



**C_2 ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN
GOLDIE EXTENDING
MODÜLLER**

Yüksek Lisans Tezi

Şeyma EROL

Eskişehir 2021

C_2 ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN
GOLDIE EXTENDING
MODÜLLER

Şeyma EROL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ocak 2021

ÖZET

C_2 ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN GOLDIE EXTENDING MODÜLLER

Şeyma EROL

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak 2021

Danışman: Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

(C_2) koşulunu sağlayan extending modüle sürekli modül denir. Bu tezde, sürekli bir modülün genelleştirilmesi olan (C_2) koşulunu sağlayan Goldie extending (G -extending) modüller incelenmiştir. Bu amaçla ön bilgiler kısmında modül teorisinin temel kavramlarına ve teoremlerine yer verilmiştir. Tezin devamında (C_1) , (C_2) , (C_3) koşullarından, Extending (CS) modül, Sürekli (continuous) modül, Goldie extending (G -extending) modül, G^+ -extending modül, Genelleştirilmiş yarı sürekli (GQC) modül ve Internal Exchange özelliği tanımları ve temel teoremleri verilmiştir. (C_2) koşulunu sağlayan bir G -extending modülünün exchange özelliğini sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca M_1 ve M_2 , (C_2) koşulunu sağlayan G -extending modüller olmak üzere, $M_1 \oplus M_2$ 'nin (C_2) koşulunu sağlayan G -extending modül olması için gerek ve yeterli şartın M_i 'nin M_j -ejective ($i \neq j$) olması olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: G -extending, (C_2) , FIEP, GQC.

ABSTRACT

GOLDIE EXTENDING MODULES WITH CONDITION (C_2)

ŞEYMA EROL

Mathematics Program

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, January 2021

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Figen TAKIL MUTLU

A module M is said to be continuous if it is extending with the condition (C_2) .

In this thesis, Goldie extending modules with the condition (C_2) which is a generalization of a continuous modules are examined. For this purpose, the basic concepts and theorems of module theory are included in the preliminary information section. Furthermore, the definition and the basic theorems of (C_1) , (C_2) , (C_3) conditions, Extending (CS) module, Continuous module, Goldie extending (G-extending) module, G^+ - extending module, Generalized Quasi-Continuous (GQC) module and Internal Exchange property are given. Any G-extending module with the condition (C_2) satisfies the exchange property. In addition, it is proven that if M_1 and M_2 are G-extending with the condition (C_2) , then $M = M_1 \oplus M_2$ is G -extending with the condition (C_2) if and only if M_i is M_j -ejective ($i \neq j$).

Keywords: G-extending, (C_2) , FIEP, GQC.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimime başladığım ilk günden itibaren bana rehberlik eden, değerli bilgilerini benimle paylaşan kıymetli danışmanım Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU'ya teşekkürlerimi sunarım.

Tüm bu süreç içerisinde bana her zaman güvenen ve desteklerini esirgemeyen canım annem, babam ve kardeşime sonsuz teşekkürler...

Şeyma EROL
Ocak 2021

.... / /

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Şeyma EROL

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ..	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. ÖN BİLGİLER	1
2. GİRİŞ	10
3. (C_2) ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN GOLDIE EXTENDING MODÜLLER	15
KAYNAKÇA	32
ÖZGEÇMİŞ	34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\in$	: eleman
$\forall$	: her
$\exists$	: En az bir
$\cap$	: kesişim
$\subseteq$	: alt küme
$\cong$	: izomorf
$\leq$	: alt modül
$\leq_d$	: dik toplanan alt modül
$\leq_e$	: essential alt modül
$\leq_c$	: komplement alt modül
$Ker f$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$Im f$	: f homomorfizmasının görüntüsü
$Hom_R(M, N)$	: M den N'ye R-homomorfizmaların kümesi
$End_R(M)$	: M'nin R-homomorfizmalar halkası
$\trianglelefteq$	: ideal
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar halkası

1. ÖN BİLGİLER

Tanım 1.1 R birimi 1_R olan bir halka ve $(M, +)$ değişmeli grup olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : M \times R &\rightarrow M \\ (m, r) &\rightarrow mr \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer her $a, b \in M$ ve her $r, s \in R$ için,

$$\begin{aligned} (a + b).r &= (a.r) + (b.r) \\ a.(r + s) &= (a.r) + (a.s) \\ a.(rs) &= (a.r).s \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa M 'ye bir **sağ R -modül** denir ve M_R ile gösterilir.

Eğer $\forall a \in M$ için $a.1_R = a$ ise M 'ye birimsel sağ R -modül denir.

Bu çalışma boyunca, R birimli bir halka ve M birimsel bir sağ R -modül olarak alınacaktır.

Örnek 1.2 Her M değişmeli grubu $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 1.3 R bir halka ve M bir R -modül olsun. Boş kümeden farklı bir $A \subseteq M$ için A , M üzerindeki işleme göre bir R modül ise A 'ya M 'nin **alt modülü** denir ve $A \leq M$ ile gösterilir.

Örnek 1.4 p asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ dir.

Teorem 1.5 M bir R -modül ve $A \subseteq M$ olsun.

