



**T.C.  
AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**C-TÜMLEYEN ALT MODÜLLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MUSTAFA MAHİR SAYICI**

**HAZİRAN**

MUSTAFA  
MAHIR SAYICI

MATEMATİK  
ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2024

**C-TÜMLEYEN ALT MODÜLLER**

**MUSTAFA MAHİR SAYICI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman**

**Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2024**

## Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Mustafa Mahir SAYICI tarafından hazırlanan “C-Tümleyen Alt Modüller ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman-Başkan:** Prof.Dr. Ergül TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

**Üye :** Doç.Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ

Mühendislik Bilimleri-Matematik Anabilim Dalı, Abdullah Gül Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

**Üye :** Dr.Öğr.Üyesi Engin KAYNAR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum .....

Tez Savunma Tarihi: 11/06/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
  - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
  - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
  - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
  - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Mustafa Mahir SAYICI

(Tarih)

C-TÜMLEYEN ALT MODÜLLER  
(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa Mahir SAYICI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında  $cr$ -tümlemiş modüller tanımlandı.  $\tilde{N}$  modül ve  $S, Y \leq \tilde{N}$  alt modüller olsun.  $\tilde{N} = S + Y$  ve  $S \cap Y$  parçalanan ise  $Y$  ye  $S$  nin  $\tilde{N}$  de  $c$ -tümleyeni denir.  $\tilde{N}$  'nin her alt modülü  $c$ -tümleyene sahip olursa  $\tilde{N}$  ye  $cr$ -tümlemiş modül adı verilir. Bir  $\tilde{N}$  modülünün  $cr$ -tümlemiş olması için gerek ve yeter koşul  $\tilde{N}/C(\tilde{N})$  'in yarı basit olmasıdır. Modülleri  $cr$ -tümlemiş olan halkalar karakterize edildi. Bununla birlikte  $cr$ -tümlemiş modüllerin direkt toplamalar, alt modüller homomorfik görüntüler ve toplamalar altında kapalı olduğu gösterildi.

|                   |                                                                                       |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Sayfa Adedi       | : 46                                                                                  |
| Anahtar Kelimeler | : Tümlemiş modül, $Cr$ -tümlemiş modül, Yarı basit modül, SSI-halka, Parçalanan modül |
| Danışman          | : Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN                                                             |

## C-SUPPLEMENT SUBMODULES

(M. Sc. Thesis)

Mustafa Mahir SAYICI

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2024

## ABSTRACT

In this study, cr-supplemented modules are introduced. Let  $\tilde{N}$  module and  $S, Y \leq \tilde{N}$  be submodules. A module  $\tilde{N}$  is *cr-supplemented* if, for each submodule  $S$  of  $\tilde{N}$ , there is a submodule  $Y$  in  $\tilde{N}$  such that  $\tilde{N} = S + Y$  and  $S \cap Y$  is crumbling. If each submodule of  $\tilde{N}$  has c-supplement then  $\tilde{N}$  is called *cr-supplemented*.  $\tilde{N}$  is cr-supplemented if and only if  $\tilde{N}/C(\tilde{N})$  is semisimple. We provide characterization of rings for which their modules are cr-supplemented. With this, we show that cr-supplemented modules are closed under direct sums, submodules, homomorphic images and sums.

Number of pages : 46

Keywords : Supplemented module, Cr-supplemented module, Semi simple module, SSI-ring, Crumble module

Supervisor : Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

## ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

İki yıl boyunca ciddi bir emek ve özveriyle hazırladığım yüksek lisans tezimin tamamlanmasında desteğini ve yardımını benden esirgemeyen, beni daima teşvik eden, danışmanlığımı üstlenen, beni sınırlamayıp özgür bırakan ve bana bu fırsatı tanıyan değerli hocam Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN 'e saygılarımla teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                    |      |
|--------------------------------------------------------------------|------|
| ÖZET .....                                                         | iv   |
| ABSTRACT.....                                                      | v    |
| ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....                                             | vi   |
| İÇİNDEKİLER .....                                                  | vii  |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                               | viii |
| 1.GİRİŞ .....                                                      | 1    |
| 2. GENEL BİLGİLER .....                                            | 3    |
| 2.1. Halkalar.....                                                 | 3    |
| 2.2. Modüller.....                                                 | 4    |
| 2.3. Homomorfizmalar.....                                          | 8    |
| 2.4. İnjektif Modüller,Projektif Modüller ve Serbest Modüller..... | 12   |
| 2.5. Basit Modüller ve Yarı basit Modüller .....                   | 17   |
| 2.6. Büyük Alt Modüller.....                                       | 20   |
| 2.7. Küçük Alt Modüller.....                                       | 21   |
| 2.8. Radikal .....                                                 | 23   |
| 2.9. Noetherian Modüller.....                                      | 25   |
| 2.10. Artinian Modüller .....                                      | 27   |
| 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....                                         | 28   |
| 3.1. Yarı Yerel Halka .....                                        | 28   |
| 3.2. Tümlleyen AltModüller ve Çeşitleri .....                      | 28   |
| 3.3. V-Modüller,Parçalanın Modül ve SSI-Halkalar.....              | 31   |
| 4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....                                       | 39   |
| 4.1 C-Tümlleyen Alt Modüller .....                                 | 39   |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                          | 43   |
| KAYNAKLAR .....                                                    | 44   |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                     | 46   |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

| Simgeler                  | Açıklama                                                                          |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$              | doğal sayılar kümesi                                                              |
| $\mathbb{Z}$              | tam sayılar kümesi                                                                |
| $\mathbb{Q}$              | rasyonel sayılar kümesi                                                           |
| $\mathbb{P}$              | asal sayılar kümesi                                                               |
| $\subseteq$               | alt küme                                                                          |
| $\subset$                 | öz alt küme                                                                       |
| $\cap$                    | kümelerde kesişim işlemi                                                          |
| $0_{\check{S}}$           | $(\check{S}, +, \cdot)$ halkasında $(\check{S}, +)$ abel grubunun birimi          |
| $1_{\check{S}}$           | $(\check{S}, +, \cdot)$ halkasında $(\check{S}, \cdot)$ cebirsel yapısının birimi |
| $J = Rad(\check{N})$      | $\check{N}$ Halkasının Jacobson Radikali                                          |
| $\leq$                    | alt modül                                                                         |
| $<$                       | öz alt modül                                                                      |
| $\leqslant$               | büyük alt modül                                                                   |
| $A/B$                     | $A$ modülünün $B$ alt modülüne göre bölüm modülü                                  |
| $\ll$                     | küçük alt modül                                                                   |
| $M \cong N$               | izomorf modüller                                                                  |
| $\prod_{i \in I} B_i$     | $B_i$ alt modüllerinin direkt çarpımı                                             |
| $\sum_{i \in I} B_i$      | $B_i$ alt modüllerinin toplamı                                                    |
| $\bigoplus_{i \in I} B_i$ | $B_i$ alt modüllerinin direkt toplamı                                             |
| $\langle X \rangle$       | $X$ kümesi tarafından üretilen modül                                              |

$Rm$   $m$  elemanı tarafından üretilen devirli modül

### Kısaltmalar

### Açıklama

|                    |                                                               |
|--------------------|---------------------------------------------------------------|
| $Rad(\ddot{Y})$    | $\ddot{Y}$ modülünün radikali                                 |
| $Des(\ddot{Y})$    | $\ddot{Y}$ modülünün desteği                                  |
| $E(\ddot{Y})$      | $\ddot{Y}$ modülünün injektif bürümü                          |
| $Z(\ddot{Y})$      | $\ddot{Y}$ modülünün singüler alt modülü                      |
| $P(\ddot{Y})$      | $\ddot{Y}$ modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı     |
| $Gör(f)$           | Bir $f$ homomorfizmasının görüntü kümesi                      |
| $Çek(f)$           | Bir $f$ homomorfizmasının çekirdeği                           |
| $End(S)$           | $S$ modülünün endomorfizmalarının kümesi                      |
| $Hom_S(C, J)$      | $C$ modülünden $J$ modülüne tüm $S$ -modül hom. Kümesi        |
| $\delta(\ddot{Y})$ | $\ddot{Y}$ modülünün $\delta$ -küçük alt modüllerinin toplamı |

## 1.GİRİŞ

1972 yılında K.A. Byrd'ın 'Rings Whose Quasi-Injective Modules Are Injective' makalesinde V-halkalar ve SSI-halkalar kavramları ele alınmış ve temel bilgiler verilerek tanıtılmıştır. Yine Lam T.Y ' A First Course in Noncommutative Rings ' kitabında yarı - yerel halkaları detaylı olarak araştırıp literatüre kazandırmıştır. 1991 'de R. Wisbauer ise 'Foundations of Module and Ring Theory' kitabında birçok konunun temelini oluşturan tümleyen modüller ve tümleyen alt modüller konusunu detaylı bir şekilde vermiştir. Muhammet Tamer Koşan 'da 2007 'de yayınlamış olduğu '  $\delta$ -Lifting and  $\delta$ -Supplemented Modules ' makalesinde tümleyen modülleri özele indirgemiş ve  $\delta$ -Tümlemiş modüller kavramını detaylıca ele almıştır. Noyan Er, Sergio Lopez Permouth, Nurhan Sökmen 2011'de yayınlanan 'Rings Whose Modules have Maximal or Minimal Injectivity Domains' makalelerinde parçalanen modül kavramından bahsetmiş; Rafail Alizade, Yılmaz Mehmet Demirci, Burcu Nişancı Türkmen ve Ergül Türkmen ise parçalanen modül kavramını yayınlanan 'On Rings With One Middle Class Of Injectivity Domain' makalelerinde tekrar ele almışlardır.  $\check{S}$  'ye birimli bir halka diyelim. Bütün basit sol  $\check{S}$ -modüller injektifse  $\check{S}$  halkasına sol V-halka adı verilir. Bütün yarı basit sol  $\check{S}$ -modüller injektifse  $\check{S}$  halkasına SSI-halka adı verilir. Eğer  $\check{S}/Rad(\check{S})$  yarı basit halka ise,  $\check{S}$  halkasına yarı yerel adı verilir.  $\check{D}$  bir  $\check{S}$ -modül ve  $\check{N} \leq \check{D}$  olsun.  $\check{D} = \check{N} + K$  olması hasebiyle bir  $K$  alt modülü mevcut ve  $K$  bu şarta göre minimal olursa, diğer bir deyişle  $\check{N} + \check{Z} = \check{D}$  koşulunu sağlayan her  $\check{Z} \leq K$  için  $\check{Z} = K$  olursa,  $K$  ya  $\check{Z}$  de  $\check{N}$  nin tümleyeni ve  $\check{N}$  ye  $\check{D}$  de tümleyene sahiptir adı verilir.  $T$  bir  $\check{S}$ -modül olsun. Eğer  $T$  nin bütün alt modülleri  $T$  de tümleyene sahip olurlarsa  $T$  'ye tümlemiş modül adı verilir.  $\check{S}$  halka,  $\check{N}$  bir  $\check{S}$ -modül ve  $\check{D} < \check{N}$  'yi ise öz alt modül olarak kabul edelim .  $\check{Y} \leq J$  olması hasebiyle  $\check{N} = \check{D} + \check{Y}$  olduğu zaman  $\check{Y} = \check{N}$  olursa,  $\check{D}$  ye  $J$  nin küçük alt modülü adı verilir.  $T$  bir  $\check{S}$ -modül ,  $\check{Z} \leq T$  olarak kabul edelim.  $\check{Z} + \check{Y} = T$  ile  $T/\check{Y}$  singüler olacak biçimde  $T$  'nin bütün  $\check{Y}$  alt modülleri için  $\check{Y} = T$  mevcutsa,  $\check{Z}$  ye  $\delta$ -küçük alt modül adı verilir.  $T = \check{N} + \check{Y}$ , ve  $\check{N} \cap \check{Y} = \check{Y}$  'de  $\delta$ -küçük ve  $T = \check{N} + \check{Y}$  ,  $\check{Y}/F$  singüleri ile  $\check{Y}$  nin fark etmeksizin  $F$  öz alt modülü kapsamında  $T \neq \check{N} + F$  olarak kabul edelim.  $\check{N}$  ile  $\check{Y}$  bir  $T$  modülünün verilen bu koşulları sağlayan alt modülleri olurlarsa  $\check{Y}$  ye  $\check{N}$  nin  $T$  de  $\delta$ -tümleyeni adı verilir. Şayet  $T$  nin bütün alt modülleri  $T$  'de bir  $\delta$ -tümleyene sahip iseler,  $T$  'ye  $\delta$ -tümlemiş adı verilir.

$\check{Y}$  bir modül olsun.  $\check{Y} = \check{Z} + L$  ve  $\check{Z} \cap L \subseteq Des_{\check{Y}}(L)$  ise  $\check{Y}$  nin  $L$  alt modülüne  $\check{Y}$  de  $\check{Z}$  alt modülünün ss-tümleyeni adı verilir.  $\check{Y}$  modülünün bütün alt modülleri  $\check{Y}$  de ss-tümleyene sahip iseler  $\check{Y}$  ye ss-tümlenmiş modül adı verilir.

$\check{Y}$  ‘yi  $\check{S}$ -modül kabul edelim.  $\check{Y}$  ‘nin bütün  $N$  alt modülleri kapsamında  $Des(\check{Y}/N)$  ,  $\check{Y}/N$  ‘nin direkt toplam terimi ise  $\check{Y}$  modülüne parçalanana adı verilir. Bütün yarı basit modüller parçalanandır. Bu tezde, ss-tümlenmiş modüllerin bir genellemesi olarak cr-tümlenmiş modüller çalışıldı.  $\check{Y}$  ‘yi  $\check{S}$ -modül kabul edelim.  $\check{Y} = \check{D} + \check{N} +$  ve  $\check{D} \cap \check{N}$  parçalanana olursa,  $\check{N}$  ye  $\check{D}$  nin  $\check{Y}$  de c-tümleyeni adı verilir.  $T$  ‘nin bütün alt modülleri c-tümleyene sahip iseler,  $T$  ‘ye cr-tümlenmiş modül adı verilir.

Bu tez çalışmasının Genel Bilgiler bölümünde; halka ile modül teorilerin temel tanım ile teoremlerine yer verilmiş, Materyal ve Yöntem bölümünde V-halka, SSI-halka, Yarı yerel halka, Tümlenmiş modüller ve çeşitleri ile Parçalanana modüller ele alınmış, son olarak Bulgular ve Tartışma bölümünde ise, c-tümleyen alt modüller yardımıyla tanımlanan cr-tümlenmiş modüller çalışılmıştır

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Halkalar

2.1.1. Tanım Alt satırdaki koşulları yerine getiren  $(\check{S}, +, \cdot)$  cebirsel yapısına **halka** adı verilir.

(i)  $(\check{S}, +)$  abel gruptur,

(ii) Her  $\check{n}, \check{y}, \check{s} \in \check{S}$  için  $(\check{n}\check{y})\check{s} = \check{n}(\check{y}\check{s})$  dir,

(iii) Her  $\check{n}, \check{y}, \check{s} \in \check{S}$  için  $\check{n}(\check{y} + \check{s}) = \check{n}\check{y} + \check{n}\check{s}$  ve  $(\check{n} + \check{y})\check{s} = \check{n}\check{s} + \check{y}\check{s}$  dir (Hungerford, 1974).

2.1.2. Tanım  $(\check{S}, +, \cdot)$  halka kabul edelim.  $\check{a} \in \check{S}$  olması hasebiyle  $\forall \check{n} \in \check{S}$  için  $\check{n}\check{a} = \check{a}\check{n} = \check{n}$  olursa,  $\check{a} \in \check{S}$  elemanına  $\check{S}$  halkasının **birim elemanı** adı verilir.  $\check{a} = 1_{\check{S}}$  biçiminde ifade edilir. Birim elemanlı halkaya **birimli halka** adı verilir.

Bu çalışmada  $\check{S}$  ile  $(\check{S}, +, \cdot)$  halkası kastedilecektir.

“.” işlemine binayen komütatif olarak kabul edilen  $(\check{S}, +, \cdot)$  halkasına **değişmeli halka** adı verilir.  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  değişmeli halkalardır ve  $n > 1$  olmak üzere  $M_n(\mathbb{Z})$  değişmeli olmayan halkadır (Hungerford, 1974)

2.1.3. Tanım  $\check{S}$  ‘yi halka,  $\emptyset \neq I \subseteq \check{S}$  olarak kabul edelim.  $I, (\check{S}, +)$  abel grubunun alt grubu ile rastgele seçilen  $t, y \in I$  için  $ty \in I$  olursa,  $I$ ’ya  $\check{S}$ ’ nin **alt halkası** adı verilir. Ayrıca her  $\check{s} \in \check{S}$  ile her  $t \in I$  için  $\check{s}t \in I$  ( $t\check{s} \in I$ ) olursa,  $I$  ya  $\check{S}$  nin **sol (sağ) ideali** adı verilir. Şayet  $I, \check{S}$  ’nin hem sağ ideali hem de sol ideali olursa,  $I$ ’ya  $\check{S}$ ’ nin **ideali** adı verilir.

Bir halkanın her ideali alt halkadır ancak her alt halka ideal olmak zorunda değildir. Örneğin  $2\mathbb{Z}$  halkası  $\mathbb{Q}$  nun bir alt halkası iken  $x = 4 \in 2\mathbb{Z}$  ve  $r = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$  için,  $rx = \frac{4}{5} \notin 2\mathbb{Z}$  olduğundan  $2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  nun bir ideali değildir.  $\mathbb{Z}$  halkasının her alt halkası bir idealdir.

$\check{S}$  halkasının 0 ve  $\check{S}$  ideallerine **aşık ideal** denir.  $\check{S}$  halkasının kendisi hariç ideallerine **öz ideal** denir (Hungerford, 1974).

2.1.4. Tanım  $\check{S}$  halka olsun.  $\check{n} \in \check{S}$  elemanı için  $\check{n}\check{y} = \check{y}\check{n} = 1_{\check{S}}$  olacak şekilde  $\check{y} \in \check{S}$  elemanı mevcutsa,  $\check{y}$  elemanına  $\check{n} \in \check{S}$  elemanının **tersi** adı verilir. Bu bağlamda  $\check{n}$  elemanına  $\check{S}$  halkasının **terslenebilir elemanı** adı verilir (Hungerford, 1974)

2.1.5. Tanım  $\check{S}$  birim elemanlı bir halka olsun,  $\check{S}$ 'nin sıfırdan farklı tüm elemanlarının çarpma işlemine göre bir tersi olursa,  $\check{S}$ 'ye **bölme halkası** denir. (Hungerford, 1974)

2.1.6. Tanım Değişmeli bölme halkasına **cisim** denir (Hungerford, 1974)

## 2.2. Modüller

2.2.1. Tanım  $\check{S}$  halkası ile  $(\check{N}, +)$  abel grubu kapsamında  $(\check{s}, \check{n}) \mapsto f(\check{s}, \check{n}) = \check{s}\check{n}$  ile tanımlı  $f : \check{S} \times \check{N} \rightarrow \check{N}$  fonksiyonu verilmiş olsun. Her  $\check{a}, \check{z} \in \check{S}$  ve her  $\check{j}, \check{y} \in \check{N}$  için;

$$(i) \check{a}(\check{j} + \check{y}) = \check{a}\check{j} + \check{a}\check{y};$$

$$(ii) (\check{a} + \check{z})\check{j} = \check{a}\check{j} + \check{z}\check{j};$$

$$(iii) (\check{a}\check{z})\check{j} = \check{a}(\check{z}\check{j})$$

şartları oluşursa  $\check{N}$ 'ye **sol  $\check{S}$ -modül** adı verilir.  $\check{S}\check{N}$  biçiminde ifade edilir.  $\check{S}$ , birimi  $1_{\check{S}}$  olan bir halka olması hasebiyle  $u \in \check{N}$  rastgele seçilen elemanı için  $1_{\check{S}}u = u$  eşitliği sağlanıyorsa  $\check{N}$  modülüne **üniter sol  $\check{S}$ -modül** adı verilir (Hungerford, 1974).

Bu tezde tüm modüller üniter sol  $\check{S}$ -modül olarak alınacaktır.

$G$  abel grup olması hasebiyle,  $G$  üniter sol  $\mathbb{Z}$ -modül olur. Bundan ötürü  $\mathbb{Q}$  sol  $\mathbb{Z}$ -modül olur. Bütün  $\check{Y}$  halkaları kendi üzerlerinde üniter sol  $\check{Y}$ -modül olurlar.  $\check{Y}$  biçiminde ifade edilir. Bu bağlamda  $\check{Y} = \mathbb{Z}_n$  kabul edilirse,  $\mathbb{Z}_n$  sol  $\mathbb{Z}_n$ -modül olur. Bütün vektör uzayları, bir üniter sol modül olurlar.

2.2.2. Tanım  $\check{S}$ 'yi halka,  $\check{Y}$ 'yi  $\check{S}$ -modül,  $\emptyset \neq \check{D} \subseteq \check{Y}$  ise alt küme olarak kabul edelim. Bütün  $\check{y}, \check{n} \in \check{D}$ 'ler ve bütün  $\check{s} \in \check{S}$ 'ler için

$$(i) \check{y} - \check{n} \in \check{D},$$

$$(ii) \check{s}.\check{y} \in \check{D}$$

oluyorsa,  $\check{D}$ 'ye  $\check{Y}$ 'nin bir sol **alt modülü** denir ve  $\check{D} \leq \check{Y}$  şeklinde yazılır. Buna göre  $0$  ile  $\check{Y}$ ,  $\check{Y}$  modülünün aşık alt modülleridir.  $\check{Y}$  modülünün kendisinden farklı alt modüllerine **öz**

**alt modül** adı verilir. Şayet  $\mathfrak{D}$ ,  $\check{Y}$  'nin öz alt modülü olursa,  $\mathfrak{D} < \check{Y}$  biçiminde ifade edilir.  $\check{S}$  halkasının  $I$  öz sol ideali aynı zamanda  $\check{S}$  'nin öz alt modülü olur.  $\check{Y}$  modülünün rastgele sayıdaki alt modüllerinin kesişimi  $\check{Y}$  'nin alt modülü olur (Hungerford, 1974).

