



BÜYÜK TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Yüksek Lisans Tezi

Tuğçe ŞEN

Eskişehir 2020

BÜYÜK TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Tuğçe ŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Temmuz 2020

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Tuğçe ŞEN'in “**Büyük Tümlenmiş Modüller**” başlıklı tezi 28/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BÜYÜK TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Tuğçe ŞEN

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz 2020

Danışman: Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

Bu tezde tümlenmiş modüllerin bir genellemesi olan büyük tümlenmiş modüllerin özellikleri incelenmiştir. Bu amaçla, çalışmamızda kullandığımız temel kavramlardan olan küçük alt modül, büyük alt modül, tümleyen alt modül, genelleştirilmiş alt modül, bir modülün radikali, tümlenmiş modül, genelleştirilmiş tümlenmiş modül tanımları sunulmuş ve ilgili teoremler ispatları ile birlikte detaylı bir şekilde verilmiştir. Büyük tümlenmiş modüllerin, sonlu toplamlar, bölüm modülleri ve homomorfik görüntüler üzerinde kapalı olduğu gösterilmiştir. M bir büyük tümlenmiş modül iken her sonlu M -üretilmiş R -modülün de büyük tümlenmiş olduğu ispatlanmıştır. Bir halkanın büyük tümlenmiş olması için gerekli ve yeterli şart verilmiştir. Ayrıca M 'nin her büyük alt modülü β^* bağıntısı ile M 'de bir büyük tümleyen alt modülüne denkse M 'nin büyük tümlenmiş olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Küçük alt modül, Büyük alt modül, Tümlenmiş modül

ABSTRACT

ESSENTIAL SUPPLEMENTED MODULES

Tuğçe ŞEN

Mathematics Program

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, July 2020

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Figen TAKIL MUTLU

In this thesis, the properties of essential supplemented modules, which are a generalization of the essential modules, are examined. For this purpose, the definitions of small submodule, essential submodule, complement submodule, generalized submodule, radical of a module, supplemented modules and generalized supplemented modules, which are the basic concepts we use in our study, are presented and related theorems are given together with their proofs in detail. It has been shown that essential supplemented modules are closed under the finite sums, factor modules and homomorphic images. While M is an essential supplemented module, each finite M -generated R -module has also been shown to be essential supplemented. Necessary and sufficient condition for a ring to be essential supplemented is given. In addition, M has been shown to be essential supplemented if every essential submodule of M is β^* equivalent to an essential supplement submodule in M .

Keywords: Small submodule, Essential submodule, Supplemented module

TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında çalışmalarımı yönlendiren, bilgilerini ve zamanını esirgemeyen; anlayışı, yapıcı eleştirileri ile teşvik eden değerli hocam Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU, hayatımın her aşamasında destek ve sevgilerini eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Tuğçe ŞEN

Temmuz 2020

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Tuğçe ŞEN

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ..	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1 GİRİŞ	1
1.1 Büyük (Essential) Alt Modüller	6
1.2 Komplement (Tümleyen) Alt Modüller	9
1.3 Küçük (Small) Alt Modüller	13
1.4 Tümleyen (Supplement) Alt Modüller	17
1.5 Genelleştirilmiş Alt Modüller	24
1.6 Bir Modülün Radikali	31
2 BÜYÜK TÜMLENMiŞ MODÜLLER	35
KAYNAKÇA	44
ÖZGEÇMiŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\in$	: eleman
$\forall$	: her
$\exists$	: en az bir
$\cap$	: kesişim
$\subseteq$	: alt küme
$\cong$	: izomorf
$\leq$	: alt modül
$\leq_d$	: dik toplanan alt modül
$\ll$	: küçük alt modül
$\leq_e$	: büyük alt modül
$\ll_g$	: genelleştirilmiş küçük alt modül
$\triangleleft$	: fully invariant alt modül
$\text{Ker } f$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Im } f$	: f homomorfizmasının görüntüsü
$\text{Hom}_R(M, N)$	: M den N'ye R-homomorfizmaların kümesi
$\text{End}_R(M)$	: M'nin R-homomorfizmalar halkası
$\text{Aut}(M)$	: M'nin otomorfizmalar halkası
$\text{Rad}(M)$	: M'nin radikali
$\trianglelefteq$	: ideal
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar halkası

1 GİRİŞ

Bu bölümde çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1 R birimi 1_R olan halka ve $(M, +)$ toplama işlemine göre değişmeli bir grup olsun.

$$\begin{aligned}\bullet : M \times R &\rightarrow M \\ (m, r) &\rightarrow mr\end{aligned}$$

dönüşümü için $m, n \in M$ ve $r, s \in R$ olmak üzere;

$$1) (m + n) \bullet r = m \bullet r + n \bullet r$$

$$2) m \bullet (r + s) = m \bullet r + m \bullet s$$

$$3) m \bullet (r \cdot s) = (m \bullet r) \bullet s$$

koşulları sağlanıyor ise M 'ye bir **sağ R -modül** denir ve M_R ile gösterilir. Eğer her $m \in M$ için $m \cdot (1_R) = m$ ise M modülüne sağ **birimsel (unitary) R -modül** denir. Benzer şekilde M sol R -modülü de tanımlanabilir ve ${}_R M$ ile gösterilir.

Bu çalışma boyunca bütün halkalar birimli ve bütün modüller üniter sağ modül olarak alınacaktır.

Örnek 1.2 Her R halkası kendi üzerinde hem sağ R -modül hem de sol R -modüldür.

Örnek 1.3 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V 'yi bir K -modül olarak alabiliriz.

Tanım 1.4 R bir halka ve I da R 'nin toplamsal bir alt grubu olsun. Eğer her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ ise I 'ya R 'nin **sol ideali**, $ar \in I$ ise I 'ya R 'nin **sağ ideali** denir. I hem sol hem de sağ ideal ise I 'ya R 'nin bir **ideali** denir ve $I \trianglelefteq R$ ile gösterilir.

Tanım 1.5 R bir halka, M bir sağ R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. N , M modülündeki işlemlere göre kendi başına bir R -modül ise N 'ye M 'nin **alt**

modül denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. $\{0_M\}$ ve M , M 'nin **aşık alt modülleri** denir. M modülünün kendisi dışındaki alt modüllerine **öz alt modül** denir.

Teorem 1.6 R bir halka, M bir sağ R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. N 'nin M modülünün alt modülü olması için gerek ve yeter koşul,

$$i) 0_M \in N,$$

$$ii) \forall a, b \in N \text{ ve } \forall r \in R \text{ için } a - br \in N \text{ olmasıdır.}$$

Tanım 1.7 M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. N 'nin M içindeki sol kosetlerinden oluşan $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ kümesi $x + N, y + N \in M/N$ ve $a \in R$ için $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$ ve $(x + N)a = xa + N$ ile tanımlı işlemlerle bir R -modül olur. Bu modüle M 'nin N 'ye göre **bölüm modülü** denir.

Teorem 1.8 (Modüler Kuralı) M bir sağ R -modül olsun. K, L ve N , M modülünün alt modülleri ve $K \subseteq N$ olsun. Bu durumda;

$$K + (L \cap N) = (K + L) \cap N$$

dir.

Kanıt. $K + (L \cap N) \subseteq K + L$ ve $K \subseteq N$ olduğundan,

$$K + (L \cap N) \subseteq K + N \subseteq N$$

dir. Buradan;

$$K + (L \cap N) \subseteq (K + L) \cap N$$

olur. Tersine $x \in (K + L) \cap N$ alalım. $x \in N$ ve $x = y + z$ olacak şekilde $y \in K$ ve $z \in L$ bulunabilir. $K \subseteq N$ olduğundan, $y \in K$ olduğu göz önüne alınarak, $z = x - y \in L \cap N$ bulunur. $x = y + z \in K + (L \cap N)$ olur. Yani;

$$(K + L) \cap N \subseteq K + (L \cap N)$$

elde edilir. Her iki kapsamadan da eşitlik bulunur.

Tanım 1.9 R bir halka, M ve N sağ R -modüller olsunlar. $\phi : M \rightarrow N$ fonksiyonu, $\forall m, n \in M$ ve $\forall r \in R$ için;

$$\begin{aligned}\phi(m + n) &= \phi(m) + \phi(n) \\ \phi(m.r) &= \phi(m).r\end{aligned}\tag{1}$$

koşullarını sağlıyor ise ϕ 'ye M 'den N 'ye **modül homomorfizması** veya **R -homomorfizma** denir.

M 'den N 'ye bütün R -homomorfizmalarının kümesi

$$\text{Hom}_R(M, N) = \{\phi : M \rightarrow N \mid \phi \text{ bir } R\text{-homomorfizma}\}$$

ile gösterilir.

Eğer ϕ homomorfizması, bire-bir ise ϕ 'ye bir **monomorfizma**; ϕ örten ise **epimorfizma**; ϕ hem bire-bir hem de örten ise **izomorfizma** denir.

Ayrıca, eğer $M = N$ ve ϕ bir homomorfizma ise ϕ 'ye **endomorfizma** denir ve bir M modülünün tüm endomorfizmaları kümesi $\text{End}(M)$ ile gösterilir.

$M = N$ ve ϕ bir izomorfizma ise ϕ 'ye **otomorfizma** denir ve M 'nin tüm otomorfizmaları kümesi $\text{Aut}(M)$ ile gösterilir.

Tanım 1.10 M ve N birer R -modül olmak üzere $\phi : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda;

$$\text{Ker}\phi = \{m \in M : \phi(m) = 0_N\}$$

kümesine ϕ 'nin **çekirdeği** denir.

Tanım 1.11 M ve N birer R -modül olmak üzere $\phi : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda;

$$\text{Im}\phi = \{\phi(m) : m \in M\}$$

kümesine ϕ 'nin **görüntüsü** denir.

Tanım 1.12 M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $\exists L \leq M$ için $N \cap L = 0$ ve $M = N + L$ ise M 'ye N ile L 'nin **dik toplamı** denir ve $M = N \oplus L$ ile gösterilir. N ve L 'ye de M 'nin **dik toplananları** denir ve sırasıyla $N \leq_d M, L \leq_d M$ ile gösterilir.

Örnek 1.13 $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_6$ modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_6$ nın alt modülleri $\langle \bar{0} \rangle = \{0\}$, $\langle \bar{1} \rangle = M$, $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ ve $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dür. $M = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \{0\}$ olduğundan $M = \langle \bar{2} \rangle \oplus \langle \bar{3} \rangle$ elde edilir.

Tanım 1.14 M bir modül olsun. M modülünün kendisinden ve sıfırdan başka dik toplananı yok ise M 'ye **ayrıştırılmaz (indecomposable) modül** denir.

Örnek 1.15 $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Q}$, ayrıştırılmaz bir modüldür. Çünkü $N_1 \oplus N_2 = \mathbb{Q}$ olacak şekilde iki alt modülü yoktur. N_1 ve N_2 bu özellikte iki modül olsaydı, $0 \neq \frac{a}{b} \in N_1$ ve $0 \neq \frac{c}{d} \in N_2$ için,

$$0 \neq bc\frac{a}{b} = da\frac{c}{d} \in N_1 \cap N_2 = 0$$

çelişkisi bulunurdu.

Örnek 1.16 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ olmak üzere $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle \oplus \langle \bar{3} \rangle$ olduğundan ayrıştırılmaz modül değildir.

Tanım 1.17 M bir R -modül olsun. Eğer M modülünün $\{0\}$ ve kendisinden başka alt modülü yok ise M 'ye **basit (simple) modül** denir.

Örnek 1.18 Cisimler kendi üzerinde bir simple modüldür.

Tanım 1.19 Bir M modülü için M modülündeki her alt modül dik toplanan ise M modülüne **yarı-basit (semisimple) modül** denir.

Örnek 1.20 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ olmak üzere $\mathbb{Z}_6$ nın tüm alt modülleri $\mathbb{Z}_6$ nın direkt toplamı olduğundan $\mathbb{Z}_6$ semisimple modüldür.

Teorem 1.21 (1. İzomorfizma Teoremi) $\theta : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda,

$$M/\text{Ker}\theta \cong \text{Im}\theta$$

dır.

