt sınıfları, konvekslik ve yıldızlılık gibi geometrik özellikleri bir parametrizasyon aracılığıyla genelleştirmektedir. Bu yönüyle klasik sınıfların ötesinde bir esneklik sağlar. Bu sınıflar üzerine yapılan çalışmalar, univalent fonksiyon teorisinde yeni karakterizasyonlara yol açmıştır.

Tanım 3.1 (Janowski Bölgesi) *Janowski bölgesi, $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere*

$$J(A, B) = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{1 + A\mathfrak{z}}{1 + B\mathfrak{z}}, \quad \mathfrak{z} \in \mathbb{D} \right\} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan bölgedir.



Şekil 3.1. $A = 0.8$ ve $B = -0.5$ parametre değerleri için Janowski bölgesi

Not 3.1 • Burada $A, B \in \mathbb{R}$ reel parametreler ($-1 \leq B < A \leq 1$).

- $\frac{1+A\mathfrak{z}}{1+B\mathfrak{z}}$ Möbius dönüşümüdür.

- Janowski bölgesinin temel özellikleri:

- **Konvekslik:** $J(A, B)$ genellikle konveks değildir, ancak yıldızlıdır.
- **Simetri:** $A \neq -B$ durumunda orijine göre simetrik değildir.
- **Sınır Değerler:**

$$\min \Re(J(A, B)) = \frac{1-A}{1-B}$$

$$\max \Re(J(A, B)) = \frac{1+A}{1+B}$$

- Janowski bölgesi, geometrik fonksiyonlar teorisinde:

- Simetrik olmayan dönüşümleri modellemek için kullanılır.
- Klasik yıldızlı ve konveks fonksiyonları genelleştirir.
- Parametre seçimine göre çeşitli geometrik şekiller üretir.

Tanım 3.2 (Janowski Fonksiyonlar) *Kompleks düzlemde, $\mathbb{D}$ birim disk içinde analitik olan fonksiyonlar sınıfının*

$$\mathcal{A} = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ analitik, } f(0) = 0, f'(0) = 1\}$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Bu durumda,

$$P[A, B] = \left\{ p(\mathfrak{z}) = \frac{1 + A\mathfrak{z}}{1 + B\mathfrak{z}} \mid \mathfrak{z} \in \mathbb{D}, -1 \leq B < A \leq 1 \right\}$$

$P[A, B]$ fonksiyon ailesi, reel parametrelerle tanımlanmış olan Janowski sınıfı olarak bilinir ve bu sınıfın üyeleri, birim disk üzerinde pozitif reel kısımlı fonksiyonlardır.

Not 3.2 (Geometrik Yorum) *Bu sınıfın tüm üyeleri birim diskte $\Re p(\mathfrak{z}) > 0$ olacak şekilde tanımlanmış pozitif reel kısmı olan fonksiyonlardır.*

Tanım 3.3 (Janowski Konveks Fonksiyon) *$\mathbb{D}$ birim diskinde tanımlı normalize edilmiş analitik bir $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu,*

$$1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} \prec \frac{1 + A\mathfrak{z}}{1 + B\mathfrak{z}}, \quad (-1 \leq B < A \leq 1)$$

şartını sağlıyorsa, yani

$$\Re \left(1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} \right) > 0 \quad \text{veya} \quad 1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} \in P[A, B]$$

ise, f fonksiyonu Janowski konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Duren, 1983; Goodman, 1983; Janowski, 1970; Miller and Mocanu, 2000).

Janowski konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}[A, B]$ şeklinde gösterilmektedir. Yukarıdaki tanımda, $A = 1$ ve $B = -1$ seçersek, klasik konveks fonksiyonların elde edileceği açıktır.

Not 3.3 (Geometrik Yorum) *Fonksiyonun Janowski konveks olması demek*

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

ifadesinin görüntüsünün, Janowski bölgesi olarak adlandırılan $P[A, B]$ bölgesinin içinde kalması demektir.

Bu bölge, parametreler A ve B ile kontrol edilen bir disk benzeri bölgedir. Örneğin:

- $A = 1, B = -1$ için: $P[1, -1] = \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\}$ ve bu, klasik konvekslik durumunu verir.
- $A = 0.5, B = -0.5$ için: daha küçük, daha dar bir bölge elde edilir.

Bu bağlamda, Janowski konveks fonksiyonlar, klasik konveks fonksiyonların alt sınıfı olarak düşünülebilir ve geometrik anlamda, türev oranlarının Janowski bölgesinde kalması gerekliliği ile tanımlanır.

Tanım 3.4 (Janowski Yıldızlı Fonksiyon) $\mathbb{D}$ birim diskinde tanımlı normalize edilmiş analitik bir $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}, \quad -1 \leq B < A \leq 1$$

şartını sağlıyorsa, bir başka ifadeyle

$$\Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \text{ veya } \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P[A, B]$$

ise, f fonksiyonu Janowski yıldızlı fonksiyon olarak adlandırılır (Duren, 1983; Goodman, 1983; Janowski, 1970; Miller and Mocanu, 2000).

Janowski yıldızlı fonksiyonların sınıfı $f \in \mathcal{S}^*[A, B]$ şeklinde gösterilmektedir. Yukarıdaki tanımda, $A = 1$ ve $B = -1$ seçersek, klasik yıldızlı fonksiyonların elde edileceği açıktır.

Not 3.4 (Geometrik Yorum) • *Klasik yıldızlı fonksiyonlarda,*

$$\Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0$$

şartı sağlanır ve bu, fonksiyonun görüntüsünün orijine göre yıldız bir bölge olmasıyla ilişkilidir. Janowski yıldızlı fonksiyonlarda ise, bu oran yukarıda tanımlanan Janowski bölgesinde kalmalıdır.

- Burada belirtmek önemlidir ki, normalize edilmiş bir analitik f fonksiyonu için, eğer, $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

ifadesi, çapının uç noktaları $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ olan bir diskin içinde yer alıyorsa, bu fonksiyona Janowski yıldızlı fonksiyon denir.

- Janowski yıldızlı fonksiyonlar, klasik yıldızlılığın doğal bir genellemesidir. Bu sınıf sayesinde farklı geometrik yapılar ve fonksiyon davranışları analiz edilebilir. Subordinasyon prensibi ile tanımlandığından, kompleks analizde birçok uygulaması ve bağlantısı vardır.

Örnek 3.1 (Janowski Yıldızlı Fonksiyon Örnekleri) 1.

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)}$$

fonksiyonu için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-z}$$

olur. Bu oran, uygun seçimli A ve B ile $P[A, B]$ bölgesinde kalıyorsa, fonksiyon $S^*[A, B]$ sınıfına aittir.

2.

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Koebe fonksiyonu

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+z}{1-z}$$

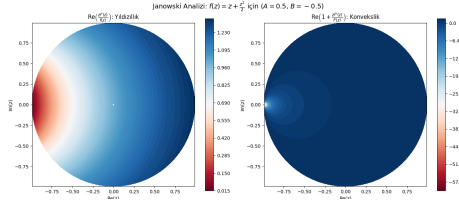
olup, bu ifade, $\frac{1+Az}{1+Bz}$ fonksiyonuna sabordine olduğundan dolayı bu fonksiyon hem Janowski yıldızlı hem de konveks sınıfa aittir (uygun A, B için).

3. $A = 0.5$, $B = -0.5$ parametreleriyle:

$$f(z) = z + \frac{z^2}{2}$$

fonksiyonu Janowski yıldızlıdır ancak konveks değildir.

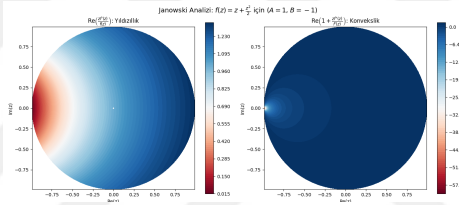
- **Sol grafik:** $\Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)$ — yıldızlılık kriteri.
- **Sağ grafik:** $\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)$ — konvekslik kriteri.



Şekil 3.2. $f(z) = z + \frac{z^2}{2}$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılığı

- Sol grafik genel olarak pozitif olduğundan $f(z) \in \mathcal{S}^*[A, B]$, yani Janowski yıldızlıdır.
- Sağ grafikte negatif değerli bölgeler bulunduğundan $f(z) \notin \mathcal{K}[A, B]$, yani Janowski konveks değildir.

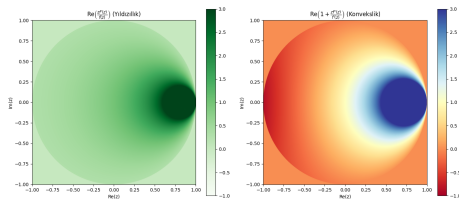
4. Eğer yukarıdaki örnekte parametre değerleri $A = 1$, $B = -1$ olarak alınırsa, $f(z) \in \mathcal{S}^*[A, B]$ ve $f(z) \in \mathcal{K}[A, B]$ olduğu görüldü.



Şekil 3.3. $f(z) = z + \frac{z^2}{2}$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılığı ve konveksliği

Not 3.5 (Janowski Konveks ve Yıldızlı Fonksiyonlar Arasındaki İlişki) Her Janowski konveks fonksiyon, aynı zamanda bir Janowski yıldızlı fonksiyondur. Ancak tersi doğru değildir. Aşağıdaki fonksiyon Janowski yıldızlıdır ancak konveks değildir:

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}} \quad (0 < \alpha < 1/2)$$



Şekil 3.4. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}} \quad (0 < \alpha < 1/2)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılığı ve konveksliği

Not 3.6 (Gafik Yorumu) • **Yıldızlılık (sol):** Tüm birim disk boyunca $\Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0$ olduğu açıkça görülmektedir. Yeşil renk hâkimdir, negatif bölge neredeyse yoktur. Bu da fonksiyonun Janowski yıldızlı olduğunu gösterir.

• **Konvekslik (sağ):** Renk dağılımı mavi-kırmızı arasında değişmektedir. Bazı bölgelerde $\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) < 0$ olduğu görülmektedir. Bu da fonksiyonun Janowski konveks olmadığını ispatlar.

Bu nedenle fonksiyon **Janowski yıldızlı** ancak **Janowski konveks** değildir.

İfade	Pozitif Bölge (Yeşil)	Negatif Bölge (Kırmızı)	Yorum
$\Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)$	Geniş	Yok veya çok az	Yıldızlılık var
$\Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)$	Sınırlı	Geniş	Konvekslik yok

Tablo 3.1. Fonksiyonun yıldızlı ve konveks olma koşullarının grafiksel yorumu

3.1.1. Janowski Konvekslik ve Janowski Yıldızlılık Yarıçapı

Bu kısımda, $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için Janowski yıldızlılık yarıçapı $R_S^*(A, B)$, ve Janowski konvekslik yarıçapı $R_{[A,B]}^c(f(z))$ tanımları verilecektir.

Teorem 3.1 (Janowski, 1970)[Janowski Yıldızlılık Yarıçapı] $f \in \mathcal{A}$ için Janowski yıldızlılık yarıçapı

$$R_{[A,B]}^*(f(z)) = \sup \left\{ r \in (0, 1) \mid \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz} \quad \forall z \in \mathbb{D}_r \right\} \quad (3.2)$$

reel sayısıdır.