$\check{N}$  bir  $\check{S}$ -modül ve  $\check{z} \in \check{S}$  olsun. Bu takdirde  $\check{S}\check{z} = \{\check{s}\check{z} \mid \check{s} \in \check{S}\} \leq \check{N}$  alt modüldür. Gerçekten  $\check{s}\check{z}, \check{n}\check{z} \in \check{S}\check{z}$  ise,  $\check{s}\check{z} - \check{n}\check{z} = (\check{s} - \check{n})\check{z} \in \check{S}\check{z}$  ve  $\check{a} \in \check{S}$  için  $\check{a}(\check{s}\check{z}) = (\check{a}\check{s})\check{z} \in \check{S}\check{z}$  dir (Hungerford, 1974).

2.2.3. Önerme  $\check{S}$  'ye modül diyelim.  $\check{Y}, \mathfrak{D}, \check{N}$  'yi de  $\check{S}$  'nin alt modülleri olacak şekilde  $\check{N} \leq \mathfrak{D}$  olarak kabul edelim. Bu koşullar altında

$$(\check{N} + \check{Y}) \cap \mathfrak{D} = \check{N} + (\check{Y} \cap \mathfrak{D}) \text{ dir.}$$

*İspat*  $a \in (\check{N} + \check{Y}) \cap \mathfrak{D}$  olsun. Bu takdirde,  $a \in \check{N} + \check{Y}$  ve  $a \in \mathfrak{D}$  dir. O halde  $a = \check{n} + \check{y}$  olacak biçimde  $\check{n} \in \check{N}$ ,  $\check{y} \in \check{Y}$  elemanları mevcuttur.  $\check{N} \leq \mathfrak{D}$  olduğundan  $\check{y} = a + (-\check{n}) \in \check{Y} \cap \mathfrak{D}$  olup  $a \in \check{N} + (\check{Y} \cap \mathfrak{D})$  bulunur. Buradan  $(\check{N} + \check{Y}) \cap \mathfrak{D} \leq \check{N} + (\check{Y} \cap \mathfrak{D})$  dir. Ayrıca  $\check{N} + (\check{Y} \cap \mathfrak{D}) \leq \check{N} + \check{Y}$  ve  $\check{N} + (\check{Y} \cap \mathfrak{D}) \leq \mathfrak{D}$  olduğundan  $\check{N} + (\check{Y} \cap \mathfrak{D}) \leq (\check{N} + \check{Y}) \cap \mathfrak{D}$  dir. Dolayısıyla  $(\check{N} + \check{Y}) \cap \mathfrak{D} = \check{N} + (\check{Y} \cap \mathfrak{D})$  elde edilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.2.4. Tanım  $T$  'yi  $\check{S}$ -modül,  $X \subseteq T$  kabul edelim.  $T$  modülünün  $X$  alt kümesini kapsayan tüm alt modüllerinin arakesitine  $T$  modülünün  $X$  **alt kümesi tarafından üretilen alt modülü** adı verilir.  $\langle X \rangle$  biçiminde ifade edilir.  $X$  kümesine  $\langle X \rangle$  alt modülünün **üreteç kümesi** adı verilir. Şayet  $X$  sonlu küme olursa,  $\langle X \rangle$  alt modülüne **sonlu üretilmiş alt modül**,  $X = \{t\}$  şeklinde tek elemana sahip olursa  $\langle X \rangle = \langle t \rangle$  alt modülüne **devirli alt modül** adı verilir. Şayet  $T = \langle X \rangle$  olacak şekilde  $T$  nin sonlu bir  $X$  alt kümesi mevcutsa  $T$  ye **sonlu üretilmiş modül** ve özel olarak  $T = \langle t \rangle$  olması hasebiyle  $t \in T$  elemanı mevcutsa  $T$  ye  **$m$  tarafından üretilen devirli modül** adı verilir. Bu bağlamda  $\langle t \rangle = \check{S}t = \{st \mid s \in \check{S}\}$  biçimindedir (Hungerford, 1974).

Özellikle,  $X = \emptyset$  ise,  $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$  olduğu açıktır.

2.2.5. Teorem  $M$  'yi modül,  $X \neq \emptyset$  bir alt küme olarak kabul edelim. Bu durumda

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^z s_i a_i \mid z \in \mathbb{N}^*, s_i \in \check{S}, a_i \in X, 1 \leq i \leq z \right\} \text{ şeklindedir.}$$

*İspat*  $B = \left\{ \sum_{i=1}^z s_i a_i \mid a_i \in X, s_i \in \check{S}, z \in \mathbb{N}^* \right\}$  olsun.  $B \leq M$  olduğunu gösterelim.  $X \neq \emptyset$  olduğundan  $\exists a \in X$  için  $a \neq 0$ .  $a \in B \neq \emptyset$  olur.  $x, y \in B$  ve  $s \in \check{S}$  keyfi olsun.

$$x = \sum_{i=1}^z s_i a_i \text{ ve } y = \sum_{\alpha=1}^p s'_\alpha a'_\alpha \text{ yazılabilir.}$$

Buradan  $x - y = (\sum_{i=1}^z s_i a_i - \sum_{\alpha=1}^p s'_\alpha a'_\alpha) = \sum_{i=1}^{z+p} s_i a_i \in B$  olur. Benzer şekilde  $sx \in B$  olduğundan  $B \leq M$  dir.  $\langle X \rangle = B$  olduğunu gösterelim.  $a \in X$  ise,  $a = 0.a \in B$  olur. Bu bağlamda  $\langle X \rangle \leq B$  olur. Böylece  $D \leq B \leq D$  olup  $D = B$  bulunur.

2.2.6. Tanım  $\tilde{N}$  'ye  $\check{S}$ -modül,  $\{B_i\}_{i \in I}$  'ya ise  $\tilde{N}$  'nin alt modüllerinin bir ailesi diyelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \langle \cup_{i \in I} B_i \rangle &= \left\{ \sum_{j=1}^z r_i a_{i_j} \mid a_i \in \cup_{i \in I} B_i, z \in \mathbb{N}, s_i \in \check{S} \right\} \\ &= \left\{ r_1 a_{i_1} + r_2 a_{i_2} + \dots + r_z a_{i_z} \mid a_{i_j} \in B_{i_j}, z \in \mathbb{N}, s_i \in \check{S}, 1 \leq j \leq z \right\} \\ &= \left\{ b_{i_1} + b_{i_2} + \dots + b_{i_z} \mid b_{i_j} \in B_{i_j}, 1 \leq j \leq z \right\} \end{aligned}$$

dolayı  $\langle \cup_{i \in I} B_i \rangle$  alt modülüne  $\{B_i\}_{i \in I}$  **ailesinin toplamı** adı verilir ve  $\langle \cup_{i \in I} B_i \rangle = \sum_{i \in I} B_i$  ile gösterilir (Hungerford, 1974).

2.2.7. Tanım  $\check{Y}$  bir modül,  $\{\check{Y}_s \mid s \in \check{S}\}$  de  $\check{Y}$  'nin alt modüllerinin bir topluluğu olsun. Her  $\check{y} \in \check{Y}$  elemanı tek türlü olarak  $\check{Y}_k$  alt modüllerinin elemanlarının toplamı şeklinde, yani  $\check{y} = \check{y}_{s_1} + \check{y}_{s_2} + \dots + \check{y}_{s_n}, \check{y}_{s_i} \in \check{Y}_{s_i}$  şeklinde tek türlü olarak yazılabilirse  $\check{Y}$  ye  $\check{Y}_k$  alt modüllerinin **iç direkt toplamı** adı verilir ve  $\bigoplus'_{k \in K} \check{Y}_k$  ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.2.8. Önerme  $W = \bigoplus'_{k \in K} W_k$  olması için gerek ve yeter koşul  $W = \sum_{k \in K} W_k$  ve her  $i \in K$  için  $W_i \cap (\sum_{k \neq i} W_k) = 0$  olmasıdır (Alizade ve Pancar, 2016).

*İspat* ( $\Rightarrow$ )  $W = \bigoplus'_{k \in K} W_k$  diyelim. Buradan her  $w \in W$ ,  $w = w_{k_1} + w_{k_2} + \dots + w_{k_n}$  şeklinde yazılabileceğinden,  $w \in W_{k_1} + W_{k_2} + \dots + W_{k_n} \subseteq \sum_{k \in K} W_k$  olur. O halde  $W = \sum_{k \in K} W_k$  gerçekleşir. Ayrıca,  $x \in W_i \cap (\sum_{k \neq i} W_k)$  ise  $x = w_i = w_{k_1} + w_{k_2} + \dots + w_{k_n}, k_j \neq i$  yazabiliriz. Yazılışın tek türlü olmasından  $w_i = w_{k_1} = w_{k_2} = \dots = w_{k_n} = 0$  olur. Buna istinaden her  $i \in K$  için  $W_i \cap (\sum_{k \neq i} W_k) = 0$  dır.

( $\Leftarrow$ )  $W = \sum_{k \in K} W_k$  olduğundan her  $w \in W = \sum_{k \in K} W_k$  elemanı,  $w = w_{k_1} + w_{k_2} + \dots + w_{k_n}$  biçiminde yazılabilir. Yazılışın tek türlü olduğunu göstermek için bir  $w$  elemanının  $w = w_{k_1} + w_{k_2} + \dots + w_{k_n} = w'_{k'_1} + w'_{k'_2} + \dots + w'_{k'_t}$  şeklinde iki gösterimin bulunduğunu varsayalım. Gerekirse toplam terimlerinin yerlerini değiştirerek ve sıfır toplam terimlerini ekleyerek,  $n = t$  ve her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $k_i = k'_i$  olduğunu kabul ederiz.

Bu durumda yukarıdaki eşitlikten her  $i = 1, 2, \dots, t$  için  $w_{k_i} - w'_{k_i} = \sum_{j \neq i} (w'_{k_j} - w_{k_j}) \in W_{k_i} \cap (\sum_{j \neq i} W_{k_j}) = 0$  ve buradan da  $w_{k_i} = w'_{k_i}$  elde ederiz. Böylece söz konusu yazılış tek türdür.

2.2.9. Tanım  $\check{S}$  halka,  $\emptyset \neq I$  bir indis kümesi olması hasebiyle,  $\{W_i\}_{i \in I}$   $\check{S}$ -modüllerin bir ailesi olsun.  $\{\alpha \mid \alpha: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} W_i, \forall i \in I \text{ için } \alpha(i) \in W_i\}$  ile verilen dönüşümlerin kümesine  $\{W_i\}_{i \in I}$  modüller ailesinin **çarpımı** adı verilir.  $\prod_{i \in I} W_i$  biçiminde ifade edilir. Her  $i \in I$  için  $\alpha(i) = \alpha_i$ ,  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$  biçiminde gösterelim. Bu bağlamda  $\alpha_i$  ye  $\alpha$  **dönüşümünün  $i$ . bileşeni** adı verilir. Şayet  $I$  indis kümesi sayılabilir ise,  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots)$  şeklindedir.

$\alpha, \beta \in \prod_{i \in I} W_i$  olmak üzere

(i)  $\alpha = \beta \iff$  her  $i \in I$  için  $\alpha_i = \beta_i$

(ii)  $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I}$

(iii)  $-\alpha = (-\alpha_i)_{i \in I}$

(iv)  $j \in J$  olması hasebiyle  $j\alpha = (j\alpha_i)_{i \in I}$  biçiminde tanımlı cebirsel işlemlerine binayen  $\prod_{i \in I} W_i$  bir  $\check{S}$ -modül yapısına sahiptir. Bu modüle  $\{W_i\}_{i \in I}$  modüller ailesinin **dış direkt çarpımı** adı verilir.

$\bigoplus_{i \in I}^p W_i = \{(\alpha_i)_{i \in I} \mid \text{sonlu sayıda } i \in I \text{ için } \alpha_i \neq 0\}$  kümesi  $\prod_{i \in I} W_i$  modülünün bir alt modülüdür.  $\bigoplus_{i \in I}^p W_i$  alt modülüne  $\{W_i\}_{i \in I}$  modüller ailesinin **dış direkt toplamı** adı verilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.2.10. Tanım  $P \leq \check{N}$  ve  $\check{n} \in \check{N}$  olsun.  $\check{N}$  'nin  $\check{n} + P = \{\check{n} + p \mid p \in P\}$  alt kümesine,  $\check{N}$  'nin  $P$  alt modülüne göre **sol yansınlı** denir ve tüm sol yansınlılar kümesi  $\check{N}/P$  ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.2.11. Önerme  $\check{Y}$  'yi  $\check{S}$ -modül,  $P \leq \check{Y}$  olarak kabul edelim.  $\check{Y}/N$  bölüm grubu,  $s \in \check{S}$  ve  $\check{y} + P \in \check{Y}/P$  elemanları için,  $s \cdot (\check{y} + P) = s\check{y} + P$  ile tanımlı  $\bullet: \check{S} \times \check{Y}/P \rightarrow \check{Y}/P$  dış işlemine göre bir  $\check{S}$ -modül yapısına sahiptir.  $\check{Y}/P$  modülüne  $\check{Y}$  nin  $P$  alt modülüne göre **bölüm modülü** denir (Hungerford, 1974).

*İspat* Öncelikle “ $\bullet$ ” işleminin iyi tanımlı olduğunu görelim.  $(s_1, \check{y}_1 + P) = (s_2, \check{y}_2 + P)$  olsun. Buradan  $s_1 = s_2 = s$  ve  $\check{y}_1 + P = \check{y}_2 + P$  olup  $\check{y}_1 - \check{y}_2 \in P$  dir.

O halde  $s(\check{y}_1 - \check{y}_2) = s\check{y}_1 - s\check{y}_2 \in P \Rightarrow s\check{y}_1 + P = s\check{y}_2 + P$  olur. Dolayısıyla  $\bullet$  işlemi iyi tanımlıdır. Her  $k, \check{y} \in \check{Y}$  ve her  $s, \check{a} \in \check{S}$  için

- (i)  $s((\ddot{y} + P) + (k + P)) = s((\ddot{y} + k) + P) = s(\ddot{y} + k) + P = (s\ddot{y} + sk) + P = (s\ddot{y} + P) + (sk + P) = s(\ddot{y} + P) + s(k + P)$  olur.
- (ii)  $(s + \ddot{a})(\ddot{y} + P) = (s + \ddot{a})\ddot{y} + P = (s\ddot{y} + \ddot{a}\ddot{y}) + P = (s\ddot{y} + P) + (\ddot{a}\ddot{y} + P) = s(\ddot{y} + P) + \ddot{a}(\ddot{y} + P)$  olur.
- (iii)  $(s\ddot{a})(\ddot{y} + P) = (s\ddot{a})\ddot{y} + P = s(\ddot{a}\ddot{y}) + P = s(\ddot{a}\ddot{y} + P) = s(\ddot{a}(\ddot{y} + P))$  olur.
- (iv)  $1_{\check{S}}(\ddot{y} + P) = 1_{\check{S}}\ddot{y} + P = \ddot{y} + P$  olduğundan  $\check{Y}/P$  üniter sol  $\check{S}$ -modüldür (Hungerford, 1974).

### 2.3. Homomorfizmalar

2.3.1. Tanım  $\check{S}$  'yi halka ,  $\mathfrak{D}$  ile  $P$  'yi  $\check{S}$ -modül olarak kabul edelim . Alt satırdaki koşulları gerçekleyen  $\psi: \mathfrak{D} \rightarrow P$  fonksiyonuna **sol  $\check{S}$ -modül homomorfizması** adı verilir.

- (i) Her  $\ddot{a}, \ddot{n} \in \mathfrak{D}$  için  $\psi(\ddot{a} + \ddot{n}) = \psi(\ddot{a}) + \psi(\ddot{n})$  dir,
- (ii) Her  $\ddot{a} \in \mathfrak{D}$  ve her  $\check{s} \in \check{S}$  için  $\psi(\check{s}\ddot{a}) = \check{s}\psi(\ddot{a})$  dir.

Ele almış olduğumuz tez çalışmamızda rastgele bahsedilen sol  $\check{S}$ -modül homomorfizması kısaca homomorfizma olarak isimlendirilecektir.  $\psi: \mathfrak{D} \rightarrow P$  homomorfizma olsun . Şayet  $\psi$  bire-bir olursa  $\psi$  'ye **monomorfizma**,  $\psi$  örten olursa  $\psi$  'ye **epimorfizma** ,  $\psi$  hem bire-bir hem de örten olursa  $\psi$  'ye **izomorfizma** adı verilir.  $\mathfrak{D}$  ile  $P$  modülleri arasında bir izomorfizma mevcutsa,  $\mathfrak{D}$  ile  $P$  modüllerine **izomorf modüller** adı verilir.  $\mathfrak{D} \cong P$  biçiminde ifade edilir.  $\mathfrak{D}$  modülünden  $P$  modülüne tanımlanan bütün homomorfizmaların kümesi  $Hom(\mathfrak{D}, P) = \{\psi \mid \psi: \mathfrak{D} \rightarrow P \text{ modül homomorfizması}\}$  ile gösterilir. Burada  $\psi: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$  homomorfizmasına **endomorfizma** denir.  $\mathfrak{D}$  modülünün tüm endomorfizmalarının kümesi  $End(\mathfrak{D})$  biçiminde ifade edilir (Hungerford, 1974).

2.3.2. Tanım  $\check{S}$  modül ,  $Y \leq \check{S}$  diyelim. Bütün  $y \in Y$  'ler kapsamında  $i(y) = y$  ile tanımlı  $i: Y \rightarrow \check{S}$  dönüşümü monomorfizma olup  $i$  monomorfizmasına **içerme monomorfizması** adı verilir.  $\pi(s) = s + Y$  ile tanımlı  $\pi: \check{S} \rightarrow Y$  dönüşümü epimorfizmadır. Buradaki  $\pi$  epimorfizmasına **doğal homomorfizma** adı verilir (Hungerford, 1974).

2.3.3. Tanım  $P$  modülü için  $g(p) = p$  ile tanımlı  $g: P \rightarrow P$  fonksiyonu  $\check{S}$ -modül izomorfizmasıdır. Bu tür izomorfizmalara **birim homomorfizma** denir.  $P$  den  $P$  ye birim homomorfizması  $I_P$  biçiminde ifade edilir (Hungerford, 1974).

2.3.4. Tanım  $f: J \rightarrow Y$  homomorfizma olsun  $\text{Çek}(f) = \{j \in J \mid f(j) = 0_Y\}$  kümesine  $f$  homomorfizmasının **çekirdeği** denir.  $\text{Çek}(f)$  ile gösterilir.

$f: \tilde{N} \rightarrow \tilde{Y}$  modüllerin homomorfizması olmak üzere:

$\tilde{n}, \tilde{y} \in \text{Çek}(f)$  olsun  $f(\tilde{n} - \tilde{y}) = f(\tilde{n}) - f(\tilde{y}) = 0_{\tilde{Y}} - 0_{\tilde{Y}} = 0_{\tilde{Y}}$  olduğundan

$\tilde{n} - \tilde{y} \in \text{Çek}(f)$  dir.  $s \in \text{Şkeyfi}$  elemanı için  $f(s\tilde{n}) = sf(\tilde{n}) = s \cdot 0_{\tilde{Y}} = 0_{\tilde{Y}}$  dir. Buradan  $s\tilde{n} \in \text{Çek}(f)$  olduğundan  $\text{Çek}(f) \leq \tilde{N}$  dir (Hungerford, 1974)

2.3.5. Tanım  $f: J \rightarrow \tilde{Y}$  homomorfizma olmak üzere,  $\text{Gör}(f) = f(J) = \{\tilde{y} \in \tilde{Y} \mid \exists j \in J: \tilde{y} = f(j)\}$  kümesine  $f$ 'nin **görüntüsü** adı verilir.  $\text{Gör}(f)$  biçiminde ifade edilir.

$f: \tilde{A} \rightarrow \tilde{Y}$  modüllerin homomorfizması olmak üzere:

$\tilde{n}, w \in \text{Gör}(f)$  olsun. Buradan  $\tilde{n} = f(\tilde{a})$  ve  $w = f(\tilde{y})$  olacak şekilde  $\tilde{a}, \tilde{y} \in \tilde{A}$  olsun.

$\tilde{n} - w = f(\tilde{a}) - f(\tilde{y}) = f(\tilde{a} - \tilde{y}) \in \text{Gör}(f)$

$sp = sf(\tilde{a}) = f(s\tilde{a}) \in \text{Gör}(f)$  olduğundan  $\text{Gör}(f) \leq \tilde{Y}$  dir (Hungerford, 1974).

2.3.6. Teorem:  $C$  ile  $\tilde{Y}$  'yi modül kabul edelim,  $f: C \rightarrow \tilde{Y}$  homomorfizması verilsin. Bu bağlamda,

(i)  $\tilde{N} \leq C$  ve  $\mathfrak{D} \leq \tilde{Y}$  ise,  $f^{-1}(f(\tilde{N})) = \tilde{N} + \text{Çek}(f)$  ve  $f(f^{-1}(\mathfrak{D})) = \mathfrak{D} \cap f(C)$  dir.

(ii)  $\tilde{N} \leq C$  ve  $\mathfrak{D} \leq \tilde{Y}$  ise,  $f^{-1}(f(\tilde{N}) + \mathfrak{D}) = \tilde{N} + f^{-1}(\mathfrak{D})$  ve  $f(f^{-1}(\mathfrak{D}) \cap \tilde{N}) = \mathfrak{D} \cap f(\tilde{N})$  dir.