A 'nın M modülünün alt modülü olması için gerek ve yeter koşul,

i) $A \neq \emptyset$

ii) $\forall a_1, a_2 \in A$ ve her $r \in R$ için $a_1 + a_2r \in A$

olmasıdır.

Teorem 1.6 (Modüler Kuralı) M bir R -modül olsun. $A, B, C \leq M$ ve $B \subseteq C$ olsun. Bu durumda,

$$C \cap (A + B) = B + (A \cap C)$$

dir.

Kanıt. $(A \cap C) \leq A$ ve $(A \cap C) \leq C$ olduğundan,

$$B + (A \cap C) \subseteq C \cap (A + B) \quad (*)$$

dir. Tersine, $k \in C \cap (A + B)$ alalım. Bu durumda $k = x + y$ olacak biçimde bir $x \in A$ ve $y \in B$ vardır. Böylece $x = k - y \in A \cap C$ dir. Buradan $k = x + y \in B + (A \cap C)$ olup,

$$C \cap (A + B) \subseteq B + (A \cap C) \quad (**)$$

elde edilir. $(*)$ ve $(**)$ 'dan $C \cap (A + B) = B + (A \cap C)$ olduğu görülür. ■

Tanım 1.7 M bir modül ve $B, B' \leq M_R$ olsun. Eğer $B \cap B' = 0_M$ ve $B + B' = M$ ise M 'ye B ve B' 'nin **dik toplamı** denir ve $M = B \oplus B'$ ile gösterilir. B ve B' 'ye de M 'nin **dik toplananları** denir ve $B, B' \leq_d M$ ile gösterilir.

Örnek 1.8 M bir modül olsun. M ve 0_M alt modülleri M 'nin **dik toplananlarıdır**.

Tanım 1.9 0_M ve kendinden başka **dik toplanana** olmayan bir modüle **ayrıştırılamaz (indecomposable) modül** denir.

Örnek 1.10 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü **ayrıştırılamazdır**.

Tanım 1.11 R bir halka, M ve N iki R -modül olsun. $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu, her $x, y \in M$ ve her $r \in R$ için;

$$1) f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$2) f(xr) = f(x)r$$

koşullarını sağlıyor ise f 'ye M 'den N 'ye **modül homomorfizması** ya da **R -homomorfizma** denir.

Tanım 1.12 Bir $f : A \longrightarrow B$ modül homomorfizmasına,

i) Birebir ise monomorfizma,

ii) Örtten ise epimorfizma ,

iii) Hem birebir hem de örtten ise izomorfizma denir ve $A \cong B$ ile gösterilir.

Tanım 1.13 A ve B iki R -modül olmak üzere $f : A \rightarrow B$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda

$$Ker f = \{a \in A : f(a) = 0_B\}$$

kümesine f 'nin **çekirdeği** denir.

$$Im f = \{f(a) : a \in A\}$$

kümesine de f 'nin **görüntüsü** denir.

Teorem 1.14 (1.İzomorfizma Teoremi)

$f : A \rightarrow B$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda

$$A/Ker(f) \cong Im(f)$$

dır.

Kanıt. $\theta : A/Ker(f) \rightarrow Im(f)$ fonksiyonu için $\theta(a + Ker(f)) = f(a)$ şeklinde tanımlanan bir modül homomorfizması olsun.

$a_1 + Ker(f), a_2 + Ker(f) \in A/Ker(f)$ için;

$$a_1 + Ker(f) = a_2 + Ker(f) \Leftrightarrow a_1 - a_2 \in Ker(f)$$

$$\Leftrightarrow f(a_1 - a_2) = 0_R$$

$$\Leftrightarrow f(a_1) - f(a_2) = 0_R$$

$$\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

$$\Leftrightarrow \theta(a_1 + Ker(f)) = \theta(a_2 + Ker(f))$$

olduğundan θ iyi tanımlı ve birebirdir.

$$Im\theta = \{\theta(a + Ker(f)) : a + Ker(f) \in A/Ker(f)\} = \{f(a) : a \in A\} = Im(f)$$

olduğundan θ birebir ve örten bir fonksiyondur.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \theta((a_1 + Ker(f)) + (a_2 + Ker(f))) &= \theta(a_1 + a_2 + Ker(f)) \\ &= f(a_1 + a_2) \\ &= f(a_1) + f(a_2) \\ &= \theta(a_1 + Ker(f)) + \theta(a_2 + Ker(f)) \end{aligned}$$

ve her $a + Ker(f) \in A/Ker(f)$ ve her $r \in R$ için,

$$\theta(r(a + Ker(f))) = \theta(a_1a_2 + Ker(f)) = f(ar) = f(a)r = \theta(a + Ker(f))r$$

olduğundan θ bir modül homomorfizmasıdır. O halde θ bir izomorfizma olup $A/Ker(f) \cong Im(f)$ elde edilir. ■

Tanım 1.15 M bir R -modül ve $A \leq M$ olsun. Her $0 \neq B \leq M$ için $A \cap B \neq 0_M$ ise A ' ya M de **büyük (essential) alt modül** denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir.