Janowski sınıfına ait olan fonksiyonlar, aşağıdaki Möbius dönüşümünü kullanarak birim diskin içine haritalanırlar:

$$w \mapsto \frac{w - 1}{A - Bw} \quad (3.3)$$

Bu dönüşüm birim disk içi noktaları yine birim disk içine götürür. Dolayısıyla, Denklem (3.2) de verilen subordinasyon şartı şu eşitsizliğe eşdeğerdir:

$$\left| \frac{\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1}{A - B \cdot \frac{zf'(z)}{f(z)}} \right| < 1, \quad |z| < r. \quad (3.4)$$

Bu eşitsizlik, $\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})}$ fonksiyonunun Janowski fonksiyonu $\frac{1+A\mathfrak{z}}{1+B\mathfrak{z}}$ 'ye subordinant olmasıyla eşdeğerdir. Eğer $p(\mathfrak{z}) \prec \frac{1+A\mathfrak{z}}{1+B\mathfrak{z}}$ ise, klasik bir sonuç olarak şu eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{p(\mathfrak{z}) - 1}{A - Bp(\mathfrak{z})} \right| < 1$$

Bu, Janowski sınıfının tanımının analitik formudur. Şimdi $p(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})}$ seçersek, doğrudan Denklem (3.4) de verilen eşitsizlik elde edilir. Janowski yıldızılık koşulu hem subordinasyon biçiminde hem de modül biçiminde yazılabilir:

$$\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \prec \frac{1+A\mathfrak{z}}{1+B\mathfrak{z}} \iff \left| \frac{\mathfrak{z} \frac{f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} - 1}{A - B \frac{f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})}} \right| < 1$$

Bu eşdeğerlik, sayısal analiz ve yarıçap tahminlerinde oldukça kullanışlıdır.

Teorem 3.2 (Janowski Konvekslik Yarıçapı) (*Janowski, 1970*) $f \in \mathcal{A}$ için Janowski konvekslik yarıçapı

$$R_{[A,B]}^c(f) = \sup \left\{ r \in (0, 1) \mid 1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} \prec \frac{1+A\mathfrak{z}}{1+B\mathfrak{z}} \quad \forall \mathfrak{z} \in \mathbb{D}_r \right\}.$$

reel sayıdır.

Yukarıda verilen tanımdan, $f(\mathfrak{z})$ analitik fonksiyonu için Janowski konvekslik yarıçapı $R_{[A,B]}^c(f(\mathfrak{z}))$,

$$1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} \prec \frac{1+A\mathfrak{z}}{1+B\mathfrak{z}}, \quad |\mathfrak{z}| < R_{[A,B]}^c(f(\mathfrak{z})) \quad (3.5)$$

koşulunu sağlayan en büyük R değeri olduğu anlaşılmaktadır.

Teorem 3.3 Aşağıdaki iki ifade eşdeğerdir:

$$(i) \quad 1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} \prec \frac{1+A\mathfrak{z}}{1+B\mathfrak{z}}$$

$$(ii) \quad \left| \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{(A-B)f'(\mathfrak{z}) + Af''(\mathfrak{z})} \right| < 1$$

İspat Janowski fonksiyonu için genel subordination kriteri:

$$\phi(\mathfrak{z}) \prec \frac{1+A\mathfrak{z}}{1+B\mathfrak{z}} \iff \left| \frac{\phi(\mathfrak{z}) - 1}{A\phi(\mathfrak{z}) - B} \right| < 1$$

$\phi(\mathfrak{z}) = 1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}$ ifadesini yukarıda yerine koyarak

$$\left| \frac{\left(1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}\right) - 1}{A\left(1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}\right) - B} \right| < 1$$

elde edilir. Bazı temel sadeleştirme adımlarından sonra

$$\left| \frac{\frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}}{A + A\frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} - B} \right| < 1$$

$$\left| \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{(A - B)f'(\mathfrak{z}) + A\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})} \right| < 1$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 3.1 *Aşağıdaki formüller de eşdeğerdir:*

$$\left| 1 + \frac{\frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} - 1}{A - B\frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}} \right| < 1 \quad (3.6)$$

$$\left| \frac{f''(\mathfrak{z})/f'(\mathfrak{z})}{(A - B)/\mathfrak{z} + Af''(\mathfrak{z})/f'(\mathfrak{z})} \right| < 1 \quad (3.7)$$

İspat Denklem 3.6 sadeleştirilerek

$$\left| \frac{A - B\frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}}{A - B\frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}} \right| = \left| \frac{A + (1 - B)\frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}}{A - B\frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}} \right|$$

elde edilir. Açıkça görüleceği üzere, Denklem 3.7 ise ana teoremdaki ifadenin $\mathfrak{z}$ 'ye bölünmüş halidir.

Parametrelerin bazı özel durumları için, aşağıdaki çıkarımları yapmak mümkündür:

- $A = 1, B = -1$ için:

$$\left| \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{2f'(\mathfrak{z}) + \mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})} \right| < 1$$

- $A = 1 - 2\alpha, B = -1$ ($0 \leq \alpha < 1$):

$$\left| \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{(2 - 2\alpha)f'(\mathfrak{z}) + (1 - 2\alpha)\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})} \right| < 1$$

Bu özel durum, α -konvekslik olarak bilinen fonksiyon sınıfını tanımlar.

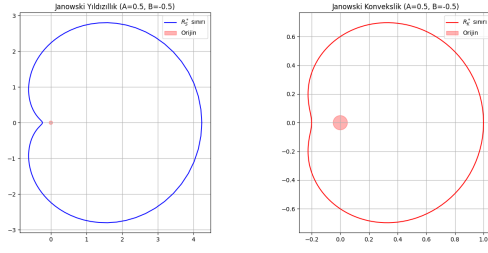
Not 3.7 (Yarıçap İlişkisi) *Her $f \in \mathcal{A}$ ve $-1 \leq B < A \leq 1$ için, $f(\mathfrak{z})$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık ve Janowski konvekslik yarıçapları arasında*

$$R_{[A,B]}^c(f(\mathfrak{z})) \leq R_{[A,B]}^*(f(\mathfrak{z}))$$

bağıntısı mevcuttur. Eşitlik yalnızca doğrusal dönüşümlerde sağlanır.

Örnek 3.2 $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{(1 - \mathfrak{z})^2}$ (Koebe fonksiyonu) için $A = 0.5, B = -0.5$ parametrelerinde:

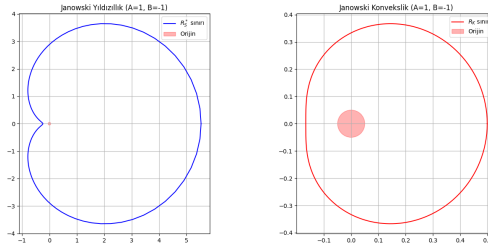
$$R_{[0.5,-0.5]}^* \approx 0.618$$



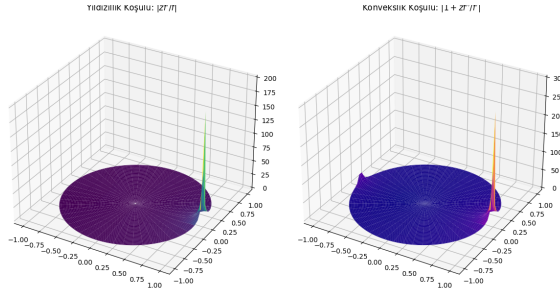
Şekil 3.5. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonunun parametrelerin bazı özel değerleri için Janowski yıldızlılık ve konvekslik yarıçapı

Not 3.8 $A = 1, B = -1$ özel durumu için:

$$R_{[1,-1]}^c = 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679 \quad \text{ve} \quad R_{[1,-1]}^* = \tanh(\pi/4) \approx 0.6558$$



Şekil 3.6. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonunun parametrelerin bazı özel değerleri için Janowski yarıçapları

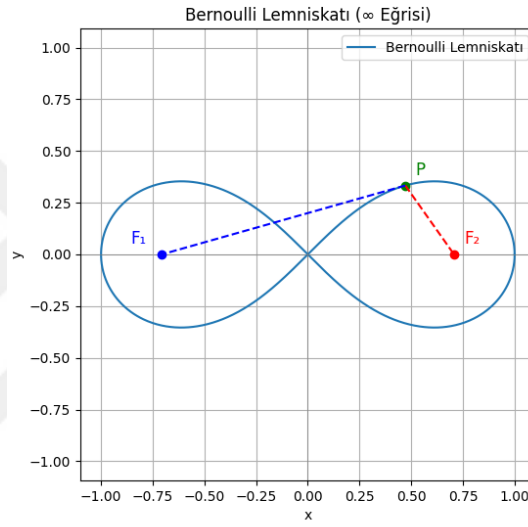


Şekil 3.7. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu Janowski yarıçapları

3.2. Bernoulli Lemniskatı

Geometride, Bernoulli lemniskatı, odak noktaları F_1 ve F_2 olan iki sabit noktadan tanımlanan bir düzlem eğrisidir. Bu odaklar arası mesafe $2c$ olacak şekilde, $PF_1 \cdot PF_2$

$= c^2$ koşulunu sağlayan tüm noktaların geometrik yeridir. Bu eğri, şekil olarak 8 rakamına veya sonsuzluk sembolü ∞ 'ye benzer. İsmi Latince'de *asılı şeritlerle süslenmiş* anlamına gelen lemniscatus kelimesinden alır. Bernoulli lemniskatı, Cassini ovalinin özel bir durumu olup, derecesi 4 olan rasyonel bir cebirsel eğridir. Bu eğri ilk olarak 1694 yılında Jakob Bernoulli tarafından, bir elipsin modifikasyonu olarak tanımlanmıştır. Elips, iki sabit odak noktasına olan uzaklıkların toplamı sabit olan noktaların geometrik yeridir. Buna karşılık, bir Cassini ovali, bu uzaklıkların çarpımının sabit olduğu noktaların geometrik yeridir. Eğri odaklar arasındaki orta noktadan geçecek şekilde çizildiğinde, Cassini ovali Bernoulli lemniskatı olur.



Şekil 3.8. Bernoulli lemniskatı

Lemniskat denklemleri, odak uzaklığı c veya yarı genişlik a cinsinden ifade edilebilir. Bu parametreler $a = c\sqrt{2}$ şeklinde ilişkilidir. Öteleme ve döndürme hariç olmak üzere Kartezyen denklemi:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 &= a^2 (x^2 - y^2) \\ &= 2c^2 (x^2 - y^2)\end{aligned}$$

Parametrik denklemler:

$$x = \frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}; \quad y = \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}$$

Özel olarak $c = 1$ için Bernoulli lemniskatı,

$$|w^2 - 1| = 1$$

denklemleriyle, ya da kutupsal koordinatlarda

$$r^2 = \cos(2\theta)$$

denklemleriyle verilen bir eğridir. Bu eğri, kompleks düzlemde $w = x + iy$ olmak üzere

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Lemniskatin sağ yarısı, $\Re(w) > 0$ koşulunu sağlayan bölgedir. $|w^2 - 1| = 1$ eğrisi, iki noktayı (1 ve -1) birbirine bağlayan ve "sekiz" şeklinde bir eğri oluşturur. Bu şeklin sağ yarısı, fonksiyonun konveksliğinin analitik bir sınırını oluşturur.