(iii)  $g$  ve  $h$  modül homomorfizmaları için  $f = gh$  ise  $\text{Çek}(f) \cong h^{-1}(\text{Çek}(g))$  dir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.3.7. Teorem (1. İzomorfizma Teoremi) Her  $f: \tilde{N} \rightarrow J$  homomorfizması için  $f = \bar{f} \circ \sigma$  olacak biçimde bir  $\bar{f}: \tilde{N}/\text{Çek}(f) \rightarrow J$  monomorfizması vardır. Özellikle,  $\tilde{N}/\text{Çek}(f) \cong \text{Gör}(f)$  gerçekleşir (Alizade ve Pancar, 2016).

*İspat*  $\text{Çek}(f) = \mathfrak{D}$  olsun.  $\bar{f}: \tilde{N}/\mathfrak{D} \rightarrow J$  fonksiyonunu  $\bar{f}(\tilde{n} + \mathfrak{D}) = f(\tilde{n})$  ile tanımlayalım.  $\tilde{n} + \mathfrak{D} = j + \mathfrak{D}$  ise  $\tilde{n} - j \in \mathfrak{D}$  olup, buradan da  $f(\tilde{n} - j) = 0$  ve  $f(\tilde{n}) = f(j)$  elde ederiz. Dolayısıyla,  $\bar{f}$  iyi tanımlıdır.  $\bar{f}((\tilde{n} + \mathfrak{D}) + (j + \mathfrak{D})) = \bar{f}(\tilde{n} + j + \mathfrak{D}) = f(\tilde{n} + j) = f(\tilde{n}) + f(j) = \bar{f}(\tilde{n} + \mathfrak{D}) + \bar{f}(j + \mathfrak{D})$  ve  $\bar{f}(r(\tilde{n} + \mathfrak{D})) = \bar{f}(r\tilde{n} + \mathfrak{D}) = f(r\tilde{n}) = rf(\tilde{n}) = r\bar{f}(\tilde{n} + \mathfrak{D})$

$\mathbb{D}$ ) olduğundan  $\bar{f}$ , bir homomorfizmadır. Her  $\tilde{n} + \mathbb{D} \in \text{Çek}(\bar{f})$  için  $f(\tilde{n}) = \bar{f}(\tilde{n} + \mathbb{D}) = 0$  olup  $\tilde{n} \in \text{Çek}(f) = \mathbb{D}$  ve buradan da  $\tilde{n} + \mathbb{D} = \mathbb{D}$  elde edilir. Böylece  $\text{Çek}(\bar{f}) = 0$  olur. Dolayısıyla,  $\bar{f}$  bir monomorfizmadır. Her  $\tilde{n} \in \tilde{N}$  için  $(\bar{f} \circ \sigma)(\tilde{n}) = \bar{f}(\sigma(\tilde{n})) = \bar{f}(\tilde{n} + \mathbb{D}) = f(\tilde{n})$  yani  $\bar{f} \circ \sigma = f$  dir. Buradan  $\text{Gör}(f) \subseteq \text{Gör}(\bar{f})$  gerçekleşir. Diğer taraftan, her  $j \in \text{Gör}(\bar{f})$  bir  $\tilde{n} + \mathbb{D}$  elemanının görüntüsüdür. O halde,  $j = \bar{f}(\tilde{n} + \mathbb{D}) = f(\tilde{n}) \in \text{Gör}(f)$  olduğundan,  $\text{Gör}(\bar{f}) \subseteq \text{Gör}(f)$  olur. Böylece  $\text{Gör}(f) = \text{Gör}(\bar{f})$  ve dolayısıyla  $\bar{f} : \tilde{N}/\mathbb{D} \rightarrow \text{Gör}(f)$  bir izomorfizmadır:

$\tilde{N}/\mathbb{D} \cong \text{Gör}(f)$  gerçekleşir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.3.8. Teorem (2. İzomorfizma Teoremi)  $\tilde{A}, \tilde{N} \leq \tilde{Y}$  ise  $(\tilde{A} + \tilde{N})/\tilde{N} \cong \tilde{A}/\tilde{A} \cap \tilde{N}$  gerçekleşir. *İspat*  $\sigma : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}/\tilde{N}$  doğal homomorfizmasının  $\tilde{A}$  'ya kısıtlanmışını  $\sigma'$  ile gösterelim.  $\text{Çek}(\sigma') = \tilde{A} \cap \text{Çek}(\sigma) = \tilde{A} \cap \tilde{N}$  olduğu açıktır. Her  $\tilde{a} \in \tilde{A}$  için  $\sigma'(\tilde{a}) = \tilde{a} + \tilde{N} = (\tilde{a} + 0) + \tilde{N} \in (\tilde{A} + \tilde{N})/\tilde{N}$ , dolayısıyla  $\text{Gör}(\sigma') \subseteq (\tilde{A} + \tilde{N})/\tilde{N}$  dir. Diğer taraftan her  $\tilde{a} \in \tilde{A}$ , bütün  $\tilde{n} \in \tilde{N}$ 'ler için,  $(\tilde{a} + \tilde{N}) + \tilde{N} = \tilde{a} + \tilde{N} = \sigma'(\tilde{a})$  olduğundan,  $(\tilde{A} + \tilde{N})/\tilde{N} = \text{Gör}(\sigma')$  elde edilir. Bu durumda Teorem 2.3.7 ispatından  $\text{Gör}(\sigma') \cong \tilde{A}/\text{Çek}(\sigma')$ , yani  $(\tilde{A} + \tilde{N})/\tilde{N} \cong \tilde{A}/(\tilde{A} \cap \tilde{N})$  izomorfizması gerçekleşir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.3.9. Teorem (3. İzomorfizma Teoremi)  $\tilde{N} \leq \mathbb{D} \leq \tilde{Y}$  modüller olsun. Bu şart altında  $(\tilde{Y}/\tilde{N})/(\mathbb{D}/\tilde{N}) \cong \tilde{Y}/\mathbb{D}$  dir (Alizade ve Pancar, 2016).

*İspat*  $f(\tilde{y} + \tilde{N}) = \tilde{y} + \mathbb{D}$  ile  $f : \tilde{Y}/\tilde{N} \rightarrow \tilde{Y}/\mathbb{D}$  fonksiyonunu tanımlayalım.  $\tilde{Y}/\tilde{N}$  bölüm modülünde  $\tilde{y} + \tilde{N} = \tilde{y}' + \tilde{N}$  olsun.

Bu sebeple,  $\tilde{y} - \tilde{y}' \in \tilde{N} \subseteq \mathbb{D}$  olur. Öyleyse,  $\tilde{Y}/\mathbb{D}$  da  $\tilde{y} + \mathbb{D} = \tilde{y}' + \mathbb{D}$  dir. Dolayısıyla,  $f$  fonksiyonu iyi tanımlıdır.  $f$  nin bir epimorfizma olduğu kolayca kontrol edilir.  $\tilde{y} + \tilde{N} \in \text{Çek}(f)$  olması için gerek ve yeter koşul  $\tilde{y} + \mathbb{D} = \mathbb{D}$ , yani  $\tilde{y} \in \mathbb{D}$ , diğer bir deyişle  $\tilde{y} + \tilde{N} \in \mathbb{D}/\tilde{N}$  olmasıdır. Böylece,  $\text{Çek}(f) = \mathbb{D}/\tilde{N} \leq \tilde{Y}/\tilde{N}$  olur.

Buradan  $\check{Y}/\mathbb{D} \cong (\check{Y}/\check{E})/\check{Cek}(f) = (\check{Y}/\check{E})/(\check{S}/\check{E})$  izomorfizması elde edilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.3.10. Tanım  $\mathbb{D}$  'ye modül ,  $\tilde{N} < \mathbb{D}$  diyelim .  $\mathbb{D}$  'nin  $\tilde{N}$  alt modülünü kapsayan bir tek  $\tilde{N}$  öz alt modülü varsa ,  $\tilde{N}$  öz alt modülüne  $\mathbb{D}$  modülünün **maksimal alt modülü** adı verilir. Örneğin  $p \in \mathbb{P}$  olsun.  $< p > = p\mathbb{Z} < \frac{\square}{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$  maksimal alt modüldür (Kasch, 1982).

2.3.11. Teorem  $\mathbb{D}$  'ye modül ,  $\tilde{N} \leq \mathbb{D}$  alt modül diyelim. Bu bağlamda  $\mathbb{D}$  nin  $\tilde{N}$  yi içeren bütün alt modüllerinin kümesi ile  $\mathbb{D}/\tilde{N}$  nin bütün alt modüllerinin kümesi arasında bire-bir eşleme mevcuttur.  $\mathbb{D}/\tilde{N}$  nin alt modülleri  $\tilde{N} \leq \check{Z} \leq \mathbb{D}$  olması hasebiyle  $\check{Z}/\tilde{N}$  şeklindedir. *İspat*  $\tilde{N} \leq \mathbb{D}$  olduğundan  $\sigma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/\tilde{N}$  doğal epimorfizma olsun.  $\tilde{N} \leq \check{Z} \leq \mathbb{D}$  ise  $\sigma(\check{Z}) = \check{Z}/\tilde{N} \leq \mathbb{D}/\tilde{N}$  dir. Tersine,  $C \leq \mathbb{D}/\tilde{N}$  ise  $\check{Z} = \sigma^{-1}(C)$  için  $\tilde{N} = \sigma^{-1}(0) \leq \check{Z} \leq \mathbb{D}$  ve  $\sigma(\check{Z}) = \check{Z}/\tilde{N} = C$  elde edilir. Böylece  $\mathbb{D}/\tilde{N}$  nin her alt modülü,  $\tilde{N} \leq \check{Z} \leq \mathbb{D}$  olmak üzere  $\check{Z}/\tilde{N}$  şeklinde yazılabilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.3.12. Tanım  $\{M_w^{\square} \mid w \in \mathbb{Z}\}$  modüller topluluğundan ve bunların

$$f_w : M_w^{\square} \rightarrow M_{w-1}^{\square}$$

homomorfizmalarından oluşan

$$\cdots \rightarrow M_{w+1}^{\square} \xrightarrow{f_{w+1}^{\square}} M_w^{\square} \xrightarrow{f_w^{\square}} M_{w-1}^{\square} \rightarrow \cdots$$

dizisinde her  $w \in \mathbb{Z}$  için  $Gör(f_{w+1}) = Çek(f_w)$  oluyorsa, bu diziye **tam dizi** adı verilir.

$0 \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$  dizisine ise **kısa tam dizi** denir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.3.13. Önerme  $0 \xrightarrow{f} \mathbb{D} \xrightarrow{g} \check{E} \xrightarrow{h} \check{N} \xrightarrow{e} 0$  dizisi tam olursa,  $g$  bir monomorfizma ve  $h$  bir epimorfizmadır. Ayrıca ,  $Gör(g) \cong \mathbb{D}$  ve  $\check{N} \cong \check{E}/Gör(g)$  dir. Böylece izomorf modülleri özdeşleştirerek  $\check{N} = \check{E}/\mathbb{D}$  diyebiliriz.

*İspat*  $\text{Çek}(g) = \text{Gör}(f) = f(0) = 0$  dır. Dolayısıyla  $g$  bir monomorfizmadır ve  $\text{Gör}(g) = g(\mathfrak{D}) \cong \mathfrak{D}$  dır. Her  $\tilde{n} \in \tilde{N}$  için  $e(\tilde{n}) = 0$  olduğundan  $\text{Gör}(h) = \text{Çek}(e) = \tilde{N}$  dir , yani  $h$  bir epimorfizmadır. Esas homomorfizma teoreminden  $\tilde{N} = \text{Gör}(h) \cong \tilde{E}/\text{Çek}(h) = \tilde{E}/\text{Gör}(g)$  izomorfizması elde edilir.

Önermenin ispatından incelenen dizinin tam olması için gerek ve yeter koşulun  $\text{Çek}(g) = 0$ ,  $\text{Gör}(h) = 0$  ve  $\text{Gör}(g) = \text{Çek}(h)$  olduğu elde edilir (Alizade ve Pancar, 2016).

## 2.4. İnjektif Modüller, Projektif Modüller ve Serbest Modüller

2.4.1. Tanım  $I$  ve  $\mathfrak{D}$  'yi modül kabul edersek. Bütün  $f : \mathfrak{D} \rightarrow \tilde{N}$  monomorfizmaları ile  $g : \mathfrak{D} \rightarrow I$  homomorfizmaları kapsamında  $h \circ f = g$  olacak biçimde bir  $h : \tilde{N} \rightarrow I$  homomorfizması bulunursa,  $I$  'ya  $\tilde{N}$  -**injektif modül** adı verilir (Alizade ve Pancar, 2016). Farklı bir açıdan değerlendirecek, tam satırlı her

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{D} & \xrightarrow{f} & \tilde{N} \\ & & \downarrow g & \searrow h & \\ & & I & & \end{array}$$

diyagramı bir  $h : \tilde{N} \rightarrow I$  homomorfizması ile değişmeli üçgene tamamlanabilirse,  $I$  'ya  $\tilde{N}$  -**injektif modül** denir (Alizade ve Pancar, 2016).

Yukarıdaki diyagramda  $0 \longrightarrow \mathfrak{D} \xrightarrow{f} \tilde{N}$  satır tam dizisi rastgele seçilirse  $I$  ya **injektif modül** adı verilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.2. Teorem (Baer Kriteri)  $\mathfrak{D}$  modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her  $\tilde{N}$  sol ideali ile  $k : \tilde{N} \rightarrow \mathfrak{D}$  homomorfizmasının bir  $m : \tilde{S} \rightarrow \mathfrak{D}$  homomorfizmasına genişletilebilmesidir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.3. Teorem  $\mathfrak{D}$ 'yi modül kabul edelim .  $I$  injektif olacak şekilde bir  $f : \mathfrak{D} \rightarrow I$  monomorfizması mevcuttur.

2.4.4. Önerme  $\forall i \in I$  için  $\{M_i\}_{i \in I}$  modüllerin bir ailesi olsun.  $A$  modülü  $M_i$ -injektif ise,  $A$  modülü  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ -injektiftir.

*İspat*

$$\begin{array}{c} 0 \rightarrow K \xrightarrow{i} M \\ \downarrow g \\ A \end{array}$$

diagramı verilsin.

$\Gamma = \{h: L \rightarrow A \mid K \subseteq L \subseteq M \text{ ve } h|_K = g\}$  kümesini alalım ve  $\Gamma$  üzerinde

" $[h_1: L_1 \rightarrow A] \leq [h_2: L_2 \rightarrow A] \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$  ve  $h_2|_{L_1} = h_1$ " ile tanımlı " $\leq$ " sıralama bağıntısını düşünelim.

$(\Gamma, \leq)$  sıralı bir kümedir. Zorn Lemmasına göre,  $h_0: L_0 \rightarrow A$  homomorfizması vardır. Şimdi  $M = L_0$  olduğunu gösterelim.  $\forall i \in I$  için  $M_i \subseteq L_0$  olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow L_0 \cap M_i & \rightarrow & M_i \\ \downarrow & & \searrow h_i \\ L_0 & & \\ h_0 \downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

diagramı değişmelidir.

$$h^*: L_0 + M_i \rightarrow A$$

$a + m_i \rightarrow h^*(a + m_i) = h_0(a) + h_i(m_i)$  dönüşümü homomorfizmadır ve  $h^* \in \Gamma$  dir.

$h_0$  ' ın maksimalliği gereği  $h^* = h_0$  olup  $M_i \subseteq L_0$  dır.

2.4.5. Teorem  $\mathfrak{D}$  ve  $\tilde{N}$ ,  $\check{S}$ - modüller olsun.  $\mathfrak{D}$  modülü  $\tilde{N}$ -injektif ise,  $\mathfrak{D}$  modülü  $\tilde{N}$  nin bütün  $X$  alt modülleri için hem  $X$ -injektif hemde  $\tilde{N}/X$  -injektiftir.

*İspat*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & \ddot{Y} \xrightarrow{i_1} X \\ & & \downarrow g \\ & & \mathfrak{D} \end{array}$$

diyagramı verilsin.  $i_2: X \rightarrow \tilde{N}$  içirme homomorfizması olmak üzere  $\mathfrak{D}$ ,  $\tilde{N}$ -injektif olduğundan

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & \ddot{Y} & \xrightarrow{i_1} & X \xrightarrow{i_2} \tilde{N} \\ & & \downarrow g & & \nearrow h \\ & & \mathfrak{D} & & \end{array}$$

$h(i_2 i_1) = g$  olacak biçimde  $h: \tilde{N} \rightarrow \mathfrak{D}$  homomorfizması mevcuttur.  $h' = h i_2: X \rightarrow \mathfrak{D}$  olsun.

Bu takdirde  $h' i_1 = (h i_2) i_1 = g$  olup  $\mathfrak{D}$ ,  $X$  -injektiftir.

Şimdi  $\mathfrak{D}$  nin  $\tilde{N}/X$  -injektif olduğunu kanıtlayalım.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & \ddot{Y}/X \xrightarrow{i_3} \tilde{N}/X \\ & & \downarrow g \\ & & \mathfrak{D} \end{array}$$

diyagramını alalım.

$\pi_1: \ddot{Y} \rightarrow \ddot{Y}/X$  ve  $\pi_2: \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}/X$  doğal homomorfizmaları verilsin.

$g\pi_1: \ddot{Y} \rightarrow \mathfrak{D}$  homomorfizması için  $\mathfrak{D}$ ,  $\tilde{N}$ -injektif olduğundan

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & \ddot{Y} \xrightarrow{i_2} \tilde{N} \\ & & \downarrow gP_1 \quad \nearrow h \\ & & \mathfrak{D} \end{array}$$

$h i_2 = g P_1$  olacak şekilde  $h: \tilde{N} \rightarrow \mathfrak{D}$  homomorfizması vardır.  $\forall \tilde{n} + X \in \tilde{N}/X$  için

“  $h_1(\tilde{n} + X) = h(\tilde{n})$  ” ile tanımlı  $h_1: \tilde{N}/X \rightarrow \mathfrak{D}$  dönüşümü bir homomorfizmadır.

$\forall \ddot{y} + X \in \ddot{Y}/_V$  için  $(h_1 i_1)(\ddot{y} + X) = h_1(\ddot{y} + X) = h(\ddot{y}) = (h i_2)(\ddot{y}) = (g P_2)(\ddot{y}) = g(\ddot{y} + X)$  olup  $h_1 i_1 = g$  dir. Dolayısıyla  $\mathfrak{D}$  ,  $\tilde{N}/_X$  -injektiftir.

2.4.6. *Sonuç*  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  kısa tam dizi olsun.  $A$  modülü  $M_2$  injektif olursa  $A$  hem  $M_1$  -injektif hem de  $M_3$  -injektiftir.

2.4.7. Teorem  $\tilde{N}$  ve  $\ddot{Y}$   $\check{S}$ - modülleri için alt satırdaki ifadeler denktir.

(i)  $\tilde{N}$  ,  $\ddot{Y}$  -injektiftir.

(ii)  $\mathfrak{D}$  ,  $\ddot{Y}$  nin keyfi bir sonlu üretilmiş alt modülü ise,  $\tilde{N}$   $\mathfrak{D}$ -injektiftir.

(iii)  $\ddot{y} \in \ddot{Y}$  keyfi elemanı için  $\tilde{N}$  ,  $\check{S}\ddot{y}$  -injektiftir.

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Teorem 2.4.5 ‘ten açıktır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\check{S}\ddot{y}$  sonlu üretilmiştir.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)  $\ddot{Y} = \langle \{\ddot{y}_i\}_{i \in I} \rangle$  ve  $K_i = R\ddot{y}_i$  olsun. Hipotez gereği  $\tilde{N}$  modülü  $K_i$  -injektiftir.

Önerme 2.4.4 gereği  $\tilde{N}$  modülü  $\bigoplus_{i \in I} K_i$  -injektiftir. Şimdi  $\alpha: \bigoplus_{i \in I} K_i \rightarrow \ddot{Y}$  epimorfizmasını alalım. Teorem 2.4.5 gereği  $\tilde{N}$  modülü  $\ddot{Y}$  -injektiftir.

2.4.8. Tanım  $A, B$  ve  $T$  birer  $\check{S}$ -modül olsunlar. Satır tam dizi olmak üzere alt satırdaki diyagram değişmeli olursa,  $T$  modülüne **A-projektiftir** adı verilir.

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ h \swarrow & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{f} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Diğer bir deyişle üstteki diyagramda  $f$  keyfi bir epimorfizma olması hasebiyle  $f, g$  homomorfizmaları için  $g = fh$  olacak biçimde  $h: T \longrightarrow A$  homomorfizması mevcutsa,  $T$  ye **A-projektiftir** adı verilir. Şayet buradaki diyagramda  $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$  satır tam dizisi rastgele alınırsa  $T$  ye **projektif modül** adı verilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.9. Teorem  $F$  bir modül olmak üzere  $X = \{x_k \mid k \in K\}$  de  $F$  nin alt kümesi olarak ifade edilsin. Buna istinaden alt satırdaki iki koşul denktir:

- (i) Her  $a \in F$  elemanı, yalnızca sonlu sayıda  $r_k$  katsayıları sıfırdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak  $\sum_{k \in K} r_k x_k$  biçiminde ifade edilebilir.
- (ii) Her  $k \in K$  için  $f_k(r) = rx_k$  biçiminde ifade edilen  $f_k: R \longrightarrow Rx_k$  fonksiyonu bir izomorfizmadır. Buna ek olarak  $F = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$  dır [4].