Örnek 1.16 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 'de büyük alt modüldür. $0 \neq U \leq \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ olsun. Bu durumda $\exists 0 \neq \frac{a}{b} \in U$ vardır öyle ki $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0, b \neq 0$ dır. $U \leq \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ olduğundan $a = \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b} \in U$ olup $0 \neq a \in \mathbb{Z} \cap U$ yani $\mathbb{Z} \cap U \neq 0$ dır.

Örnek 1.17 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünde her alt modül büyük alt modüldür. $0 \neq N \leq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ herhangi bir alt modülü olsun. Gösterelim ki, $N \leq_e \mathbb{Z}$ dir. $U \leq \mathbb{Z}$ ve $U \cap N = 0_{\mathbb{Z}}$ olsun. Bu durumda $N = n\mathbb{Z}$ ve $U = m\mathbb{Z}$ olacak biçimde $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ vardır. $U \cap N = 0$ olduğuna göre,

$$nm \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = 0$$

$$\Rightarrow nm = 0$$

$$\Rightarrow n = 0 \text{ ya da } m = 0$$

$$\Rightarrow m = 0$$

$$\Rightarrow m\mathbb{Z} = U = 0$$

dır. O halde $N \leq_e \mathbb{Z}$ dir.

Önerme 1.18 M bir R -modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır;

- i) $A \leq_e M \Leftrightarrow \forall 0 \neq m \in M$ için $A \cap mR \neq 0$
- ii) $K \leq A \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$ dir $\Leftrightarrow K \leq_e A$ ve $A \leq_e M$ dir.
- iii) $A \leq_e M$ ve $K \leq_e M \Rightarrow A \cap K \leq_e K$ dir.
- iv) $A_i \leq_e K_i, (1 \leq i \leq t) \Rightarrow (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t) \leq_e (K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_t)$ dir.
- v) $K \leq A \leq M$ olmak üzere $A/K \leq_e M/K \Rightarrow A \leq_e M$ dir.
- vi) $a \in M$ ve $A \leq M$ olmak üzere $a^{-1}A = \{r \in R | ar \in A\}$ kümesini tanımlayalım. $a^{-1}A \leq R_R$ dir. Ayrıca $A \leq_e M$ ise $a^{-1}A \leq_e R_R$ dir.
- vii) $A_i \leq M_i \leq M$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. $A_i \leq_e M_i (i \in I) \Leftrightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i = M$ dir.
- viii) $f : M \rightarrow A$ homomorfizma ve $B \leq_e A \Rightarrow f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

Kanıt. i) $\Rightarrow$: $A \leq_e M$ ve $0 \neq m \in M$ ise $A \cap mR \neq 0$ dir.

$\Leftarrow$: $0 \neq a \in L \leq M$ olsun. Bu durumda bir $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq ar \in A \cap L$ dir. O halde $A \leq_e M$ dir.

ii) $\Rightarrow$: $K \leq_e M$ ve $0 \neq X \leq A$ olsun. Bu durumda $0 \neq X \leq M$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap X \neq 0$ dir. Her $0 \neq X \leq A$ için $K \cap X \neq 0$ olduğundan $K \leq_e A$ dir.

Şimdi $0 \neq T \leq M$ olsun. Bu durumda $0 \neq K \cap T \leq A \cap T$ dir. Her $0 \neq T \leq M$ için $A \cap T \neq 0$ olduğundan $A \leq_e M$ dir.

$\Leftarrow$: $K \leq_e A$ ve $A \leq_e M$ olsun. $0 \neq Z \leq M$ için $0 \neq A \cap Z \leq A$ dir. $K \leq_e A$ olduğundan $0 \neq K \cap (A \cap Z) = K \cap Z$ dir. Her $0 \neq Z \leq M$ için $K \cap Z \neq 0$ olduğundan $K \leq_e M$ dir.

iii) $A \leq_e M, K \leq M$ ve $0 \neq S \leq K$ olsun. $(A \cap K) \cap S = A \cap S \neq 0$ dir. Her $0 \neq S \leq K$ için $(A \cap K) \cap S \neq 0$ olduğundan $(A \cap K) \leq_e K$ dir.

iv) $t = 2$ için $A_1 \leq_e K_1$ ve $A_2 \leq_e K_2 \Rightarrow (A_1 \cap A_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ olduğunu görelim. $X \leq K_1 \cap K_2$ olsun. Kabul edelim ki $(A_1 \cap A_2) \cap X = 0$ olsun. Bu

durumda,

$$(A_1 \cap A_2) \cap X = A_1 \cap (A_2 \cap X) = 0 \Rightarrow A_2 \cap X = 0 \\ \Rightarrow X = 0$$

bulunur. O halde $(A_1 \cap A_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ dir. Tümevarım yöntemi ile genel durum elde edilir.

Bu özellik sonlu olmayan bir index kümesi için doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünü göz önüne alalım.

$\forall n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ dir. Fakat $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} n\mathbb{Z} = 0 \not\leq_e \mathbb{Z}$ dir.

v) $X \leq M$ ve $X \cap A = 0$ olsun. Eğer $X \leq K$ ise $X \cap A = X = 0$ olur.