3.2.1. Bernoulli Lemniskat Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda, geometrik fonksiyon teorisi bağlamında Bernoulli Lemniskatı temel alınarak tanımlanan özel fonksiyon sınıfları incelenmektedir. Lemniskatik fonksiyonların temel özellikleri, geometrik karakterizasyonları ve analitik davranışları detaylı olarak ele alınmaktadır.

Tanım 3.5 (Lemniskat Yıldızlılık) Bir $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu,

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 \prec 1 + z^2$$

koşulunu sağlıyorsa lemniskat yıldızlı fonksiyon olarak adlandırılır ve lemniskat yıldızlı fonksiyonların sınıfı $\mathcal{LS}^*$ şeklinde gösterilir (Sokół and Ruscheweyh, 1999).

Teorem 3.4 (Karakterizasyon) $f \in \mathcal{LS}^*$ olması için gerek ve yeter koşul:

$$\left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1, \quad z \in \mathbb{D}$$

olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) $f \in \mathcal{LS}^*$ tanımı gereği:

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 \prec 1 + z^2$$

yazılır. Subordination özelliğinden, $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ olan bir Schwarz fonksiyonu ile:

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 = 1 + \omega(z)^2$$

yazılır. Buradan,

$$\left| \left(\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right)^2 - 1 \right| = |\omega(\mathfrak{z})|^2 < 1$$

sonucuna varılır.

($\Leftarrow$) Verilen eşitsizliği sağlayan bir f fonksiyonu için, $|\phi(\mathfrak{z})| < 1$ olmak üzere

$$\left(\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right)^2 = 1 + \phi(\mathfrak{z})$$

olarak yazılabilir. $\phi(\mathfrak{z})$ analitik olduğundan ve $\phi(0) = 0$ sağlandığından, Schwarz lemması gereği:

$$\phi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}\psi(\mathfrak{z}), \quad |\psi(\mathfrak{z})| < 1$$

elde edilir. Böylece, $|\psi(\mathfrak{z})/\mathfrak{z}| < 1$ birim diskte sağlandığından,

$$\left(\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right)^2 = 1 + \mathfrak{z}^2 \left(\frac{\psi(\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}} \right)^2 \prec 1 + \mathfrak{z}^2$$

elde edilir.

Sonuç 3.2 $\mathcal{LS}^*$ sınıfındaki fonksiyonlar yıldızlıdır, yani:

$$\Re \left(\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right) > 0, \quad \mathfrak{z} \in \mathbb{D}$$

İspat Tanımdan

$$\left| \left(\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right)^2 - 1 \right| < 1$$

olduğunu biliyoruz. Buradan:

$$\left| \frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right|^2 < 1 + \left| \frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right|^2 - 2\Re \left(\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right) + 1 < 1$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği uygulanarak

$$\left| \frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right| < \sqrt{2}$$

sonucuna varılır. Kompleks sayı özelliklerini kullanarak:

$$\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} = re^{i\theta}, \quad r < \sqrt{2}, \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

elde edilir. Bu durumda

$$|r^2 e^{2i\theta} - 1| < 1 \implies r^4 - 2r^2 \cos(2\theta) + 1 < 1$$

yazılır ve sadeleştirme işlemleri yapılarak

$$r^2(r^2 - 2\cos(2\theta)) < 0 \implies \cos(2\theta) > \frac{r^2}{2} > 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$|\theta| < \frac{\pi}{4}$$

dır. Reel kısmın pozitifliği $re^{i\theta}$ 'nin reel kısmı:

$$\Re(re^{i\theta}) = r \cos \theta > 0$$

dır. Çünkü,

- $r > 0$ (pozitif modül)
- $|\theta| < \frac{\pi}{4} \implies \cos \theta > \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

dır. Sonuç olarak, tüm $z \in \mathbb{D}$ için $\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$ sağlanır, dolayısıyla f yıldızlıdır.

Not 3.9 *Bu sonuç, $\mathcal{LS}^*$ sınıfına ait fonksiyonların*

- $\mathbb{D}$ 'de tek-yönlü dönüşümler olduğunu,
- $f(0) = 0$ noktası etrafında yıldız şekilli bölgeler oluşturduğunu,
- Ünivalent (birebir) olduğunu
- $\mathcal{LS}^* \subset \mathcal{S}^*$ (Yıldızlılık korunur)

garanti eder.

Açıkça görüleceği üzere, tanımdaki koşul $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ ifadesinin Bernoulli lemniskatının sağ yarısı tarafından sınırlanan bölgede yer aldığını ifade eder. Lemniskat yıldızlı fonksiyonlar, birim disk $w = 0$ noktasına göre yıldızlı bir bölgeye resmeder. Bu fonksiyonlar, geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir rol oynar ve özellikle konformal dönüşümlerle ilişkilidir.

Tanım 3.6 (Lemniskat Konvekslik) *Bir $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu,*

$$\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^2 \prec 1 + z^2$$

koşulunu sağlıyorsa lemniskat konveks fonksiyon olarak tanımlanır ve lemniskat konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{LC}$ ile gösterilir.

Teorem 3.5 (Karakterizasyon) *$f \in \mathcal{LC}$ olması için gerek ve yeter koşul*

$$\left|\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^2 - 1\right| < 1, \quad z \in \mathbb{D}$$

olmasıdır.

Açıkça görüleceği üzere, tanımdaki koşul $1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}$ ifadesinin Bernoulli lemniskatının sağ yarısı tarafından sınırlanan bölgede yer aldığını ifade eder. Lemniskat konveks fonksiyonlar, birim disk $w = 0$ noktasına göre konveks bir bölgeye resmeder.

3.2.2. Lemniskat Konvekslik ve Yıldızlılık Yarıçapı

Tanım 3.7 (Lemniskat Konvekslik Yarıçapı) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için lemniskat konvekslik yarıçapı $R_{\mathcal{LC}}(f)$,

$$R_{\mathcal{LC}}(f) = \sup \left\{ r \in (0, 1) : 1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} \prec \sqrt{1 + \mathfrak{z}^2}, \quad \forall \mathfrak{z} \in \mathbb{D}_r \right\}$$

olarak tanımlanır.

Yani, bu yarıçap, $1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}$ ifadesinin, Bernoulli'nin lemniskatının sağ yarısındaki bölgeye düşmesini sağlayan en büyük bölgenin çapıdır.

Tanım 3.8 (Lemniskat Yıldızlılık Yarıçapı) Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için lemniskat yıldızlılık yarıçapı $R_{\mathcal{LS}^*}(f)$,

$$R_{\mathcal{LS}^*}(f) = \sup \left\{ r \in (0, 1) : \left(\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} \right) \prec \sqrt{1 + \mathfrak{z}^2}, \quad \forall |\mathfrak{z}| < r \right\}$$

olarak tanımlanır.

Yani, bu yarıçap, $\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})}$ ifadesinin, Bernoulli'nin lemniskatının sağ yarısındaki bölgeye düşmesini sağlayan en büyük bölgenin çapıdır.

Örnek 3.3 (a) $f(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}$:

$$\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} = 1 \Rightarrow 1^2 \prec 1 + \mathfrak{z}^2$$

Dolayısıyla $f \in \mathcal{LS}^*$

(b) $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}}$:

$$\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} = \frac{1}{1-\mathfrak{z}}$$

Bu fonksiyon $|\mathfrak{z}| < \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ iken $\mathcal{LS}^*$ sınıfındadır.

(c) $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}}$:

$$\frac{\mathfrak{z}f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} = \frac{1}{1-\mathfrak{z}}$$

Bu fonksiyon $|\mathfrak{z}| < 3 - 2\sqrt{2} - 1 \approx 0.1716$ iken $\mathcal{LC}$ sınıfındadır. Gerçekten, Verilen $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun lemniskat konvekslik yarıçapını belirlemek istiyoruz. Bir fonksiyonun lemniskat konveks olması için, $|z| < R$ olmak üzere

$$\left| \left(1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} \right)^2 - 1 \right| < 1$$

koşulu sağlanmalıdır. Basit bir hesaplama ile

$$f'(\mathfrak{z}) = \frac{1}{(1-\mathfrak{z})^2}, \quad f''(\mathfrak{z}) = \frac{2}{(1-\mathfrak{z})^3}$$

türevleri elde edilir. Bu ifadelerle,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} &= 1 + \mathfrak{z} \cdot \frac{2}{(1-\mathfrak{z})^3} \cdot (1-\mathfrak{z})^2 \\ &= 1 + \frac{2\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}} \\ &= \frac{1+\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemniskat konveksliğin tanımından

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1+\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}} \right)^2 - 1 \right| < 1 &\Rightarrow \left| \frac{(1+\mathfrak{z})^2 - (1-\mathfrak{z})^2}{(1-\mathfrak{z})^2} \right| < 1 \\ (1+\mathfrak{z})^2 - (1-\mathfrak{z})^2 = 4\mathfrak{z} &\Rightarrow \left| \frac{4\mathfrak{z}}{(1-\mathfrak{z})^2} \right| < 1 \Rightarrow \frac{4|\mathfrak{z}|}{|1-\mathfrak{z}|^2} < 1 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Buradan, $z = re^{i\theta}$ alınırsa

$$|1-\mathfrak{z}|^2 = |1-re^{i\theta}|^2 = 1 - 2r \cos \theta + r^2$$

yazılır.

$$\frac{4r}{1 - 2r \cos \theta + r^2} < 1$$

olduğundan, $\cos \theta = 1$ için:

$$\frac{4r}{1 - 2r + r^2} < 1 \Rightarrow 4r < 1 - 2r + r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 1 > 0$$

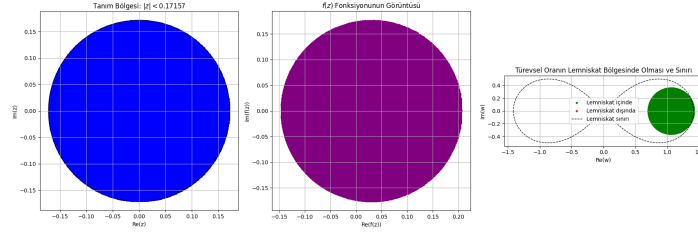
eşitsizliği ve bu eşitsizliğin çözümünden

$$r^2 - 6r + 1 > 0 \Rightarrow r < 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{veya} \quad r > 3 + 2\sqrt{2}$$

sonucuna ulaşılır. Fakat $r < 1$ olduğundan

$$\boxed{R = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $f(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}}{1-\mathfrak{z}}$ fonksiyonu yalnızca $|z| < 3 - 2\sqrt{2}$ bölgesinde lemniskat konvektir.



Şekil 3.9. $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun lemniskat konveksliği

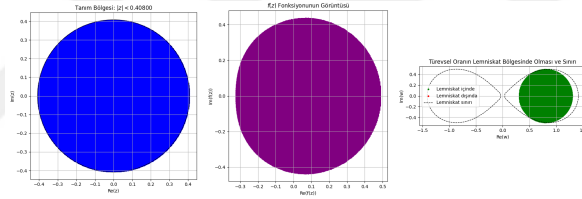
(d) $f(z) = ze^z$:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + z$$

$|(1+z)^2 - 1| = |z^2 + 2z| < 1$ koşulu $|z| < \sqrt{2} - 1$ için sağlanır.