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $f_k$  fonksiyonunun bir epimorfizma olması basitce kontrol edilir. Diğer taraftan  $f_k(r) = f_k(s)$  ise , yani  $rx_k = sx_k$  ise, (i) ' deki tek türlülük koşulundan  $r = s$  eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla  $f_k$  , bir monomorfizmadır ve  $R \xrightarrow{f_k} Rx_k$  gerçekleşir. İkinci

koşula gelince , her  $a \in F$  elemanı tek türlü olarak  $Rx_k$  modüllerinin  $r_k x_k$  elemanlarının sonlu toplamı biçiminde ifade edilebildiğinden ,  $F = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$  dır.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $F = \bigoplus_{k \in K} Rx_k$  olduğundan , her  $a \in F$  ,  $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$  sonlu toplamı şeklinde gösterilebilir ve  $a = \sum_{k \in K} r_k x_k = \sum_{k \in K} r'_k x_k$  ise , her  $k \in K$  için  $r_k x_k = r'_k x_k$  dır.

$f_k: R \rightarrow Rx_k$  bir monomorfizma olduğundan ,  $r_k = r'_k$  eşitliğini ve dolayısıyla yazılışın tek türlü olduğunu elde ederiz (Alizade ve Pancar, 2016).

2.4.10. Tanım Bir önceki teoremdaki denk koşullardan birini sağlayan  $F$  modülüne **serbest modül**,  $X = \{x_k \mid k \in K\}$  kümesine de  $F$  modülünün **serbest üretenler kümesi** veya kısaca **tabanı** denir (Hungerford, 1974).

2.4.11. Teorem  $\check{S}$  'yi halka,  $\check{D}$ 'yi ise üniter modül olarak kabul edelim. Bir  $\check{S}$  halkası üzerinde her  $\check{D}$  üniter modülü bir serbest  $\check{S}$  -modülün homomorfik görüntüsüdür. Eğer  $\check{D}$  sonlu üretilmişse  $F$  sonlu üretilmiş olarak seçilebilir.

*İspat*  $\check{Y}$  ,  $\check{D}$  'nin üreteçler kümesi ve  $F$  'de  $\check{Y}$  kümesi üzerinde serbest  $\check{S}$  -modül olsun.

$\check{Y} \rightarrow \check{D}$  içermek fonksiyonu  $\bar{f}: F \rightarrow \check{D}$   $\check{S}$ -modül homomorfizması oluşturur ve  $\check{Y} \subset \text{Gör} \bar{f}$  dir.  $\check{Y}$  ,  $\check{D}$  'yi ürettiğinden  $\text{Gör} \bar{f} = \check{D}$  olmak zorundadır (Hungerford, 1974).

2.4.12. Teorem Bir  $\check{S}$  halkası üzerinde her  $F$  serbest modülü projektiftir.

*İspat*

$$\begin{array}{c} F \\ \downarrow f \\ A \xrightarrow{g} B \rightarrow 0 \end{array}$$

Yukarıdaki diyagram üniter  $\check{S}$ -modül homomorfizmalarının diyagramı bir  $g$  epimorfizması ve  $F$  serbest modülüyle  $X(\iota: X \rightarrow F)$  kümesi üzerinde verilsin. Her bir  $x \in X$ ,  $f(\iota(x)) \in B$  dir.  $g$  bir epimorfizma olduğundan  $a_x \in A$  ile  $g(a_x) = f(\iota(x))$  olur.  $F$  serbest olduğundan  $x \mapsto a_x$  tarafından verilen  $X \rightarrow A$  fonksiyonu  $h: F \rightarrow A$   $\check{S}$ -modül homomorfizması oluşturur ki burada tüm  $x \in X$  ler için  $h(\iota(x)) = a_x$  dir. Sonuç olarak tüm  $x \in X$  ler için  $gh(\iota(x)) = g(a_x) = f(\iota(x))$  dir ve bundan dolayı  $gh\iota = f\iota: X \rightarrow B$  olur.  $F$  in serbestliğinden  $gh = f$  olur. Bundan dolayı  $F$  projektiftir (Hungerford, 1974).

2.4.13. Teorem  $\check{N}$  modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul  $\check{N} \subseteq A$  olacak şekilde her  $A$  modülü için  $A = \check{N} \oplus \check{N}'$  olacak şekilde  $\check{N}' \leq A$  mevcut olmasıdır.

*İspat* ( $\Rightarrow$ )  $\check{N} \subseteq A$  olsun.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & \check{N} \xrightarrow{i} A \\ & & \downarrow I_{\check{N}} \\ & & \check{N} \end{array}$$

diyagramını alalım.  $I_{\check{N}}: \check{N} \rightarrow \check{N}$  birim dönüşüm ve  $i: \check{N} \rightarrow A$  içirme dönüşümüdür.  $\check{N}$  injektif olduğundan  $hi = I_{\check{N}}$  olacak şekilde  $h: A \rightarrow \check{N}$  homomorfizması mevcuttur.

$a \in A$  olsun.  $h(a) \in \check{N}$  dir.

$h(h(a)) = (hi)(h(a)) = I_{\check{N}}(h(a)) = h(a)$  olup  $h(a - h(a)) = h(a) - h(a) = 0$  dır ve  $a - h(a) \in \text{Çekh}$  bulunur. Demek ki  $a = a - h(a) + h(a) \in \text{Çekh} + \check{N}$  olup  $A = \text{Çekh} + \check{N}$  dir.

$a \in \text{Çekh} \cap \check{N}$  ise,  $a = I_{\check{N}}(a) = (hi)(a) = h(i(a)) = h(a) = 0$  olup  $a = 0$  dır. Sonuç olarak  $A = \text{Çekh} \oplus \check{N}$  yazılır.

( $\Leftarrow$ ) Teorem 2.4.3 'den  $I$  injektif olmak üzere  $f: \check{N} \rightarrow I$  monomorfizması vardır.  $\check{N} \subseteq I$  alınabilir. Hipotez gereği  $\check{N}, I$  nın direkt toplam terimidir. O halde  $\check{N}$  injektiftir.

## 2.5 Basit Modüller ve Yarı-basit Modüller

2.5.1. Tanım  $\check{S}$  'yi bir halka,  $W$  'yu da sıfırdan farklı bir  $\check{S}$ -modül olarak kabul edelim.  $W$  'nün sadece aşık alt modülleri varsa  $W$  'ya **basit modül** adı verilir (Lam, 1991).

Örneğin  $p \in \mathbb{P}$  olmak üzere  $\mathbb{Z}_p$   $\mathbb{Z}$ -modülü basittir.  $K$  'nın cisim olması durumunda  ${}_K K$  'nın alt modülleri sadece 0 ve  $K$  olup  ${}_K K$  basittir.

2.5.2. Önerme  $\check{S}$ 'yi bir halka,  $\check{N}$  'yi de  $\check{S}$ -modül olarak alalım.  $\check{N}$  modülünün basit  $\check{S}$ -modül olması için gerek ve yeter koşul  $0 \neq \check{n} \in \check{N}$  için  $\check{S}\check{n} = \check{N}$  olmasıdır.

*İspat* ( $\Rightarrow$ )  $\check{n} \neq 0$  olsun.  $\check{n} = 1\check{n} \in \check{S}\check{n}$  olacağından  $\check{S}\check{n} \neq 0$  olur ve bundan dolayı  $\check{S}\check{n} = \check{N}$  dir.

( $\Leftarrow$ )  $0 < P \leq \check{N}$  ve  $0 \neq p \in P$  olsun.  $\check{S}p = \check{N}$  olur. Fakat  $\check{S}p \leq P$  olduğundan  $P = \check{N}$  dir (Kasch, 1982).

2.5.3. Tanım  $\check{S}$  'yi bir halka ve  $T$  'yi de  $\check{S}$ -modül olarak alalım.  $T$  modülünün bütün alt modülleri  $T$  de bir direkt toplam terimi olursa,  $T$  'ye **yarı-basit modül** adı verilir (Lam, 1991).

Tanım 2.5.1 ve Tanım 2.5.3 incelendiğinde 0 alt modülü yarı-basittir lakin basit değildir.

2.5.4. Yardımcı Teorem  $\check{N}$  sıfırdan farklı rastgele bir yarı-basit modül olursa, basit bir alt modül içerir (Lam, 1991).

*İspat*  $0 \neq \check{n} \in \check{N}$  olsun. Herhangi bir yarı basit  $\check{S}$ -modülün alt modülü de yarı basit olduğundan  $\check{S}\check{n} = \check{N}$  olduğunda ispat elde edilir. Zorn Lemmasından  $\check{N}$  'nin bir  $\check{D}$  maksimal alt modülü ve  $\check{n} \in \check{D}$  elde edilir.  $0 \neq \check{D}'$  alt modülü için  $\check{N} = \check{D} \oplus \check{D}'$  olsun.  $\check{D}'$  nün basit olduğunu gösterip ispatı tamamlayabiliriz. Aslında eğer  $0 \neq \check{D}'' \leq \check{D}$  ise  $\check{n} \in \check{D} \oplus \check{D}''$  olmak zorundadır ( $\check{D}$  nin maksimalliğinden) ve böylece  $\check{D} \oplus \check{D}'' = \check{N}$  olur. Bu da açık bir şekilde  $\check{D}'' = \check{D}'$  demektir (Lam, 1991).

2.5.5. Teorem  $\check{S}$  bir modül ve  $\check{Y}$  de bir  $\check{S}$  – modül olsun. Alt satırda belirtilen ifadeler denktir.

- (i)  $\check{Y}$  yarı basittir.
- (ii)  $\check{Y}$  basit alt modüllerin direkt toplamıdır.
- (iii)  $\check{Y}$  basit modüllerin toplamıdır.

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (iii)  $\check{Y}_1$ ,  $\check{Y}$  'deki tüm basit alt modüllerin toplamı olsun.  $\check{Y}_2$  'nin  $\check{S}$ - alt modül olduğu  $\check{Y} = \check{Y}_1 \oplus \check{Y}_2$  yazalım. Eğer  $\check{Y}_2 \neq (0)$  ise Yardımcı Teorem 2.5.4.  $\check{Y}_2$  nin basit bir  $\check{S}$ -alt modülü olduğu anlamına gelir. Ancak bu durum  $\check{Y}_1$  de olduğundan bu bir çelişki oluşturur. Bu yüzden  $\check{Y}_2 = (0)$  dır. Diğer bir deyişle  $\check{Y}_1 = \check{Y}$  dir.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)  $\ddot{Y}_i$  ler  $\ddot{Y}$  'nin basit alt modülleri ve bundan dolayı  $\ddot{Y} = \sum_{i \in I} \ddot{Y}_i$  olsun.  $N \subseteq \ddot{Y}$  alt modülü verilsin.  $N$  nin  $\ddot{Y}$   $\check{S}$ -modülünün direkt toplamı olduğunu göstermek için  $J \subseteq I$  alt kümesini aşağıdaki özelliklerle birlikte göz önüne alalım:

(a)  $\sum_{j \in J} \ddot{Y}_j$  bir direkt toplamdır.

(b)  $N \cap \sum_{j \in J} \ddot{Y}_j = (0)$

Doğal olarak Zorn Lemması tüm  $J$  lerden oluşan sınıfa uygulanır ( Bu sınıf boş küme içerdiğinden boş olmayan sınıftır). Bu sebeple maksimal olacak şekilde bir  $J$  seçebiliriz. Bu  $J$  için  $\ddot{Y}' := N + \sum_{j \in J} \ddot{Y}_j = N \oplus (\oplus_{k \in K} \ddot{Y}_j)$  olsun.  $\ddot{Y}' = \ddot{Y}$  olduğunu göstererek ispatı bitirebiliriz ( o zaman  $N, \ddot{Y}$   $\check{D}$ -modülünün direkt toplamı olur). Bunu tüm  $i \in I$  lar için  $\ddot{Y}' \supseteq \ddot{Y}$  olduğunu göstererek yapabiliriz. Ancak, eğer  $\ddot{Y}_i \not\subseteq \ddot{Y}'$  olursa  $\ddot{Y}_i$  'nin basitliğinden  $\ddot{Y}' \cap \ddot{Y}_i = (0)$  olur. Buradan  $\ddot{Y}' + \ddot{Y}_i = N \oplus (\oplus_{j \in J} \ddot{Y}_j) \oplus \ddot{Y}_i$  elde edilir ki buda  $J$  nin maksimalliğine çelişki oluşturur.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Bir üstteki ispatta  $N=0$  alınarak elde edilir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Açıktır (Lam, 1991).

$\check{S}$  bir modül olsun.  $\check{S}$  'nin basit alt modüllerinin toplamına  $\check{S}$  'nin **desteği** denir ve  $Des(\check{S})$  ile gösterilir. Tanımdan  $Des(\check{S})$ , basit alt modüllerin toplamı olarak yarı-basittir.

$\ddot{Y}$  'yi,  $\check{S}$  'nin yarı-basit alt modülü şeklinde ifade edelim. Buna istinaden  $\ddot{Y}, i: \ddot{Y} \rightarrow \check{S}$  içerme dönüşümünün görüntüsü olması hasebiyle  $Des(\check{S})$  de içerilir. Demek oluyor ki  $Des(\check{S}), \check{S}$  'nin en büyük yarı-basit alt modülüdür (Kasch, 1982).

2.5.6. *Sonuç* Aşağıdakiler sağlanır.

(i) Yarı basit modülün bütün alt modülleride yarı basittir.

(ii) Yarı basit modülün bütün epimorfik görüntüleride yarı basittir.

(iii) Yarı basit modülün bütün toplamaları yarı basittir.

*İspat* (i) Teorem 2.5.5 ten açıktır.

(ii)  $\check{D}$  basit ve  $\alpha: \check{D} \rightarrow B$  bir epimorfizma olsun. Buradan  $\check{D}/Ker(\alpha) \cong B$  olur. Eğer  $Ker(\alpha) = 0$  ise  $B$  basittir: eğer  $Ker(\alpha) = \check{D}$  ise,  $B = 0$  dır.  $\check{D}$  basit olduğundan  $Ker(\alpha)$  için başka ihtimal yoktur. Homomorfizmadan dolayı basit modüllerin toplamının görüntüsü basit ve sıfır modüllerin toplamıdır; sıfır modülleri ihmal edilebilir ve bu nedenle teorem 2.5.5 ten tekrar yarı basit olur.

(iii) Teorem 2.5.5 te görüldüğü üzere her yarı basit modül bir basit modülün toplamıdır buna istinaden, yarı basit modüllerin toplamı tekrar basit modüllerin toplamıdır ve yine buna istinaden Teorem 2.5.5 ten yine yarı basittir (Goodearl, 1976).

## 2.6.Büyük Alt Modüller

2.6.1. Tanım  $\tilde{N}$  'yi  $\tilde{S}$ -modül ,  $0 \neq \mathfrak{D} \leq \tilde{N}$  olarak kabul edelim. Lâkin  $\tilde{N}$  'nin sıfırdan farklı bütün  $P$  alt modülleri için  $\mathfrak{D} \cap P \neq 0$  elde edilirse yani,  $\mathfrak{D} \cap P = 0$  olması durumu  $P = 0$  şartını sağlıyorsa,  $\mathfrak{D}$  'ye  $\tilde{N}$  'nin **büyük alt modülü** adı verilir.  $\mathfrak{D} \trianglelefteq \tilde{N}$  şeklinde gösterilir. Bu durumda  $\tilde{N}$  'ye de  $\mathfrak{D}$  'nin **büyük genişlemesi** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

2.6.2. Önerme  $\tilde{Y}, \tilde{A}, \tilde{Z}, \tilde{N}$   $\tilde{S}$ -modüller olsun. Buna istinaden;

(i)  $\tilde{A} \leq \tilde{N}$  verilsin.  $\tilde{A} \trianglelefteq \tilde{N}$  olması için gerek ve yeter koşul her  $0 \neq \tilde{n} \in \tilde{N}$  için  $\tilde{A} \cap \tilde{S}\tilde{n} \neq 0$  olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

(ii)  $\tilde{Y} \leq \tilde{A}$  verilsin.  $\tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{N}$  olması için gerek ve yeter koşul  $\tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{A}$  ve  $\tilde{A} \trianglelefteq \tilde{N}$  olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

(iii) Eğer  $\tilde{Y}_1 \trianglelefteq \mathfrak{D}_1 \subset \tilde{N}$  ve  $\tilde{Y}_2 \trianglelefteq \mathfrak{D}_2 \subset \tilde{N}$  ise  $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2 \trianglelefteq \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$  dir (Wishbauer, 1991).

(iv)  $\tilde{Y} \leq \tilde{A} \leq \tilde{N}$  ve  $\tilde{Z} \leq \tilde{N}$  verilsin.  $\tilde{Z} \cap \tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{N}$  olması için gerek ve yeter koşul  $\tilde{Z} \trianglelefteq \tilde{N}$  ve  $\tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{N}$  olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

*İspat* (i) ( $\Rightarrow$ ) Eğer  $\tilde{A} \trianglelefteq \tilde{N}$  ve  $0 \neq \tilde{n} \in \tilde{N}$  ise  $\tilde{A} \cap \tilde{S}\tilde{n} \neq 0$  olur.

( $\Leftarrow$ )  $0 \neq \tilde{n} \in \mathfrak{D} \leq \tilde{N}$  ve  $r \in R$  olsun. Buradan  $0 \neq \tilde{S}\tilde{n} \in \tilde{A} \cap \tilde{N}$  olur (Anderson ve Fuller, 1992).

(ii) ( $\Rightarrow$ )  $\tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{N}$  ile  $0 \neq \mathfrak{D} \leq \tilde{N}$  olsun. Buradan  $\mathfrak{D} \cap \tilde{Y} \neq 0$  olur. Bu durum özellikle  $\mathfrak{D} \leq \tilde{A}$  olduğunda geçerlidir. Bundan dolayı  $\tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{A}$  dir. Fakat aynı zamanda  $\tilde{Y} \leq \tilde{A}$  olduğundan  $\mathfrak{D} \cap \tilde{A} \neq 0$  dır. Bu yüzden  $\tilde{A} \trianglelefteq \tilde{N}$  olur.

( $\Leftarrow$ ) Eğer  $\tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{A}$ ,  $\tilde{A} \trianglelefteq \tilde{N}$  ve  $\mathfrak{D} \leq \tilde{N}$  ise bu  $\mathfrak{D} \cap \tilde{Y} = 0$ ,  $\mathfrak{D} \cap \tilde{A} = 0$  demektir. Bundan dolayı  $\mathfrak{D} = 0$  olur (Anderson ve Fuller, 1992).

(iii)  $0 \neq X \subset \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$  olsun. Bu durumda  $0 \neq X \cap \tilde{Y}_1 \subset \mathfrak{D}_2$  yazabiliriz. Buradan  $0 \neq (X \cap \tilde{Y}_1) \cap \tilde{Y}_2 = X \cap (\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2)$  olur. Diğer bir deyişle  $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2 \trianglelefteq \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$  dir (Wishbauer, 1991).

(iv) ( $\Rightarrow$ ) (ii) den açıktır.

( $\Leftarrow$ )  $\tilde{Z} \trianglelefteq \tilde{N}$  ve  $\tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{N}$  olsun. Eğer  $\mathfrak{D} \leq \tilde{N}$  ve  $\mathfrak{D} \cap \tilde{Z} \cap \tilde{Y} = 0$  ise  $\tilde{Y} \trianglelefteq \tilde{N}$  olduğundan  $\mathfrak{D} \cap \tilde{Z} = 0$  olur.  $\tilde{Z} \trianglelefteq \tilde{N}$  olduğundan  $\mathfrak{D} = 0$  dır (Anderson ve Fuller, 1992).

2.6.3. Tanım  $M$  bir sol  $\tilde{S}$ -modül olsun.  $m \in M$  için  $\{s \in \tilde{S} \mid sm = 0\}$  kümesine  $m$  nin **sıfırlayıcısı (annihilatoru)** adı verilir.  $Ann_s(m)$  şeklinde gösterilir (Wishbauer, 1991).

Buradan

(1)  $x, y \in \text{Ann}_s(m)$  olsun.  $a0 = 0$  olduğundan  $0 \in \text{Ann}_s(m)$  olur. Üstelik  $a(x - y) = ax - ay = 0 - 0 = 0$  olduğundan  $x - y \in \text{Ann}_s(m)$  dir.

(a)  $a(xy) = (ax)y = 0y = 0$  olduğundan  $xy \in \text{Ann}_s(m)$  olur.

(b) Eğer  $s \in \check{S}$  ise  $a(xs) = axs = 0s = 0$  olur. Buradan  $xs \in \text{Ann}_s(m)$  dir ve böylece  $\text{Ann}_s(m)$ ,  $\check{S}$  'nin sol idealidir.

(2)  $L \leq \check{S}$  sol ideal,  $x, y \in \text{Ann}_s(L)$  ve  $s \in \check{S}$  olsun.  $L0 = 0$  olduğundan  $\text{Ann}_s(L) \neq \emptyset$  olur.

(a)  $L(x - y) \leq Lx - Ly = 0 - 0 = 0$  olduğundan  $L(x - y) = 0$  ve  $x - y \in \text{Ann}_s(m)$  olur.

(b)  $L(sx) = (Ls)x \leq Lx = 0$  ve  $L(xs) = (Lx)s = 0s = 0$  olduğundan  $sx, xs \in \text{Ann}_s(L)$  olur.

(1) ve (2) den dolayı  $\text{Ann}_s(m)$  hem sol hemde sağ ideale sahip olduğundan  $\check{S}$  nin idealidir.

2.6.4. Tanım  $\check{N}$  'yi sol  $\check{S}$ -modül olarak kabul edelim.  $Z(\check{N}) = \{\check{n} \in \check{N} \mid \text{Ann}_s(\check{n}) \leq \check{S}\}$  kümesi alt modüldür.  $Z(\check{N})$  'e **singüler alt modül** adı verilir.  $Z(\check{N}) = \check{N}$  ise  $\check{N}$  modülüne **singüler modül** denir (Wishbauer, 1991).

2.6.5. Tanım Bir  $f: M \rightarrow N$  monomorfizmasının  $\text{Gör}(f)$  görüntüsü  $N$  nin büyük alt modülü olursa  $f$  'ye **büyük monomorfizma** adı verilir (Alizade ve Pancar, 2016).