Eğer $K < X$ ise $0 \neq \frac{X}{K} \leq \frac{M}{K}$ dir. $X \cap A = 0$ olduğundan $\frac{X}{K} \cap \frac{A}{K} = \bar{0}$ dir. $\frac{A}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{X}{K} = \bar{0}$ yani $X = K$ dir. Bu da $K < X$ olmasıyla çelişir. O halde $A \leq_e M$ dir.

vi) Öncelikle $a^{-1}A \leq R_R$ olduğunu görelim. $0 \in R$ ve $a0 = 0 \in A$ olduğundan $a^{-1}A \neq \emptyset$ dir. $r_1, r_2 \in a^{-1}A$ ve $s \in R$ alalım.

$$a(r_1 - r_2) = ar_1 - ar_2 \in A$$

olduğundan $(r_1 - r_2) \in a^{-1}A$ dir.

$$(ar_1)s = a(r_1s) \in A$$

olduğundan $r_1s \in a^{-1}A$ dir. O halde $a^{-1}A \leq R_R$ dir.

$A \leq_e M$, $a \in M$ ve $0 \neq I \leq R_R$ olsun. Eğer $aI = 0$ ise,

$$I \cap a^{-1}A = I \neq 0$$

dir. Eğer $aI \neq 0$ ise

$$aI \cap A \neq 0$$

dir. (Çünkü $A \leq_e M$). Bu durumda bir $0 \neq r \in I$ vardır ki $ar \in A$ dir.

$$ar \in A \Rightarrow r \in a^{-1}A$$

olduğundan $I \cap a^{-1}A \neq 0$ dir. Sonuç olarak $a^{-1}A \leq_e R_R$ dir.

vii) $\Rightarrow$: Keyfi $0 \neq m \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ alalım.

$m = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_n}$; $m_{i_j} \in M_{i_j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) biçiminde yazabiliriz.
 n ye göre tümevarımla; $0 \neq mr \in \oplus_{i \in I} A_i$ olacak biçimde $r \in R$ olduğunu görelim.

$n = 1$ için açıktır.

$n = k$ için $A_i \leq_e M_i$ ($1 \leq i \leq k$) $\Rightarrow \oplus_{i \in I} A_i \leq_e \oplus_{i \in I} M_i$ doğru olduğunu varsayarak $n = k + 1$ için doğruluğunu görelim; $m' = m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_k}$ için (i) den $0 \neq m's \in A_{i_1} \oplus \dots \oplus A_{i_k}$ olacak biçimde $s \in R$ vardır. Eğer $m_{i_{k+1}}s \in A_{i_{k+1}}$ ise $ms \in \oplus_{i \in I} A_i$ ve $A_{i_{k+1}} \cap (A_{i_1} \oplus \dots \oplus A_{i_k}) = 0$ olduğundan $ms \neq 0$ dır. Eğer $m_{i_{k+1}}s \notin A_{i_{k+1}}$ ise $A_{i_{k+1}} \leq_e M_{i_{k+1}}$ olduğundan (i) den $0 \neq (m_{i_{k+1}}s)t \in A_{i_{k+1}}$ olacak şekilde bir $t \in R$ vardır. O halde $r = st \in R$ için $mr \in \oplus_{i \in I} A_i$ ve $\oplus_{i \in I} A_i$ dik toplam olduğundan $mr \neq 0$ dır. Sonuç olarak $\oplus_{i \in I} A_i \leq_e \oplus_{i \in I} M_i$ dir.

$\Leftarrow$: $\oplus_{i \in I} A_i \leq_e \oplus_{i \in I} M_i$ ve $A_1 \not\leq_e M_1$ olsun.

O halde $0 \neq L_1 \leq M_1$ için $A_1 \cap L_1 = 0$ dır. Bir $l_1 \in (\oplus_{i \in I} A_i) \cap L_1$ alalım. Bu durumda $l_1 = n_1 + \dots + n_n$ olacak biçimde $n_i \in A_i$ vardır.

$l_1 - n_1 = n_2 + \dots + n_n \in M_1 \cap (M_2 \oplus M_3 \oplus \dots \oplus M_n) = 0$ olduğundan

$l_1 = n_1 \in L_1 \cap A_1 = 0$ dır. Buradan $(\oplus_{i \in I} A_i) \cap L_1 = 0$ dır.

$\oplus_{i \in I} A_i \leq_e \oplus_{i \in I} M_i$ ve $L_1 \leq M_1 \leq M$ olduğundan $L_1 = 0$ dır. Bu da $A_1 \not\leq_e M_1$ olmasıyla çelişir. O halde her $i \in I$ için $A_i \leq_e M_i$ dır.

viii) $f : M \rightarrow A$ bir homomorfizma ve $B \leq_e A$ olsun. $f^{-1}(B) \cap U = 0$ olacak biçimde bir $U \leq M$ alalım. $x \in B \cap f(U)$ için $x = f(u)$ olacak biçimde $u \in U$ vardır. $x = f(u) \in B$ olduğundan $u \in U \cap f^{-1}(B) = 0$ dır. Bu durumda $x = f(u) = f(0) = 0$ dır. Yani $B \cap f(U) = 0$ dır. $B \leq_e A$ olduğundan $f(U) = 0$ dır. O halde

$$U \leq \text{Ker} f = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(B)$$

olduğundan $U = f^{-1}(B) \cap U = 0$ dır. ■

Önerme 1.19 M ve N iki R -modül, $f : M \rightarrow N$ bir R -modül izomorfizması olsun. Eğer $A \leq_e B \leq_e M$ ise $f(A) \leq_e f(B)$ dir.