(e) $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu $|z| < 0.4086$ için lemniskat konvektir:

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1+2z}{1+z} \Rightarrow \left| \left(\frac{1+2z}{1+z} \right)^2 - 1 \right| < 1$$



Şekil 3.10. $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonunun lemniskat konveksliği

(f) $f(z) = -\log(1-z)$ fonksiyonu $|z| < 0.546$ için lemniskat konvektir:

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \left| \left(\frac{1}{1-z} \right)^2 - 1 \right| < 1$$

3.2.3. Geometrik Yorumlar

Yukarıda verilen açıklamalar ışığında, aşağıdaki geometrik karşılaştırmaları elde etmek mümkündür. Lemniskat konvekslik yarıçapı ise:

$$R_{\mathcal{LC}^*}(f) = \sup \left\{ r \in (0, 1) : \left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \sqrt{2}, \Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yarıçap:

Özellik	$\mathcal{LS}^*$	$\mathcal{LC}^*$
Tanım Bölgesi	$ w^2 - 1 < 1$	$\Re(w) > w - 1 $
Açısal Sınır	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/8$
Min. Reel Kısım	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
İlişkili Şekil	Bernoulli Lemniskatı	$\sqrt{1 + \mathfrak{z}^2}$ Görüntüsü

Tablo 3.2. Lemniskat sınıflarının geometrik karşılaştırması

- $1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})}$ fonksiyonunun değerlerinin, $\sqrt{1 + \mathfrak{z}^2}$ fonksiyonunun görüntüsünü içeren açısal bölgede kalmasını garanti eder.
- Şekilde gösterilen $\frac{\pi}{4}$ açısal koni içinde kalmayı sağlar.
- Klasik konvekslikten daha güçlü bir koşuldur: $R_{\mathcal{LC}^*} \leq R_C$.

Daha somut bir örnek üzerinden açıklama yapmak gerekirse:

Varsayalım ki $f(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^2$ fonksiyonu ile çalışıyoruz. Bu fonksiyonun türevleri şu şekildedir:

$$f'(\mathfrak{z}) = 2\mathfrak{z}, \quad f''(\mathfrak{z}) = 2$$

Bu durumda, fonksiyonun $1 + \frac{\mathfrak{z}f''(z)}{f'(z)}$ ifadesini hesaplayalım:

$$1 + \frac{\mathfrak{z}f''(\mathfrak{z})}{f'(\mathfrak{z})} = 1 + \frac{\mathfrak{z} \cdot 2}{2\mathfrak{z}} = 1 + 1 = 2$$

Bu değer, Bernoulli'nin lemniskatesinin sağ yarısındaki bölgeye düşüp düşmediğini kontrol etmek için, bu değer $|w^2 - 1| = 1$ koşulunu sağlaması gerekecektir. Eğer $w = 2$, o zaman:

$$|w^2 - 1| = |2^2 - 1| = |4 - 1| = 3$$

elde edilir. Bu değer, $|w^2 - 1| = 1$ koşulunun sağlanmadığını gösterir, dolayısıyla bu fonksiyon için lemniskat konvekslik şartını sağlanmamaktadır.

3.3. q -Gamma ve big q -Bessel Fonksiyonu

Bu kısımda, klasik Gamma fonksiyonunun q -analogu (benzeri) olan q -Gamma fonksiyonunun tanımını, temel özelliklerini ve sınırlayıcı durumlarda klasik Gamma fonksiyonuna yaklaşımını ele almaktadır. Ayrıca, okuyucunun işini kolaylaştırmak adına, bu çalışmada kullanılan önemli semboller ve tanımların kısa bir özetini sunuyoruz. Bu

kısımda özellikle vurgulanması gereken önemli bir detay, q ifadesinin $(0, 1)$ aralığında yer alan pozitif bir reel sayı olduğudur.

Klasik Gamma fonksiyonu:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

şeklinde tanımlanır ve birçok matematiksel yapıda temel rol oynar. q -analiz kapsamında tanımlanan q -Gamma fonksiyonu, klasik fonksiyonların parametrik genelleştirilmesini sağlar. q -Gamma fonksiyonu: q -ortogonal polinomlarda, temel hipergeometrik serilerde, kombinatorik özdeşliklerde, kuantum gruplarında geniş kullanım alanlarına sahiptir.

Tanım 3.9 (q -Gamma Fonksiyonunun Tanımı) $0 < q < 1$ için, q -Gamma fonksiyonu

$$\Gamma_q(x) = (1 - q)^{1-x} \frac{(q; q)_\infty}{(q^x; q)_\infty},$$

şeklinde şekilde tanımlanır, burada $(a; q)_\infty$ ifadesi q -Pochhammer sembolü olup

$$(a; q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n)$$

olarak tanımlanır.

q -Gamma fonksiyonu aşağıda listenen özellikleri sağlamaktadır:

- **Tekrarlama (Rekürsiyon) Özelliği:**

$$\Gamma_q(x + 1) = \frac{1 - q^x}{1 - q} \Gamma_q(x)$$

- **Sınır Durumu:** $q \rightarrow 1^-$ için

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \Gamma_q(x) = \Gamma(x)$$

elde edilir. Ayrıca $\Gamma_q(1) = 1$ dir.

- **Genelleştirilmiş q -Faktöriyel:**

$$\Gamma_q(n + 1) = [n]_q!$$

burada, $[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ olmak üzere $[n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q$ dir.

$\mathfrak{a} \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, q -kayan faktöriyelin q -analogu $(\mathfrak{a}; q)_n$ ifadesi şu şekilde tanımlanır (bkz. (Gasper and Rahman, 2004)):

$$(\mathfrak{a}; q)_0 := 1, \quad (\mathfrak{a}; q)_n := \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \mathfrak{a}q^k),$$

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r; q)_n := (\mathbf{a}_1; q)_n (\mathbf{a}_2; q)_n \dots (\mathbf{a}_r; q)_n \quad \text{ve} \quad (\mathbf{a}; q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \mathbf{a}q^k).$$

q -gamma fonksiyonu, q -analog kuramında temel gamma fonksiyonu olarak bilinir, klasik gamma fonksiyonunun genellemesidir ve çift gamma fonksiyonu ile yakından ilişkilidir. Bu kavram ilk olarak Jackson tarafından 1905 yılında önerilmiştir. Şu şekilde ifade edilir:

$$\Gamma_q(\mathfrak{z}) = (1 - q)^{1-\mathfrak{z}} \frac{(q; q)_\infty}{(q^{\mathfrak{z}}; q)_\infty}.$$

Klasik gamma fonksiyonu ile olan bağıntısı şu limitte ortaya çıkar:

$$\lim_{q \nearrow 1} \Gamma_q(\mathfrak{z}) = \Gamma(\mathfrak{z}).$$

Ayrıca, aşağıdaki eşitlik de geçerlidir:

$$\Gamma_{q^k}(\mathfrak{z}) = \frac{(q^k; q^k)_\infty}{(q^{k\mathfrak{z}}; q^k)_\infty} (1 - q^k)^{1-\mathfrak{z}}.$$

Literatürde, özellikle (Gasper and Rahman, 2004) kaynağında, temel q -hipergeometrik seri şu şekilde tanımlanır:

$${}_r\phi_r \left(\begin{matrix} \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r \\ \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r \end{matrix} \middle| q, \mathfrak{z} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r; q)_n}{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r; q)_n} q^{\binom{n}{2}} \mathfrak{z}^n.$$

Jackson tarafından yeniden tanımlan ve tarihsel olarak Heine veya Euler'e dayanan q -fark operatörü şöyle tanımlanır:

$$D_q \mathfrak{f}(\mathfrak{z}) := \frac{\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{f}(q\mathfrak{z})}{\mathfrak{z} - q\mathfrak{z}}, \quad \mathfrak{z} \neq 0.$$

Ayrıca,

$$D_{\frac{1}{q}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z}) := q \frac{\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{f}(\mathfrak{z}/q)}{(q-1)\mathfrak{z}}, \quad \mathfrak{z} \neq 0$$

ve türev $\mathfrak{f}'(0)$ mevcutsa, $D_q \mathfrak{f}(0) = D_{\frac{1}{q}} \mathfrak{f}(0) = \mathfrak{f}'(0)$ eşitlikleri sağlanır.

Sürekli bir $\mathfrak{f}$ fonksiyonu için, $a > 0$ olmak üzere $[0, a]$ aralığında tanımlıysa, q -integral operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$\int_0^a \mathfrak{f}(x) d_q x = (1 - q) a \sum_{n \geq 0} \mathfrak{f}(aq^n) q^n.$$

Bu kısa açıklamalardan sonra, şimdi büyük q -Bessel fonksiyonlarının tanımına geçebiliriz.

(Ciccoli et al., 1998) ve (Bouzeffour et al., 2020) kaynaklarında detaylandırıldığı üzere, büyük q -Bessel fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) &= {}_1\phi_1\left(\begin{matrix} -1/x^2 \\ q^{2\nu+2} \end{matrix} \middle| q^2; \mathfrak{z}^2 x^2 q^{2\nu+2}\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{n^2} q^{(2\nu+1)n} \left(-\frac{1}{x^2}; q^2\right)_n}{(q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_n} (x\mathfrak{z})^{2n} \\ &= 1 - \frac{(x^2 + 1) q^{2\nu+2}}{(q^2 - 1)(q^{2\nu+2} - 1)} \mathfrak{z}^2 + \dots\end{aligned}\quad (3.8)$$

$\nu > -1/2$ durumunda, $\mathfrak{J}_\nu$ fonksiyonları hem x hem $\mathfrak{z}$ değişkenlerinde tüm kompleks düzlemde analitiktir. Bu çalışmada, $\mathfrak{J}_\nu$ fonksiyonundan türetilmiş aşağıdaki fonksiyon da incelenecektir:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) &= \frac{\mathfrak{z}^\nu x^\nu}{\Gamma_{q^2}(\nu + 1)} {}_1\phi_1\left(\begin{matrix} -\frac{(1-q^2)^2}{x^2} \\ q^{2\nu+2} \end{matrix} \middle| q^2; q^{2\nu+2}(1-q^2)^2 x^2 \mathfrak{z}^2\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{n^2} (1-q^2)^{2n} q^{(2\nu+1)n} \left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2\right)_n x^{2n+\nu}}{\Gamma_{q^2}(\nu + 1) (q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_n} \mathfrak{z}^{2n+\nu} \\ &= \frac{x^\nu}{\Gamma_{q^2}(\nu + 1)} \mathfrak{z}^\nu - \dots\end{aligned}\quad (3.9)$$

$\nu > -1$ durumunda, $\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonları hem x hem de $\mathfrak{z}$ değişkenlerinde $\mathbb{C}$ düzleminde analitiktir. Ayrıca, şu limite sahiptirler:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathfrak{J}_\nu\left(\frac{x}{1-q^2}, (1-q^2)\mathfrak{z}; q^2\right) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{(\mathfrak{z}x)^\nu} J_\nu(2x\mathfrak{z}), \quad (3.10)$$

burada J_ν klasik birinci tür Bessel fonksiyonudur.