2.6.6. Tanım  $I$  injektif modülüne  $f: M \rightarrow I$  büyük monomorfizmasına ilaveten  $M$  modülünün **injektif bürümü** adı verilir (Alizade ve Pancar, 2016).

## 2.7. Küçük Alt Modüller

2.7.1. Tanım  $\check{S}$  'yi halka,  $\check{N}$  'yi  $\check{S}$ -modül ve  $\check{Y} < \check{N}$  olarak düşünecek olursak. Buna istinaden  $P \leq \check{N}$  olmak üzere  $\check{N} = \check{Y} + P$  olması halinde  $P = \check{N}$  koşulu sağlanırsa,  $\check{Y}$  'ye  $\check{N}$  'nin **küçük alt modülü** adı verilir ve  $\check{Y} \ll \check{N}$  şeklinde ifade edilir (Wishbauer, 1991).

### 2.7.2. Önerme

(i)  $\check{N}$  modül ve  $\check{D} \leq P \leq \check{N}$  olsun.  $P \ll \check{N}$  ise,  $\check{D} \ll \check{N}$  dir.

(ii)  $\check{N}$  modül ve  $\check{D} \leq P \leq \check{N}$  olsun.  $\check{D} \ll P$  ise,  $\check{D} \ll \check{N}$  dir

(iii)  $\check{N}$  modül,  $\check{D}_1, \check{D}_2, \dots, \check{D}_m, \check{Y}_1, \check{Y}_2, \dots, \check{Y}_m, \check{N}$  modülünün alt modülleri ve her  $i = 1, 2, \dots, \check{n}$  için  $\check{D}_i \ll \check{Y}_i$  olsun. Buna istinaden  $\check{D}_1 + \check{D}_2 + \dots + \check{D}_{\check{n}} \ll \check{Y}_1 + \check{Y}_2 + \dots + \check{Y}_{\check{n}}$  dir

(iv)  $\tilde{N}$ ,  $P$  birer  $R$ -modül,  $\mathfrak{D}$  'de  $\tilde{N}$  'nin bir alt modülü ve  $f: \tilde{N} \longrightarrow P$  homomorfizma olsun.  $\mathfrak{D} \ll \tilde{N}$  ise  $f(\mathfrak{D}) \ll f(\tilde{N})$  dir.

(v)  $\tilde{N}$  'yi modül,  $\mathfrak{D} \leq P \leq \tilde{N}$  olarak alalım. Ayrıca  $P$  'yi  $\tilde{N}$  'nin direkt toplam terimi olarak kabul edelim. Buna istinaden  $\mathfrak{D} \ll P$  olması için gerek ve yeter koşul  $\mathfrak{D} \ll \tilde{N}$  olmasıdır (Wishbauer, 1991).

*İspat* (i)  $W + \check{Y} = \tilde{N}$  koşulunu sağlayan  $C$  nin bir  $\check{Y}$  alt modülünü alırsak  $W \leq \check{A}$  olması hasebiyle  $\check{A} + \check{Y} = C$  yazılır. Buradan  $\check{A} \ll C$  olduğundan  $\check{Y} = C$  bulunur. Dolayısıyla  $W \ll C$  dır.

(ii)  $\mathfrak{D} + \check{Z} = \tilde{N}$  koşulunu sağlayan  $\tilde{N}$  'nin bir  $\check{Z}$  alt modülünü alalım.  $P \leq \tilde{N}$  olduğundan  $(\mathfrak{D} + \check{Z}) \cap P = P$  bulunur.  $\mathfrak{D} \leq P$  olduğundan Önerme 2.2.3 gereğince,  $\mathfrak{D} + (P \cap \check{Z}) = P$  yazılır.  $\mathfrak{D} \ll P$  olduğundan  $P \cap \check{Z} = P$  bulunur. Buradan  $P \subseteq \check{Z}$  dir.  $\mathfrak{D} \leq P \leq \check{Z}$  ve  $\mathfrak{D} + \check{Z} = \tilde{N}$  olduğundan  $\check{Z} = \tilde{N}$  bulunur. Dolayısıyla  $\mathfrak{D} \ll \tilde{N}$  dir.

(iii) İfadenin doğruluğunu  $\tilde{n} = 2$  için ispatlayalım.  $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \check{Z} = \check{Y}_1 + \check{Y}_2$  koşulunu sağlayan  $\check{Y}_1 + \check{Y}_2$  nin bir  $\check{Z}$  alt modülünü alalım.  $\mathfrak{D}_1 \ll \check{Y}_1$  olduğundan ii) den  $\mathfrak{D}_2 + \check{Z} = \check{Y}_1 + \check{Y}_2$  yazılır. Benzer şekilde  $\mathfrak{D}_2 \ll \check{Y}_2$  olduğundan tekrar (ii) den  $\check{Z} = \check{Y}_1 + \check{Y}_2$  elde edilir. Böylece  $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 \ll \check{Y}_1 + \check{Y}_2$  bulunur. Tümevarımla her  $2 < \tilde{n}$  tamsayısı içinde ifadenin doğru olduğu gösterilebilir.

(iv)  $f(\mathfrak{D}) + \check{Y} = f(\tilde{N})$  koşulunu sağlayan  $f(\tilde{N})$  nin bir  $\check{Y}$  alt modülünü alırsak  $f^{-1}(f(\mathfrak{D}) + \check{Y}) = \tilde{N}$  olup teorem 2.3.6 (ii) ile  $\mathfrak{D} + f^{-1}(\check{Y}) = \tilde{N}$  eşitliği elde edilir.  $\mathfrak{D} \ll \tilde{N}$  olduğundan  $f^{-1}(\check{Y}) = \tilde{N}$  bulunur. Tekrar Teorem 2.3.6 (i) den  $\check{Y} = f(\tilde{N})$  dir. Dolayısıyla  $\mathfrak{D} \ll \tilde{N}$  dir.

(v)  $(\Rightarrow) \mathfrak{D} \ll P$  ise, (ii) den  $\mathfrak{D} \ll \tilde{N}$  bulunur.

$(\Leftarrow) \mathfrak{D} \ll \tilde{N}$  olsun.  $\mathfrak{D} + \check{Y} = P$  koşulunu sağlayan  $P$  'nin bir  $\check{Y}$  alt modülünü alırsak.  $P, \tilde{N}$  nin direkt toplam terimi olması sebebiyle  $\tilde{N} = P \oplus \check{Z}$  şeklinde  $\tilde{N}$  'nin bir  $\check{Z}$  alt modülü mevcuttur. Buradan  $\mathfrak{D} + \check{Y} + \check{Z} = \tilde{N}$  elde edilir.  $\mathfrak{D} \ll \tilde{N}$  olduğundan  $\check{Y} + \check{Z} = \tilde{N}$  dir. Önerme 2.2.3 gereğince  $P = \check{Y} + (\check{Z} \cap P) = \check{Y}$  olup  $\mathfrak{D} \ll P$  bulunur

## 2.8. Radikal

2.8.1. Tanım  $\check{S}$  'ye halka ,  $T$ 'ye de  $\check{S}$ -modül diyelim.  $T$  modülünün bütün maksimal alt modüllerinin arakesitine  $T$  modülünün **radikal** adı verilir. Ayrıca  $Rad(T)$  şeklinde gösterilir. Lâkin  $T$  modülünün maksimal alt modülü bulunmuyorsa,  $Rad(T) = T$  olur. Bu durumda,  $T$  modülüne **radikal modül** adı verilir (Bacella, 1984).

$T$ ' nin bütün radikal alt modüllerinin toplamı  $P(T)$  şeklinde ifade edilir (Lomp, 1999).

2.8.2. Yardımcı Teorem  $\check{Y}$  'ye modül diyelim.  $T \leq \check{Y}$  ve,  $\{T_i\}_{i \in I}$   $\check{Y}$  'nin  $T$  'yi kapsayan bir alt modüller ailesi olsun. Bu takdirde;  $\bigcap_{i \in I} (T_i/T) = (\bigcap_{i \in I} T_i)/T$  dir.

*İspat*  $\check{y} + T \in (\bigcap_{i \in I} T_i)/T$  ise her  $i \in I$  için  $\check{y} + T \in T_i/T$  olup  $\check{y} \in T_i$  dir. Buradan  $\check{y} \in \bigcap_{i \in I} T_i$  olur ki  $\check{y} + T \in (\bigcap_{i \in I} T_i)/T$  elde edilir. Benzer işlemler yapılarak ters kapsama gösterilebilir (Kasch, 1982).

2.8.3. Teorem (Radikalin Özellikleri)  $\check{S}$  'yi halka ,  $\check{A}$  'yı da  $\check{S}$ -modül olarak alalım. Buna deyin;

(i)  $\check{A}$  ve  $\check{N}$  'yi modül olarak kabul eder isek. Bütün  $f \in Hom(\check{A}, \check{D})$  'ler için  $f(Rad(\check{A})) \leq Rad(\check{N})$  dir. Şayet  $\check{Cek}(f) \leq Rad(\check{A})$  ise,  $f(Rad(\check{A})) = Rad(f(\check{A}))$  dir.

(ii)  $P \leq F \leq \check{A}$  olursa,  $Rad(P) \leq Rad(F)$  elde edilir,

(iii)  $Rad(\check{A}/_{Rad(\check{A})}) = 0$

(iv)  $\check{A} = \bigoplus_{i \in I} \check{A}_i$  olarak alırsak,  $Rad(\check{A}) = \bigoplus_{i \in I} Rad(\check{A}_i)$  dir

(v)  $\check{N} \leq \check{A}$  iken  $(\check{N} + Rad(\check{A}))/_{\check{N}} \leq Rad(\check{A}/_{\check{N}})$  ve  $\check{N} \leq Rad(\check{A})$  ise  $Rad(\check{A}/_{\check{N}}) = Rad(\check{A})/_{\check{N}}$  dir,

(vi)  $\check{A}$  modülünün radikal modül olması için gerek ve yeter koşul  $\check{A}$  'nın her sonlu üretilmiş alt modülü  $\check{A}$  'da küçük olmasıdır,

(vii)  $\check{A} = \bigoplus_{i \in I} \check{A}_i$  ise  $\check{A}/_{Rad(\check{A})} \cong \bigoplus_{i \in I} (\check{A}_i/Rad(\check{A}_i))$  dir (Wishbauer, 1991).

*İspat* (i)  $Rad(\check{A}) = \sum_{L \ll \check{A}} L$  olduğundan  $f(Rad(\check{A})) = \sum_{L \ll \check{A}} f(L)$  dir. Teorem 2.7.2 (iv) de  $f(L) \ll \check{N}$  olur. Böylece  $f(Rad(\check{A})) \leq Rad(\check{N})$  elde edilir.  $\check{a} \in Rad(\check{A})$  ise ,  $\check{S}\check{a} \ll \check{A}$  olup teorem 2.7.2 (iv) den  $f(\check{S}\check{a}) = \check{S}f(\check{a}) \ll f(\check{A})$  dir. Bundan ötürü  $f(\check{a}) \in Rad(f(\check{A}))$  olup  $f(Rad(\check{A})) \leq Rad(f(\check{A}))$  olur. Şimdi herhangi bir  $f(\check{a}) \in Rad(f(\check{A}))$  alalım.  $\check{S}f(\check{a}) \ll f(\check{A})$  dir.  $\check{a} \notin Rad(\check{A})$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $\check{S}\check{a} + \check{D} = \check{A}$  olacak biçimde  $\check{A}$

'nın bir  $\mathfrak{D}$  maksimal alt modülü mevcuttur. Buradan  $\check{S}f(\check{a}) + f(\mathfrak{D}) = f(\check{A})$  olup  $\check{S}f(\check{a}) \ll f(\check{A})$  olduğundan  $f(\mathfrak{D}) = f(\check{A})$  eşitliği elde edilir. Teorem 2.3.6 (i) den  $\check{A} = \mathfrak{D} + \check{C}ek(f)$  olup,  $\check{C}ek(f) \leq Rad(\check{A}) \leq \mathfrak{D}$  olduğundan  $\check{A} = \mathfrak{D}$  çelişkisi bulunur. Buna istinaden  $\check{a} \in Rad(\check{A})$  olmalıdır. Bu durumda  $f(\check{a}) \in f(Rad(\check{A}))$  olur. Nihayetinde  $f(Rad(\check{A})) = Rad(f(\check{A}))$  bulunur.

(ii)  $i: P \rightarrow F$  içirme dönüşümünü alalım. (i) gereğince  $i(Rad(P)) = Rad(P) \leq Rad(F)$  dir.

(iii) Teorem 2.3.11' den  $\check{A}$  'nın maksimal alt modülleriyle  $\check{A}/Rad(\check{A})$  nin maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme mevcuttur. Buna istinaden  $X$ ,  $\check{A}$  'nın bütün maksimal alt modüllerinin kümesi olması dolayısıyla  $\check{A}/Rad(\check{A}) = \cap_{P \in X} (P/Rad(\check{A}))$  olur ve buradan  $\check{A}/Rad(\check{A}) = \cap_{P \in X} (P/Rad(\check{A})) = (\cap_{P \in X} P)/Rad(\check{A}) = Rad(\check{A})/Rad(\check{A}) = 0$  elde edilir.

(iv) (iii) den  $Rad(\check{A}_i) \leq Rad(\check{A})$  dir. Buradan  $\sum_{i \in I} Rad(\check{A}_i) = \oplus_{i \in I} Rad(\check{A}_i) \leq Rad(\check{A})$  olur. Tersine;  $\check{a} = \sum_{i \in I} \check{a}_i \in Rad(\check{A})$  'yı alırsak.  $\pi_i(\check{a}) = \check{a}_i$  ile tanımlı  $\pi_i: \check{A} \rightarrow \check{A}_i$  i. kanonik projeksiyon olmak üzere (i) gereğince  $\pi_i(\check{a}) = \check{a}_i \in Rad(\check{A}_i)$  elde edilir. Böylece  $\check{a} \in \oplus_{i \in I} Rad(\check{A}_i)$  olur. Sonuç olarak  $\oplus_{i \in I} Rad(\check{A}_i) = Rad(\check{A})$  bulunur.

(v)  $\pi: \check{A} \rightarrow \check{A}/\check{N}$  doğal homomorfizması için (i) 'deki gereklilikten  $\pi(Rad(\check{A})) = (Rad(\check{A}) + \check{N})/\check{N} \leq Rad(\check{A}/\check{N})$  dir.  $\check{C}ek(\pi) = \check{N} \leq Rad(\check{A})$  ise Yardımcı Teorem 2.8.2 gereği  $Rad(\check{A}/\check{N}) = Rad(\check{A})/\check{N}$  eşitliği bulunur.

(vi)  $\check{A} = Rad(\check{A})$  ise, her bir  $\check{a} \in \check{A}$  için  $\check{S}\check{a} \ll \check{A}$  olur. Buradan Teorem 2.3.6 (i) gereğince  $\check{A}$  'nın sonlu üretilmiş bütün öz alt modülleri  $\check{A}$  'da küçüktür.

(vii) Her  $\sum \check{a}_i \in \check{A} = \oplus_{i \in I} \check{A}_i$  için

$f((\sum \check{a}_i) + Rad(\check{A})) = \sum(\check{a}_i + Rad(\check{A}_i)) \in \oplus_{i \in I} (\check{A}_i/Rad(\check{A}_i))$  ile tanımlı  $f: \check{A}/Rad(\check{A}) \rightarrow \oplus_{i \in I} (\check{A}_i/Rad(\check{A}_i))$  dönüşümünün izomorfizma olduğunu gösterelim.

$\sum \check{a}_i, \sum \check{a}'_i \in \check{A}$  için  $(\sum \check{a}_i) + Rad(\check{A}) = (\sum \check{a}'_i) + Rad(\check{A})$  olsun. Bu takdirde

$\sum(\check{a}_i - \check{a}'_i) \in Rad(\check{A})$  dir. iv) den  $\check{a}_i - \check{a}'_i \in Rad(\check{A}_i)$  olur. Böylece

$\check{a}_i + Rad(\check{A}_i) = \check{a}'_i + Rad(\check{A}_i)$  olup  $\sum \check{a}_i + Rad(\check{A}_i) = \sum \check{a}'_i + Rad(\check{A}_i)$  bulunur.

Dolayısıyla  $f$  iyi tanımlıdır.  $f(\sum \check{a}_i + Rad(\check{A})) = \sum(\check{a}_i + Rad(\check{A}_i)) = 0$  olsun. O halde

$\sum \ddot{a}_i + \text{Rad}(\ddot{A}) = \text{Rad}(\ddot{A})$  olur. Böylece  $\ddot{C}ek(f) = 0$  bulunur. Tanım 2.3.1 den  $f$  epimorfizma olup sonuç olarak izomorfizmadır

## 2.9. Noetherian Modüller

2.9.1. Tanım  $\ddot{N}$  'yi modül kabul edelim.  $\ddot{N}$  modülünün alt modüllerinin her

$$\ddot{N}_1 \leq \ddot{N}_2 \leq \dots \leq \ddot{N}_w \leq \dots$$

artan zinciri verildiğinde bütün  $w \geq p$  'ler için  $\ddot{N}_w = \ddot{N}_p$  olacak biçimde bir  $p$  pozitif tam sayısı mevcutsa  $\ddot{N}$  modülüne **Noetherian modül** deriz (Hungerford, 1974).

Eğer  $\ddot{N}$  'nin her sonlu üretilmiş alt modülü noetherian olursa  $\ddot{N}$  'ye **yerel noetherian** adı verilir (Wishbauer, 1991).

2.9.2. Teorem  $M$  modül olsun. Aşağıdaki ifadeler  $M$  modülü için denktir.

- (i)  $W$  noetherian dır.
- (ii)  $W$  'nun sonlu üretilmiş alt modüllerinin dizisi noetherian dır.
- (iii)  $W$  nun her boş olmayan (sonlu üretilmiş) alt modüllerinin kümesinin bir maksimal elemanı vardır..
- (iv)  $W$  'nun bütün alt modülleri sonlu üretilmiştir.

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Açıktır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $P$ ,  $W$  'nun boş olmayan (sonlu üretilmiş) alt modüllerinin kümesi olsun. Eğer  $P$  'nin maksimal elemanı yoksa her  $U \in P$  için  $\{U' \in P | U' \supset U, U' \neq U\}$  kümesi boş değildir. Böylece alt modüllerin sonsuz artan bir zincirini elde ederiz.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $N \leq W$  olsun.  $N$  'nin sonlu üretilmiş alt modüllerinin kümesinde  $N_0$  maksimal elemanı vardır ve açıkçası  $N_0 = N$  dir.

(iv)  $\Rightarrow$  (i)  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ ,  $W$  'nun alt modüllerinin bir artan zinciri olsun. Kabulümüzden  $\bigcup_{\mathbb{N}} K_i \subset W$  alt modülü sonlu üretilmiştir ve tüm üretilen elemanlar  $j \in \mathbb{N}$  için  $K_j$  de kapsanır (Wishbauer, 1991).

2.9.3. Teorem (1)  $0 \rightarrow \ddot{N}' \rightarrow \ddot{N} \rightarrow \ddot{N}'' \rightarrow 0$   $\ddot{S}$ -modül de tam dizi olsun.

- (i) Şayet  $\ddot{N}$  yerel noetherian olursa, ozaman  $\ddot{N}'$  ile  $\ddot{N}''$  de yerel noetherian dır.
- (ii) Şayet  $\ddot{N}'$  ve  $\ddot{N}''$  noetherian olursa, ozaman  $\ddot{N}$  'de noetheriandır.
- (iii) Şayet  $\ddot{N}'$  ne noetherian,  $\ddot{N}''$  ne de yerel noetherian dersek, ozaman  $\ddot{N}$  yerel noetherian dır.

(2) Yerel noetherian modüllerin direkt toplamı yine yerel noetherian dır.

*İspat* (1)(i) Tam dizi olma kuralından açıktır.

(1)(ii) Eğer  $\tilde{N}'$ ,  $\tilde{N}''$  noetherian ve  $K$ ,  $\tilde{N}$  'nin alt modülü ise, aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K \cap \tilde{N}' & \rightarrow & K & \rightarrow & K/K \cap \tilde{N}' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \tilde{N}' & \rightarrow & \tilde{N} & \rightarrow & \tilde{N}'' \rightarrow 0 \end{array}$$

$K \cap \tilde{N}'$  ve  $K/K \cap \tilde{N}'$  noetherian modüllerin alt modülleri olduğundan sonlu üretilmişlerdir ve bu yüzden  $K$  da sonlu üretilmiştir.

(1) (iii)  $\tilde{N}'$  ne noetherian,  $\tilde{N}''$  ne yerel noetherian ve  $K$  'ya da  $\tilde{N}$  'nin bir sonlu üretilmiş alt modülü diyelim. Yukarıdaki diyagramda  $K \cap \tilde{N}'$  ve  $K/K \cap \tilde{N}'$  noetherian modüllerdir.

(1) (ii) den  $K$  da noetherian dır.

(2) (1) (ii) den noetherian modüllerin her sonlu direkt toplamı noetherian dır. Eğer  $\tilde{N}$  ve  $M$  yerel noetherian ise o zaman  $\tilde{N} \oplus M$  yerel noetherian dır:

$K$  'yı,  $\tilde{N} \oplus M$  'nin  $K$  'da  $(\tilde{n}_i \in \tilde{N}, m_i \in M, s \in \mathbb{N})$  bir çok eleman  $(\tilde{n}_1, m_1), \dots, (\tilde{n}_s, m_s)$  tarafından üretilmiş bir alt modülü olarak kabul edelim.

$\tilde{N}' = \sum_{i \leq s} \tilde{S}j_i \subset \tilde{N}$  ve  $M' = \sum_{i \leq s} \tilde{S}m_i \subset M$  alt modülleri kabulümüzden neoetherian dır ve buradan  $\tilde{N}' \oplus M'$  noetheriandır.