Kanıt. $0 \neq f(b) \in f(B)$ olsun. Bu durumda $b \neq 0$ olup, $A \leq_e B$ olduğundan $0 \neq br \in A$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. f izomorfizma ise aynı zamanda birebirdir. f birebir olduğundan $f(br) \neq 0$ ve $f(br) = f(b)r \in f(A)$ dir. Dolayısıyla $f(A) \leq_e f(B)$ dir. ■

Tanım 1.20 M ve N birer R -modül olmak üzere $f : M \rightarrow N$ bir R modül monomorfizması olsun. Eğer $f(M)$, N 'nin essential alt modülü ise f 'ye essential monomorfizma denir.

Tanım 1.21 M bir R -modül ve $A \leq M$ olsun. $A \cap B = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir B alt modülüne A 'nın M deki **tümleyeni (komplementi)** denir.

Örnek 1.22 F bir cisim ve $M_R = (F \oplus F)_F$ olsun.

$B = (0, 1)F = \{(0, f) | f \in F\} \leq M_R$ alalım.

$C = (x, 1)F, (x \in F)$ olmak üzere C, B alt modülünün M_R 'deki bir tümleyenidir.

Önerme 1.23 M bir R -modül ve $X \leq M$ olsun. $Y \leq M$, X 'in bir tümleyeni ise $X \oplus Y \leq_e M$ dir.

Kanıt. $X \cap Y = 0$ olduğundan $X + Y = X \oplus Y \leq M$ dir. $Z \leq M$ ve $(X \oplus Y) \cap Z = 0$ olsun. Bu durumda $(X \oplus Y) + Z = (X \oplus Y) \oplus Z$ dir. Böylece $X \cap (Y \oplus Z) = 0$ olur. Y, X ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $Y \oplus Z = Y$ olmalıdır. $Y \cap Z = 0$ olduğundan $Z = 0$ bulunur. Dolayısıyla $X \oplus Y \leq_e M$ dir. ■

Tanım 1.24 G bir grup olmak üzere, her $g \in G$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $g = n.a$ olacak biçimde $a \in G$ varsa G 'ye **bölünebilir (divisible) grup** denir.

Örnek 1.25 $\mathbb{Q}$ bölünebilir gruptur.

Örnek 1.26 $\mathbb{Z}$ bölünebilir grup değildir. Çünkü $2 = 3.a$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{Z}$ yoktur.

Tanım 1.27 G bir grup ve

$T(G) = \{g \in G \mid ng = 0_G, n \in \mathbb{Z}^+\} \leq G$ olsun. Bu alt gruba G 'nin **burulmalı** (*torsion*) alt grubu denir.

Tanım 1.28

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & M \\ \varphi \downarrow & \swarrow \phi & \\ A & & \end{array}$$

A ve M birer R -modül olsun. Eğer $\forall N \leq M$ ve her bir $\varphi : N \rightarrow A$ homomorfizması için $\phi|_N = \varphi$ olacak biçimde bir $\phi : M \rightarrow A$ homomorfizması varsa A ya **M -injektif modül** denir.

2. GİRİŞ

M bir R -modül olsun. (C_1) , (C_2) ve (C_3) koşulları aşağıdaki gibi tanımlansın. (C_1) M 'nin her alt modülü M 'nin bir dik toplananında essential olarak kapsanır.

(C_2) M modülünün bir dik toplananına izomorf olan alt modülü de bir dik toplanandır.

(C_3) M modülünün $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak biçimde her M_1 ve M_2 dik toplanan alt modülleri için $M_1 \oplus M_2$ de M 'nin bir dik toplananıdır.

Önerme 2.1 M modülü (C_2) koşulunu sağlıyor ise (C_3) koşulunu da sağlar.

Kanıt. A ile B , M 'nin dik toplananları ve $A \cap B = 0$ olsun. O halde bir $A' \leq M$ için $M = A \oplus A'$ dür. $\pi : M \rightarrow A'$ izdüşüm olsun. $\pi(a + a') = a$, $(a \in A, a' \in A')$ olarak tanımlansın. $A \cap B = 0$ olduğundan $\pi(B) \cong B$ ve $\pi(B) \leq A'$ dür. (C_2) koşulundan $\pi(B)$, M 'nin bir dik toplananıdır. O halde $M = \pi(B) \oplus B'$ olacak biçimde $B' \leq M$ vardır. Böylece $A' = \pi(B) \oplus (A' \cap B')$ ve $M = A \oplus \pi(B) \oplus (A' \cap B')$ dir. Buradan $A \oplus \pi(B)$, M nin bir dik toplananıdır. Oysa $A \oplus B = A \oplus \pi(B)$ dir. O halde $A \oplus B$, M nin bir dik toplananıdır. Böylece M , (C_3) koşulunda sağlar. ■

Tanım 2.2 (C_1) koşulunu sağlayan bir M modülüne **extending (ya da CS) modül** denir.