$\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ ve $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonları $\mathcal{A}$ sınıfına ait olmadığından, literatürde (Aktaş et al., 2018, 2017; Baricz et al., 2014; Toklu, 2023; Deniz et al., 2022; Toklu, 2020, 2019; Toklu et al., 2019; Baricz et al., 2016) belirtilen standart bir normalize etme prosedürüne başvurulur. Bu normalize etme işlemi, geometrik fonksiyon teorisinde daha açık, yönetilebilir analiz ve karşılaştırma imkânı sunan bir çerçeve sağlar.

$\nu > -\frac{1}{2}$ ve $x \in \mathbb{R}$ durumlarında, aşağıdaki şekilde normalleştirilmiş fonksiyon tanımlanır:

$$\mathcal{I}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \mathfrak{z} \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2). \quad (3.11)$$

Aynı koşullar altında, $\mathcal{J}_\nu$ fonksiyonu için:

$$\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = x^{-\nu} \Gamma_{q^2}(\nu + 1) \mathfrak{z}^{1-\nu} \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2). \quad (3.12)$$

Böylece $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ ve $\mathfrak{z} \mapsto \mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonları $\mathcal{A}$ sınıfına dahil olur.

Bir gerçekte tam fonksiyon φ , eğer Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ 'nin bir üyesi ise, aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\varphi() = \mathfrak{c}^m \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{-}{n} \right) e^{-\frac{-}{n}},$$

burada $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{c}_n \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{a} \geq 0$, m sıfır veya pozitif bir tamsayıdır ve $\sum_n \frac{-}{n^2} < \infty$ koşulu sağlanır.

Bu sınıf, geometrik fonksiyon teorisinde çok önemli bir rol oynar çünkü yalnızca reel sıfırlara sahip tüm fonksiyonların analizine olanak tanıyan bir çerçeve sunar. Bu sayede kararlılık, çarpanlara ayırma (faktörizasyon) ve fonksiyonların geometrik özellikleriyle ilgili güçlü teoremlerin uygulanması mümkün hale gelir.

Burada özellikle vurgulanması gereken nokta, $\mathcal{LP}$ sınıfına ait fonksiyonların Hadamard çarpan temsiline sahip olmasıdır. Bu temsil, tam fonksiyonların sıfırları cinsinden ifade edilmesini sağlayan güçlü bir araçtır. Ayrıca, bu çarpan temsili fonksiyonların büyüme davranışları ve sıfırlarının dağılımı hakkında derinlemesine bilgi sunar ve bu durum geometrik fonksiyon teorisi açısından büyük önem taşır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada elde edilen temel sonuçları kanıtlamak için aşağıda sunulan her bir lemmaya başvurmak gereklidir. Burada belirtmek gerekir ki, ilk üç lemma, büyük q -Bessel fonksiyonlarının sıfırlarını inceleyen (Bouzeffour et al., 2020) çalışmasının bulgularına dayanmaktadır.

Lemma 4.1 (Toklu, 2025) *Büyük q -Bessel fonksiyonu,*

$$\mathfrak{z} \mapsto \Lambda_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \mathfrak{J}_\nu\left(\frac{x}{1-q^2}, (1-q^2)^2 \mathfrak{z}; q^2\right)$$

şeklinde yazıldığında, aşağıdaki önemli tekrarlar fark ilişkilerini sergiler:

$$D_q(\Lambda_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)) = -\frac{x\mathfrak{z}^2(1-q^2)(1+q)q^{2\nu+2}}{1-q^{2\nu+1}}\Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2), \quad (4.1)$$

$$D_{\frac{1}{q}}(w_{\nu+1}(x; q)\Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2)) = -\frac{xq(1-q^{2\nu+2})}{(q-1)(1-q^2)^2}w_\nu(x; q^2)\Lambda_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) \quad (4.2)$$

burada

$$w_\nu(x; q) = \left(-\frac{x^2q^2}{(1-q^2)^2}; q^2\right)_\nu. \quad (4.3)$$

İspat Şu eşitliği kontrol etmek kolaydır:

$$D_q\left(\left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2\right)_n x^{2n}\right) = \frac{1-q^{2n}}{1-q}\left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2\right)_{n-1} x^{2n-1}.$$

Bu denklemi akılda tutarak, bir sonraki hesaplamaya geçelim:

$$\begin{aligned} D_q(\Lambda_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)) &= D_q\left({}_1\phi_1\left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2} \middle| q^2; q^{2\nu+2}(1-q^2)^2 x^2 \mathfrak{z}^2\right)\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n q^{n^2} (1-q^2)^{2n} q^{(2\nu+1)n} D_q\left(\left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2\right)_n x^{2n}\right)}{(q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_n} \mathfrak{z}^{2n} \\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^{2\nu+2})} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n q^{n^2} (1-q^2)^{2n} q^{(2\nu+1)n} \left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2\right)_{n-1} x^{2n-1}}{(q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_{n-1}} \mathfrak{z}^{2n} \\ &= -\frac{x\mathfrak{z}^2(1-q^2)(1+q)q^{2\nu+2}}{1-q^{2\nu+2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{n^2} q^{n(2\nu+3)} \left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2\right)_n x^{2n} \mathfrak{z}^{2n}}{(q^{2\nu+4}, q^2; q^2)_n} \\ &= -\frac{x\mathfrak{z}^2(1-q^2)(1+q)q^{2\nu+2}}{1-q^{2\nu+2}} \Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2). \end{aligned}$$

Öte yandan, bazı temel hesaplamalar sonucunda

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{q}} \left(w_{\nu+1}(x; q) \left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2 \right)_n x^{2n} \right) &= \\ &= \frac{q(q^{2\nu+2n+2} - 1)}{(q-1)(1-q^2)^2 q^{2n}} w_{\nu}(x; q) \left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2 \right)_n x^{2n+1}. \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Yukarıda sunulan denklemi göz önünde bulundurarak, şu sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{q}} (w_{\nu+1} \Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q)) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{n^2} (1-q^2)^{2n} q^{n(2\nu+3)} \mathfrak{z}^{2n} D_{\frac{1}{q}} \left(w_{\nu+1}(x; q) \left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2 \right)_n x^{2n} \right)}{(q^{2\nu+4}, q^2; q^2)_n} \\ &= -\frac{xq(1-q^{2\nu+2})}{(q-1)(1-q^2)^2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{n^2} (1-q^2)^{2n} q^{n(2\nu+1)} w_{\nu}(x; q) \left(-\frac{(1-q^2)^2}{x^2}; q^2 \right)_n (x\mathfrak{z})^{2n}}{(q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_n} \\ &= -\frac{xq(1-q^{2\nu+2})}{(q-1)(1-q^2)^2} w_{\nu}(x; q) \Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2). \end{aligned}$$

Aşağıdaki lemmada, Bouzeffour *at al.* (Bouzeffour et al., 2020) çalışmasından yararlanarak, $\mathfrak{z} \mapsto \Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun ortogonalite ilişkilerini kuruyoruz.

Lemma 4.2 (Toklu, 2025) $\nu > -1$ ve $a > 0$ olsun. Her $\mathfrak{z} \in \mathbb{C} - \{0\}$ için, aşağıdaki ifade geçerlidir:

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{z}^2 - 2) \int_0^a \Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2) \Lambda_{\nu+1}(x, q^2) x w_{\nu+1}(x; q) d_q x \quad (4.4) \\ &= \frac{(1-q)(1-q^{2\nu+2})}{(1-q^2)^{-2} q^{2\nu+2}} w_{\nu}(a/q; q) \times \\ &[\Lambda_{\nu+1}(aq^{-1}, q^2) \Lambda_{\nu}(a, \mathfrak{z}; q^2) - \Lambda_{\nu+1}(aq^{-1}, \mathfrak{z}; q^2) \Lambda_{\nu}(a, q^2)] \end{aligned}$$

Bu lemmann kanıtı, (4.1) ve (4.2) ilişkileri kullanılarak kolayca kurulabileceğinden, burada verilmeyecektir.

Aşağıdaki lemma, Jacobi'nin üçlü özdeşliğinden türetilmiştir ve bazı tam fonksiyonların büyüme derecesinin nasıl belirlendiğine dair önemli bir bakış açısı sunar.

Lemma 4.3 (Ismail, 2005) $\{c_n\}$ sonsuz sayıda sıfır olmayan terime sahip sınırlı bir dizi olsun ve

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) = \sum_{n \geq 0} c_n q^{n^2} \mathfrak{z}^n, \quad 0 < q < 1$$

fonksiyonunu ele alalım. Sonuç olarak, $\rho(\mathfrak{f}) = 0$ olduğunu buluruz, bu da $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ fonksiyonunun sonsuz sayıda sıfıra sahip olduğu sonucuna götürür.

Lemma 4.4 (Toklu, 2025) $\nu > -1/2$ ve $x > 0$ koşulları altında, $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ büyük q -Bessel fonksiyonu, her biri reel sayı olan sonsuz bir sıfır kümesine sahiptir. Ayrıca, büyüme derecesi $\rho(\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ 0'a eşittir. Hadamard çarpanlara ayırma teoremi sayesinde, Weierstrass ayrışımını şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2)} \right), \quad (4.5)$$

burada $j_{\nu,n}(x, q^2)$, $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n . pozitif sıfırını göstermektedir.

İspat (Bouzeffour et al., 2020)'da gösterildiği üzere, büyük q -Bessel fonksiyonu $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$, lemma koşulları altında sonsuz bir reel sıfır kümesine sahiptir. Ayrıca, (3.8) denkleminde yer alan $\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun sonsuz seri gösterimi şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \sum_{n \geq 0} a_n q^{n^2} (x\mathfrak{z})^n,$$

burada

$$a_n = \frac{(-1)^n q^{(2\nu+1)n} \left(-\frac{1}{x^2}; q^2\right)_n}{(q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_n}.$$

Dolayısıyla, $\nu > -1/2$ durumunda, limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n q^{(2\nu+1)n} \left(-\frac{1}{x^2}; q^2\right)_n}{(q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_n} = 0,$$

olarak bulunur, bu da $\{a_n\}$ dizisinin yakınsak ve dolayısıyla sınırlı olduğunu doğrular. Lemma 4.3 uygulandığında, $\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun büyüme derecesi $\rho(\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ 'nin 0'a eşit olduğu belirlenir. Sonuç olarak, lemmann geri kalan kısmının kanıtı, Hadamard çarpanlara ayırma teoreminin doğrudan uygulanmasına dayanır. Böylece, büyük q -Bessel fonksiyonu $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ 'ın $\mathcal{LP}$ sınıfının bir üyesi olduğu sonucuna varılabilir.

Lemma 4.5 (Toklu, 2025) $\nu > -1/2$ ve $x > 0$ koşulları altında, büyük q -Bessel fonksiyonu $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$, her biri reel sayı olan sonsuz bir sıfır kümesine sahiptir. Ayrıca, bu fonksiyonun $\rho(\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ şeklinde gösterilen, büyüme mertebesi 0'a eşittir. Hadamard çarpanlara ayırma teoremi sayesinde, Weierstrass ayrışımını şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \frac{x^\nu \mathfrak{z}^\nu}{\Gamma_{q^2}(\nu+1)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2)} \right), \quad (4.6)$$

burada $\ell_{\nu,n}(x, q^2)$, $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n . pozitif sıfırını göstermektedir.