Kanıt. $\beta : M/\text{Ker}\theta \rightarrow \text{Im}\theta$ fonksiyonunu her $m + \text{Ker}\theta \in M/\text{Ker}\theta$ için

$$\beta(m + \text{Ker}\theta) = \theta(m)$$

şeklinde tanımlayalım. $m_1 + \text{Ker}\theta, m_2 + \text{Ker}\theta \in M/\text{Ker}\theta$ olmak üzere β nın modül homomorfizması olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \beta((m_1 + \text{Ker}\theta) + (m_2 + \text{Ker}\theta)) &= \beta(m_1 + m_2 + \text{Ker}\theta) \\ &= \theta(m_1 + m_2) \\ &= \theta(m_1) + \theta(m_2) \\ &= \beta(m_1 + \text{Ker}\theta) + \beta(m_2 + \text{Ker}\theta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta((m_1 + \text{Ker}\theta)r) &= \beta(m_1r + \text{Ker}\theta) \\ &= \theta(m_1r) \\ &= \theta(m_1)r \\ &= \beta(m_1 + \text{Ker}\theta)r \end{aligned}$$

olduğundan β bir modül homomorfizmasıdır. β nın bire-bir olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} m_1 + \text{Ker}\theta = m_2 + \text{Ker}\theta &\Leftrightarrow m_1 - m_2 \in \text{Ker}\theta \\ &\Leftrightarrow \theta(m_1 - m_2) = 0_R \\ &\Leftrightarrow \theta(m_1) - \theta(m_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta(m_1) = \theta(m_2) \\ &\Leftrightarrow \beta(m_1 + \text{Ker}\theta) = \beta(m_2 + \text{Ker}\theta) \end{aligned}$$

olur ki β iyi tanımlı ve bire-birdir. β nın örten olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \text{Im}\beta &= \{\beta(m + \text{Ker}\theta) : m + \text{Ker}\theta \in M/\text{Ker}\theta\} \\ &= \{\theta(m) : m \in M\} \\ &= \text{Im}\theta \end{aligned}$$

olduğundan β örtendir. Böylece β bir izomorfizma olup $M/Ker\theta \cong Im\theta$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 1.22 K, L ve N modülleri M 'nin alt modülleri olsunlar. $K + L = M$ ve $(K \cap L) + N = M$ olsun. Bu durumda

$$K + (L \cap N) = L + (K \cap N) = M$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} K + (L \cap N) &= K + (L \cap K) + (L \cap N) \\ &= K + (L \cap ((L \cap K) + N)) \\ &= K + (L \cap M) = K + L = M \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} L + (K \cap N) &= L + (K \cap L) + (K \cap N) \\ &= L + (K \cap ((K \cap L) + N)) \\ &= L + (K \cap M) = K + L = M \end{aligned}$$

olduğundan

$$K + (L \cap N) = L + (K \cap N) = M$$

dir.

1.1 Büyük (Essential) Alt Modüller

Tanım 1.1.1 M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $L \leq M$ olmak üzere $L \cap N = 0$ iken $L = 0$ ise veya denk olarak, $L \neq 0$ olan her $L \leq M$ için $L \cap N \neq 0$ ise, N 'ye M 'de **büyük (essential) alt modül** denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.2 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_{12}$ modülünü göz önüne alalım. $\langle \bar{2} \rangle$ alt modül, $\mathbb{Z}_{12}$ modülünün büyük alt modülüdür. $\mathbb{Z}_{12}$ modülünün alt modülleri; $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$, $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$, $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, $\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$,

$\langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}\}$, $\langle \bar{1} \rangle = M$ şeklindedir. $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$, $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}\}$, $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$, $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}\}$, $\langle \bar{2} \rangle \cap \mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$ olduğundan $\langle \bar{2} \rangle \leq_e \mathbb{Z}_{12}$ dir.

Örnek 1.1.3 $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_6$ modülünü göz önüne alalım. $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{0} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle \neq 0$, $\langle \bar{3} \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$, $\mathbb{Z}_6$ modülünün büyük alt modülleri değildir.

Tanım 1.1.4 M bir R -modül olsun. Her $0 \neq N \leq M$ için $N \leq_e M$ ise (yani her alt modülü büyük alt modül olan) M 'ye **düzgün (uniform) modül** denir.

Örnek 1.1.5 $0 \neq N \leq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ($N = n\mathbb{Z}, n \neq 0$) alalım. $M \cap N = 0$ olacak şekilde $M \leq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ için $M = 0$ olduğunu gösterelim. $M = m\mathbb{Z}$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır. $nm \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = 0$ olup $nm = 0$ dır. Bu durumda $n \neq 0$ olduğundan $m = 0$ dır. O halde $m\mathbb{Z} = M = 0$ yani $N \leq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ dir.

Önerme 1.1.6 M bir R -modül olsun.

- i) $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter şart $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ dır.
- ii) $K \leq N \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter şart $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olmasıdır.
- iii) $N \leq_e M$ ve $K \leq M$ ise $N \cap K \leq_e K$ dır.
- iv) $f : M \longrightarrow N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ ise $f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

Kanıt.

- i) $(\implies)$ $N \leq_e M$ olsun. $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olduğunu gösterelim. R halkası birimli olduğundan $m \in mR$ dir. Böylece mR alt modülü boştan farklıdır. $N \leq_e M$ ise $N \cap mR \neq 0$ dır. Dolayısıyla $0 \neq mr \in N$ olacak şekilde $r \in R$ vardır.

$(\impliedby)$ $0 \neq m \in L \leq M$ olsun. Bu durumda bir $r \in R$ vardır ki $0 \neq mr \in N \cap L$ dir. O halde $N \leq_e M$ dir.

ii) $(\implies) K \leq N \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$ olsun. Öncelikle $K \leq_e N$ olduğunu gösterelim. $0 \neq L \leq N$ alalım. Bu durumda $0 \neq L \leq M$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap L \neq 0$ dir. Buradan $K \leq_e N$ dir. Şimdi $N \leq_e M$ olduğunu göstermek için $0 \neq T \leq M$ alalım. $0 \neq K \cap T \leq N \cap T$ dir. Dolayısıyla $N \leq_e M$ dir.

$(\impliedby) K \leq N \leq M$ olmak üzere $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olsun. $K \leq_e M$ olduğunu gösterelim. $0 \neq T \leq M$ alalım. Bu durumda $0 \neq N \cap T \leq N$ dir. $K \leq_e N$ olduğundan $0 \neq K \cap (N \cap T) = K \cap T$ dir. $K \leq_e M$ dir.

iii) $N \leq_e M$ ve $K \leq M$ olsun. $N \cap K \leq_e K$ olduğunu gösterelim. $L \leq K$ ve $(N \cap K) \cap L = 0$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= (N \cap K) \cap L \\ &= N \cap (K \cap L) \\ &= N \cap L \end{aligned}$$

olur. $N \leq_e M$ olduğundan $L = 0$ dir. Buradan $(N \cap K) \leq_e K$ dir.

iv) $f : M \longrightarrow N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ olsun. $f^{-1}(B) \leq_e M$ olduğunu gösterelim. $f^{-1}(B) \cap A = 0$ olacak şekilde $A \leq M$ alalım. $c \in B \cap f(A)$ için $c = f(a)$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. $c = f(a) \in B$ olduğundan $f(a) \in f(A) \cap B$ ve $a \in A \cap f^{-1}(B) = 0$ dir. Bu durumda $c = f(a) = f(0) = 0$ olur ki $f(A) \cap B = 0$ dir. $B \leq_e N$ olduğundan $f(A) = 0$ dir. Böylece $A \leq \text{Ker} f = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(B)$ dir. Buradan $A = f^{-1}(B) \cap A = 0$ dir. $f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

Önerme 1.1.7 $K \leq N \leq M$ için $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ ise $N \leq_e M$ dir.

Kanıt. $N \cap U = 0$ ve $U \leq M$ olsun. Eğer $U \leq K$ ise, $U \leq N$ olup $U = U \cap N = 0$ bulunur. Eğer $K < U$ ise, $\frac{U}{K} \neq \bar{0}$ dir. $N \cap U = 0$ olduğundan $\frac{N}{K} \cap \frac{U}{K} = \bar{0}$ olup $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{U}{K} = \bar{0}$ yani $U \leq K$ dir. Bu da $K < U$ olmasıyla çelişir. O halde $N \leq_e M$ dir.

Tanım 1.1.8 M ve N birer R -modül olmak üzere $f : M \longrightarrow N$ bir R -modül monomorfizması olsun. $f(M)$, N 'nin büyük alt modülü (yani $\text{Im} f \leq_e N$) ise f 'ye **büyük monomorfizma** denir.

Önerme 1.1.9 M bir R -modül ve $K \leq M$ için aşağıdakiler denktir:

i) $K \leq_e M$ dir.

ii) $i_K : K \longrightarrow M$ içermeye dönüşümü büyük monomorfizmadır.

iii) Her N modülü ve her bir $h \in \text{Hom}_R(M, N)$ için $(\text{Ker} h) \cap K = 0$ ise $\text{Ker} h = 0$ dir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $K \leq_e M$ olsun. $i_K : K \longrightarrow M$ için $i_K(K) = K \leq_e M$ olur. Böylece i_K büyük monomorfizmadır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $h : M \longrightarrow N$ bir homomorfizma ve $(\text{Ker} h) \cap K = 0$ olsun. $i_K : K \rightarrow M$ büyük monomorfizma olduğundan $K \leq_e M$ dir. Böylece $\text{Ker} h = 0$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $L \leq M$ için $L \cap K = 0$ olsun. $\pi_L : M \longrightarrow M/L$ doğal epimorfizmasını göz önüne alalım. Açıktır ki $\text{Ker} \pi_L = L$ ve $L \cap K = 0$ olduğundan kabulden $\text{Ker} \pi_L = T = 0$ olur. Böylece $K \leq_e M$ dir.

1.2 Komplement (Tümleyen) Alt Modüller

Tanım 1.2.1 M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. $N \cap K = 0$ özelliğini sağlayan maksimal K alt modülüne N 'nin M 'deki **komplementi (tümleyeni)** denir.

Örnek 1.2.2 F bir cisim ve $M_R = (F \oplus F)_F$ olsun. $B = (1, 0)F = \{(a, 0) \mid a \in F\} \leq M_R$ alalım. $C = (x, 1)F = \{(xf, f) \mid f \in F\}$ olmak üzere C, B alt modülünün M_R 'de bir komplementidir.

Önerme 1.2.3 M bir R -modül ve $N, K \leq M$ olmak üzere $N \cap K = 0$ olsun. Bu durumda N 'nin M 'de bir L komplementi vardır öyle ki $K \leq L$ dir. Dolayısıyla L 'nin de N 'yi içeren bir N' komplementi vardır ([3]).

Önerme 1.2.4 M bir R -modül ve $L \leq M$ olsun. $K \leq M$, L 'nin M 'de bir komplementi ise $K \oplus L \leq_e M$ 'dir.

Kanıt. $N \leq M$ ve $(K \oplus L) \cap N = 0$ alalım. $N = 0$ olduğunu gösterelim.

İddia: $K \cap (L + N) = 0$ dır.

$k \in K \cap (L + N)$ alalım. $k \in (L + N)$ ve $k \in K$ dır. $l \in L$ ve $n \in N$ olmak üzere $k = l + n$ dir.

$$k - l = n \in (K + L) \cap N = 0$$

olduğundan $n = 0$ elde edilir ve $K \cap L = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} l &= k \in K \cap L = 0 \\ \implies k &= 0 \end{aligned}$$

dır. O halde

$$K \cap (L + N) = 0$$

ve $L \leq L + N$ dir. L , K ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $L + N \leq L$ olmalıdır. Böylece $L \leq L + N \leq L$ bulunur ki buradan

$$L = L + N$$

dir. Böylece $N \leq L$ dir.

$$N = (K + L) \cap N = 0$$

olduğundan $N = 0$ dır. Dolayısıyla $K \oplus L \leq_e M$ dir.

Teorem 1.2.5 M bir R -modül ve $N, K \leq M$ olmak üzere $N \cap K = 0$ olsun. K 'nın M 'de bir N komplementi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{N + K}{K} \leq_e \frac{M}{K}$$

olmasıdır.