Tanım 2.3 (C_1) ve (C_2) koşulunu sağlayan bir M modülüne **sürekli (continuous) modül** denir.

Tanım 2.4 (C_1) ve (C_3) koşulunu sağlayan bir M modülüne **yarı sürekli (quasi-continuous) modül** denir.

Önerme 2.5 M bir R -modül ve $A \leq M$ olsun. Bir $\varphi : A \rightarrow B$ homomorfizma için $\langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle = \{a - \varphi(a) \mid a \in A\} \leq M$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle$, M 'nin bir alt modülüdür.

Kanıt. $\langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle = K$ ve $a - \varphi(a) = x$ olsun. $(M, +)$ değişmeli grup ve birimi 0_M dir. φ homomorfizma olduğundan $\varphi(0_M) = 0_M$ dir. $0_M \in A$ için $0 - \varphi(0) = 0_M \in K$ dir. Şimdi $x, y \in K$ için $x + yr \in K$ olduğunu gösterelim. her $r \in R$ için $x = a - \varphi(a)$ ve $y = b - \varphi(b)$ olacak biçimde $a, b \in A$ alalım.

$$\begin{aligned} x + yr &= a - \varphi(a) + (b - \varphi(b))r \\ &= a - \varphi(a) + br - \varphi(b)r \\ &= a - \varphi(a) + br - \varphi(br) \\ &= a + br - (\varphi(a) + \varphi(br)) \\ &= a + br - \varphi(a + br) \end{aligned}$$

$A \leq M$ olduğundan $a, b \in A$ için $a + br \in A$ olup $K = \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle \leq M$ elde edilir. ■

Önerme 2.6 M bir R -modül ve $M = A \oplus B$ olsun. $\varphi : A \rightarrow B$ homomorfizma olmak üzere $M = \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle \oplus B$ dir.

Kanıt. $\varphi : A \rightarrow B$, bir homomorfizma olsun. Öncelikle,

$$M = \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle + B$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} m \in M &\Rightarrow m = a + b \\ &\Rightarrow m = a - \varphi(a) + \varphi(a) + b \\ &\Rightarrow m = (a - \varphi(a)) + (\varphi(a) + b) \in \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle + B \end{aligned}$$

olduğundan $M \subseteq \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle + B$ dir. Böylece, $M = \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle + B$ elde edilir. Şimdi, $\langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle \cap B = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} x \in \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle \cap B &\Rightarrow x \in \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle \text{ ve } x \in B \\ &\Rightarrow x = a - \varphi(a), a \in A \\ &\Rightarrow x + \varphi(a) = a \in A \cap B = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \\ &\Rightarrow x = a - \varphi(a) \\ &\Rightarrow x = 0 - \varphi(0) \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

O halde $\langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle \cap B = 0$ dir. Sonuç olarak $M = \langle A \xrightarrow{\varphi} B \rangle \oplus B$ dir. ■

Tanım 2.7 M bir R -modül olsun. Eğer her $X \leq M$ alt modülü için $X' \leq M$ ve $A \leq_d M$ var öyle ki $X' \leq_e X$ ve $X' \leq_e A$ oluyorsa M modülüne **Goldie Extending Modül (kısaca, G -extending)** denir.

Tanım 2.8 M bir R -modül olsun. Eğer M modülünün bir D direk toplananı aynı zamanda G -extending ise M modülüne **G^+ -Extending Modül** denir.

Tanım 2.9 M bir R -modül olsun. $X_1 \cap X_2 = 0$ özelliğini sağlayan her $X_1, X_2 \leq M$ alt modülleri için $X'_i \leq_e X_i$ ve $X'_i \leq A_i$ olacak biçimde bir $M = A_1 \oplus A_2$ ayrışımı bulunabiliyorsa M modülüne **Genelleştirilmiş yarı-sürekli (Generalized Quasi-Continuos) (kısaca, GQC) Modül** denir.

Örnek 2.10 $M = \mathbb{Z}$ olmak üzere, $X_1 = 0$ ve $X_2 = 2\mathbb{Z}$ modüllerini göz önüne alalım. $X'_1 = 0 \leq_e 0$ ve $X'_2 = 4\mathbb{Z} \leq_e 2\mathbb{Z}$ büyük alt modülleridir. Dolayısıyla $X'_1 = 0 \leq 0 = A_1$ ve $X'_2 = 4\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} = A_2$ alt modülleri vardır. Bu alt modülleri, $M = \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus 0$ şeklinde yazabiliriz. O halde $\mathbb{Z}$ - GQC Modüldür.

Önerme 2.11 Her GQC modül bir G -extending modüldür.