İspat Büyük q -Bessel fonksiyonu $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ 'ın $\mathfrak{z}$ 'ye göre bir tam fonksiyon olduğunu biliyoruz (bkz. (Bouzeffour et al., 2020)). Lemma 4.2'dan yararlanarak, $\mathfrak{z} \mapsto \Lambda_\nu(a, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun tüm sıfırlarının reel olduğunu doğrulayacağız. $\mathfrak{z} \neq 0$ 'ın $\mathfrak{z} \mapsto \Lambda_\nu(a, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun bir sıfırı olduğunu varsayalım. Şunu biliyoruz:

$$\Lambda_\nu(a, \bar{\mathfrak{z}}; q^2) = \overline{\Lambda_\nu(a, \mathfrak{z}; q^2)} = 0.$$

(4.4) denkleminde $\mathfrak{z} = \bar{\mathfrak{z}}$ alarak şu sonuca ulaşırız:

$$(\mathfrak{z}^2 - \bar{\mathfrak{z}}^2) \int_0^a |\Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2)|^2 x w_{\nu+1}(x; q) dx = 0.$$

Bu son denklemden, $\mathfrak{z}^2 - \bar{\mathfrak{z}}^2 = 0$ 'ın ancak ve ancak $\mathfrak{z} \in \mathbb{R}$ veya $\mathfrak{z} \in i\mathbb{R}$ olduğunda sağlandığı çıkarılabilir. Açıkça, diğer tüm durumlarda şu sonuca varırız:

$$\int_0^a |\Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2)|^2 x w_{\nu+1}(x; q) dx = 0. \quad (4.7)$$

q -integralin tanımını göz önünde bulundurduğumuzda, şu açıkça görülür:

$$\begin{aligned} & \int_0^a |\Lambda_{\nu+1}(x, \mathfrak{z}; q^2)|^2 x w_{\nu+1}(x; q) dx \\ &= (1-q)a^2 \sum_{n \geq 0} q^{2n} \left(-\frac{a^2 q^{2n+2}}{(1-q^2)^2}; q^2 \right)_{\nu+1} |\Lambda_{\nu+1}(aq^n, \mathfrak{z}; q^2)|^2; \end{aligned}$$

dolayısıyla,

$$\Lambda_{\nu+1}(aq^n, \mathfrak{z}; q^2) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

ve $\Lambda_{\nu+1}(\cdot, \mathfrak{z}; q^2)$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde analitik bir fonksiyon tanımlar. Bu nedenle, $\Lambda_{\nu+1}(\cdot, \mathfrak{z}; q^2) = 0$ olur. Şimdi, $\mathfrak{z} = i$ durumunu inceleyelim, burada $\mathfrak{z} \in \mathbb{R}$, sonuç olarak

$$\Lambda_\nu(a, i; q^2) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2} (1-q^2)^{2n} q^{(2\nu+1)n}}{(q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_n} \left(-\frac{(1-q^2)^2}{a^2}; q^2 \right)_n (a)^{2n}.$$

$\nu > -1$ koşulu, bu ifadenin sıfıra eşit olmadığını garanti eder, bu da $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun sıfırlarının da $\nu > -1$ ve $x > 0$ için reel olduğunu gösterir. Şimdi, amacımız $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun $x > 0$ için sonsuz sayıda sıfıra sahip olduğunu kanıtlamaktır. Elimizde:

$$\Lambda_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \sum_{n \geq 0} c_n q^{n^2} (x\mathfrak{z})^{2n}$$

burada

$$c_n = \frac{(-1)^n (1-q^2)^{2n} q^{(2\nu+1)n}}{(q^{2\nu+2}, q^2; q^2)_n} \left(-\frac{(1-q^2)^2}{a^2}; q^2 \right)_n.$$

$\nu > -1/2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $\{c_n\}$ dizisinin yakınsak ve dolayısıyla sınırlı olduğu doğrulanır. Lemma 4.3 ışığında, $\rho(\Lambda_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ büyüme derecesinin 0'a eşit olduğu sonucuna varırız, bu da $\rho(\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)) = 0$ sonucunu doğurur. Pozitif olmayan tam sayı büyüme derecesine sahip herhangi bir tam fonksiyonun sonsuz sayıda sifıra sahip olduğu kanıtlanmış bir gerçektir. Sonuç olarak, lemmanın geri kalan kısmının kanıtı, Hadamard çarpamlara ayırma teoreminin doğrudan uygulanmasına dayanır. Böylece, $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun $\mathcal{LP}$ sınıfının bir üyesi olduğu ifade edilebilir.

Şimdi tezimizin ana sonuçlarını elde etmeye hazırız.

4.1. Normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının Janowski yıldızılık ve konvekslik yarıçapı

Bu kısım, normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının Janowski yıldızılık ve Janowski konvekslik yarıçaplarını belirlemeye ayrılmıştır.

Teorem 4.1 $\nu > -1/2$ ve $x > 0$ koşulları altında, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- a. $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \mathfrak{z} \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun, $R_{A,B}^*(\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ ile gösterilen, Janowski yıldızılık yarıçapı

$$\mathfrak{z} \frac{\mathfrak{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif reel köküdür.

- b. $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = x^{-\nu} \Gamma_{q^2}(\nu + 1) \mathfrak{z}^{1-\nu} \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun, $R_{A,B}^*(\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ ile gösterilen, Janowski yıldızılık yarıçapı

$$\mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif reel köküdür.

İspat a. $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun Janowski yıldızılık yarıçapını belirlemek için

$$\left| \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} - 1 \right| < 1, \quad |\mathfrak{z}| < r^*$$

olacak şekilde pozitif r^* reel sayısının olduğunu göstermeliyiz. Lemma 4.4 den, $j_{\nu,n}(x, q^2)$, $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n . pozitif sıfırını göstermek üzere

$$\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2)} \right) \quad (4.8)$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \mathfrak{z} \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ olmak üzere, Denklem (4.8) dikkate alınarak, eşitliğin her iki tarafının logaritmik türevi alınacak olursa

$$\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 + \mathfrak{z} \frac{\mathfrak{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2\mathfrak{z}^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2) - \mathfrak{z}^2}$$

elde edilir. Bu son ifadeden yararlanarak, $|\mathfrak{z}| < j_{\nu,n}(x, q^2)$ için

$$\left| \frac{\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} - 1}{A - B\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}} \right| \leq \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2}}{A - B + |B| \sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2}} \quad (4.9)$$

elde edilir. Açıkça görüleceği üzere, yukarıda elde edilen son eşitsizlikten, $|\mathfrak{z}| = r$ için

$$\left| \frac{\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} - 1}{A - B\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}} \right| \leq \frac{1 - \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}}{A - B + |B| \left(\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} - 1 \right)}$$

elde edilir. Kabul edelim ki,

$$\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökü r^* olsun. Eğer, $(0, j_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında bu denklemin yegane pozitif kökünün r^* olduğunu gösterilirse, Denklem (4.9) eşitsizliği göz önüne alındığında bu r^* kökü $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun Janowski yıldızılık yarıçapı olacaktır. Gerçekten, $u_\nu : (0, j_{\nu,1}(x, q^2)) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$u_\nu(r) = r \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, r; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} - 1$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Denklem (4.8) yardımıyla açıkça görüleceği üzere

$$u'_\nu(r) = - \sum_{n \geq 1} \frac{4r j_{\nu,n}(x, q^2)}{(j_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2)^2} < 0$$

olduğundan $u_\nu(r)$ fonksiyonu $(0, j_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında kesin azalandır. Ayrıca,

$$\lim_{r \nearrow j_{\nu,1}(x, q^2)} u_\nu(r) = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{r \searrow 0} u_\nu(r) = \frac{A - B}{1 + |B|} > 0$$

limitlerini hesaplamak kolaydır. Bu halde, $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonun Janowski yıldızlık yarıçapı $R_{A,B}^*(\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$

$$\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} + \frac{A-B}{1+|B|} - 1 = 0$$

denkleminin ya da buna denk olarak

$$\mathfrak{z} \frac{\mathfrak{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} + \frac{A-B}{1+|B|} - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif reel köküdür.

b. $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun Jamnowski yıldızlık yarıçapını elde etmek için

$$\left| \frac{\mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} - 1}{A - B \mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}} \right| < 1, \quad |\mathfrak{z}| < r_1^*$$

olacak şekilde bir r_1^* pozitif reel sayısının olduğunu göstermeliyiz. Ayrıca Lemma 4.5 den, $\ell_{\nu,n}(x, q^2)$, $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n . pozitif sıfırını göstermek üzere

$$\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \frac{x^\nu \mathfrak{z}^\nu}{\Gamma_{q^2}(\nu+1)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2)} \right) \quad (4.10)$$

olduğunu biliyoruz. O halde, $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = x^{-\nu} \Gamma_{q^2}(\nu+1) \mathfrak{z}^{1-\nu} \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ olmak üzere, eşitliğin her iki yanının logaritmik türevini almak suretiyle

$$\mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \nu + \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2\mathfrak{z}^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - \mathfrak{z}^2}$$

elde edilir. Elde edilen bu son eşitlikten faydalananarak, $|\mathfrak{z}| < \ell_{\nu,n}(x, q^2)$ için

$$\left| \frac{\mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} - 1}{A - B \mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}} \right| \leq \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2}}{A - B + |B| \sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2}} \quad (4.11)$$

elde edilir. Bu son ifadeden, $|\mathfrak{z}| = r$ için,

$$\left| \frac{\mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} - 1}{A - B \mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}} \right| \leq \frac{1 - r \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, r; q^2)}}{A - B + |B| \left(r \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, r; q^2)} - 1 \right)}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi, kabul edelim ki, r_1^*

$$r \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, r; q^2)} + \frac{A-B}{1+|B|} - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif reel kökü olsun. Bu durumda, $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonu $|\mathfrak{z}| < r_1^*$ için Janowski yıldızlıdır.

Şimdi, $\kappa_\nu : (0, \ell_{\nu,1}(x, q^2)) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\kappa_\nu(x, r; q^2) = r \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, r; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} - 1$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Açıkça görüleceği üzere bu fonksiyon $(0, \ell_{\nu,1}(x, q^2))$ aralığında sürekli ve

$$\kappa'_\nu(x, r; q^2) = - \sum_{n \geq 1} \frac{4r \ell_{\nu,n}(x, q^2)}{(\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2)^2} < 0$$

olduğundan $(0, \ell_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında $\kappa_\nu(x, r; q^2)$ fonksiyonu kesin azalandır. Ayrıca,

$$\lim_{r \searrow 0} \kappa_\nu(x, r; q^2) = \frac{A - B}{1 + |B|} \quad \text{ve} \quad \lim_{r \nearrow \ell_{\nu,1}(x, q^2)} \kappa_\nu(x, r; q^2) = -\infty < 0$$

limitlerini elde etmek kolaydır. Sonuç olarak, ara değer teoreminden $\kappa_\nu(x, r; q^2)$ fonksiyonunun $(0, \ell_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığındaki yegane kökünün r_1^* olduğu sonucuna varılır. O halde, $\mathbb{J}_\nu(x, r; q^2)$ fonksiyonunun Janowski yıldızlılık yarıçapı $(0, \ell_{\nu,1}(x, q^2))$ aralığında

$$r \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, r; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} - 1 = 0$$

denkleminin yegane köküdür.