Ayrıca  $K \subset \tilde{N}' \oplus M'$  olduğundan  $K$  'da noetheriandır (Wishbauer, 1991).

Tümevarımdan yerel noetherian modüllerin her sonlu direkt toplamının yerel noetherian olduğu görülür. Bütün sonlu üretilmiş alt modüller bir sonlu direkt toplam içinde bulunacaklarından iddiamız keyfi toplamalar için doğrudur.

2.9.4. Teorem  $M$  'yi modül olarak alalım.  $M$  'nin yerel noetherian olması için gerek ve yeter koşul  $M$  -injektif modüllerin direkt toplamının  $M$  -injektif olmasıdır.

2.9.5 *Sonuç*  $\tilde{S}$  halkasının noetherian olması için gerek ve yeter koşul injektif  $\tilde{S}$  -modüllerin direkt toplamının injektif olmasıdır.

*İspat* Teorem 2.9.4 ' den açıktır.

## 2.10. Artinian ve Yarı-Artinian Modüller

2.10.1. Tanım  $P$  'yi modül olarak alalım.  $P$  modülünün alt modüllerinin her

$$P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_r \geq \dots$$

azalan zinciri verildiğinde bütün  $r \geq s$  'ler için  $P_r = P_s$  olacak şekilde bir  $s$  pozitif tam sayısı mevcutsa  $P$  'ye **Artinian modül** adı verilir. (Hungerford, 1974).

$\mathcal{S}$  halkası sol  $\mathcal{S}$ -modül olarak Artinian olursa,  $\mathcal{S}$  halkasına **sol Artinian halka** deriz (Hungerford, 1974).

2.10.2. Teorem  $L$  modül olsun. Aşağıdaki ifadeler  $L$  modülü için denktir.

- (i)  $L$  artiniandır;
- (ii)  $L$  'nin bütün boş olmayan alt modüllerinin kümesinin en az bir elemanı vardır;
- (iii)  $L$  'nin bütün faktör modülleri sonlu köretilmiştir.
- (iv)  $L$  lineer olarak kompakttır ve sıfırdan farklı bütün faktör modülleri sıfır olmayan sokleye sahiptir (Wishbauer, 1991).

2.10.3. Tanım  $\mathcal{D}$  'yi modül kabul edelim. Şayet  $\mathcal{D}$  'nin bütün öz  $\tilde{\mathcal{N}}$  alt modülleri için  $Des(\mathcal{D}/\tilde{\mathcal{N}}) \neq 0$  ise  $\mathcal{D}$  modülüne **yarı-artinian** denir (Wishbauer, 1991).

$\mathcal{S}$  halkası hem sol  $\mathcal{S}$ -modül hem de yarı-artinian olursa  $\mathcal{S}$  halkasına **sol yarı-artinian halka** adı verilir. (Clark, Lomp, Vanaja ve Wishbauer, 2006).

$\mathcal{S}$  'nin sol artinian olması için gerek ve yeter koşul sol noetherian ve sol yarı-artinian olmasıdır (Wishbauer, 1991).

### 3.MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1 Yarı yerel Halka

3.1.1. Tanım  $\mathfrak{S}$  bir halka  $W$ ’ da bir  $\mathfrak{S}$  -modül olsun. Eğer  $W/Rad(W)$  yarı basitse  $W$ ’ ya **yarı yerel modül** denir . Ayrıca  $\mathfrak{S}$  yarı yerel olursa  $\mathfrak{S}$  ’ye **yarı yerel halka** denir (Lam, 1991).

3.1.2. Önerme  $\mathfrak{D}$  bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $\mathfrak{D}$  yarı yereldir.
- (ii)  $\tilde{N} \subseteq \mathfrak{D}$  alt modülü için  $P \subseteq \mathfrak{D}$  varsa  $\tilde{N} + P = \mathfrak{D}$  ve  $\tilde{N} \cap P \subseteq Rad(\mathfrak{D})$  dir.
- (iii)  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2$  olacak şekilde  $\mathfrak{D}_1$  yarı basit ve  $\mathfrak{D}_2$  ile  $Rad(\mathfrak{D}) \leq \mathfrak{D}_2$  yarı yerel alt modülü vardır.

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Açıktır. Çünkü  $(\tilde{N} + Rad\mathfrak{D})/Rad\mathfrak{D}$  ,  $\mathfrak{D}/Rad\mathfrak{D}$  nin toplamıdır.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $\tilde{N}/Rad\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}/Rad\mathfrak{D}$  olsun.  $P \subseteq \mathfrak{D}$  alt modülü için  $\tilde{N} + P = \mathfrak{D}$  ve  $\tilde{N} \cap P \subseteq Rad\mathfrak{D}$  olur. Böylece  $\tilde{N}/Rad\mathfrak{D} \oplus P/Rad\mathfrak{D} = \mathfrak{D}/Rad\mathfrak{D}$  dir. Buradan  $\mathfrak{D}/Rad\mathfrak{D}$  nin her alt modülü direkt toplamdır.

(i)  $\Rightarrow$  (iii)  $\mathfrak{D}_1$  ,  $\mathfrak{D}$  ’de  $Rad\mathfrak{D}$  ’nin birleştiricisi olsun. Buradan  $\mathfrak{D}_1 \oplus Rad\mathfrak{D} \leq \mathfrak{D}$  olur.  $\mathfrak{D}/Rad\mathfrak{D}$  yarı basit olduğundan  $\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{D}_1 \oplus Rad\mathfrak{D})/Rad\mathfrak{D}$  ,  $\mathfrak{D}/Rad\mathfrak{D}$  de direkt toplamdır. Buradan yarı basittir ve  $(\mathfrak{D}_1 \oplus Rad\mathfrak{D})/Rad\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}_2/Rad\mathfrak{D} = \mathfrak{D}/Rad\mathfrak{D}$  olan yarı basit bir  $\mathfrak{D}_2/Rad\mathfrak{D}$  alt modülü elde edilir.

Bundan dolayı  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$  ve  $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 \subseteq \mathfrak{D}_1 \cap Rad\mathfrak{D} = 0$  olur. Bu yüzden  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2$  dir. Çünkü  $\mathfrak{D}_1$  tamamlayan,  $Rad\mathfrak{D} \leq \mathfrak{D}_2$  dir.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)  $\mathfrak{D}/Rad\mathfrak{D} \cong \mathfrak{D}_1 \oplus (\mathfrak{D}_2/Rad\mathfrak{D})$  olduğundan açıktır (Clark ve diğerleri, 2006).

#### 3.2. Tümleyen Alt Modüller ve Çeşitleri

3.2.1. Tanım  $\tilde{N}$  ‘yi modül ve  $\mathfrak{D} \leq \tilde{N}$  olarak kabul edelim.  $\tilde{N} = \mathfrak{D} + \tilde{Y}$  olacak biçimde bir  $\tilde{Y}$  alt modülü mevcut ve  $\tilde{Y}$  bu koşula göre minimal olursa, diğer bir deyişle  $\mathfrak{D} + P = \tilde{N}$  şartını gerçekleştiren tüm  $P \leq \tilde{Y}$  ‘ler için  $P = \tilde{Y}$  olursa,  $\tilde{Y}$  ‘ye  $\tilde{N}$  ‘ de  $\mathfrak{D}$  ‘ nin **tümleyeni** ,  $\mathfrak{D}$  ‘ye de  $\tilde{N}$  ‘ de **tümleyene sahiptir** deriz. (Wishbauer, 1991).

$\ddot{Y}$  ‘yi modül olarak alalım ve  $\tilde{N} \ll \ddot{Y}$  diyelim. Bundan dolayı küçük alt modül tanımından  $\ddot{Y}$ ,  $\tilde{N}$  alt modülünün tümleyeni olur. Bu durumda modülün kendisi sıfırının tek tümleyenidir.

3.2.2. Önerme  $\tilde{N}$  ‘yi modül olarak alalım.  $\ddot{Y}, \mathfrak{D} \leq \tilde{N}$  dersek.  $\mathfrak{D}$  alt modülünün  $\ddot{Y}$  ‘nin tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul  $\tilde{N} = \ddot{Y} + \mathfrak{D}$  ve  $\ddot{Y} \cap \mathfrak{D} \ll \mathfrak{D}$  olmasıdır (Wishbauer, 1991).

*İspat* ( $\Rightarrow$ ) Eğer  $\mathfrak{D}$ ,  $\ddot{Y}$  ‘nin tümleyeni ve  $X \subset \mathfrak{D}$  ile birlikte  $(\ddot{Y} \cap \mathfrak{D}) + X = \mathfrak{D}$  ise,  $\tilde{N} = \ddot{Y} + \mathfrak{D} = \ddot{Y} + (\ddot{Y} \cap \mathfrak{D}) + X = \ddot{Y} + X$  dir ve dolayısıyla  $\mathfrak{D}$  ‘nin minimalliğinden  $X = \mathfrak{D}$  olur. Böylece  $\ddot{Y} \cap \mathfrak{D} \ll \mathfrak{D}$  dir.

( $\Leftarrow$ )  $\tilde{N} = \ddot{Y} + \mathfrak{D}$  ve  $\ddot{Y} \cap \mathfrak{D} \ll \mathfrak{D}$  olsun.  $\check{Z} \subset \mathfrak{D}$  ile birlikte  $\tilde{N} = \ddot{Y} + \check{Z}$  için  $\mathfrak{D} = \tilde{N} \cap \mathfrak{D} = (\ddot{Y} \cap \mathfrak{D}) + \check{Z}$  (modüler kural) elde edilir. Böylece  $\mathfrak{D} = \check{Z}$  dir. Bundan dolayı  $\mathfrak{D}$  istenilen anlamda minimaldir (Wishbauer, 1991).

3.2.3. Teorem (Tümleyen Alt Modülün Özellikleri)  $P$  ile  $\mathfrak{D}$ ,  $\ddot{Y}$   $\check{S}$ -modülünün alt modülleri olmak üzere  $\mathfrak{D}, P$  nin tümleyeni olsun. Bu takdirde;

- (i)  $\ddot{Y}$  sonlu üretilmişse,  $\mathfrak{D}$  ‘de sonlu üretilmiştir,
- (ii)  $P$  ‘yi  $\ddot{Y}$  ‘nin maksimal alt modülü olarak alırsak,  $\mathfrak{D}$  devirli ve  $Rad(\mathfrak{D}) = P \cap W$   $\mathfrak{D}$  ‘nin maksimal alt modülüdür.
- (iii)  $\check{Z} \ll \ddot{Y}$  olduğunda  $\check{Z} \cap \mathfrak{D} \ll \mathfrak{D}$  olup  $Rad(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D} \cap Rad(\ddot{Y})$  dir,
- (iv)  $\tilde{N} \leq P$  olmak üzere  $(\mathfrak{D} + \tilde{N})/\tilde{N}$ ,  $\ddot{Y}/\tilde{N}$  de  $P/\tilde{N}$  nin tümleyenidir (Lam, 2003).

*İspat* (i)  $\ddot{Y}$  sonlu üretilmiş olsun.  $P + \mathfrak{D} = \ddot{Y}$  olduğundan  $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$  ile  $P + \mathfrak{D}' = \ddot{Y}$  sonlu üretilmiş alt modülü elde edilir.  $\mathfrak{D}$  ‘nin minimalliğinden  $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}$  dir.

(ii) (i) e benzer şekilde  $\mathfrak{D}$  ‘nin devirli olduğunu görebiliriz.  $\mathfrak{D}/(P \cap \mathfrak{D}) \cong \ddot{Y}/P$  olduğundan  $P \cap \mathfrak{D}$  bir maksimal alt modül ve  $P \cap \mathfrak{D} \supset Rad(\mathfrak{D})$  olur.  $P \cap \mathfrak{D} \ll \mathfrak{D}$  olduğundan  $P \cap \mathfrak{D} \subset Rad(\mathfrak{D})$  yi elde ederiz ve bundan dolayı  $P \cap \mathfrak{D} = Rad(\mathfrak{D})$  dir.

(iii)  $\check{Z} \ll \ddot{Y}$  ve  $X \subset \mathfrak{D}$  ile  $(\check{Z} \cap \mathfrak{D}) + X = \mathfrak{D}$  olsun. Buradan  $\ddot{Y} = P + \mathfrak{D} = P + (\check{Z} \cap \mathfrak{D}) + X = P + X$  olduğundan  $X = \mathfrak{D}$  olur. Diğer bir deyişle  $\check{Z} \cap \mathfrak{D} \ll \mathfrak{D}$  dur. Buradan  $\mathfrak{D} \cap Rad(\ddot{Y}) \subset Rad(\mathfrak{D})$  sonucuna varırız.  $Rad(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D} \cap Rad(\ddot{Y})$  her zaman geçerli olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

(iv)  $\tilde{N} \subset \mathfrak{D}$  için  $P \cap (\mathfrak{D} + \tilde{N}) = P \cap \mathfrak{D} + \tilde{N}$  (modüler kuraldan) ve  $(P/\tilde{N}) \cap [(\mathfrak{D} + \tilde{N})/\tilde{N}] = [(P \cap \mathfrak{D}) + \tilde{N}]/\tilde{N}$  elde edilir.  $P \cap \mathfrak{D} \ll \mathfrak{D}$  olduğundan  $[(P \cap \mathfrak{D}) + \tilde{N}]/\tilde{N} \ll (\mathfrak{D} + \tilde{N})/\tilde{N}$  dir ve  $(P/\tilde{N}) + [(\mathfrak{D} + \tilde{N})/\tilde{N}] = \tilde{Y}/\tilde{N}$  istenilen sonucu elde edilir (Wishbauer, 1991).

3.2.4. Tanım  $W$  'yu bir  $\check{S}$  modül olarak kabul edelim. Şayet  $W$  'nun her alt modülü  $W$  'da tümleyene sahip ise  $W$  'ya **tümlenmiş modül** adı verilir. (Wishbauer, 1991).

3.2.5. Tanım  $\mathfrak{D}$  'ye bir  $\check{S}$ -modül,  $\tilde{N} \leq \mathfrak{D}$  diyelim. Şayet  $\tilde{N} + P = \mathfrak{D}$  ve  $\mathfrak{D}/P$  singüler olacak biçimde  $\mathfrak{D}$  'nin bütün  $P$  alt modülleri için  $P = \mathfrak{D}$  elde ediliyorsa,  $\tilde{N}$  'ye  **$\delta$ -küçük alt modül** denir.  $\tilde{N} \ll_{\delta} \mathfrak{D}$  ile gösterilir (Koşan, 2007).

3.2.6. Yardımcı Teorem  $P, \mathfrak{D} \leq B$  olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $B = P + \mathfrak{D}$ , ve  $P \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{D}$  'de  $\delta$ -küçük tür.
  - (ii)  $B = P + \mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{D}/\tilde{N}$  singüleri ile  $\mathfrak{D}$  'nin herhangi bir  $F$  öz alt modülü için  $B \neq P + \tilde{N}$  dir.
- İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Eğer  $\tilde{N} \leq \mathfrak{D}$  alt modülü ve  $\mathfrak{D}/\tilde{N}$  singüler olduğunda  $B = P + \tilde{N}$  ise  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D} \cap P) + \tilde{N}$  olur.  $\mathfrak{D} \cap \tilde{N}$ ,  $\mathfrak{D}$  de  $\delta$ -küçük olduğundan  $\mathfrak{D} = \tilde{N}$  dir.
- (ii)  $\Rightarrow$  (i) Eğer  $\tilde{N} \leq \mathfrak{D}$  alt modülü ve  $\mathfrak{D}/\tilde{N}$  singüler olduğunda  $\mathfrak{D} = (P \cap \mathfrak{D}) + \tilde{N}$  olursa  $B = P + \tilde{N} = P + \mathfrak{D}$  elde edilir. ii) den  $\tilde{N} = \mathfrak{D}$  dir. Bundan dolayı  $P \cap \mathfrak{D} \ll_{\delta} \mathfrak{D}$  olur (Koşan, 2007).

3.2.7. Tanım  $N$  ve  $L$  bir  $M$  modülünün 3.2.6 Yardımcı teoremdeki koşulları sağlayan alt modülleri olurlarsa  $L$  'ye  $N$  'nin  $M$  'de  **$\delta$ -tümleyeni** denir. Şayet  $M$  'nin bütün alt modülleri  $M$  'de bir  $\delta$ -tümleyene sahip ise  $M$  'ye  $\delta$ -tümlenmiştir deriz. (Koşan, 2007).

3.2.8. Teorem  $\check{Y}$  'yi  $\delta$ -tümlenmiş modül kabul edelim. Bu durumda  $\check{Y}/\delta(\check{Y})$  yarı basittir.

*İspat*  $\delta(\check{Y}) \leq \mathfrak{D} \leq \check{Y}$  olsun.  $P \leq \check{Y}$  ve  $\check{Y} = \mathfrak{D} + P$  ve  $\mathfrak{D} \cap P \ll_{\delta} P$  dir. Buradan  $\mathfrak{D} \cap P \ll_{\delta} P$  olur. Böylece  $\mathfrak{D} \cap (P + \delta(\check{Y})) = (\mathfrak{D} \cap P) + \delta(\check{Y}) = \delta(\check{Y})$  olduğundan  $\check{Y}/\delta(\check{Y}) = \mathfrak{D}/\delta(\check{Y}) + (P + \delta(\check{Y}))/\delta(\check{Y})$  olur (Koşan, 2007).

3.2.9. Tanım  $T$  'yi modül kabul edelim.  $\mathfrak{D}, \check{Y} \leq T$  olmak üzere  $T = \check{Y} + \mathfrak{D}$  ve  $\check{Y} \cap \mathfrak{D} \ll \mathfrak{D}$  ve  $\check{Y} \cap \mathfrak{D}$  yarı-basit ise,  $\mathfrak{D}$  'ye  $\check{Y}$  'nin **ss-tümleyeni**,  $T$  modülünün her alt modülü  $T$  'de bir

$ss$ -tümleyene sahip ise  $T$  'ye  **$ss$ -tümlenmiş modül** adı verilir (Kaynar, Çalışıcı ve Türkmen, 2020).

3.2.10. Tanım  $\mathfrak{D}$  'yi modül kabul edersek.  $\mathfrak{D}$  'nin basit ve küçük alt modüllerinin toplamı  $Des_s(\mathfrak{D}) = \sum\{P \ll \mathfrak{D} | P, \mathfrak{D}'nin\ basit\ alt\ modülü\}$  şeklinde tanımlanır (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.2.11. Teorem  $\mathfrak{D}$  'ye bir  $ss$ -tümlenmiş modül,  $\tilde{N}$  'ye de  $\mathfrak{D}$  'nin bir küçük alt modülü diyelim.  $\tilde{N} \subseteq Des_s(\mathfrak{D})$  dir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

*İspat* Kabulümüzden  $\mathfrak{D}$ ,  $\tilde{N}$  nin  $\mathfrak{D}$  de tek  $ss$ -tümleyeni ve bundan dolayı  $\tilde{N} \cap \mathfrak{D} = \tilde{N}$  yarı basittir. Buradan  $\tilde{N} \subseteq Des_s(\mathfrak{D})$  dir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.2.12. Lemma  $T$  tümlenmiş modül ve  $Rad(T) \subseteq Des(T)$  olsun.  $T$   $ss$ -tümlenmiştir.

*İspat*  $S \subseteq T$  dersek.  $T$ , tümlenmiş olduğu için  $T = S + P$  ve  $S \cap P \ll P$  olan  $T$  'nin bir  $P$  alt modülü elde edilir. Buradan  $S \cap P \subseteq Rad(P) \subseteq Rad(T)$  dir. Kabulümüzden  $S \cap P$  yarı basittir. Bundan dolayı  $P$ ,  $S$  'nin  $T$  'de  $ss$ -tümleyenidir. Buradan  $T$   $ss$ -tümlenmiştir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

3.2.13.  $\tilde{N}$  modülü ile  $Rad(\tilde{N}) \ll \tilde{N}$  diyelim. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $\tilde{N}$   $ss$ -tümlenmiştir,
- (ii)  $\tilde{N}$  tümlenmiştir ve  $Rad(\tilde{N})$ ,  $\tilde{N}$  'de  $ss$ -tümleyene sahiptir,
- (iii)  $\tilde{N}$  tümlenmiştir ve  $Rad(\tilde{N}) \subseteq Soc(\tilde{N})$  dir.

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Açıktır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Teorem 3.2.11 'den açıktır.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Lemma 3.2.12 'den elde edilir (Kaynar ve diğerleri, 2020).

### 3.3. V-Modüller, Parçalanmış Modül ve SSI-Halkalar

3.3.1. Tanım  $N$  bir  $\check{S}$ -modül olsun. Her basit sol  $\check{S}$ -modül  $N$ -injektif ise  $N$ -ye **V-modül** denir.  $\check{S}$  bir V-modül ise  $\check{S}$  'ye sol **V- halka** denir. Baer kriteri gereği  $\check{S}$  'nin sol V- halka olması için gerek ve yeter koşul her basit sol  $\check{S}$ -modülün injektif olmasıdır (Wishbauer, 1991).

3.3.2. Önerme  $\tilde{N}$  'ye bir  $V$ - modül ,  $P$  'ye de  $\tilde{N}$  'nin keyfi bir alt modülü diyelim.  $P$  ve  $\tilde{N}/P$  de  $V$ -modüldür.

*İspat*  $\tilde{Y}$  keyfi basit sol  $\tilde{S}$  -modül ise  $\tilde{N}$  bir  $V$ -modül olduğundan  $\tilde{Y}$  modülü  $\tilde{N}$  -injektiftir.

Teorem 2.4.5 gereği  $\tilde{Y}$  hem  $P$ -injektif hem de  $\tilde{N}/P$  -injektiftir. Dolayısıyla  $P$  ve  $\tilde{N}/P$  birer  $V$ -modüldür.

3.3.3. Önerme  $W$  yarı basit modül ise ,  $W$  bir  $V$ -modüldür.