Kanıt. ($\implies$) K , N 'nin M 'de bir komplementi olsun. $\frac{N+K}{K} \cap \frac{L}{K} = 0$ olacak şekilde bir $K \leq L \leq M$ alalım. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{N+K}{K} \cap \frac{L}{K} &= \frac{K}{K} \\ \frac{(N+K) \cap L}{K} &= \frac{K}{K} \\ (N+K) \cap L &= K\end{aligned}$$

dır. Modüler kuralından

$$(N \cap L) + K = K$$

dır. Buradan $N \cap L \leq K$ bulunur. Böylece

$$N \cap L \leq N \cap K = 0$$

elde edilir. K , N 'nin M 'de arakesiti maksimal olan alt modülü olduğundan $L = K$ olur. $\frac{N+K}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ bulunur.

($\Leftarrow$) $\frac{N+K}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ olsun. $N \cap L = 0$ ve $K \leq L \leq M$ olacak biçimde keyfi bir L ve $l \in (N+K) \cap L$ alalım. Bu durumda $l \in (N+K)$ ve $l \in L$ dir. $l = n + k$ olacak biçimde $n \in N$ ve $k \in K$ vardır.

$$n = l - k \in N \cap L = 0$$

olup $n = 0$ bulunur. Böylece $l = k \in K$ olup

$$(N+K) \cap L = K$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{N+K}{K} \cap \frac{L}{K} = 0$$

olup kabulümüzden $\frac{L}{K} = 0$ yani $L = K$ olur ki K maksimaldir. Böylece K , N 'nin M 'de bir komplementidir.

Tanım 1.2.6 M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. N , M 'de herhangi bir alt modülün komplementi ise N 'ye M 'de bir **komplement alt modül** denir ve $N \leq_c M$ ile gösterilir.

Bir M modülü için $0, M \leq_c M$ olduğu açıktır. Ayrıca M 'nin her dik toplananı M 'nin bir komplement alt modülüdür. Fakat bir modülün komplement alt modülü bir dik toplanan olmak zorunda değildir.

Önerme 1.2.7 M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e K$ olacak şekilde bir $K \leq_c M$ vardır.

Kanıt. N' , M 'de N 'nin bir komplementi olsun. N' , M de N 'nin bir komplementi olduğundan $N' \cap N = 0$ dir. N' 'nin M de $N \subseteq K$ olacak şekilde bir K komplementi vardır. $0 \neq L \leq K$ olsun. $N' \subseteq L + N'$ olduğundan

$$(L + N') \cap N \neq 0$$

dir. $0 \neq n \in (L + N') \cap N$ olmak üzere $n \in (L + N')$ ve $n \in N$ dir. $l \in L$ ve $n' \in N'$ alalım. $n = l + n'$ dır. $n' = n - l \in N' \cap K = 0$ olduğundan $n' = 0$ ve $N \cap L \neq 0$ olmak üzere $n = x \in N \cap L$ dir. $N \leq_e K$ bulunur.

Önerme 1.2.8 M bir R -modül ve $N \leq M$ olmak üzere, $N \leq_c M$ olması için gerek ve yeter şart $N \leq_e K \leq M$ iken $N = K$ olmasıdır.

Kanıt. $(\implies)$ $N \leq_c M$ ve $N \leq_e K \leq M$ olsun. $N = K$ olduğunu gösterelim. $L \leq M$ olmak üzere N , M 'de L 'nin bir komplementi olsun. Böylece $N \cap L = 0$ olur. $0 = N \cap L \leq_e K \cap L$ ise $K \cap L = 0$ dir. Bu durumda $N = K$ olur.

$(\impliedby)$ $N \leq M$ olduğundan Önerme 1.2.7'den N 'nin M 'de bir K komplementi vardır. $N \leq_e K \leq_c M$ dir. $N = K$ olduğundan $N \leq_c M$ dir.

Önerme 1.2.9 M bir R -modül ve $K, N \leq M$ olmak üzere $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.

Kanıt. $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ olsun. $K \leq_c M$ olduğunu gösterelim. Buradan $K' \leq N$ için K, K' nün N 'de komplementi ve $N' \leq M$ için de N, N' nün M 'de komplementi olsun. $x \in K \cap (K' + N')$ alalım. $k' \in K', n' \in N'$ için $x = k' + n'$ dır. $x - k' = n' \in N' \cap N = 0$ olur. Böylece $x = k' \in K' \cap K = 0$

olduğundan $K \cap (K' + N') = 0$ elde edilir. Farzedelim ki, $K \leq_e L \leq M$ olsun. Bu durumda $0 = K \cap (K' + N') \leq_e L \cap (K' + N')$ olur ki $L \cap (K' + N') = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} [N \cap (L + N')] \cap K' &= (N \cap K') \cap (L + N') \\ &= K' \cap (L + N') = 0 \end{aligned}$$

olur. Fakat $K \subseteq N$ ve $K \subseteq L + N'$ olduğundan $K \subseteq N \cap (L + N')$ dır. K, K' nün N' de komplementi olduğundan $K \cap K' = 0$ koşulu altında K' maksimal alt modüldür. $K \subseteq N \cap (L + N')$ ve $[N \cap (L + N')] \cap K' = 0$ olduğundan $K = N \cap (L + N')$ olur. Böylece $(N + L) \cap N' = 0$ dır. N, N' nün M' de komplementi olduğundan $N \cap N' = 0$ koşulu altında N' maksimal alt modülüdür ve $N \subseteq N + L$ olduğundan $N = N + L$ dir. Buradan $L \leq N$ olur. $L = L \cap (L + N') \leq N \cap (L + N') = K$ olduğundan $K = L$ dir. Önerme 1.2.8'den $K \leq_c M$ elde edilir.

1.3 Küçük (Small) Alt Modüller

Tanım 1.3.10 M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. $M = N + L$ koşulunu sağlayan her $L \leq M$ için $M = L$ oluyorsa N 'ye M 'nin **küçük (small) alt modülü** denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. [2]

Örnek 1.3.11 Sıfırdan farklı herhangi bir R -modülün sıfır alt modülü küçük alt modüldür.

Örnek 1.3.12 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_8$ modülünü göz önüne alalım. $\langle \bar{4} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle$ alt modülleri, $\mathbb{Z}_8$ de küçük alt modüllerdir.

Tanım 1.3.13 M bir R -modül olmak üzere M modülünün her öz alt modülü M 'nin küçük alt modülü ise, M modülüne **hollow** modül denir. [2]

Örnek 1.3.14 F bir cisim olmak üzere $M = F_F$ olsun. M bir hollow modüldür.

Teorem 1.3.15 K, N ve M R -modüller olsunlar.

- 1) Eğer $K \leq N \leq M$ ve $K \ll N$ ise $K \ll M$ dir.
- 2) Eğer $N \ll M$ ise N modülündeki herhangi bir alt modül de M içinde küçük alt modül olur.
- 3) Eğer $K \subset N \subset M$ ise $N \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ ve $N/K \ll M/K$ olmasıdır.
- 4) Eğer $K \subset N \subset M$, $N \leq_d M$ ise $K \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll N$ olmasıdır.
- 5) $H \leq M$ olmak üzere $H + K \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $H \ll M$ ve $K \ll M$ olmasıdır.

Kanıt. 1) M bir R -modül, $K \ll N$ ve $L \leq M$ olmak üzere $K + L = M$ olsun. $K \ll M$ olduğunu görmek için $M = L$ olduğunu görelim. Modüler kuralından,

$$\begin{aligned} N &= N \cap M \\ &= N \cap (K + L) \\ &= K + (N \cap L) \end{aligned}$$

dir. $K \ll N$ olduğundan $N = N \cap L$ dir. Böylece $N \leq L$ olup $K \leq N = N \cap L \leq L$ den dolayı $K \leq L$ dir. Dolayısıyla $M = K + L = L$ olduğundan $K \ll M$ elde edilir.

2) $N \ll M$ olsun. $K \leq N$ ve $L \leq M$ olmak üzere $M = K + L$ olsun. K modülünün N 'de küçük alt modül olduğunu görmek için $M = L$ olduğunu görelim. $M = K + L \leq N + L$ olduğundan dolayı $M = N + L$ yazılabilir. $N \ll M$ olduğundan $L = M$ elde edilir ki $K \ll M$ olur.

3) $(\Rightarrow)$ 2)'den dolayı $N \ll M$ olduğunda $K \ll M$ elde edilir. $N/K \ll M/K$ olduğunu görelim. Bir $K \subset L$ alt modülü için $M/K = N/K + L/K$ olsun. Buradan $M = N + L$ yazılabilir. $N \ll M$ olduğundan $M = L$ elde edilir. Dolayısıyla $N/K \ll M/K$ olur.

$(\Leftarrow)$ $L \leq M$ için $M = L + N$ olsun. $N \ll M$ olduğunu görmek için $L = M$

olduğunu görelim. $K \leq N$ olduğundan dolayı $N = N + K$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} M &= N + K + L \\ &= N + (K + L) \end{aligned}$$

ve $K \leq K + L$ den $M/K = N/K + (K + L)/K$ yazılabilir. $N/K \ll M/K$ olduğundan

$$M/K = (K + L)/K$$

olur. Böylece $M = K + L$ yazılabilir. $K \ll M$ olduğundan $M = L$ elde edilir. 4) ($\Rightarrow$) $K \leq N \leq M$ ve $N \leq_d M$ ve $K \ll M$ olsun. Bir $L \leq M$ için $M = N \oplus L$ yazılabilir. $S \leq N$ olmak üzere $N = K + S$ olsun. $K \ll N$ olduğunu görmek için $N = S$ olduğunu görelim. Buradan

$$\begin{aligned} M &= N + L \\ &= K + S + L \end{aligned}$$

yazılabilir. $K \ll M$ olduğundan $M = S + L$ elde edilir. $M = N \oplus L$ olduğundan $(N \cap L) = 0$ dır. Modüler kuralından,

$$\begin{aligned} N &= N \cap M \\ &= N \cap (S + L) \\ &= S + (N \cap L) \end{aligned}$$

dir. $(N \cap L) = 0$ olduğundan $N = S$ dir. Dolayısıyla $K \ll N$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $M = K + S$ için $S \leq M$ olsun. $K \ll M$ için $M = S$ olduğunu görelim. Modüler kuralından,

$$\begin{aligned} N &= N \cap M \\ &= N \cap (K + S) \\ &= K + (N \cap S) \end{aligned}$$

dir. $K \ll N$ olduğundan $N = (N \cap S)$ ve $N \leq S$ dir. $K \leq N = (N \cap S) \leq S$ olduğundan $K \leq S$ olup $M = S$ dir. Dolayısıyla $K \ll M$ dir.

5) $(\Rightarrow) H + K \ll M$ olsun. $H \ll M$ ve $K \ll M$ olduğunu gösterelim. $L \leq M$ için $M = H + L$ olmak üzere $M = L$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned} M = H + L &\Rightarrow M + K = H + K + L \\ &\Rightarrow M = (H + K) + L \\ &\Rightarrow M = L \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} M = K + L &\Rightarrow M + H = (H + K) + L \\ &\Rightarrow M = (H + K) + L \\ &\Rightarrow M = L \end{aligned}$$

olur.

$(\Leftarrow) H \ll M$ ve $K \ll M$ olsun. $H + K \ll M$ olduğunu gösterelim. $L \leq M$ için $M = (K + H) + L$ olsun. $H \ll M$ olduğundan $M = K + L$ elde edilir. $K \ll M$ olduğundan $M = L$ elde edilir. Böylece $H + K \ll M$ dir.

Teorem 1.3.16 $f : M \rightarrow N$ bir R -homomorfizma olsun. $K \ll M$ ise $f(K) \ll N$ dir.

Kanıt. $U \leq f(M)$ olmak üzere $f(K) + U = N$ olsun. $\forall m \in M$ için $f(k) + u = f(m)$ olacak biçimde $k \in K$ ve $u \in U$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} u &= f(m) - f(k) \\ &= f(m - k) \end{aligned}$$

olur ki $f(m - k) \in U$ ve $(m - k) \in f^{-1}(U)$ elde edilir. Böylece $m \in K + f^{-1}(U)$ olur. $M \leq K + f^{-1}(U) \leq M$ olduğundan

$$M = K + f^{-1}(U)$$

dir. $K \ll M$ olduğundan $f^{-1}(U) = M$ dir. Buradan $U = f(M) = N$ dir. O halde $f(K) \ll f(M) = N$ bulunur.