Aşağıdaki teoremden normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının Janowski konvekslik yarıçapı belirlenmiştir.

Teorem 4.2 $\nu > -1/2$ ve $x > 0$ koşulları altında,

a. $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \mathfrak{z} \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı

$$r \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = x^{-\nu} \Gamma_{q^2}(\nu + 1) \mathfrak{z}^{1-\nu} \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapı

$$r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspat a. $\mathbb{D}_r$ açık diskinde $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonu için Janowski konveks fonksiyonun tanımı göz önüne alındığında, $|\mathfrak{z}| < r$ için

$$\left| \frac{\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}}{A - B \left(1 + \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)} \right| < 1$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesi gerektiği sonucuna varılır. Ayrıca, daha önceki açıklamalar ışığında, $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) \in \mathcal{LP}$ ve Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ türev işlemi altında kapalı olduğundan $\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) \in \mathcal{LP}$ dir. Bunun sonucu olarak, $\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonun da tüm sıfırları reeldir ve dolayısıyla Hadamard çarpım temsiline sahiptir. Kabul edelim ki, $\theta_{\nu,n}(x, q^2)$ ler $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n nci pozitif reel kökleri olsun. Bu halde, $\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun sonsuz çarpım temsili

$$\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{\theta_{\nu,n}^2(x, q^2)} \right) \quad (4.12a)$$

olarak elde edilir ve bunun sonucunda da, Denklem (4.12a) nın her iki yanının logaritmik türevleri alınarak

$$1 + \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2\mathfrak{z}^2}{\theta_{\nu,n}^2(x, q^2) - \mathfrak{z}^2} \quad (4.12b)$$

elde edilebilceği açıktır. O halde

$$\left| \frac{\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}}{A - B \left(1 + \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)} \right| \leq \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{\theta_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2}}{A - B - |B| \sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{\theta_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2}}$$

elde edilir. Bu son ifadeden

$$\left| \frac{\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}}{A - B \left(1 + \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)} \right| \leq \frac{-|\mathfrak{z}| \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}}{A - B + |B| |\mathfrak{z}| \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}}$$

elde edilir. O halde $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarı çapı

$$r \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|} = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspatı tamamlamak için, elde edilen bu denklemin $(0, \theta_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında tek bir reel köke sahip olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\phi_\nu : (0, \theta_{\nu,1}(x, q^2)) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\phi_\nu(r) = r \frac{\mathcal{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2)} + \frac{A - B}{1 + |B|}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Açıkça görüleceği üzere

$$\phi'_\nu(r) = - \sum_{n \geq 1} \frac{4r\theta_{\nu,n}(x, q^2)}{(\theta_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2)^2} < 0$$

olduğundan ϕ_ν fonksiyonu $(0, \theta_{\nu,1}(x, q^2))$ aralığında kesin azalıdır. Ayrıca

$$\lim_{r \searrow 0} \phi_\nu(r) = \frac{A-B}{1+|B|} > 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{r \nearrow \theta_{\nu,1}(x, q^2)} \phi_\nu(r) = -\infty$$

limitlerini elde etmek kolaydır. O halde, $\phi_\nu(r)$ fonksiyonu $(0, \theta_{\nu,1}(x, q^2))$ aralığında tek bir köke sahip olup, bu kök $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun Janowski konvekslik yarıçapıdır.

Yukarıda verilen ispattaki adımlar tekrar edilerek Teoremin **b** maddesindeki ifadenin doğruluğu gösterilebilir.

4.2. Normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının Bernoulli lemniskat yıldızlılık ve konvekslik yarıçapı

Bu kısım, normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının lemniskat yıldızlılık ve lemniskat konvekslik yarıçaplarını belirlemeye ayrılmıştır.

Aşağıdaki teoremden iki farklı şekilde normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının Bernoulli lemniskat yıldızlılık yarıçapı belirlenmiştir.

Teorem 4.3 $\nu > -1/2$ ve $x > 0$ koşulları altında, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- a. $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \mathfrak{z} \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun, $R_{\mathcal{LS}^*}(\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ şeklinde gösterilen, lemniskat yıldızlılık yarıçapı

$$r^2 (\mathfrak{J}'_\nu(x, r; q^2))^2 - 2r \mathfrak{J}'_\nu(x, r; q^2) \mathfrak{J}_\nu(x, r; q^2) - (\mathfrak{J}_\nu(x, r; q^2))^2 = 0$$

transdantal denkleminin en küçük pozitif reel köküdür.

- b. $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = x^{-\nu} \Gamma_{q^2}(\nu+1) \mathfrak{z}^{1-\nu} \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun, $R_{\mathcal{LS}^*}(\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ şeklinde gösterilen, lemniskat yıldızlılık yarıçapı

$$r^2 \mathcal{J}_\nu'^2(x, r; q^2) + 2(1-\nu)r \mathcal{J}_\nu'(x, r; q^2) \mathcal{J}_\nu(x, r; q^2) + (\nu^2 + 2\nu - 1) \mathcal{J}_\nu^2(x, \mathfrak{z}; q^2) = 0$$

transdantal denkleminin en küçük pozitif reel köküdür.

İspat a. Lemma 4.5 den, $\mathcal{J}_{\nu,n}(x, q^2), \mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n . pozitif sıfırını göstermek üzere

$$\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2)} \right), \quad (4.13)$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \mathfrak{z} \mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ olmak üzere, Denklem (4.13) dikkate alınarak, eşitliğin her iki tarafının logaritmik türevi alınarak

$$\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 + \mathfrak{z} \frac{\mathfrak{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2\mathfrak{z}^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2) - \mathfrak{z}^2}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} \left| \left(\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)^2 - 1 \right| &\leq \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2} + 2 \right) \\ &= \left(|\mathfrak{z}| \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)} \right)^2 - 4 \left(|\mathfrak{z}| \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)} \right) + 3 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi, kabul edelim ki, r^*

$$\left(\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)^2 - 4 \left(\mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right) + 2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökü olsun, bu durumda

$$\left| \left(r \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, r; q^2)} \right)^2 - 1 \right| \leq 1$$

eşitsizliği $|\mathfrak{z}| < r^*$ için geçerli olacaktır. Açıkça görüleceği üzere, elde edilen bu son eşitlik

$$r^2 (\mathfrak{J}'_\nu(x, r; q^2))^2 - 2r \mathfrak{J}'_\nu(x, r; q^2) \mathfrak{J}_\nu(x, r; q^2) - (\mathfrak{J}_\nu(x, r; q^2))^2 = 0$$

denkleminin karşılık gelmektedir. Bu ise $R_{\mathcal{LS}^*}(\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ lemniskat yıldızlılık yarıçapının yukarıdaki denklemin en küçük pozitif kökü olduğu anlamına gelir.

İspatı tamamlamak için $(0, j_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında yukarıda elde edilen denklemin tek bir köke sahip olduğunu göstermemliyiz. Bunun için, $F_\nu : (0, j_{\nu,1}(x, q^2)) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_\nu(r) = \left(r \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, r; q^2)} \right)^2 - 4 \left(r \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, r; q^2)} \right) + 2$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda,

$$F'_\nu(r) = \sum_{n \geq 1} \frac{4r j_{\nu,n}^2(x, q^2)}{(j_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2)^2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{2r^2}{j_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2} \right) > 0$$

olduğundan $F_\nu(r)$ fonksiyonu $(0, j_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında kesin artandır. Son olarak, basit bir limit hesaplamasıyla

$$\lim_{r \nearrow j_{\nu,1}(x, q^2)} F_\nu(r) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{r \searrow 0} F_\nu(r) = -1 < 0$$

limitleri elde edilir. Sonuç olarak, $F_\nu(r)$ fonksiyonunun $(0, j_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında bir tek (yegane) pozitif reel köke sahiptir ve bu kök normalize edilmiş büyük q -Bessel $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun $R_{\mathcal{LS}^*}(\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ ile gösterdiğimiz lemniskat yıldızılık yarıçapına karşılık gelmektedir.

- b. $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = x^{-\nu} \Gamma_{q^2}(\nu + 1) \mathfrak{z}^{1-\nu} \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ şeklinde normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonunu ele alalım. Lemma 4.5 den, $\ell_{\nu,n}(x, q^2), \mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n . pozitif sıfırını göstermek üzere,

$$\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \frac{x^\nu \mathfrak{z}^\nu}{\Gamma_{q^2}(\nu + 1)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2)} \right) \quad (4.14a)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \nu + \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \nu - \sum_{n \geq 1} \frac{2\mathfrak{z}^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - \mathfrak{z}^2} \quad (4.14b)$$

elde edilir. Denklem (4.14b) kullanılarak, $|\mathfrak{z}| < \ell_{\nu,1}(x, q^2)$ için geçerli olan

$$\begin{aligned} \left| \left(\mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)^2 - 1 \right| &\leq \left(\nu + \sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2|\mathfrak{z}|^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - |\mathfrak{z}|^2} + \nu + 2 \right) \\ &= \left(|\mathfrak{z}| \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)} \right)^2 - 4 \left(|\mathfrak{z}| \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)} \right) + 3 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Kabul edelim ki, r^*

$$\left(|\mathfrak{z}| \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)} \right)^2 - 4 \left(|\mathfrak{z}| \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, |\mathfrak{z}|; q^2)} \right) + 2 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif reel kökü olsun, bu halde

$$\left| \left(\mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)^2 - 1 \right| < 1$$

eşitsizliği $|\mathfrak{z}| < r^*$ için doğrulanacaktır. O halde $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun lemniskat yıldızılık yarıçapı

$$r^2 \mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2) + 2(1-\nu)r \mathcal{J}'_\nu(x, r; q^2) \mathcal{J}_\nu(x, r; q^2) + (\nu^2 + 2\nu - 1) \mathcal{J}_\nu^2(x, \mathfrak{z}; q^2) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif reel köküdür.

İspatı tamamlamak için, bu denklemin $(0, \ell_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında tek bir reel köke sahip olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $G_\nu(r) = (0, \ell_{\nu,1}(x, q^2)) \rightarrow \mathbb{R}$

$$G_\nu(r) = \left(r \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, r; q^2)} \right)^2 - 4 \left(r \frac{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu(x, r; q^2)} \right) + 2$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Basit bir hesaplamayla

$$G'_\nu(r) = \sum_{n \geq 1} \frac{4r\ell_{\nu,n}^2(x, q^2)}{(\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2)^2} \left(1 + \nu + \sum_{n \geq 1} \frac{2r^2}{\ell_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2} \right) > 0$$

olduğundan $G_\nu(r)$ fonksiyonu $(0, \ell_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında kesin artandır. Ayrıca

$$\lim_{r \nearrow \ell_{\nu,1}(x, q^2)} G_\nu(r) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{r \searrow 0} G_\nu(r) = -(\nu - 1)^2 < 0$$

dır. Sonuç olarak, $G_\nu(r)$ fonksiyonunun $(0, \ell_{\nu,1}(x, q^2))$ açık aralığında bir tek (yegane) pozitif reel köke sahiptir ve bu kök normalize edilmiş büyük q -Bessel $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun $R_{\mathcal{LS}^*}(\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ ile gösterdiğimiz lemniskat yıldızlılık yarıçapına karşılık gelmektedir.