Kanıt. M bir GQC modül ve $X \leq M$ olsun. $X' \leq_e A$ olacak biçimde bir $X' \leq_e X$ ve $A \leq_d M$ olduğunu gösterelim. Y, X' in bir tümleyeni olsun. O halde $Y \cap X = 0$ ve $Y \oplus X \leq_e M$ koşulu sağlanır. Kabulden, $X' \leq_e X, Y' \leq_e Y$ ve $X' \leq A, Y' \leq B$ olmak üzere $M = A \oplus B$ ayrışımı vardır. $Y' \leq B$ ve $A \leq A \Rightarrow Y' \cap A \leq A \cap B = 0$ olduğunda $Y' \cap A = 0$ dir. $X' \leq X$ ve $Y' \leq Y \Rightarrow X' + Y' \leq_e X + Y$ dir. $X' + Y' \leq_e X + Y$ ve $A \leq_e A \Rightarrow (X' + Y') \cap A \leq_e (X + Y) \cap A$ olur. $X' = X' \oplus (Y' \cap A) = (X' \oplus Y') \cap A \leq_e (X + Y) \cap A \leq_e M \cap A = A$ olduğuna göre $X' \leq_e A$ dir. ■

Önerme 2.12 M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) M G -extending modüldür.
- 2) Her $X \leq M$ alt modülü için $X \cap D \leq_e X$ ve $X \cap D \leq_e D$ olacak şekilde M modülünün bir D direk toplananı bulunabilir.

Kanıt. 1) $\Rightarrow$ 2): $X \leq M$ olsun. Kabulden $X' \leq_e A$ olacak şekilde bir $X' \leq_e X$ ve $A \leq_d M$ vardır. Şimdi $X \cap A \leq_e A$ ve $X \cap A \leq_e X$ olduğunu gösterelim. $X' \leq_e X$ ve $X' \leq_e A \Rightarrow X' \leq_e X \cap A \leq A$ dır. $X' \leq_e A$ olduğundan $X \cap A \leq_e A$ elde edilir. Ayrıca $X' \leq A$ ve $X' \leq_e X \cap A \leq X$ ve $X' \leq_e X$ olduğundan $X \cap A \leq_e X$ elde edilir.

2) $\Rightarrow$ 1): $X \leq M$ olsun. Kabulden $X \cap D \leq_e X$ ve $X \cap D \leq_e D$ olacak biçimde bir $D \leq_d M$ vardır. $X' = X \cap D$ diyelim. Bu durumda $X' \leq_e X$ ve $X' \leq_e D$ olur. ■

Önerme 2.13 *Abelyen bir grubun injektif $\mathbb{Z}$ -modül olması için gerek ve yeter şart grubun bölünebilir (divisible) olmasıdır.*

Kanıt. $\Leftarrow$) $\mathbb{Z}$ nin ideallerinin $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n\mathbb{Z}$ şeklinde temel idealler olduğunu biliyoruz. D bölünebilir ve $f : n\mathbb{Z} \rightarrow D$ bir homomorfizma ise $nx = f(n)$ olacak şekilde $x \in D$ vardır.

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z} &\rightarrow D \\ 1 &\mapsto x \end{aligned}$$

ile tanımlayalım. h nin bir homomorfizma olduğu ve f nin genişlemesi olduğu açıktır. D injektiftir.

$\Rightarrow$) D bir injektif $\mathbb{Z}$ -modül ve $y \in D, 0 \neq n \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\begin{aligned} h : n\mathbb{Z} &\rightarrow D \\ n &\mapsto y \end{aligned}$$

homomorfizması olsun. D injektif modül olduğu için,

$$\begin{array}{ccc} 0 & \dashrightarrow & n\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \\ & & \downarrow f \quad \swarrow h \\ & & D \end{array}$$

diyagram değişmeli olacak şekilde $h : \mathbb{Z} \rightarrow D$ homomorfizması vardır. $x = h(1)$ ise $nx = nh(1) = h(n) = f(n) = y$ olur. Buradan D 'nin bölünebilir olduğu görülür. ■

Önerme 2.14 M_1 ve M_2 sürekli modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M 'nin sürekli olması için gerekli ve yeterli şart M_i 'nin M_j -injektif ($i \neq j$) olmasıdır.

Örnek 2.15 (1, Example 3.20) p bir asal sayı olmak üzere $M = \mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$ -modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Q}$ değişmeli ve bölünebilir bir grup olduğundan injektiftir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -ejektif ve G -extendingdir. Diğer yandan, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ simple olduğundan $\mathbb{Q}$ -ejektif ve G -extendingtir. Böylece, [1, Corollary 3.3] den M nin G -extending olduğu görülür.

Ancak sürekli (continuous) değildir. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $n \mapsto n+p\mathbb{Z}$ dönüşümünü göz önüne alırsak,

$$\begin{array}{ccc} 2\mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Q} \\ f \downarrow & \nearrow h=0 & \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & & \end{array}$$

$h \circ i = f$ olacak biçimde bir $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ yoktur. Çünkü $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ dir. Buradan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ modülü $\mathbb{Q}$ -injektif değildir. Böylece Önerme 2.14'den M modülü sürekli değildir.

Tanım 2.16 $\{M_i \mid i \in I\}$ R -modüllerin bir ailesi ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Her $X \leq_d M$ için $M = X \oplus (\bigoplus \overline{M_i})$ olacak şekilde $\overline{M_i} \subseteq M_i$ ($i \in I$) alt modülleri varsa M modülüne **Exchangeable** denir.