Tanım 1.3.17 $f : M \longrightarrow N$ bir örten R -homomorfizma olsun. Eğer $\text{Ker } f \ll M$ ise f 'ye bir **küçük epimorfizma** denir.

Önerme 1.3.18 M bir R -modül ve $K \leq M$ olmak üzere aşağıdakiler denktir:

- i) $K \ll M$ dir.
- ii) $P_K : K \longrightarrow M/K$ doğal epimorfizması küçük epimorfizmadır.
- iii) Her N_R modülü ve her bir $h \in \text{Hom}_R(N, M)$ için $\text{Im } h + K = M$ ise $\text{Im } h = M$ dir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $K \ll M$ olsun. $P_K : M \longrightarrow M/K$ doğal dönüşümü için $\text{Ker } P_K = K$ dir. $K \ll M$ olduğundan $\text{Ker } P_K \ll M$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Bir N_R modülü ve $h : M \longrightarrow N$ bir homomorfizması için $\text{Im } h + K = M$ olsun. $P_K : M \longrightarrow M/K$ epimorfizması küçük olduğundan $K \ll M$ olur. Dolayısıyla $\text{Im } h = M$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Bir N_R modülü ve her bir $h \in \text{Hom}_R(N, M)$ için $\text{Im } h + K = M$ iken $\text{Im } h = M$ olsun. $L \leq M$ için $L + K = M$ olmak üzere $i : L \longrightarrow M$ içerme monomorfizmasını göz önüne alalım. Açıktır ki $M = K + \text{Im } i$ dir. Kabulümüzden $M = \text{Im } i$ olur. Böylece $K \ll M$ dir.

1.4 Tümleyen (Supplement) Alt Modüller

Ayrıntılı bilgi için [2], [5] ve [8] önerilir.

Tanım 1.4.1 M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olsun. Eğer $M = U + V$ ve V bu özelliğe göre minimal ise V , U 'nun M 'de bir **tümleyenidir (supplementidir)** denir. [2]

Teorem 1.4.2 M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:

- i) $V, \{T \subset M \mid U + T = M\}$ kümesinde minimaldir.

ii) $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ dir. [2]

Kanıt. $i) \Rightarrow ii)$ $U, V \leq M$ ve $V, \{T \leq U \mid U + T = M\}$ kümesinde minimal olsun. $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olduğunu gösterelim.

İddia: Bir $T \subseteq V$ alt modülü için $(U \cap V) + T = V$ olduğunda $V = T$ dir.

$$\begin{aligned} M &= U + V \\ &= U + ((U \cap V) + T) \\ &= U + T \end{aligned}$$

dir. $U \leq M, T \leq V$ ve V 'nin minimalliğinden $V = T$ olur. Dolayısıyla $U \cap V \ll V$ dir.

$ii) \Rightarrow i)$ $U, V \leq M, U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olsun. V modülünün minimal olduğunu gösterelim. $T \subseteq V$ ve $U + T = M$ şartını sağlayan her $T \subseteq V$ alt modülü için $T = V$ olduğu gösterilirse istenen elde edilir. Bu durumda $U + T = M$ olsun.

$$\begin{aligned} V &= M \cap V \\ &= (U + T) \cap V \end{aligned}$$

dir. Modüler kuralından

$$V = (U \cap V) + T$$

dir. $U \cap V \ll V$ olduğundan $T = V$ dir. V minimaldir.

Örnek 1.4.3 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{0} \rangle \ll \langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{0} \rangle \ll \langle \bar{3} \rangle$ olduğundan $\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir ve $\langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{2} \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir.

Önerme 1.4.4 M bir R -modül, $U, V \leq M$ için V, U 'nun M 'de bir tümleniyi olsun.

1) $W \leq U$ için $W + V = M$ ise V, W 'nun bir tümleyenidir.

- 2) Eğer $K \ll M$ ise $V, U + K$ 'nin M 'de bir tümleyeni.
- 3) Eğer $K \ll M$ ise $V \cap K \ll V$ dir.
- 4) $L \leq U$ olmak üzere $(V + L)/L, U/L$ 'nin M/L 'de bir tümleyeni.

Kanıt. 1) M bir R -modül ve $U, V \leq M$ için V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olsun. $W \leq U$ için $W + V = M$ ise V, W 'nun bir tümleyeni olduğunu gösterelim. $X \leq V$ alt modülü için $M = W + X$ ise $W \leq U$ olduğundan $U + X = M$ olur. V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan V 'nin minimalliği gereği $X = V$ olur. Dolayısıyla V, M içinde W 'nin tümleyeni.

2) V, U 'nun M 'de tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve V bu koşulu sağlayan minimal alt modüldür. Ayrıca $M = U + V + K$ dir. Bir $X \leq V$ için $M = U + K + X$ olsun. Böylece $K \ll M$ olduğundan dolayı $M = U + X$ bulunur. V, U 'nun M 'de tümleyeni olduğundan V 'nin minimalliği gereği $V = X$ elde edilir. Dolayısıyla V, M 'de $U + K$ 'nin tümleyeni olur.

3) $K \ll M$ olsun. $V \cap K \ll V$ olduğunu gösterelim. $X \leq V$ için $(V \cap K) + X = V$ olsun.

$$\begin{aligned} M &= U + V \\ &= U + (V \cap K) + X \\ &= U + X \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $X = V$ olup $V \cap K \ll V$ dir.

4) V, U 'nun M 'de bir tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $V \cap U \ll V$ dir. $L < U$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{M}{L} &= \frac{(U + V)}{L} \\ &= \frac{(V + U + L)}{L} \\ &= \frac{V + L}{L} + \frac{U}{L} \end{aligned}$$

dir. $\frac{U}{L} \cap \frac{V+L}{L} = \frac{U \cap (V+L)}{L}$ olduğundan $\frac{U \cap (V+L)}{L} \ll \frac{V+L}{L}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{(U \cap V) + L}{L} + \frac{K}{L} &= \frac{(U \cap V) + K}{L} \\ &= \frac{V + L}{L} \end{aligned}$$

olan herhangi bir $\frac{K}{L} \leq \frac{V+L}{L}$ alalım. Buradan $(U \cap V) + K = V + L$ elde edilir.

$$((U \cap V) + K) \cap V = (U \cap V) + (K \cap V) = (V + L) \cap V = V$$

olur. $U \cap V \ll V$ olduğundan $K \cap V = V$ olup $V \leq K$ dir. Böylece $\frac{V+L}{L} \leq \frac{K}{L}$ olur ki $\frac{K}{L} = \frac{V+L}{L}$ ve $\frac{U \cap (V+L)}{L} \ll \frac{V+L}{L}$ dir. Dolayısıyla $(V + L)/L$, U/L 'nin M/L 'de bir tümleyenidir.

Tanım 1.4.5 ([8]) M bir R -modül olsun. M 'nin her alt modülü M 'de bir alt modülün tümleyeni ise M 'ye **tümlenmiş (supplemented) modül** denir.

Örnek 1.4.6 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_4$ tümlenmiş modüldür.

Örnek 1.4.7 Yarı-basit ve artinian modüller tümlenmiş modüldür.

Örnek 1.4.8 $\mathbb{Z}$ -modül $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ modülünü göz önüne alalım. Öncelikle $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ modülünün alt modüllerini bulalım.

$$\begin{aligned} M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 = \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), \\ & (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{7}) \} \end{aligned}$$

dir. M modülünün alt modülleri;

$$\begin{aligned} \{ & (\bar{0}, \bar{0}) \} = < (\bar{0}, \bar{0}) > \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}) \} = < (\bar{0}, \bar{1}) >, \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6}) \} = < (\bar{0}, \bar{2}) >, \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4}) \} = < (\bar{0}, \bar{4}) >, \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}) \} = < (\bar{1}, \bar{0}) >, \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{6}) \} = < (\bar{1}, \bar{2}) >, \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{7}) \} = < (\bar{1}, \bar{1}) >, \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{4}) \} = < (\bar{1}, \bar{4}) >, \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{4}) \} = < ((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4})) >, \\ \{ & (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{6}) \} = < ((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{4})) > \end{aligned}$$

dir. $< (\bar{0}, \bar{0}) >$, M' nin bir tümleyenidir.

$$M = \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle \oplus \langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle \text{ için}$$

$$\langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle \cap \langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle = \{(0, 0)\} \ll \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$$

olduğundan $\langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$ alt modülü, $\langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir ve benzer şekilde $\langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle \cap \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle \ll \langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle$ olduğundan $\langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle$ alt modülü de $\langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir.

$M = \langle (\bar{0}, \bar{2}) \rangle + M$ için $\langle (\bar{0}, \bar{2}) \rangle \cap M = \langle (\bar{0}, \bar{2}) \rangle$ ve $\langle (\bar{0}, \bar{2}) \rangle \ll M$ olduğundan $\langle (\bar{0}, \bar{2}) \rangle$ alt modülü, M 'nin bir tümleyenidir.

$M = \langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle + M$ için $\langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle \cap M = \langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle$ ve $\langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle \ll M$ olduğundan $\langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle$ alt modülü M 'nin modülünün bir tümleyenidir.

$M = \langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle \oplus \langle (\bar{1}, \bar{4}) \rangle$ için $\langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle \cap \langle (\bar{1}, \bar{4}) \rangle = \langle (\bar{0}, \bar{0}) \rangle$ ve $\langle (\bar{0}, \bar{0}) \rangle \ll \langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle$ olduğundan $\langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle$ alt modülü, $\langle (\bar{1}, \bar{4}) \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir.

$M = \langle (\bar{1}, \bar{2}) \rangle + \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$ için $\langle (\bar{1}, \bar{2}) \rangle \cap \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle = \langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle$ ve $\langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle \ll \langle (\bar{1}, \bar{2}) \rangle$ olduğundan $\langle (\bar{1}, \bar{2}) \rangle$ alt modülü, $\langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir.

$M = \langle (\bar{1}, \bar{4}) \rangle \oplus \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$ için $\langle (\bar{1}, \bar{4}) \rangle \cap \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle = \langle (\bar{0}, \bar{0}) \rangle$ ve $\langle (\bar{0}, \bar{0}) \rangle \ll \langle (\bar{1}, \bar{4}) \rangle$ olduğundan $\langle (\bar{1}, \bar{4}) \rangle$ alt modülü, $\langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir.

$$M = \langle ((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4})) \rangle + \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle \text{ için}$$

$$\langle ((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4})) \rangle \cap \langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle = \langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle \text{ ve } \langle (\bar{0}, \bar{4}) \rangle \ll \langle ((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4})) \rangle$$

olduğundan $\langle ((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4})) \rangle$ alt modülü $\langle (\bar{0}, \bar{1}) \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir.

$M = \langle ((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{4})) \rangle + \langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle$ için $\langle ((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4})) \rangle \cap \langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle = \langle (\bar{0}, \bar{2}) \rangle$ ve $\langle (\bar{0}, \bar{2}) \rangle \ll \langle ((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4})) \rangle$ olduğundan $\langle ((\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{4})) \rangle$ alt modülü $\langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir.

$\mathbb{Z}$ -modül $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$ modülü tümlenmiş bir modüldür.

Tanım 1.4.9 ([6]) M bir R -modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ olan her $V \leq M$ için U nun $V' \leq V$ koşuluna uyan bir V' tümleyeni varsa U 'ya, M 'de **yeterli tümlenen (ample supplement) modüle sahiptir** denir.

Tanım 1.4.10 ([6]) M bir R -modül olsun. M 'nin her alt modülü M 'de yeterli tümleyene sahipse M 'ye bir **yeterli tümlenmiş (amply supplemented) modül** denir.