Böylece, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi, normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının Bernoulli lemniskat konvekslik yarıçapını elde edeceğiz.

Teorem 4.4 $\nu > -1/2$ ve $x > 0$ koşulları altında, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- a. $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \mathfrak{z}\mathfrak{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun, $R_{\mathcal{LC}}(\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ ile gösterilen Bernoulli lemniskat konvekslik yarıçapı

$$\left(r \frac{\mathcal{J}_\nu''(x, r; q^2)}{\mathcal{J}_\nu'(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathcal{J}_\nu''(x, r; q^2)}{\mathcal{J}_\nu'(x, r; q^2)} \right) - 1 = 0$$

transdantal denkleminin en küçük pozitif köküdür.

- b. $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = x^{-\nu} \Gamma_{q^2}(\nu + 1) \mathfrak{z}^{1-\nu} \mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun, $R_{\mathcal{LC}}(\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ ile gösterilen Bernoulli lemniskat konvekslik yarıçapı

$$\left(r \frac{\mathbb{J}_\nu''(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu'(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathbb{J}_\nu''(x, r; q^2)}{\mathbb{J}_\nu'(x, r; q^2)} \right) - 1 = 0$$

transdantal denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspat a. Daha önce de ifade edildiği üzere, $\mathcal{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) \in \mathcal{LP}$ ve Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{LP}$ türev işlemi altında kapalı olduğundan $\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) \in \mathcal{LP}$ dir. Bunun sonucu olarak, $\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonun da tüm sıfırları reeldir ve dolayısıyla Hadamard çarpım temsiline sahiptir. Kabul edelim ki, $\theta_{\nu,n}(x, q^2)$ ler $\mathfrak{z} \mapsto \mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n nci pozitif reel kökleri olsun. Bu halde, $\mathcal{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun sonsuz çarpım temsili

$$\mathcal{J}'_{\nu}(x, \mathfrak{z}; q^2) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{\theta_{\nu, n}^2(x, q^2)} \right) \quad (4.15a)$$

olarak elde edilir ve bunun sonucunda da, Denklem (4.15a) nın her iki yanının logaritmik türevleri alınarak

$$1 + \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2\mathfrak{z}^2}{\theta_{\nu, n}^2(x, q^2) - \mathfrak{z}^2} \quad (4.15b)$$

sonucuna varılır. Sonuç olarak, $|\mathfrak{z}| < \theta_{\nu, 1}(x, q^2)$ için

$$\left| \left(1 + \mathfrak{z} \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)^2 - 1 \right| \leq \left(r \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, r; q^2)} \right)$$

elde edilir. Böylelikle, $R_{\mathcal{LC}}(\mathcal{J}_{\nu}(x, \mathfrak{z}; q^2))$ Bernoulli lemniskat konvekslik yarıçapı

$$\left(r \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, r; q^2)} \right) - 1 = 0$$

denkleminin $(0, \theta_{\nu, 1}(x, q^2))$ açık aralığındaki en küçük pozitif kökü olduğu sonucuna varılır. İspatı tamamlamak için, yukarıda elde edilen denklemin $(0, \theta_{\nu, 1}(x, q^2))$ açık aralığında tek bir reel köke sahip olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, $v_{\nu} : (0, \theta_{\nu, 1}(x, q^2)) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$v_{\nu}(r) = \left(r \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, r; q^2)} \right) - 1$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Basit bir hesaplama ile

$$v'_{\nu}(r) = 8r \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\theta_{\nu, n}^2(x, q^2)}{(\theta_{\nu, n}^2(x, q^2) - r^2)^2} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2r^2}{(\theta_{\nu, n}^2(x, q^2) - r^2)^2} + 1 \right) > 0$$

olacağından $v_{\nu}(r)$ fonksiyonunun $(0, \theta_{\nu, 1}(x, q^2))$ aralığında kesin artan olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca

$$\lim_{r \searrow 0} v_{\nu}(r) = -1 < 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{r \nearrow \theta_{\nu, 1}(x, q^2)} v_{\nu}(r) = \infty$$

limitlerini elde etmek kolaydır. Böylelikle, $R_{\mathcal{LC}}(\mathcal{J}_{\nu}(x, \mathfrak{z}; q^2))$ Bernoulli lemniskat konvekslik yarıçapı

$$\left(r \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathcal{J}''_{\nu}(x, r; q^2)}{\mathcal{J}'_{\nu}(x, r; q^2)} \right) - 1 = 0$$

denkleminin $(0, \theta_{\nu, 1}(x, q^2))$ aralığındaki yegane köküdür.

b. $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) \in \mathcal{L}\mathcal{P}$ olup, Laguerre-Pólya sınıfı $\mathcal{L}\mathcal{P}$ türev işlemi altında kapalı olduğundan $\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) \in \mathcal{L}\mathcal{P}$ dir. Kabul edelim ki, $\beta_{\nu,n}(x; q^2)$ ler $\mathfrak{z} \mapsto \mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun n nci pozitif sıfırlarını temsil etsin. Bu durumda $\mathfrak{z} \mapsto \mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonunun sonsuz çarpım temsili

$$\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}^2}{\beta_{\nu,n}^2(x; q^2)} \right) \quad (4.16a)$$

olarak elde edilir ve bunun sonucunda da, Denklem (4.16a) nın her iki yanının logaritmik türevleri alınarak

$$1 + \mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{2\mathfrak{z}^2}{\beta_{\nu,n}^2(x; q^2) - \mathfrak{z}^2} \quad (4.16b)$$

sonucuna varılır. Şimdi, Denklem (4.16b) kullanılarak

$$\left| \left(1 + \mathfrak{z} \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)} \right)^2 - 1 \right| \leq \left(r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} \right)$$

elde edilir. Böylece, $\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2)$ fonksiyonu, r_1

$$\left(r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} \right) - 1 = 0$$

denkleminin en küçük pozitif kökü olmak üzere, $|\mathfrak{z}| < r_1$ için lemniskat konvektir. İspatı tamamlamak için bu denklemin $(0, \beta_{\nu,1}(x; q^2))$ aralığında tek bir köke sahip olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\varphi_\nu : (0, \beta_{\nu,1}(x; q^2)) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi_\nu(r) = \left(r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} \right) - 1$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Açıkça görüleceği üzere,

$$\varphi'_\nu(r) = 8r \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\beta_{\nu,n}^2(x, q^2)}{(\beta_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2)^2} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2r^2}{(\beta_{\nu,n}^2(x, q^2) - r^2)^2} + 1 \right) > 0$$

olacağından $\varphi_\nu(r)$ fonksiyonunun $(0, \beta_{\nu,1}(x, q^2))$ aralığında kesin artan olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca

$$\lim_{r \searrow 0} \varphi_\nu(r) = -1 < 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{r \nearrow \beta_{\nu,1}(x, q^2)} \varphi_\nu(r) = \infty$$

limitlerini elde etmek kolaydır. Böylelikle, $R_{\mathcal{LC}}(\mathbb{J}_\nu(x, \mathfrak{z}; q^2))$ Bernoulli lemniskat konvekslik yarıçapı

$$\left(r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} \right)^2 - 2 \left(r \frac{\mathbb{J}''_\nu(x, r; q^2)}{\mathbb{J}'_\nu(x, r; q^2)} \right) - 1 = 0$$

denkleminin $(0, \beta_{\nu,1}(x, q^2))$ aralığındaki yegane köküdür.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, iki farklı şekilde normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonlarının lemniskat yıldızlılık, lemniskat konvekslik ve Janowski yıldızlılık, Janowski konvekslik yarıçapı gibi bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. Çalışmada elde edilen sonuçlar özgün olup, sonuçların elde edilmesinde büyük q -Bessel fonksiyonunun reel sıfırlara sahip olduğu gerçeğinden hareketle (Toklu, 2025) çalışmasında elde edilmiş olan Hadamard çarpım temsili önemli bir rol oynamaktadır.

Özel fonksiyonları geometrik özellikleri ile ilgilenen araştırmacılar, bu çalışmada kullanılan argümanlar yardımıyla normalize edilmiş büyük q -Bessel fonksiyonunun başka geometrik özelliklerini elde edebilirler.

Kaynakça

- Aktaş, I., Baricz, A., and Yağmur, N. (2017). Bounds for the radii of univalence of some special functions. *Math. Inequal. Appl.*, 20(3):825–843.
- Aktaş, I., Toklu, E., and Orhan, H. (2018). Radii of uniform convexity of some special functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(6):3010–3024.
- Baricz, Á., Orhan, H., and Szász, R. (2016). The radius of α -convexity of normalized bessel functions of the first kind. *Computational Methods and Function Theory*, 16(1):93–103.
- Baricz, A., Çağlar, M., and Deniz, E. (2014). Starlikeness of bessel functions and their derivatives. *arXiv preprint arXiv:1410.0927*.
- Bouzeffour, F., Ben Mansour, H., and Garayev, M. (2020). On the zeros of the big q -bessel functions and applications. *Mathematics*, 8(2):237.
- Ciccoli, N., Koelink, E., and Koornwinder, T. H. (1998). q -laguerre polynomials and big q -bessel functions and their orthogonality relations. *arXiv preprint math/9805023*.
- Deniz, E., Kazımoğlu, S., and Çağlar, M. (2022). Radii of starlikeness and convexity of the derivatives of bessel function. *Ukrainian Mathematical Journal*, 73(11):1686–1711.
- Duren, P. L. (1983). *Grundlehren der mathematischen wissenschaften*, volume 259.
- Gasper, G. and Rahman, M. (2004). *Basic hypergeometric series*, volume 96. Cambridge university press.
- Goodman, A. W. (1983). Univalent functions, vol. ii, mariner pub. co. *Inc., Tampa, Florida*.
- Ismail, M. (2005). *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, volume 13. Cambridge university press.

- Janowski, W. (1970). *Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families*, volume 23.
- Miller, S. S. and Mocanu, P. T. (2000). *Differential subordinations*, marcel decker inc. New York. Basel.
- Sokół, J. and Ruscheweyh, S. (1999). On some subclasses of starlike functions. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A*, 53(1):117–126.
- Toklu, E. (2019). Radii of starlikeness and convexity of q -mittag-leffler functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(5):2610–2630.
- Toklu, E. (2020). Radii of starlikeness and convexity of generalized struve functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, pages 1–18.
- Toklu, E. (2023). Radii of starlikeness and convexity of generalized k -bessel functions. *Journal of Applied Analysis*, 29(1):171–185.
- Toklu, E. (2025). Starlikeness and convexity properties of the big q -bessel functions. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 51(1):18.
- Toklu, E., Aktaş, I., and Orhan, H. (2019). Radii problems for normalized q -bessel and wright functions. *Acta Univ Sapientiae Mathematica*, 11(1):203–223.