*İspat*  $\tilde{Y}$  bir  $\tilde{S}$  -modül olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & \tilde{N} \xrightarrow{i} W \\ & & \downarrow f \\ & & \tilde{Y} \end{array}$$

diyagramını alalım.  $W$  yarı basit olduğundan  $W = \tilde{N} \oplus \tilde{N}_1$  olacak şekilde  $\tilde{N}_1 \leq W$  vardır.  $\pi_1: W \rightarrow \tilde{N}$  doğal homomorfizma olmak üzere  $h = f\pi_1: W \rightarrow \tilde{Y}$  olsun. Şimdi  $\forall \tilde{n} \in \tilde{N}$  için  $(hi)(\tilde{n}) = h(\tilde{n}) = (f\pi_1)(\tilde{n}) = f(\tilde{n})$  olup  $\tilde{Y}$  modülü  $W$  -injektiftir.

3.3.4. Teorem  $\tilde{N}$  modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i)  $\tilde{N}$   $V$ -modüldür,

(ii)  $\forall K \leq \tilde{N}$  için  $Rad\left(\tilde{N}/K\right) = 0$  dır,

(iii)  $\tilde{N}$  den farklı her alt modülü  $\tilde{N}$  nin bir takım maksimal alt modüllerinin arakesiti olarak yazılabilir.

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\frac{S}{K} \subseteq Rad\left(\frac{\tilde{N}}{K}\right)$  devirli alt modülünü alalım. Her sonlu üretilmiş modül

maksimal alt modülüne sahip olduğundan  $\frac{S}{K}$  'nın bir  $\frac{X}{K}$  alt modülü vardır ve  $\frac{\frac{S}{K}}{\frac{X}{K}} \cong \frac{S}{X}$  basit

modüldür.  $\forall \tilde{n} + K \in \tilde{N}/K$  için  $\Psi(\tilde{n} + K) = \tilde{n} + X$  ile tanımlı

$\Psi: \frac{\tilde{N}}{K} \rightarrow \frac{\tilde{N}}{X}$  dönüşümü bir epimorfizmadır ve  $\text{Çek}(\Psi) = \frac{X}{K}$  dır.

$\frac{S}{K} \subseteq Rad\left(\frac{\tilde{N}}{K}\right)$  ve  $\frac{S}{K}$  devirli olduğundan  $\frac{S}{K} \ll \frac{\tilde{N}}{K}$  olup  $\Psi\left(\frac{S}{K}\right) = \frac{S}{X}$  dir. Önerme 2.7.2 (iv)

gereği  $\frac{S}{X} \ll \varphi\left(\frac{\tilde{N}}{K}\right) = \frac{\tilde{N}}{X}$  dir. Diğer taraftan  $\frac{S}{X}$  basit ve  $\tilde{N}$   $V$ -modül olduğundan  $\frac{S}{X}$ ,  $\tilde{N}$ -injektiftir.

Teorem 2.4.5 gereği  $\frac{S}{X}$  modülü  $\frac{\tilde{N}}{X}$  -injektiftir.

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow \frac{S}{X} \xrightarrow{i} \frac{\tilde{N}}{X} \\
\downarrow I_S/X \quad \searrow \\
S/X
\end{array}$$

$hi = I_S/X$  olacak şekilde  $h: \frac{\tilde{N}}{X} \rightarrow \frac{S}{X}$  dönüşümü vardır.

$0 \rightarrow \frac{S}{X} \xrightarrow{i} \frac{\tilde{N}}{X} \xrightarrow{h} \frac{\tilde{N}}{S} \rightarrow 0$  olup  $\frac{S}{X}, \frac{\tilde{N}}{X}$  'in direkt toplam terimidir. Bu ise  $\frac{S}{X}$  'in küçük alt modül

olmasıyla çelişir. O halde  $\frac{S}{X} = 0$  olup  $Rad(\frac{\tilde{N}}{K}) = 0$  dır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Gamma = \{T \subset \tilde{N} | T \text{ maksimal alt modül ve } K \subseteq T\}$  olsun. (ii) gereği  $Rad(\frac{\tilde{N}}{K}) = \bigcap_{T \in \Gamma} (\frac{N}{K}) = 0$  olup  $\bigcap_{T \in \Gamma} T = K$  dır.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)  $S$  basit olmak üzere

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow K \xrightarrow{i} \tilde{N} \\
\downarrow f \\
S
\end{array}$$

diyagramını alalım.  $f = 0$  ise , iddia açıktır.  $f \neq 0$  olsun. Bu durumda  $0 \neq x \in K/\text{Çek}(f)$  vardır. (iii) gereği  $\text{Çek}(f)$  ,  $\tilde{N}$  nin bir takım maksimal alt modüllerinin arakesitidir ve  $X \neq L$  ,  $\text{Çek}(f) \subseteq L$  olacak biçimde  $\tilde{N}$  nin  $L$  maksimal alt modülü mevcuttur.

$S$  basit olduğundan  $\frac{K}{\text{Çek}(f)} \cong S$  ve  $\text{Çek}f \subseteq K \cap L$  olduğundan  $\frac{K \cap L}{\text{Çek}f} \leq \frac{K}{\text{Çek}(f)} \cong S$  olup ,

$K \cap L = \text{Çek}(f)$  dir. Ayrıca  $x \notin L$  ,  $x \in K$  olup  $L$  ' nin maksimalliği gereği  $\tilde{N} = K + L$  eşitliği yazılır.  $\forall k + l \in K + L$  için  $f'(k + l) = f(k)$  ile tanımlı  $f': \tilde{N} \rightarrow S$  dönüşümü homomorfizmadır ve  $f'i = f$  dir. Dolayısıyla  $S$  modülü  $\tilde{N}$ -injektif olup  $\tilde{N}$  bir  $V$ -modüldür.

3.3.5. *Sonuç*  $\tilde{N}$  bir  $V$ -modül olsun.  $Rad(\tilde{N}) = 0$  dır.

*İspat* Teorem 3.3.4 'de  $K = 0$  alınırsa  $Rad(\tilde{N}) = 0$  dır.

3.3.6. Teorem  $\{M_i\}_{i \in I}$   $V$ -modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$  bir  $V$ -modüldür.

*İspat*  $S$  basit ise ,  $\forall i \in I$  için  $S$  modülü  $M_i$ -injektiftir. Önerme 2.4.4 gereği  $S$  modülü  $\bigoplus_{i \in I} M_i = M$ -injektiftir. Dolayısıyla  $M$  ,  $V$ -modüldür.

3.3.7. Teorem  $\check{S}$  bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i)  $\check{S}$  bir sol  $V$ -halkadır.

(ii) Rastgele bir sol  $M$   $\check{S}$ - modülü için  $Rad(M) = 0$  dir.

(iii)  $\check{S}$  nin her sol  $A(\neq \check{S})$  ideali maksimal sağ ideallerin arakesitidir.

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\check{S}$  'ye bir sol  $V$ -halka ve  $M$  'ye de bir sol  $\check{S}$ -modül diyelim.  $M$  nin tüm maksimal alt modüllerinin arakesitinin sıfır olduğu iddiasında bulunalım.  $x(\neq 0) \in M$  olsun. Devirli  $\check{S}$  -modül olan  $\check{S}x$  i göz önüne alalım.  $N$  ,  $\check{S}x$  nin maksimal alt modülü olsun. O halde  $\check{Y} = \check{S}x/N$  basit bir sol  $\check{S}$ -modüldür ve dolayısıyla kabulümüzden injektiftir.

$f: \check{S}x \rightarrow \check{Y}$  kanonik surjektif homomorfizmasını düşünelim.  $\check{Y}$  injektif olduğundan  $f, f': M \rightarrow \check{Y}$  ye genişletilebilir. Açıkça görüldüğü üzere  $\check{Cek}(f')$  ,  $M$  nin maksimal alt modülüdür öyle ki  $x \notin \check{Cek}(f')$  dür. Bu da bize  $M$  nin bütün maksimal alt modüllerinin arakesitinin sıfır olduğunu gösterir şöyle ki  $Rad(M) = 0$  dir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $A(\neq \check{S})$ ,  $\check{S}$  nin sol ideali olsun.  $Rad(R/A) = 0$  olduğundan  $A$  nın maksimal sol ideallerin arakesiti olduğu sonucuna varırız.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)  $\check{Y}$  rastgele basit bir sol  $\check{S}$ -modül ,  $I$  'ya da  $\check{S}$  'nin sol ideali diyelim.  $f: I \rightarrow \check{Y}$  sıfırdan farklı homomorfizmasını göz önüne alalım.  $\check{Y}$  'nin injektif olduğunu ispatlamak için  $f$  'in  $\check{S}$  'ye genişletilebileceğini göstermeliyiz.  $x \in I/\check{Cek}(f)$  olarak düzeltelim.  $\check{Cek}(f)$  ,  $\check{S}$  'nin maksimal sol idealleri ailesinin arakesiti ve  $x \notin \check{Cek}(f)$  olduğundan  $\check{Cek}(f) \leq M$  maksimal sol ideali vardır ve  $x \notin M$  dir.  $I/\check{Cek}(f) \cong \check{Y}$  basit olduğundan  $M \cap I = \check{Cek}(f)$  tir.  $I + M = \check{S}$  açık bir şekilde görülür. Şimdi  $f$  'i herhangi  $a \in I$  ve  $m \in M$  için  $f'(a + m) = f(a)$  tanımıyla  $f': \check{S} \rightarrow \check{Y}$  genişletebiliriz. Bu da bize her basit sol  $\check{S}$  -modülün injektif olduğunu gösterir ve bundan dolayı  $\check{S}$  bir sol  $V$ -halkadır (Byrd, 1972).

3.3.8. Tanım  $\mathfrak{D}$  'yi modül kabul edelim.  $\mathfrak{D}$  'nin her  $W \leq \mathfrak{D}$  alt modülü için  $Des(\mathfrak{D}/W)$  ,  $\mathfrak{D}/W$  ' nun direkt toplam terimi ise  $\mathfrak{D}$  'ye **parçalanan modül** denir (Er, Lopez-Permouth ve Sökmez, 2011).

3.3.9. Önerme  $\mathfrak{D}$  parçalanan modül ve  $\check{N} \leq \mathfrak{D}$  olsun.  $\check{N}$  ve  $\frac{\mathfrak{D}}{\check{N}}$  de parçalananıdır.

*İspat*  $P \leq \tilde{N}$  olsun.  $Des(\frac{\tilde{N}}{P}) \leq Des(\frac{D}{P})$  olup  $D$  parçalanmış olduğundan  $Des(\frac{D}{P}) \oplus \frac{\tilde{N}}{P} = \frac{D}{P}$  yazılır.  $Des(\frac{D}{P})$  yarı basit olduğundan  $Des(\frac{\tilde{N}}{P}) \oplus \frac{Y}{P} = Des(\frac{D}{P})$  dir.

$\frac{D}{P} = Des(\frac{D}{P}) \oplus \frac{X}{P} = Des(\frac{\tilde{N}}{P}) \oplus (\frac{Y}{P} \oplus \frac{X}{P})$  olup modüler kural gereği  $\frac{\tilde{N}}{P} = \frac{\tilde{N}}{P} \cap \frac{D}{P} = \frac{\tilde{N}}{P} \cap (Des(\frac{\tilde{N}}{P}) \oplus (\frac{Y}{P} \oplus \frac{X}{P})) = Des(\frac{\tilde{N}}{P}) \oplus (\frac{\tilde{N}}{P} \cap (\frac{Y}{P} \oplus \frac{X}{P}))$  dır. Dolayısıyla  $Des(\frac{\tilde{N}}{P})$  ,  $\frac{\tilde{N}}{P}$  'nin direkt toplam terimidir. Yani  $\tilde{N}$  parçalanandır.

Şimdi  $\frac{D}{\tilde{N}}$  nin parçalanmış olduğunu gösterelim.  $\frac{X}{\tilde{N}} \leq \frac{J}{\tilde{N}}$  için  $Des(\frac{\frac{D}{\tilde{N}}}{\frac{X}{\tilde{N}}}) \cong Des(\frac{D}{X})$  ve  $D$  parçalanmış olduğundan  $Des(\frac{D}{X})$  ,  $\frac{D}{X}$  'in direkt toplam terimidir.

$\Psi: \frac{D}{\tilde{N}} \rightarrow \frac{D}{X}$  epimorfizması mevcut olduğundan  $Des(\frac{\frac{D}{\tilde{N}}}{\frac{X}{\tilde{N}}})$  ,  $\frac{\frac{D}{\tilde{N}}}{\frac{X}{\tilde{N}}}$  'nun direkt toplam terimidir.

Buradan  $\frac{D}{\tilde{N}}$  parçalanandır.

3.3.10. Önerme  $M$  parçalanmış modül olsun.  $M$  bir V- modüldür.

*İspat*  $S$  basit olmak üzere  $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} M$

$$\begin{array}{c} \downarrow f \\ S \end{array}$$

diyagramını alalım  $f = 0$  ise ,  $S$   $M$  -injektiftir.  $f \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $f(K) = S$  olup  $f$  epimorfizmadır ve  $S \cong \frac{K}{\zeta_{ekf}}$  dir. O halde  $\frac{K}{\zeta_{ekf}} \oplus \frac{L}{\zeta_{ekf}} = Des(\frac{M}{\zeta_{ekf}})$  olacak şekilde  $\zeta_{ekf} \leq L \leq M$  vardır.  $M$  parçalanmış olduğundan  $Des(\frac{M}{\zeta_{ekf}}) \oplus \frac{X}{\zeta_{ekf}} = \frac{M}{\zeta_{ekf}}$  olacak şekilde  $\zeta_{ekf} \leq X \leq M$  vardır. Şimdi  $\frac{M}{\zeta_{ekf}} = Des(\frac{M}{\zeta_{ekf}}) \oplus \frac{X}{\zeta_{ekf}} = \frac{K}{\zeta_{ekf}} \oplus \frac{L}{\zeta_{ekf}} \oplus \frac{X}{\zeta_{ekf}}$  olup  $\frac{K}{\zeta_{ekf}}$  ,  $\frac{M}{\zeta_{ekf}}$  'in direkt toplam terimidir.

$\pi_1: \frac{M}{\zeta_{ekf}} \rightarrow \frac{K}{\zeta_{ekf}}$  doğal projeksiyon ve  $\pi: M \rightarrow \frac{M}{\zeta_{ekf}}$  doğal homomorfizma olmak üzere  $h = f\pi_1\pi: M \rightarrow S$  olsun.  $k \in K$  ise ,  $(h_i)(k) = h(k) = (f\pi_1\pi)(k) = (f\pi_1)(k + \zeta_{ekf}) = f(\pi_1(k + \zeta_{ekf})) = f(k + \zeta_{ekf}) = f(k)$  olup  $S$  modülü  $M$ -injektiftir. Dolayısıyla  $M$  bir V-modüldür.

3.3.11 *Sonuç* Yardımcı Teorem  $M$  bir parçalanmış modül olsun.  $Rad(M) = 0$  dir.

*İspat* Parçalanmış modüller V-modül olduklarından Teorem 2.5.5 (i) ve Teorem 3.3.4 (ii) den  $Rad(M) = 0$  dır (Alizade ve diğerleri, 2022).

3.3.12. Önerme  $M$  parçalanmış modül olsun.  $M$  yerel noetherian dır (Er, Lopez-Permouth ve Sökmez, 2011).

3.3.13. Teorem  $\tilde{N}$  modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i)  $\tilde{N}$  parçalanandır.

(ii)  $\tilde{N}$  yerel noetherian V-modüldür.

*İspat* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Önerme 3.3.10 ve Önerme 3.3.13 ‘den açıktır.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $\mathfrak{D} \leq \tilde{N}$  olsun.  $\tilde{N}$  bir V-modül olduğundan Önerme 3.3.2 gereği  $\tilde{N}/\mathfrak{D}$  da V-modüldür. Ayrıca Teorem 2.9.3.(1)-(i) gereği  $\tilde{N}/\mathfrak{D}$  yerel noetherian dır.

$Des(\tilde{N}/\mathfrak{D})$  basit alt modüllerin direkt toplamı ve Teorem 2.9.4 gereği  $Des(\tilde{N}/\mathfrak{D})$  modülü  $\tilde{N}/\mathfrak{D}$  injektiftir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & Des(\tilde{N}/\mathfrak{D}) & \xrightarrow{i} & \tilde{N}/\mathfrak{D} & \xrightarrow{\pi} & \frac{\tilde{N}/\mathfrak{D}}{Des(\tilde{N}/\mathfrak{D})} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow I & & \searrow f & & \\
 & & & & & & Des(\tilde{N}/\mathfrak{D})
 \end{array}$$

$fi = I$  olacak şekilde  $f: \tilde{N}/\mathfrak{D} \rightarrow Des(\tilde{N}/\mathfrak{D})$  homomorfizması vardır. O halde  $Des(\tilde{N}/\mathfrak{D})$  ,  $\tilde{N}/\mathfrak{D}$  ‘nin direkt toplam terimidir.

3.3.14. *Sonuç*  $\tilde{S}$  halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i)  $\tilde{S}$  parçalanandır.

(ii)  $\tilde{S}$  noetherian V-halkadır.

3.3.15. Tanım Her yarı basit sol  $\tilde{S}$ -modül injektifse  $\tilde{S}$  halkasına **SSI-halka** denir (Byrd, 1972).

Tanımdan SSI-halkaların V-halka olduğu açıktır.

3.3.16. Teorem  $\check{S}$  'nin SSI-halka olması için gerek ve yeter koşul  $\check{S}$  'nin noetherian V-halka olmasıdır.

*İspat* ( $\Rightarrow$ )  $\check{S}$  SSI-halka ve  $I$ ,  $\check{S}$  'nin sol ideali olsun. Her yarı basit modül injektif olduğundan  $Des(\check{S}/I)$  , injektiftir. O halde  $Des(\check{S}/I) \oplus T = \check{S}/I$  olacak biçimde  $T \leq \check{S}/I$  vardır.

Böylece  $\check{S}$  parçalanıp üstteki sonuç gereği  $\check{S}$  noetherian V-halkadır.

( $\Leftarrow$ )  $\check{Y}$  keyfi bir yarı basit  $\check{S}$  –modül olsun.  $\check{S}$  noetherian ve V- halka olduğundan Sonuç 2.9.5 gereği  $\check{Y}$  injektiftir. Sonuç olarak  $\check{S}$ , SSI- halkadır.

3.3.17. Önerme  $\{M_i\}_{i \in I}$  parçalanıp modüllerin ailesi ve  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$  olsun.  $M$  parçalanandır.

*İspat* Teorem 3.3.6 gereği  $\forall i \in I$  için  $M_i$  'ler yerel Noetherian V-modüldür. Teorem 3.3.6 ve Teorem 2.9.3 (2) gereği  $M$  yerel noetherian V-modüldür. Tekrar Teorem 3.3.6 uygulanırsa ,  $M$  nin parçalanıp modül olduğu görülür.

$W$  modül olsun.  $W$  nun tüm parçalanıp alt modüllerinin toplamını  $C(W)$  ile gösterelim.

3.3.18. Sonuç  $W$  modül olsun.  $C(W)$  ,  $W$  'nun en büyük parçalanıp alt modülüdür.

*İspat*  $\{W_i\}_{i \in I}$  ,  $W$  'nun parçalanıp tüm alt modüllerinin ailesi olmak üzere  $C(W) = \sum_{i \in I} W_i$  dir.  $N = \bigoplus_{i \in I} W_i$  direkt toplamı Önerme 3.3.9 gereği parçalanandır.

$\Psi: N \rightarrow C(W)$

$(w_i)_{i \in I} \rightarrow \Psi((w_i)_{i \in I}) = \sum w_i$

epimorfizmasından dolayı Önerme 3.3.9 gereği  $C(W)$  parçalanandır.

3.3.19. Teorem  $\check{S}$  bir halka olsun . Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $\check{S}$  parçalanandır.
- (ii)  $\check{S}$  bir SSI-halkadır.
- (iii) Her  $\check{S}$ - modül parçalanandır.

*İspat* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) Parçalanıp modüller yerel noetherian V-modül olduklarından Teorem 3.1.2 den  $\check{S}$  , SSI-halkadır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\tilde{N}$  bir  $\check{S}$ -modül ve  $P$  'de  $\tilde{N}$  'nin bir alt modülü olsun.  $Des(\tilde{N}/P)$  nin injektif olduğunu varsayarsak  $V/P \leq \tilde{N}/P$  alt modülü elde edilir ve buradan  $\tilde{N}/P = Des(\tilde{N}/P) \oplus V/P$  olur. Bundan dolayı  $S$  parçalanandır.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Açıktır (Alizade ve diğerleri, 2022).

3.3.20. Yardımcı Teorem Parçalanen modüller sınıfı alt modüller, faktör modüller ve direkt toplamlar altında kapalıdır (Alizade ve diğerleri, 2022).

*İspat* Teorem 3.3.9 ve 3.3.17 'den açıktır.

3.3.21. Teorem  $\check{S}$  bir halka ve  $\mathfrak{D}$  bir  $\check{S}$ -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) Eğer  $f: \mathfrak{D} \rightarrow \tilde{N}$  bir  $\check{S}$  modül homomorfizması ise  $f(C(\mathfrak{D})) \subseteq C(\tilde{N})$  dir.
- (ii)  $\mathfrak{D}$  'nin her  $\check{Z}$  alt modülü için ,  $C(\check{Z}) = \check{Z} \cap C(\mathfrak{D})$  dir.
- (iii)  $C(\mathfrak{D}) \trianglelefteq \mathfrak{D}$  olması için gerek ve yeter koşul her  $0 \neq \check{Z} \leq \mathfrak{D}$  için  $C(\check{Z}) \neq 0$  olmasıdır.
- (iv) Eğer  $C(\mathfrak{D}) \subseteq Rad(\mathfrak{D})$  ise ,  $C(\mathfrak{D})$   $\mathfrak{D}$  'nin küçük alt modülüdür.

$$(v) C\left(\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{D}_i\right) = \bigoplus_{i \in I} C(\mathfrak{D}_i)$$

*İspat* (i) Açıktır.