Örnek 1.4.11 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_6$ modülünün alt modülleri $\{\bar{0}\} = \langle \bar{0} \rangle$, $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \langle \bar{2} \rangle$, $\{\bar{0}, \bar{3}\} = \langle \bar{3} \rangle$ ve $M = \langle \bar{1} \rangle$ dir. $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle \oplus \langle \bar{3} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{0} \rangle \ll \langle \bar{2} \rangle$ olduğundan $\langle \bar{2} \rangle$, $\langle \bar{3} \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir ve $\langle \bar{0} \rangle \ll \langle \bar{3} \rangle$ olduğundan $\langle \bar{3} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle$ alt modülünün bir tümleyenidir. $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{1} \rangle$ ve $\langle \bar{1} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle$ nin $\langle \bar{3} \rangle$ tümleyenini içerdiği için $\langle \bar{2} \rangle$ yeterli tümleyene sahiptir. Benzer şekilde $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{3} \rangle + \langle \bar{1} \rangle$ ve $\langle \bar{1} \rangle$, $\langle \bar{3} \rangle$ ün $\langle \bar{2} \rangle$ tümleyeni içerdiği için $\langle \bar{3} \rangle$ yeterli tümleyene sahiptir. M 'nin her alt modülü M 'de yeterli tümleyene sahip olduğundan M bir yeterli tümlenmiş modüldür.

Tanım 1.4.12 ([2]) M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $M = N + L$ ve $N \cap L \ll M$ olacak biçimde bir $L \leq M$ varsa N 'ye M 'de **zayıf tümleyen (weak supplement) alt modül** denir.

Örnek 1.4.13 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ olmak üzere $\mathbb{Z}_6$ modülünün alt modülleri $\{\bar{0}\} = \langle \bar{0} \rangle$, $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \langle \bar{2} \rangle$, $\{\bar{0}, \bar{3}\} = \langle \bar{3} \rangle$, $\langle \bar{1} \rangle = M$ şeklindedir. $M = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$, ve $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{0} \rangle \ll M$ olduğundan $\langle \bar{2} \rangle$, M 'de $\langle \bar{3} \rangle$ 'ün zayıf tümleyen modülüdür. Ayrıca $\langle \bar{3} \rangle$, M 'de $\langle \bar{2} \rangle$ 'nin zayıf tümleyen modülüdür.

Tanım 1.4.14 ([2]) M bir R -modül olsun. M 'nin her alt modülü M 'de zayıf tümleyene sahipse M 'ye bir **zayıfça tümlenmiş (weakly supplemented) modül** denir.

Örnek 1.4.15 $R = \mathbb{Z}$ ve $M_R = \mathbb{Z}_4$ olmak üzere $\mathbb{Z}_4$ zayıfça tümlenmiş modüldür. $\mathbb{Z}_4$ modülünün alt modülleri $\{\bar{0}\} = \langle \bar{0} \rangle$, $\{\bar{0}, \bar{2}\} = \langle \bar{2} \rangle$ ve M şeklindedir. $M = \langle \bar{0} \rangle + M$ ve $\langle \bar{0} \rangle \cap M = \{\bar{0}\} \ll M$ olduğundan $\langle \bar{0} \rangle$, M 'nin zayıf tümleyen modülüdür. $M = \langle \bar{2} \rangle + M$ ve $\langle \bar{2} \rangle \cap M = \{\bar{0}, \bar{2}\} \ll M$

olduğundan $\langle \bar{0} \rangle$, M 'nin zayıf tümleyen modülüdür. Bu durumda M 'nin her alt modülü M 'de zayıf tümleyene sahip olduğundan M bir zayıfça tümlenmiş modüldür.

Tümlenmiş bir modül zayıfça tümlenmiştir ancak tersi doğru olmayabilir.

Örnek 1.4.16 $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Q}$ bir zayıfça tümlenmiş modül olmasına rağmen tümlenmiş modül değildir ([2, 20.12. Example]).

p bir asal sayı ve $\mathbb{Z}_{(p)} = \{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \}$ olsun. Farzedelim ki K , $\mathbb{Z}_{(p)}$ 'nin $\mathbb{Q}$ 'da tümleyeni olsun. O halde $(K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ 'nin $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 'de tümleyenidir.

$$\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} = \sum_{p \nmid q} \langle \frac{1}{q} + \mathbb{Z} \rangle$$

dir. $(K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ 'nin p . bileşenleri sıfır olduğundan $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 'nin p .bileşeni $(K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ 'nin p -bileşenine eşit olmalıdır. Diğer yandan eğer $p \neq q$ iken $(K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ 'nin q -bileşeni, $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ 'nin q -bileşeninin alt modülüdür. Böylece

$$[(K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z}]_q \subseteq ((K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}) \ll (K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$$

dir. Diğer yandan, bir torsion $\mathbb{Z}$ modülün q -bileşeni bir direkt toplamdır. Böylece $(K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ 'nin q -bileşenleri sıfır olmalıdır. O halde

$$\frac{(K + \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}} = \left[\frac{(K + \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}} \right]_p = \left[\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \right]_p$$

dir. $\mathbb{Z}[1/p] := \{ a/p^k \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \}$ olmak üzere $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_p = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ olduğundan $(K + \mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ ve $K + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[1/p]$ dir. Şimdi $K \cap \mathbb{Z} \subseteq K \cap \mathbb{Z}_{(p)} \ll K$ ve böylece $n \neq 0$ için $n\mathbb{Z} = K \cap \mathbb{Z} \ll \mathbb{Z}[1/p]$ dir. Diğer yandan q asal olduğundan $q \nmid n$ ve $q \nmid p$ olup

$$\mathbb{Z}[1/p] = n\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}[1/p]$$

dir. Çünkü Öklid algoritması ile herhangi bir $k \geq 0$ için $1 = rq + snp^k$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece

$$1/p^k = q(r/p^k) + sn \in q\mathbb{Z}[1/p] + n\mathbb{Z}$$

dir. $q \neq p$ olduğundan $q\mathbb{Z}[1/p] \neq \mathbb{Z}[1/p]$ olup yani $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[1/p]$ 'de küçük alt modül değildir. Bu da çelişkidir. O halde $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Q}$ 'da bir tümleyene sahip olamaz. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ tümlenmiş modül değildir.

1.5 Genelleştirilmiş Alt Modüller

Küçük alt modül kavramının genelleştirmesini içeren çalışmaları Zhou, 2000; Zhou and Zhang, 2011 de yapmıştır ve bu kavramı e-small alt modül olarak literatüre kazandırmıştır. (Koşar vd. (2015) bu kavramı g-small alt modül olarak tanımlamıştır.)

Tanım 1.5.1 ([7]) M bir R -modül ve $K \leq M$ olsun. Eğer $K + T = M$ olan her $T \leq_e M$ için $T = M$ ise K 'ya M 'nin bir **genelleştirilmiş küçük alt modülü** denir ve $K \ll_g M$ ile ifade edilir.

Her küçük alt modül genelleştirilmiş küçük alt modüldür ancak tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 1.5.2 $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ olsun. $\mathbb{Z}_6$ nın tek büyük alt modülü kendisi olduğundan, her alt modülü genelleştirilmiş küçük alt modüldür. Dolayısıyla $\langle \bar{3} \rangle \ll_g \mathbb{Z}_6$ dır. Ancak $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$ ve $\mathbb{Z}_6 \neq \langle \bar{2} \rangle$, $\mathbb{Z}_6 \neq \langle \bar{3} \rangle$ olduğundan $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$, $\mathbb{Z}_6$ da küçük değildir.

Örnek 1.5.3 $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{bmatrix}$ olmak üzere $M = R_R$ modülünü göz önüne alalım.

Öncelikle $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{bmatrix}$ nin tüm alt modüllerini bulalım.

$$K_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{1} \ \bar{0}), (\bar{1} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{2}), (\bar{3} \ \bar{0}), (\bar{3} \ \bar{2})\},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0})\},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2})\},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2})\},$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{2})\},$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2})\},$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2})\},$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0})\},$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0})\},$$

$$K_{10} = \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{2})\},$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0})\},$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{2}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{1} \ \bar{0}), (\bar{1} \ \bar{2}), (\bar{1} \ \bar{2}), (\bar{1} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{2} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{2}), (\bar{2} \ \bar{0}), (\bar{3} \ \bar{0}), (\bar{3} \ \bar{2}), (\bar{3} \ \bar{2}), (\bar{3} \ \bar{0})\},$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{bmatrix} = \{(\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0}), (\bar{0} \ \bar{0})\},$$

$$K_{14} = \{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c \in 2\mathbb{Z}_4 \} = \langle \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rangle,$$

$$K_{15} = \{ \begin{bmatrix} 0 & 2c \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{Z}_4 \} = \langle \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle,$$

$$K_{16} = \{ \begin{bmatrix} a & 2c \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z}_4 \} = \{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \},$$

$$K_{17} = \{ \begin{bmatrix} 2a & 2c \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z}_4 \} = \{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \}.$$

Şimdi $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ll_g R_R$ olduğunu gösterelim.

$$K_1 + K_6 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix},$$

$$K_1 + K_8 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix},$$

$$K_1 + K_{11} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix},$$

$$K_1 + K_{13} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix},$$

$$K_1 + K_{15} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix},$$

$$K_1 + K_{16} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix},$$

$$K_1 + K_{17} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix},$$

$$K_6 \not\leq_e R_R, K_8 \not\leq_e R_R, K_{11} \not\leq_e R_R, K_{13} \not\leq_e R_R, K_{15} \not\leq_e R_R, K_{16} \not\leq_e R_R$$

ve $K_{17} \not\leq_e R_R$ olduğundan $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ll_g R_R$ dir. $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} = R_R$ olduğundan R_R nin küçük alt modülü değildir.

Önerme 1.5.4 [9, Proposition 2.3] M bir R -modül ve $N \leq M$ olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:

$$i) N \ll_g M;$$

ii) Eğer $X + N = M$ ise X , M 'nin M/X bir yarı-basit modül olacak biçimdeki bir dik toplananıdır.

Kanıt. $i) \Rightarrow ii)$ $N \ll_g M$ olsun. Y, X' in M 'de bir komplementi olsun.

Böylece

$$X \oplus Y \leq_e M$$

dir. Buradan $X + Y + N = M$ ve $N \ll_g M$ olduğundan

$$X \oplus Y = M$$

olup $M/X \cong Y$ dir. Şimdi $M/X \cong Y$ 'nin yarı-basit olduğunu görmek için $A \leq Y$ alalım. $X + A + N = M$ dir. Benzer şekilde, T , $X + A$ 'nın bir komplementi olsun. Böylece $(X + A) \oplus T \leq_e M$ ve $X + A + T + N = M$ dir. $N \ll_g M$ olduğundan $(X + A) \oplus T = (X \oplus A) \oplus T = M$ bulunur. Buradan A , Y 'nin direkt toplamıdır. Dolayısıyla M/X yarı-basittir.

$ii) \Rightarrow i)$ $K \leq_e M$ ve $K + N = M$ olmak üzere K , M 'nin bir direkt toplamıdır dolayısıyla $K = M$ dir. Buradan $N \ll_g M$ dir.

Yardımcı Teorem 1.5.5 M bir R -modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. Eğer $K \ll_g N$ ise $K \ll_g M$ dir.

Kanıt. $K \ll_g N$ olsun. $K \ll_g M$ olduğunu gösterelim. $U \leq_e M$ olmak üzere $U + K = M$ olsun. Bu durumda $N \cap U \leq_e N$ ve $N = N \cap M = N \cap (U + K)$ dir. Modüler kuralından

$$N = K + (N \cap U)$$

olur. $K \ll_g N$ olduğundan $N = N \cap U$ bulunur ki buradan $N \leq U$ dur. Ayrıca

$$M = K + U \leq N + U \Rightarrow N + U = M$$

dir. $N \leq U$ olduğundan $M = N + U \leq U + U = U$ olup $M = U$ dur. Dolayısıyla $K \ll_g M$ elde edilir.

Önerme 1.5.6 [9, Proposition 2.5] M bir R -modül olsun.

1) N, K ve L , M 'nin alt modülleri ve $K \subseteq N$ olsun.

a) $N \ll_g M$ ise $K \ll_g M$ ve $N/K \ll_g M/K$ dir.

b) $N + L \ll_g M \iff N \ll_g M$ ve $L \ll_g M$

2) $K \ll_g M$ ve $f : M \rightarrow N$ ye bir homomorfizma ise $f(K) \ll_g N$ dir.

Ayrıca $K \ll_g M \subseteq N$ ise $K \ll_g N$ dir.

3) $K_1 \subseteq M_1 \subseteq M$, $K_2 \subseteq M_2 \subseteq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda $K_1 \oplus K_2 \ll_g M_1 \oplus M_2$ olması için gerek ve yeter şart $K_1 \ll_g M_1$ ve $K_2 \ll_g M_2$ olmasıdır.

Kanıt. (1)(a) $N \ll_g M$ olsun. $K \ll_g M$ ve $N/K \ll_g M/K$ olduğunu gösterelim. $L \leq_e M$ ve $L + K = M$ olsun. $K \leq N$ olduğundan $L + N = M$ yazılabilir. $N \ll_g M$ olduğundan $L = M$ dir. Dolayısıyla $K \ll_g M$ elde edilir. Şimdi $L/K \leq_e M/K$ olacak biçimdeki bir $L \leq M$ için $N/K + L/K = M/K$ olsun. Bu durumda $N + L = M$ ve $L \leq_e M$ 'dir. $L \leq_e M$ olduğunu görmek için $L \cap T = 0$ olan bir $T \leq M$ alalım ve $T = 0$ olduğunu gösterelim. $(L \cap T) + K = 0 + K = K$ yazabiliriz. Modüler kuralından $(T + K) \cap L = K$ olur. $\frac{(T+K) \cap L}{K} = \frac{(T+K)}{K} \cap \frac{L}{K} = \frac{K}{K} = 0$ dir. Buradan $\frac{T+K}{K} = 0$ ise $T + K = K$ ve $T \leq K \leq L$ dir. $0 = L \cap T = T$ dir. $N + L = M$ ve $L \leq_e M$ olup $N \ll_g M$ olduğundan $L = M$ ve $L/K = M/K$ dir. Dolayısıyla $N/K \ll_g M/K$ dir.

(b) $\implies$ $N + L \ll_g M$ olsun. $N \ll_g M$ ve $L \ll_g M$ olduğunu gösterelim. $K \leq_e M$ ve $K + N = M$ ise $K + N + L = M$ olup $N + L \ll_g M$ olduğundan $K = M$ dir. Dolayısıyla $N \ll_g M$ dir. Benzer şekilde $L \ll_g M$ olduğu gösterilebilir.

$\Longleftarrow$ $N \ll_g M$ ve $L \ll_g M$ olsun. $N + L \ll_g M$ olduğunu gösterelim. $K \leq_e M$ ve $K + (N + L) = M$ ise $N + (L + K) = M$ yazılabilir. $N \ll_g M$ olduğundan $L + K = M$ elde edilir. Ayrıca $L \ll_g M$ olduğundan $K = M$ dir. Dolayısıyla $N + L \ll_g M$ dir.

(2) $K \ll_g M$ ve $f : M \longrightarrow N$ ye bir homomorfizma olmak üzere $f(K) \ll_g N$ olduğunu gösterelim. $A \leq_e N$ ve $A + f(K) = N$ olmak üzere $\forall m \in M$ için $f(m) \in N$ olduğundan $\exists k \in K$ ve $\exists a \in A$ için $f(m) = f(k) + a$ olup $m - k \in f^{-1}(a)$ dir. Dolayısıyla $m \in K + f^{-1}(A)$ olur. O halde $f^{-1}(A) \leq_e M$ ve $f^{-1}(A) + K = M$ dir. $K \ll_g M$ olduğundan $f^{-1}(A) = M$ dir. Böylece $f(K) \subseteq A$ ve $A = N$ olup $f(K) \ll_g N$ dir.

(3) $\implies$ $K_1 \subseteq M_1 \subseteq M$, $K_2 \subseteq M_2 \subseteq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olmak üzere

$K_1 \oplus K_2 \ll_g M_1 \oplus M_2$ olsun. $K_1 \ll_g M_1$ ve $K_2 \ll_g M_2$ olduğunu gösterelim.

$$\pi_1 : M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1$$

kanonik projeksiyon dönüşümü olmak üzere $K_1 \oplus K_2 \ll_g M$ ve genelleştirilmiş küçük alt modül homomorfizma altında korunuyor olduğundan $\pi_1(K_1 \oplus K_2) = K_1 \ll_g M_1$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\pi_2 : M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2$$

kanonik projeksiyon dönüşümünden $K_2 \ll_g M_2$ elde edilir.

$\Longleftrightarrow$) $K_1 \ll_g M_1$ ve $K_2 \ll_g M_2$ olsun. Bu durumda $K_1 \ll_g M$ ve $K_2 \ll_g M$ dir. (1)(b) den $K_1 \oplus K_2 = K_1 + K_2 \ll_g M = M_1 \oplus M_2$ elde edilir.

Örnek 1.5.7 *Önerme 1.5.6 (1)'in tersi doğru değildir. $M = \mathbb{Z}_{24}$, $K = 6\mathbb{Z}_{24}$, $N = 3\mathbb{Z}_{24}$ $\mathbb{Z}$ -modüllerini göz önüne alalım. $K \ll M$ ve $N/K \ll_g M/K$ dir ama N , M de genelleştirilmiş küçük alt modül değildir. $\mathbb{Z}_{24}$ modülünün alt modülleri;*

$$K_1 = \{\bar{0}\} = \langle \bar{0} \rangle,$$

$$K_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}, \bar{22}\} = \langle \bar{2} \rangle,$$

$$K_3 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}, \bar{18}, \bar{21}\} = \langle \bar{3} \rangle,$$

$$K_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}, \bar{16}, \bar{20}\} = \langle \bar{4} \rangle,$$

$$K_5 = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}\} = \langle \bar{6} \rangle,$$

$$K_6 = \{\bar{0}, \bar{8}, \bar{16}\} = \langle \bar{8} \rangle,$$

$$K_7 = \{\bar{0}, \bar{12}\} = \langle \bar{12} \rangle,$$

$$K_8 = M \text{ şeklindedir.}$$

$6\mathbb{Z}_{24} = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}\}$ ve $3\mathbb{Z}_{24} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}, \bar{15}, \bar{18}, \bar{21}\}$ dir. $\mathbb{Z}_{24} = 6\mathbb{Z}_{24} + \mathbb{Z}_{24}$ olduğundan $6\mathbb{Z}_{24} \ll \mathbb{Z}_{24}$ ve $3\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24} = \{\bar{0}+6\mathbb{Z}_{24}, \bar{3}+6\mathbb{Z}_{24}\}$ olup $3\mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24} \ll_g \mathbb{Z}_{24}/6\mathbb{Z}_{24}$ olduğunu kolayca görülür. Diğer taraftan $3\mathbb{Z}_{24} + 4\mathbb{Z}_{24} = \mathbb{Z}_{24}$ 'dür ve $4\mathbb{Z}_{24} \cap K = \{\bar{0}\}$ koşulunu sağlayan tek alt modül $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$ olduğundan $M \neq 4\mathbb{Z}_{24} \leq_e \mathbb{Z}_{24}$ dür. Bu durumda $3\mathbb{Z}_{24} = N$, $\mathbb{Z}_{24} = M$ 'de genelleştirilmiş küçük alt modül değildir.

Tanım 1.5.8 M ve N birer modül olmak üzere $g : M \longrightarrow N$ ye bir epimorfizma olsun. Eğer $\text{Ker } g \ll_g M$ ise g 'ye **genelleştirilmiş küçük epimorfizma** denir.

Önerme 1.5.9 $[9, \text{Proposition 3.2 (1)}]$ M ve N birer modül olmak üzere $g : M \longrightarrow N$ epimorfizması bir genelleştirilmiş küçük epimorfizmadır gerek ve yeter şart her bir h büyük monomorfizması için eğer gh örten ise h örtendir.

Kanıt. $g : M \longrightarrow N$ bir epimorfizma ve $K = \text{Ker } g$ olsun. Bu durumda tek bir $v : M/K \longrightarrow N$ izomorfizmi vardır öyle ki $\pi : M \longrightarrow M/K$ olmak üzere $v\pi = g$ dir. Böylece her bir h homomorfizması için $v\pi h = gh$ örtendir gerek ve yeter şart πh örtendir.

$\implies$) $g : M \longrightarrow N$ epimorfizması bir genelleştirilmiş küçük epimorfizma olsun. h büyük monomorfizması için eğer gh örten ise h nin örten olduğunu gösterelim. Eğer g genelleştirilmiş küçük epimorfizma ise $K \ll_g M$ dir. gh örten olduğundan πh örten olup $\text{Im } h + K = M$ dir. h bir büyük monomorfizm olduğundan $\text{Im } h \le_e M$ dir. Dolayısıyla $\text{Im } h = M$ yani h örtendir.

$\impliedby$) $L \le_e M$ ve $i_L : L \longrightarrow M$ içermeye dönüşümü olsun. $\text{Im } i_L = L \le_e M$ olduğundan i_L büyük monomorfizmadır. Eğer $K + L = M$ ise πi_L örtendir. Kabulümüzden i_L örtendir yani $L = M$ dir. Dolayısıyla $K \ll_g M$ dir ve g genelleştirilmiş küçük epimorfizma olur.

Tanım 1.5.10 M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olsun. Eğer $M = U + V$ ve $M = U + T$ koşuluna uyan her $T \le_e V$ için $T = V$ ise V 'ye U 'nun M 'de bir **genelleştirilmiş tümleyeni** denir.

Teorem 1.5.11 M bir R -modül ve $U, V \leq M$ olsun. V 'nin U 'nun M 'de bir genelleştirilmiş tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $M = U + V$ ve $U \cap V \ll_g V$ olmasıdır.

Kanıt. $\implies$) V , U 'nun M 'de bir genelleştirilmiş tümleyeni olsun. $V =$

$(U \cap V) + K$ ve $K \leq_e V$ olsun. $K = V$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} M &= U + V \\ &= U + (U \cap V) + K \\ &= U + K \end{aligned}$$

dır. V , U 'nun M 'de bir genelleştirilmiş tümleyeni ve $K \leq_e V$ olduğundan $K = V$ olur ki böylece $U \cap V \ll_g V$ elde edilir.

$\Leftarrow$) $M = U + V$ ve $U \cap V \ll_g V$ olsun. $T \leq_e V$ olmak üzere $M = U + T$ olsun. $T = V$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} V &= V \cap M \\ &= V \cap (U + T) \end{aligned}$$

Modüler kuralından

$$V = T + (U \cap V)$$

olur ki kabulden $T = V$ dir. Böylece V , U 'nun M 'de bir genelleştirilmiş tümleyenidir.

Tanım 1.5.12 M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her alt modülü M 'de bir genelleştirilmiş tümleyene sahipse M 'ye bir **genelleştirilmiş tümlenmiş modül** denir.

1.6 Bir Modülün Radikali

Tanım 1.6.1 M modülünün bütün maksimal alt modüllerinin arakesetine veya başka bir ifadeyle M 'nin bütün küçük alt modüllerinin toplamına M 'nin **radikali** denir ve $\text{Rad}M$ ile gösterilir (daha ayrıntılı bilgi için bakınız [3]).

$$\begin{aligned} \text{Rad}M &= \cap \{N \leq M \mid N, M \text{'de maksimal}\} \\ &= \Sigma \{K \mid K \ll M\} \end{aligned}$$

Eğer M 'nin hiç bir maksimal alt modülü yoksa bu durumda $\text{Rad}M = M$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.6.2 $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_4$ olsun. $\langle \bar{0} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle$ alt modülleri $\mathbb{Z}_4$ ’ün tek küçük alt modülleri ve dolayısıyla $\text{Rad}M = \langle \bar{0} \rangle + \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{2} \rangle$ elde edilir.

Tanım 1.6.3 M bir modül ve $f : M \rightarrow M$ bir homomorfizma olsun. $N \leq M$ olmak üzere $f(N) \subseteq N$ oluyorsa N ’ye M ’nin **tam değişmez (fully invariant) alt modülü** denir.

Örnek 1.6.4 $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$ ve $M = R_R$ modülü olmak üzere R ’nin $I = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$ sağ idealini göz önüne alalım. Herhangi bir $\alpha \in I$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_4$ için $g \in \text{Hom}(I_R, I_R) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$ olacak biçimde $g(\alpha) = \begin{pmatrix} a & 2c \\ 2b & 2d \end{pmatrix} \alpha$ olsun. I ’nin bir alt modülü $J = \begin{pmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere J, I ’nin bir fully invariant alt modüldür. Ayrıca $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} g \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 2c \\ 2b & 2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & ax \\ 0 & 2bx \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_4, \right\} \not\subseteq \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = 1 \in \mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$

olduğu için fully invariant alt modül değildir.