(ii)  $C(\check{Z}) \subseteq \check{Z} \cap C(\mathfrak{D})$  açıktır.  $a \in \check{Z} \cap C(\mathfrak{D})$  olsun.  $\check{S}a$  (yerel) noetherian  $V$ -modül olduğundan  $a \in \check{S}a \subseteq C(\check{Z})$  olur. Bundan dolayı  $\check{Z} \cap C(\mathfrak{D}) \subseteq C(\check{Z})$  ve  $C(\check{Z}) = \check{Z} \cap C(\mathfrak{D})$  olur.

(iii)  $(\Rightarrow)$  (ii) den  $C(\check{Z}) = \check{Z} \cap C(\mathfrak{D}) \neq 0$  dir.

$(\Leftarrow)$   $\mathfrak{D}$  'nin  $F$  alt modülü için  $C(\mathfrak{D}) \cap F = 0$  olsun. ii) den  $C(F) = C(\mathfrak{D}) \cap F = 0$  dır ki buda kabulümüze çelişki oluşturur. Bundan dolayı  $F = 0$  ve  $C(\mathfrak{D}) \trianglelefteq \mathfrak{D}$  dir.

(iv)  $\mathfrak{D}$  'nin  $\tilde{N}$  alt modülü için  $C(\mathfrak{D}) + \tilde{N} = \mathfrak{D}$  olsun.  $Rad(\mathfrak{D}) + \tilde{N} = \mathfrak{D}$  olur buda  $Rad(\mathfrak{D}/\tilde{N}) = \mathfrak{D}/\tilde{N}$  demektir.  $\mathfrak{D}/\tilde{N} \cong C(\mathfrak{D})/[C(\mathfrak{D}) \cap \tilde{N}]$  olduğuna dikkat edelim. Yardımcı Teorem 3.3.11 ve 3.3.20 den  $\mathfrak{D}/\tilde{N} = Rad(\mathfrak{D}/\tilde{N}) = 0$  olur.

(v)  $a \in C\left(\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{D}_i\right)$  olsun. Buradan  $a = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_{\tilde{n}}}$  lerden oluşan  $a_{i_j} \in \mathfrak{D}_{i_j}$ ,  $(1 \leq j \leq \tilde{n})$  elde edilir.  $\check{S}a$  (yerel) noetherian  $V$ -modül olduğundan,  $a_{i_j}\check{S} \subseteq \check{S}a$  de (yerel) noetherian  $V$ -modüldür ve bu yüzden  $\{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  deki her  $j$  için  $a_{i_j} \in a_{i_j}\check{S} \subseteq C(\mathfrak{D}_{i_j})$  olur.

Bundan dolayı  $a = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_{\tilde{n}}} \in C(\mathfrak{D}_{i_1}) \oplus C(\mathfrak{D}_{i_2}) \oplus \dots \oplus C(\mathfrak{D}_{i_{\tilde{n}}}) \subseteq \bigoplus_{i \in I} C(\mathfrak{D}_i)$  dir. i)

den  $\bigoplus_{i \in I} C(\mathfrak{D}_i) \subseteq C\left(\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{D}_i\right)$  olur (Alizade ve diğerleri, 2022).

## 4.BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1 C-Tümleyen Alt Modüller

4.1.1. Tanım  $\mathfrak{D}$  modül olsun.  $\mathfrak{D} = P + Z$  ve  $P \cap Z$  parçalanana ise  $Z$  'ye  $P$  'nin  $\mathfrak{D}$  'de **c-tümleyeni** ,  $\mathfrak{D}$  'nin her alt modülü c-tümleyene sahip ise  $\mathfrak{D}$  'ye **cr-tümlenmiş modül** adı verilir.

4.1.2. Teorem Bir  $\mathfrak{D}$  modülünün cr-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul  $\frac{\mathfrak{D}}{C(\mathfrak{D})}$  'nin yarı basit olmasıdır.

*İspat* ( $\Rightarrow$ )  $\mathfrak{D}$  cr-tümlenmiş modül ve  $\frac{P}{C(\mathfrak{D})} \leq \frac{\mathfrak{D}}{C(\mathfrak{D})}$  olsun.

Bundan dolayı  $C(\mathfrak{D}) \leq P \leq \mathfrak{D}$  dir.  $\mathfrak{D}$  , cr-tümlenmiş olduğundan  $\mathfrak{D}$  'nin bir  $J$  alt modülü vardır ve  $\mathfrak{D} = P + J$  ve  $P \cap J$  parçalanandır. Bu yüzden  $P \cap J = C(P \cap J)$  ve böylece teorem 3.3.21 ii) 'den  $P \cap J \subseteq C(\mathfrak{D})$  tir. Buradan  $\frac{\mathfrak{D}}{C(\mathfrak{D})} = \frac{P}{C(\mathfrak{D})} + \frac{J+C(\mathfrak{D})}{C(\mathfrak{D})}$  'tir.

Fark edildiği üzere

$$\frac{P}{C(\mathfrak{D})} \cap \left( \frac{J+C(\mathfrak{D})}{C(\mathfrak{D})} \right) = \frac{P \cap J + C(\mathfrak{D})}{C(\mathfrak{D})} = \frac{C(\mathfrak{D})}{C(\mathfrak{D})} = 0 \text{ 'dır.}$$

Buradan  $\frac{\mathfrak{D}}{C(\mathfrak{D})}$  yarıbasittir.

( $\Leftarrow$ )  $P \leq \mathfrak{D}$  olsun. Hipotezden,  $C(\mathfrak{D}) \leq J \leq \mathfrak{D}$  alt modülleri için  $\frac{\mathfrak{D}}{C(\mathfrak{D})} = \frac{P+C(\mathfrak{D})}{C(\mathfrak{D})} \oplus \frac{J}{C(\mathfrak{D})}$  yazabilir. Daha sonra  $\mathfrak{D} = P + C(\mathfrak{D}) + J = P + J$  olur.  $\frac{P+C(\mathfrak{D})}{C(\mathfrak{D})} \cap \frac{J}{C(\mathfrak{D})} = \frac{P \cap J + C(\mathfrak{D})}{C(\mathfrak{D})} = 0$  olduğundan,  $P \cap J \subseteq C(\mathfrak{D})$  elde edilir. Bu yüzden  $P \cap J$  parçalanandır. Böylece  $\mathfrak{D}$  cr-tümlenmiştir.

4.1.3. Sonuç  $\ddot{Y}$  bir cr-tümlenmiş modül ise,  $C(\ddot{Y}) \trianglelefteq \ddot{Y}$  'tir.

*İspat*  $\ddot{Y}$  'nin  $W$  alt modülleri için  $C(\ddot{Y}) \cap W = 0$  olsun.

Buradan  $W \cong \frac{W \oplus C(\ddot{Y})}{C(\ddot{Y})}$  dir.  $\frac{\ddot{Y}}{C(\ddot{Y})}$  yarıbasit olduğundan  $\frac{W \oplus C(\ddot{Y})}{C(\ddot{Y})}$  ,  $\frac{\ddot{Y}}{C(\ddot{Y})}$  'in alt modülü olarak yarıbasittir. Bundan dolayı  $W$  yarıbasittir ve böylece  $W \subseteq C(\ddot{Y})$  'tir. Buradan gerektiği üzere  $C(\ddot{Y}) \cap W = W = 0$  'dır.

4.1.4. Teorem  $P$  cr-tümlenmiş modül olsun.  $P$  'nin her bir bölüm modülü cr-tümlenmiştir.

*İspat*  $W \leq J \leq P$  olsun.  $P$  cr-tümlenmiş olduğundan,  $J$  cr-tümlenmiş sahiptir, buna  $P$  'de  $B$  diyelim. Böylece  $P = J + B$  ve  $J \cap B$  parçalanandır yazabiliriz.

Buradan  $\frac{P}{W} = \frac{J}{W} + \frac{B+W}{W}$  dur.  $\Psi: P \rightarrow \frac{P}{W}$  doğal homomorfizmasını göz önüne alalım.

$\Psi(J \cap B) = \frac{J \cap B + W}{W} = \frac{J \cap (B+W)}{W} = \frac{J}{W} \cap \frac{B+W}{W}$  dır ve böylece  $\frac{J}{W} \cap \frac{B+W}{W}$  teorem 3.3.21 i) 'den parçalanandır. Buda  $\frac{J}{W}$ ,  $\frac{X}{W}$ , de cr-tümlenmiş sahiptir demektir. Böylece  $\frac{X}{W}$  cr-tümlenmiştir.

4.1.5. *Sonuç* Cr-tümlenmiş modüllerin homomorfik görüntüleride cr-tümlenmiştir.

4.1.6. *Önerme*  $X$  cr-tümlenmiş modül olsun.  $X$  'in her bir alt modülü cr-tümlenmiştir.

*İspat*  $\mathfrak{D}$ ,  $X$  'in alt modülü olsun.  $\check{Y}$  'nin de,  $\mathfrak{D}$  'nin herhangi bir alt modülü olduğunu varsayalım.  $X$  cr-tümlenmiş olduğundan,  $\check{Y} + R$  toplamını,  $N$  olarak ve  $\check{Y} \cap R$  'yi  $X$  ' in herhangi bir  $R$  altmodülü olarak parçalanandır diye yazabiliriz. Modüler kuraldan,  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \cap X = \mathfrak{D} \cap (\check{Y} + R) = \mathfrak{D} \cap R + \check{Y}$  'yi elde ederiz ve böylece  $\mathfrak{D} = \check{Y} + \mathfrak{D} \cap R$  'dir. Bu durumda  $\check{Y} \cap (\mathfrak{D} \cap R) = \check{Y} \cap \mathfrak{D} \cap R = \check{Y} \cap R$  parçalanandır olduğundan,  $\mathfrak{D} \cap R$ ,  $\mathfrak{D}$  'de  $\check{Y}$  'nin cr-tümlenmişidir. Bundan dolayı  $\mathfrak{D}$ , cr-tümlenmiştir.

Şimdi cr-tümlenmiş modüllerin direkt toplamının cr-tümlenmiş olduğunu göstereceğiz.

4.1.7. *Teorem*  $\{W_i\}_{i \in I}$  cr-tümlenmiş modüllerin bir ailesi ve  $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$  olsun.  $W$  cr-tümlenmiştir.

*İspat* Teorem 3.3.21 (v) den  $C(W) = \bigoplus_{i \in I} C(W_i)$  dir ve böylece  $\frac{W}{C(W)} = \frac{\bigoplus_{i \in I} W_i}{\bigoplus_{i \in I} C(W_i)} \cong \bigoplus_{i \in I} \left( \frac{W_i}{C(W_i)} \right)$  olur. Teorem 4.1.2' den,  $\frac{W}{C(W)}$  yarıbasittir. Tekrar Teorem 4.1.2' yi uygularsak,  $W$  'nin cr-tümlenmiş olduğu görülür.

4.1.8. *Sonuç*  $W$  modül,  $\{W_i\}_{i \in I}$   $W$  'nun  $W_i$  cr-tümlenmiş alt modüllerinin bir ailesi olsun.  $\sum_{i \in I} W_i$  cr-tümlenmiştir.

*İspat*  $N = \bigoplus_{i \in I} W_i$  olsun. Teorem 4.1.7' den  $N$  cr-tümlenmiştir.

Şimdi  $\Psi((a_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I_0} a_i$ , öyle ki  $I_0 = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$  ile  $\Psi: N \rightarrow \sum_{i \in I} W_i$  epimorfizmasını gözönüne alalım. Sonuç 4.1.5' den,  $\sum_{i \in I} W_i$  cr-tümlenmiştir.

Şimdi, modülleri cr-tümlemiş özellikler gösteren halkaların, karakterizasyonunu sağlamayı amaçlıyoruz. Ayrıca aşağıdaki teorem cr-tümlemiş halkalar ile modüller arasındaki bağlantıyı bize göstermektedir

4.1.9. Teorem  $\check{S}$  bir halka olsun.  $\check{S}$  'nin cr-tümlemiş olması için gerek ve yeter koşul her sol  $\check{S}$  -modülün cr-tümlemiş olmasıdır

*İspat* (  $\Rightarrow$  )  $\check{S}$  cr-tümlemiş ve  $J$  keyfi bir sol  $\check{S}$ -modül olsun. Bundan dolayı  $\psi: \check{S}' \rightarrow J$  bir epimorfizma olmasını sağlayacak bir indeks kümesi vardır.  $\check{S}$  cr-tümlemiş olduğundan, Teorem 4.1.7' den  $\check{S}'$  cr-tümlemiştir. Buradan Sonuç 4.1.5' e göre  $J$ , cr-tümlemiştir.

( $\Leftarrow$ ) Açıktır.

4.1.10. Teorem  $\check{S}$  bir halka olsun .Aşağıdakiler gerçekleşir

- (i)  $\check{S}$  'nin yarı basit artinian olması için gerek ve yeter koşul her  $\check{S}$  modülün yarı basit olmasıdır.
- (ii)  $\check{S}$  'nin yarı basit olması için gerek ve yeter koşul her  $\check{S}$  -modülün injektif olmasıdır.
- (iii)  $\check{S}$  'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul her  $\check{S}$  -modülün projektif olmasıdır.
- (iv)  $\check{S}$  'nin projektif olması için gerek ve yeter koşul her (yarı)basit  $\check{S}$  - modül projektif olmasıdır (Wishbauer, 1991).

$\check{S}$  halka olsun. Basit olan herhangi sol  $\check{S}$ -modül injektifse  $\check{S}$  ye sol V-halka, ve eğer her yarıbasit sol  $\check{S}$ -modül injektifse  $\check{S}$  ye bir SSI-halka denir ve yarıbasit artin halkalar SSI-halkadır. Bir  $\check{S}$  halkasının noetherian V-halka olması için gerek ve yeter koşul SSI-halka olmasıdır (Alizade ve diğerleri, 2022). Ayrıca yine bir  $\check{S}$  halkasının sol noetherian V-halka olması için gerek ve yeter koşul her sol  $\check{S}$ - modülün parçalanabilir olmasıdır .

Bu durumu ve teorem 4.1.9' u uygulayarak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

4.1.11. *Sonuç*  $\check{S}$  bir SSI-halka olsun. Her sol  $\check{S}$  -modül cr-tümlemiştir.

Şimdi Sonuç 4.1.11 'in tersinin geçerli olmadığını bir örnekle göreceğiz. Bunun için önce aşağıdaki durumlara göz atalım

Küçük modül tanımını tekrar hatırlayalım:  $\tilde{N}$  bir modül olsun  $\tilde{N} \ll E(\tilde{N})$  ise ,  $\tilde{N}$  modülüne küçük modül denir.

4.1.12. Lemma  $\check{S}$  bir halka ve  $\check{Y}$  'de bir küçük  $\check{S}$ -modül olsun.  $\check{\check{S}}$  'nin cr-tümlemiş olduğunu varsayalım. O zaman  $\check{Y}$  parçalanandır.

*İspat* Kabulümüzden ve Teorem 4.1.9' dan ,  $E(\check{Y})$  ,  $\check{Y}$  'nin injektif bürümüdür ve ayrıca cr-tümlenmiştir.  $\check{Y}$  küçük modül olduğundan,  $\check{Y} + E(\check{Y}) = E(\check{Y})$  'dir ve  $\check{Y} \cap E(\check{Y}) = \check{Y}$  parçalanandır.

4.1.13. Önerme  $\check{S}$  'ye halka,  $L$  'ye de cr-tümlemiş  $\check{S}$ -modül diyelim. Bu durumda  $Rad(L)$  parçalanandır.

*İspat*  $Y$ ,  $L$  'nin herhangi bir küçük altmodülü olsun. Lemma 4.1.12 ' den  $Y$  parçalanandır.  $Rad(L)$  'nin  $L$  'nin tüm küçük alt modüllerinin toplamı olması sebebiyle, teorem 3.3.21 (v)' den,  $Rad(L)$  'nin parçalanandır olduğu sonucuna varırız.

Aşağıdaki sonuca dikkat edelim.

4.1.14. Sonuç  $\check{S}$  bir halka ve  $\check{\check{S}}$  cr-tümlemiş olsun. O zaman  $Rad(\check{S})$  parçalanandır.

*İspat* Önerme 4.1.13' den açıktır

Şimdi cr-tümlemiş halkaların bir sınıfını vereceğiz.

4.1.15. Teorem  $\check{S}$  parçalanandır radikali ile bir yarı-yerel halka olsun.  $\check{\check{S}}$  cr-tümlemişdir.

*İspat*  $Rad(\check{S})$  parçalanandır olduğundan,  $Rad(\check{S}) \leq C(\check{\check{S}})$  elde ederiz. Hipotezden  $\frac{\check{S}}{Rad(\check{S})}$  yarıbasittir bu yüzden  $\frac{\check{S}}{C(\check{\check{S}})}$  yarıbasit  $\check{S}$  -modüldür. Teorem 4.1.2' yi uygulayarak,  $\check{\check{S}}$  'in cr-tümlemiş olduğunu elde ederiz.

Şimdi, SSI-halka sınıfına girmeyen bir cr-tümlemiş halka örneği verelim.

4.1.16. Örnek  $p$  bir asal sayı olsun. Şimdi  $\check{S} = \mathbb{Z}_{p^2}$  halkasını gözönüne alalım. Teorem 4.1.15' e göre, yarıbasit modüller parçalanandır olduklarından  $\check{\check{S}}$  ' cr-tümlemişdir. Ancak,  $\check{S}$  bir SSI-halka değildir.

## 5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında cr-tümlenmiş modülleri tanımlayıp temel özelliklerini verdik. Özellikle cr-tümlenmiş halkaların SSI-Halkalardan farklı olduğunu kanıtlamış olduk. Bu çalışmada bahsedilen cr-tümlenmiş halkaların karakterizasyonu incelenebilir ve bu halkaların diğer halka sınıflarıyla ilişkileri araştırılabilir.



## KAYNAKLAR

- Alahmadi, A.N., Alkan, M. and López-Permouth, S. (2010). Poor Modules: The Opposite of Injectivity. *Glasgow Mathematical Journal* , 52, 7–17.
- Alizade, R., Büyükaşık, E. and Durğun, Y. (2016). Small Supplements, Weak Supplements and Proper Classes. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statics*, 45, 649-661.
- Alizade, R., Demirci, Y.M., Nisancı Türkmen, B. and Türkmen, E. (2022). On Rings With One Middle Class of Injectivity Domains. *Mathematical Communications* , 27, 109–126.
- Alizade, R. and Pancar, A. (2016). *Homoloji Cebire Giriş*. Samsun: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları.
- Anderson, F.W. and Fuller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. NewYork: Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 363.
- Bacella, G. (1984). Generalized V -Rings and Von Neumann Regular Rings. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 72, 117-133.
- Byrd, K. A. (1972). Rings Whose Quasi-Injective Modules are Injective. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 33(2), 235–240.
- Büyükaşık, E., Mermut, E. and Özdemir, S. (2010). Rad-supplemented modules. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 124, 157-177 .
- Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory*. Birkhäuser: Frontiers in Mathematics.
- Demirci, Y. M., Türkmen, E. (2022). WSA-Supplements and Proper Classes. *Mathematics* , 10, 2964.
- Dung, N. V., Huynh, D., Smith, P. F. and Wisbauer, R. (1994). *Extending Modules*, No.313 in Putman Research Notes in Mathematics Series, Harlow: Longman
- Durgun, Y. (2021). Sa-Supplemented modules. *Bulletin of the Korean Mathematical Society* ,58, 147-161.
- Durgun Y. (2019). Extended S-supplemented Modules. *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 2833-2841.
- Er, N., López-Permouth and S., Sökmez, N. (2011). Rings Whose Modules Have Maximal or Minimal Injectivity Domains. *Journal of Algebra* , 330, 404–417.
- Goodearl, K. R. (1976). *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*. New York: Vol. 33. CRC Press, 30-36.
- Hungerford, T.W. (1974). *Algebra*. Springer Verlag, 502.

- Kasch, F. (1982). *Modules and rings*. London: Academic Press Inc.
- Kaynar, E., Çalışıcı, E. and Türkmen, E. (2020). SS-supplemented modules, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics* ,69 (1), 473-485.
- Koşan, M.T. (2007).  $\delta$ -Lifting and  $\delta$ -Supplemented Modules. *Algebra Colloquium*, 14(1), 53-60
- Lam, T.Y. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 397
- Lam, T.Y. (2003). *Exercises in Classical Ring Theory*. New-York: Springer-Verlag, 380
- Lomp, C. (1999). On Semilocal Modules and Rings, *Communications in Algebra*, 27(4), 1921-1935.
- Nişancı, Türkmen B. and Türkmen, E. (2020).  $\delta_{ss}$ -Supplemented Modules and Rings. *Analele Stiintifice Ale Universitatii, Ovidius Constanta-Seria Matematica*, 28 (3), 193-216.
- Sharpe, D.W. and Vamos, P. (1972). *Injective Modules*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of module and ring theory*. Gordon and Breach.
- Zhou, Y. (2000). Generalizations of perfect, semiperfect and semiregular rings, *Algebra Colloquium*, 7 (3), 305-318.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı soyadı : Mustafa Mahir Sayıcı

### EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Beykent Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü

Amasya Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Formasyon Eğitimi

Yabancı Diller : İngilizce

### İŞ DENEYİMİ

Ulusal Egemenlik Ortaokulu, İzmit/Kocaeli, 2013-2014

Güneşler Anadolu Lisesi, Adapazarı/Sakarya 2018-2019

Hedef Eğitim Kurumları, Amasya/Merzifon 2020-2022