Teorem 1.6.5 ([2]) M bir R -modül ve $f : M \rightarrow N$ bir homomorfizma olmak üzere $f(\text{Rad}M) \subset \text{Rad}N$ dir. Ayrıca $\text{Ker}f \subseteq \text{Rad}M$ ise $f(\text{Rad}M) = \text{Rad}f(M)$ dir.

Kanıt. $m \in \text{Rad}(M)$ alalım. $Rm \ll M$ olup Teorem 1.3.16 den $f(Rm) = Rf(m) \ll f(M)$ bulunur. Dolayısıyla $f(m) \in \text{Rad}f(M)$ olup $f(\text{Rad}M) \subseteq \text{Rad}f(M)$ elde edilir. Şimdi $\text{Ker}f \subseteq \text{Rad}M$ olsun. $f(m) \in \text{Rad}f(M)$ alalım. $Rf(m) \ll f(M)$ olur. Kabul edelim ki $m \notin \text{Rad}M$ olsun. Bu durumda $K + Rm = M$ olacak şekilde M ’nin en az bir K maksimal alt modülü vardır. Buradan $f(K) + f(Rm) = f(M)$ olur. $f(Rm) = Rf(m) \ll f(M)$ olduğundan $f(K) = f(M)$ bulunur. Eşitlikte f ile ters görüntüsünü alınırsa $M = K + \text{Ker}f$ bulunur. $\text{Ker}f \subseteq \text{Rad}M \subseteq K$ olduğundan $M = K + \text{Ker}f$ eşitliğinden $K = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $m \in \text{Rad}M$ olup $f(m) \in f(\text{Rad}M)$ dir. Sonuç olarak $f(\text{Rad}M) = \text{Rad}f(M)$ dir.

Sonuç 1.6.6 M bir modül olsun. $RadM$, M 'nin fully invariant alt modülüdür.

Tanım 1.6.7 M 'nin bütün büyük maksimal alt modüllerinin arakesetine M 'nin genelleştirilmiş radikali denir ve Rad_gM ile gösterilir.

$$\begin{aligned} Rad_gM &= \cap \{N \leq_e M \mid N, M \text{ 'de maksimal}\} \\ &= \Sigma \{N \subseteq M \mid N \ll_g M\} \end{aligned}$$

Eğer M 'nin hiç bir büyük maksimal alt modülü yoksa bu durumda $Rad_gM = M$ olarak tanımlanır. ([9]).

Teorem 1.6.8 M bir R -modül olsun.

$$Rad_gM = \Sigma_{L \ll_g M} L$$

dir.

Kanıt. $L \ll_g M$ olsun. T , M 'nin bir genelleştirilmiş maksimal alt modülü olsun. Eğer $L \not\subseteq T$ ise $L + T = M$ olup $T = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla L , M 'nin bütün genelleştirilmiş maksimal alt modülleri tarafından içerilir. Şimdi, $Rad_gM \subseteq \Sigma_{L \ll_g M} L$ olduğunu gösterelim. $x \in Rad_gM$ alalım. $Rx \ll_g M$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki Rx , M 'de genelleştirilmiş küçük alt modülü olmasın ve $\Omega = \{T \leq M \mid x \notin T, T \leq_e M \text{ ve } Rx + T = M\}$ dir. Rx , M 'de genelleştirilmiş küçük olmadığı için Ω kümesi boştan farklıdır. Bu durumda $Rx + L = M$ olacak şekilde $\exists L \neq M$ alt modülü vardır. Bu kümede kapsama bağıntısına göre her zincirin bir üst sınıra sahip olduğunu gösterelim. T , Ω nın bir zinciri ve $C = \cup_{B \subseteq T} B$ olsun. Bu taktirde C , M 'nin bir alt modülüdür. $M \neq C$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $M = C$ olsun. Bu durumda $m \in C = \cup_{B \subseteq T} B$ olup $\exists B \leq M$ vardır öyle ki $m \in B$ dir. Bu ise Ω nın seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $M \neq C$ dir. C modülünün T 'nin bir üst sınırı olduğu açıktır. Dolayısıyla Zorn Lemması gereği Ω bir K gibi maksimal elemanı içerir. Burada K 'nin M 'de maksimal alt modül olduğu gösterilebilir. $x \notin K$ olduğundan $x \notin Rad_gM$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $Rx \ll_g M$ bulunur ve $Rad_gM \subseteq \Sigma_{L \ll_g M} L$ dir. Sonuç olarak $Rad_gM = \Sigma_{L \ll_g M} L$ dir.

Sonuç 1.6.9 ([9]) M ve N birer modül olsun. Eğer $f : M \longrightarrow N$ bir R -homomorfizması ise $f(\text{Rad}_g(M)) \subseteq \text{Rad}_g(N)$ dir. Ayrıca $\text{Rad}_g(M)$, M 'nin bir fully invariant alt modülüdür.



2 BÜYÜK TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Bu bölümde büyük tümlenmiş modül tanımlanmış ve bu modül sınıfının bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıntılı bilgi için [6] önerilir.

Tanım 2.10 M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her büyük alt modülü M 'de bir tümleyene sahipse M modülüne bir **büyük tümlenmiş (supplemented) modül** denir.

Tanım 2.11 M bir R -modül ve $X \leq M$ olsun. X , M 'nin bir büyük alt modülünün tümleyeni ise X 'e M 'nin bir **büyük tümleyen (supplement) alt modülü** denir.

Örnek 2.12 Her büyük tümleyen alt modül aynı zamanda tümleyen alt modüldür. Ancak tersi doğru değildir. $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_6$ olmak üzere $\mathbb{Z}_6$ modülünün alt modülleri $K_1 = \{\bar{0}\} = \langle \bar{0} \rangle$, $K_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \langle \bar{2} \rangle$, $K_3 = \{\bar{0}, \bar{3}\} = \langle \bar{3} \rangle$, $K_4 = M$ şeklindedir. $\mathbb{Z}_6 = K_2 + K_3$ ve $K_2 \cap K_3 = K_1 \ll K_2$ olduğundan K_2, K_3 alt modülünün bir tümleyenidir ama büyük tümleyeni değildir. Çünkü $K_2 \cap K_3 = \{\bar{0}\}$ ve $K_2 \neq \{\bar{0}\}$, $K_3 \neq \{\bar{0}\}$ olduğu için $K_3 \not\leq_e \mathbb{Z}_6$ ve $K_2 \not\leq_e \mathbb{Z}_6$ dır.

Yardımcı Teorem 2.13 M bir R -modül olsun. V , M 'nin büyük tümleyen alt modülü ve $K \leq V$ olsun. Bu durumda

$$K \ll_g M \iff K \ll_g V$$

dir.

Kanıt. $(\implies)$ $K \ll_g M$ olsun ve $K \ll_g V$ olduğunu gösterelim. V , M 'nin bir büyük tümleyeni olduğundan bir $U \leq_e M$ var öyle ki V , U 'nun M 'de tümleyenidir. $T \leq_e V$ olmak üzere $V = K + T$ olsun. $T = V$ olduğunu gösterelim. $U \leq_e M$ ve $T \leq_e V$ olduğundan

$$U + T \leq_e M + V = M$$

dir. V, U 'nun M 'de tümleyeni olduğundan $M = U + V$ dir. Böylece

$$M = (K + T) + U \xrightarrow{(K \ll_g M \text{ olduğundan})} T + U = M$$

elde edilir. V, U 'nun tümleyeni ve $T \leq V$ olduğundan $T = V$ olur. Buradan $K \ll_g V$ dir.

($\Leftarrow$) Yardımcı Teorem 1.5.5'den elde edilir.

Sonuç 2.14 M bir R -modül ve V, M 'nin büyük tümleyen alt modülü olsun. Bu durumda

$$Rad_g V = V \cap Rad_g M$$

dir.

Kanıt. V, M 'nin büyük tümleyen alt modülü olduğundan $\exists S \leq_e M$ var öyle ki $M = S + V$ ve $S \cap V \ll V$ dir. $x \in Rad_g V$ alalım. $x \in Rad_g V = \bigcap_{K_i \leq_e V} K_i$ olduğundan, $\forall i$ için $x \in K_i \leq_e V$ dir.

İddia: $Rx \ll_g V$ dir. $T \leq_e V$ alalım öyle ki $V = T + Rx$ olsun. $V = T$ olduğunu gösterelim. $\forall i$ için $x \in K_i \leq_e V$ olduğundan $x \in T$ olup $Rx \leq T$ ve $V = T$ dir. Böylece $Rx \ll_g V$ olup Yardımcı Teorem 2.13'den $Rx \ll_g M$ elde edilir. $Rx \leq Rad_g M$ ve $Rx \leq Rad_g M \cap V$ dir. Buradan $x \in Rad_g M \cap V$ olup $Rad_g V \subseteq V \cap Rad_g M$ dir.

Tersine, $y \in V \cap Rad_g M$ alalım. $y \in V$ ve $y \in Rad_g M = \bigcap_{N_i \leq_e M} N_i$ dir.

İddia: $Ry \ll_g M$ dir.

$T \leq_e M$ alalım öyle ki $M = Ry + T$ olsun. $M = T$ olduğunu gösterelim. $T \leq_e M$ maksimal değil ise $T \leq_e K \leq_e M$ ve $K \neq M$ olacak şekilde K maksimali vardır öyle ki $Ry \leq K$ olup $M = Ry + T \leq K + T = K$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $T \leq_e V$ maksimal olur. Böylece $M = Ry + T = T$ olup $Ry \ll_g V$ elde edilir. Sonuç olarak $Ry \leq Rad_g V$ ve $y \in Rad_g V$ dir.

Önerme 2.15 M bir büyük tümlenmiş modül olsun. Bu durumda $M/Rad M$ hiç bir büyük özalt modüle sahip değildir.

Kanıt. $\frac{K}{RadM} \leq_e \frac{M}{RadM}$ olsun. $K \leq_e M$ olduğunu gösterelim. $T \leq M$ ve $T \cap K = 0$ olsun. $0 \ll M$ olduğundan $T \cap K = 0 \subseteq RadM = \sum\{K | K \ll M\}$ dir.

Buradan

$$(T \cap K) + RadM = 0 + RadM$$

yazabiliriz. Modüler kuralından

$$(T + RadM) \cap K = RadM$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{(T + RadM) \cap K}{RadM} &= \frac{RadM}{RadM} \\ \frac{T + RadM}{RadM} \cap \frac{K}{RadM} &= 0 + RadM = RadM = \bar{0} \end{aligned}$$

olur. $\frac{K}{RadM} \leq_e \frac{M}{RadM}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{T + RadM}{RadM} &= 0 + RadM \\ &= \frac{RadM}{RadM} \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$T + RadM = RadM$$

dir. $T \leq RadM \subseteq K \implies 0 = K \cap T = T$ ve $K \leq_e M$ dir. K, V 'nin M 'de bir tümleyeni olduğundan $K + V = M$ ve $K \cap V \ll V$ dir. $K + V = M$ 'den

$$\begin{aligned} \frac{M}{RadM} &= \frac{K + V}{RadM} \\ &= \frac{K}{RadM} + \frac{V + RadM}{RadM} \end{aligned}$$

olur ve $K \cap V \ll V$ olduğundan [8,21.5]'den $K \cap V \leq RadM$ dir.

$$\frac{K}{RadM} \cap \frac{V + RadM}{RadM} = \frac{K \cap V + RadM}{RadM} = \bar{0}$$

ve

$$\frac{M}{RadM} = \frac{K}{RadM} \oplus \frac{V + RadM}{RadM}$$

olur ki $\frac{K}{RadM} \leq_e \frac{M}{RadM}$ olduğundan

$$\frac{K}{RadM} = \frac{M}{RadM}$$

dir. Bu durumda $\frac{M}{RadM}$ hiç bir büyük öz alt modüle sahip değildir.

Yardımcı Teorem 2.16 *M bir R -modül olsun. U , M 'nin bir büyük alt modülü ve $M_1 \leq M$ olsun. Eğer M_1 büyük tümlenmiş ve $U + M_1$, M 'de bir tümleyene sahipse U 'da M 'de bir tümleyene sahiptir.*

Kanıt. X , $U + M_1$ 'in M 'de bir tümleyeni olsun. Bu durumda $U + M_1 + X = M$ ve $(U + M_1) \cap X \ll X$ olur. Şimdi $U \leq_e M$ iken $(U + X) \leq_e M$ ve $(U + X) \cap M_1 \leq_e M_1$ olduğunu gösterelim. $X \leq_e X$ ve $U \leq_e M$ olduğundan

$$U + X \leq_e X + M = M$$

dir. Benzer şekilde $U + X \leq_e M$ ve $M_1 \leq_e M_1$ olduğundan

$$(U + X) \cap M_1 \leq_e M \cap M_1 = M_1$$

dir. Y , $(U + X) \cap M_1$ 'in M_1 'deki tümleyeni olsun. $M_1 = [(U + X) \cap M_1] + Y$ ve $[(U + X) \cap M_1] \cap Y \ll Y$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} M &= U + M_1 + X \\ &= U + [(U + X) \cap M_1] + Y + X \\ &= (U + X) + [(U + X) \cap M_1] + Y \\ &= U + (X + Y) \end{aligned}$$

dir. Acaba $U \cap (X + Y) \ll X + Y$ mi?

$$\begin{aligned} U \cap (X + Y) &\leq (U + X) \cap Y + (U + Y) \cap X \\ &\leq (U + X) \cap Y + (U + M_1) \cap X \\ &\ll Y + X \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $X + Y$, U 'nun M 'de tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 2.17 $M = M_1 + M_2$ olsun. Eğer M_1 ve M_2 büyük tümlenmiş ise M 'de essential tümlenmiş modüldür.

Kanıt. $U \leq_e M$ olsun. $M = M_1 + M_2$ olduğundan

$$U + M_1 + M_2 = U + M = M$$

olur. Ayrıca $0 \cap [U + (M_1 + M_2)] = 0 \ll 0$ dır. Böylece $0, U + M_1 + M_2$ 'nin M 'de tümleyenidir. $U \leq_e M$ ve $M_1 \leq_e M_1$ olduğundan

$$(U + M_1) \leq_e M + M_1 = M$$

dir. O halde M_2 büyük tümlenmiş olduğundan Yardımcı Teorem 2.16 gereği $U + M_1, M$ 'de bir tümleyene sahiptir. Burada M_1 büyük tümlenmiş olduğundan yine Yardımcı Teorem 2.16 gereği U, M 'de bir büyük tümleyene sahiptir. Böylece M büyük tümlenmiştir.

Sonuç 2.18 $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ olsun. Eğer her $i = 1, 2, \dots, n$ için M_i büyük tümlenmiş ise M 'de büyük tümlenmiştir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 2.17'den elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.19 Büyük tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü de büyük tümlenmiştir.

Kanıt. M bir büyük tümlenmiş modül olsun. $K \leq M$ olmak üzere M/K 'nin de büyük tümlenmiş olduğunu gösterelim. $U/K \leq_e M/K$ olsun. Bu durumda $U \leq_e M$ olduğunu gösterelim. $U/K \leq M/K$ olduğundan $K \subset U \subseteq M$ dir. $V \leq M$ iken $U \cap V = 0$ olsun. $V = 0$ olduğunu gösterelim.

$$(U \cap V) + K = 0 + K$$

modüler kuralından

$$(V + K) \cap U = K$$

dır. Buradan

$$\frac{(V+K)}{K} \cap \frac{U}{K} = \frac{(V+K) \cap U}{K} = \frac{K}{K} = \bar{0}$$

olur. $U/K \leq_e M/K$ olduğundan

$$\frac{V+K}{K} = \bar{0} = \frac{K}{K}$$

dir. Buradan $V+K = K$ olduğundan $V \leq K \leq U$ dur. Böylece $0 = U \cap V = V$ olup $U \leq_e M$ elde edilir. M büyük tümlenmiş olduğundan U 'nun M 'de bir V tümleyeni vardır.

İddia: $K \leq U$ olmak üzere $\frac{V+K}{V}, \frac{U}{K}$ 'nin $\frac{M}{K}$ 'da tümleyenidir.

İlk olarak, $\frac{V+K}{K} + \frac{U}{K} = \frac{M}{K}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} M &= M + K \\ &= (V+U) + K \\ \frac{M}{K} &= \frac{(V+U) + K}{K} \\ &= \frac{V+K}{K} + \frac{U}{K} \end{aligned}$$

dir. Şimdi $\frac{V+K}{K} \cap \frac{U}{K} \ll \frac{V+K}{K}$ olduğunu gösterelim. $f : V \rightarrow \frac{V+K}{K}$ doğal epimorfizma ve $U \cap V \ll V$ olduğundan

$$f(U \cap V) \ll \frac{V+K}{K}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} f(U \cap V) &= \frac{(U \cap V) + K}{K} \\ &= \frac{(V+K) \cap U}{K} \\ &= \frac{V+K}{K} \cap \frac{U}{K} \ll \frac{V+K}{K} \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak, $\frac{M}{K}$ büyük tümlenmiştir.

Sonuç 2.20 *Büyük tümlenmiş bir modülün her homomorfik görüntüsü de büyük tümlenmiştir.*

Kanıt. M bir büyük tümlenmiş modül olsun. $f : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olmak üzere M 'nin homomorfik görüntüsü bölüm modülüne izomorf olduğundan, yani 1. izomorfizma teoremine göre $M/Kerf \cong Imf$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.19 gereğince istenen elde edilir.

Tanım 2.21 M ve N birer R -modül ve Λ boş kümeden farklı bir indis kümesi olsun. Eğer en az bir $f : M^{(\Lambda)} \rightarrow N$ epimorfizması varsa, N ye **M -üretilmiş R -modül** denir. Λ indis kümesi sonlu elemanlı ise, N ye **sonlu M -üretilmiş R -modül** denir.

Yardımcı Teorem 2.22 M bir büyük tümlenmiş modül olsun. Bu durumda her sonlu M -üretilmiş R -modül büyük tümlenmiştir.

Kanıt. N bir sonlu M -üretilmiş R -modül olsun. Bu durumda sonlu elemanlı öyle Λ indis kümesi vardır ki

$$f : M^{(\Lambda)} \rightarrow N$$

R -modül epimorfizası bulunabilir. M büyük tümlenmiş olduğundan Sonuç 2.18'den $M^{(\Lambda)}$ büyük tümlenmiş olur. Bu durumda Sonuç 2.20'den N büyük tümlenmiş olur. Böylece her sonlu M -üretilmiş R -modül büyük tümlenmiş olur.

Önerme 2.23 R bir halka olsun. Bu durumda R_R sağ R -modülünün büyük tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş R -modülün büyük tümlenmiş olmasıdır.

Kanıt. $R_R, 1_R$ ile üretildiğinden dolayı sonlu üretilmiş olup Yardımcı Teorem 2.22'de $M = R$ alınırsa sonuç elde edilir.

Tanım 2.24 Bir M_R modülünün alt modülleri üzerinde β^* bağıntısını şu şekilde tanımlayalım: $X, Y \leq M$ olmak üzere

$$X\beta^*Y \iff X+Y+A=M \text{ olan her } A \leq M \text{ için } X+A=M \text{ ve } Y+A=M.$$

Alt modülleri üzerinde β^* bağıntısı tanımlı olan modüller [1] makalesinde ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 2.25 M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her büyük alt modülü β^* bağıntısı ile M 'de bir büyük tümleyen alt modülüne denkse M büyük tümlenmiştir.

Kanıt. $U \leq_e M$ alalım. M 'nin her büyük alt modülü β^* bağıntısı ile M 'de bir büyük tümleyen alt modülüne denk olsun. O halde bir $X \leq M$ tümleyen alt modül vardır ve $U\beta^*X$ 'dir. X , M 'nin bir büyük tümleyen alt modülü olduğundan $Y \leq_e M$ olacak şekilde X 'in M 'de bir Y tümleyeni vardır. $Y \leq_e M$ olduğundan kabulden bir V büyük tümleyen alt modülü vardır ve $Y\beta^*V$ 'dir.

İddia: X, Y 'nin tümleyeni ve $Y\beta^*V$ iken X, V 'nin de tümleyenidir.

X, Y 'nin tümleyeni olduğundan $X + Y = M$ ve $Y \cap X \ll X$ dir.

$$X + Y + V = M + V = M$$

olur ki $Y\beta^*V$ olduğundan

$$X + V = M \text{ ve } Y + V = M$$

dir. $K \leq X$ ve $K + V = M$ olsun. $K = X$ olduğunu gösterelim.

$$K + V + Y = M + Y = M$$

olur ki $Y\beta^*V$ olduğundan

$$K + Y = M$$

dir. X, Y 'nin tümleyeni olduğundan $K = X$ 'dir. Böylece X, V 'nin M 'de tümleyenidir. Benzer şekilde V, X 'nin tümleyeni ve $U\beta^*X$ iken V, U 'nun da tümleyenidir. Böylece M büyük tümlenmiş olur.

Tanım 2.26 M bir R -modül ve $A \leq B \leq M$ olsun. Eğer $B/A \ll M/A$ ise B modülü M 'de A modülü **üzerindedir** denir.

Yardımcı Teorem 2.27 M bir R -modül ve $A \leq B \leq M$ olsun. Bu durumda B 'nin M 'de A üzerinde olması için gerek ve yeter şart $A\beta^*B$ olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$) B, M' 'de A 'nın üzerinde olsun. Bu takdirde $B/A \ll M/A$ dır. $B + C = M$ olan herhangi bir $C \leq M$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{M}{A} &= \frac{B + C}{A} \\ &= \frac{B}{A} + \frac{C + A}{A}\end{aligned}$$

olup $B/A \ll M/A$ olduğundan $\frac{C+A}{A} = \frac{M}{A}$ ve $C + A = M$ olur. Ayrıca $A \leq B$ olduğundan $A + D = M$ eşitliğini sağlayan her $D \leq M$ için $B + D = M$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $A\beta^*B$ dir.

$\Leftarrow$) $A\beta^*B$ olsun. Yani $B + C = M$ koşulunu sağlayan her $C \leq M$ için $A + C = M$ olsun. $\frac{B}{A} + \frac{C}{A} = \frac{M}{A}$ koşulunu sağlayan herhangi bir $C/A \leq M/A$ alt modülünü alalım. Bu durumda $\frac{M}{A} = \frac{B+C}{A}$ olup $B + C = M$ dir. Hipotez gereği $A + C = M$ olup $A \leq C$ olduğundan $C = M$ dir. Yani $B/A \ll M/A$ olup B, M' 'de A 'nın üzerindedir.

Sonuç 2.28 M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her büyük alt modülü M 'de bir büyük tümleyen alt modül üzerindeyse M büyük tümlenmiştir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 2.25 ve Yardımcı Teorem 2.27 den elde edilir.

KAYNAKÇA

- [1] Birkenmeier, G. F., Takıl Mutlu, F. ,Nebiyev, C.,Sokmez, N. ve Tercan, A. , Goldie*- Supplemented Modules, Glasgow Math. J. 52A (2010) 41-52.
- [2] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. ve Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules*, Birkhauser, Berlin.
- [3] Kasch, F. (1982). *Modules and Rings*, Academic Press, London.
- [4] Koşar B., Nebiyev C. and Sökmez N., G-Supplemented Modules, Ukrainian Mathematical Journal, 67 No.6, 861-864 (2015).
- [5] Mohamed, S.H. ve Muller, B.J., *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series, **147**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [6] Nebiyev, C., Ökten, H.H. ve Pekin, A. Essential Supplemented Modules, *International Journal of Pure and Applied Math.*,**120(2)**,(2018) 253-257.
- [7] Wang, Y., Ding, N., (2006).Generalized Supplemented Modules, *Taiwanese J. Math.*, **10(6)**, 1589-1602
- [8] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers.
- [9] Zhou, D.X. ve Zhang, X.R. (2010). Small-Essential Submodules and Morita Duality, *Southeast Asian Bull. Math.*, **35**, (2011) 1051-1062.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Tuğçe ŞEN
Yabancı Dil : İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı : Çankırı, 1992
E-Posta : tugcessenn@gmail.com

Eğitim Geçmişi:

- 2011-2015, Çankırı Karatekin Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik.