$M = \bigoplus M_i$ (sonlu) dik toplamı exchangeable ise M modülü **Internal Exchange Özelliğine (kısaca IEP) (Finite Internal Exchange Özelliğine (kısaca FIEP))** sahiptir denir.

Örnek 2.17 $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p^{\infty})$ olsun. Her p asal sayısı için $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ uniform olup ayrıştırılamazdır. Böylece her sonlu $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}(p^{\infty})$ toplamının bir dik toplananı $X = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}(p^{\infty})$, $m \leq n, m \in \mathbb{N}$ biçimindedir. Bundan dolayı $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}(p^{\infty})$ sonlu dik toplamı exchangeable olduğundan M modülü internal exchange özelliğine sahiptir.

3. (C_2) ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN GOLDIE EXTENDING MODÜLLER

Yardımcı Teorem 3.1 *M bir R-modül olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.*

- 1) *M, (C_2) koşulunu sağlar.*
- 2) *$A, B \leq_d M$ olmak üzere $M = A \oplus B$ için $f : A \rightarrow B$ essential monomorfizma ise f bir epimorfizmadır.*

Kanıt. $\Rightarrow$: M modülü (C_2) koşulunu sağlasın ve $A, B \leq_d M$ olsun. O halde $M = A \oplus A'$ ve $M = B \oplus B'$ şeklinde yazılabilir. $f : A \rightarrow B$ bir essential monomorfizma olsun. Bu durumda $f(A) \leq_e B$ dir. Şimdi f homomorfizmasının örten olduğunu gösterelim. $\text{Ker } f = 0$ ve 1. İzomorfizma Teoreminden $A = A/\text{Ker } f \cong f(A)$ dir. Kabulden, $f(A) \leq_d M$ olup $M = f(A) \oplus K$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır.

Modüler kuralından $B = B \cap M = B \cap (f(A) \oplus K) = f(A) \oplus (B \cap K)$ eşitliği vardır. $f(A) \leq_e B$ olduğundan $B \cap K = 0$ olup $B = f(A)$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $A \leq_d M$ olsun. $f : A \rightarrow M$ ye bir monomorfizma dönüşümü olduğundan ve 1. İzomorfizma Teoreminden $A/\text{Ker } f = A \cong f(A)$ olur. $f(A) \leq M$ ve M G -extending olduğundan bir $X' \leq_e f(A)$ ve $M_1 \leq_d M$ vardır öyle ki $X' \leq_e M_1$ dir. $M_1 \leq_d M$ olduğundan $M = M_1 \oplus M_2$ olacak biçimde bir $M_2 \leq M$ vardır. $X' \leq_e M_1$ olduğundan $X' \oplus M_2 \leq_e M_1 \oplus M_2 = M$ ve $X' \leq_e f(A)$ olduğundan $X' \oplus M_2 \leq_e f(A) \oplus M_2 \leq M$ dir. O halde $f(A) \oplus M_2 \leq_e M$ olur.

Şimdi gösterelim ki $f(A) \cap M_2 = 0$ dir. $0 = X' \cap M_2 \leq_e f(A) \cap M_2$ olduğundan $f(A) \cap M_2 = 0$ dir. $p : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $p|_{f(A)} : f(A) \rightarrow M_1$ bir monomorfizma dönüşümüdür. Şimdi $p(f(A)) \leq_e M_1$ olduğunu gösterelim. $p(f(A)) \cap K = 0$ ve $K \leq M_1$ olsun.

$$\begin{aligned} p(X') \cap K \leq_e p(f(A)) \cap K = 0 &\Rightarrow p(X') \cap K = 0 \\ &\Rightarrow X' \cap K = 0 \\ &\Rightarrow K = 0 \end{aligned}$$

O zaman pf essential monomorfizmadır. Kabulden, pf dönüşümünün epi-morfizma olduğunu biliyoruz. O halde pf izomorfizmadır. Buradan $f(A) = p(f(A)) = (pf)(A) = M_1$ olup $M = M_1 \oplus M_2 = f(A) \oplus M_2$ elde edilir. ■

Tanım 3.2

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & B \\ & & \downarrow f & \nearrow g & \\ & & A & & \end{array}$$

A ve B , R -modüller olsun. Her $X \leq B$ ve $f : X \rightarrow A$ homomorfizması için $X' \leq_e X$ ve $g|_{X'} = f|_{X'}$ olacak biçimde $g : B \rightarrow A$ bir homomorfizması varsa, A **ya** B -**ejektif modül** denir.

Önerme 3.3 A modülü B -ejektif olsun. Bu durumda $\forall A' \leq_d A$, $B' \leq_d B$ için A' alt modülü B' -ejektiftir.

Kanıt. $A' \leq_d A$ ve $B' \leq_d B$ olsun. $f : X' \rightarrow A$ olacak şekilde $X' \leq B'$ olduğunu kabul edelim. $\pi_1 : A' \rightarrow A = A' \oplus A''$, $g : B \rightarrow A$ ve

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i} & B \\ & & \downarrow f & \nearrow h & \\ & & A' & \nearrow g & \\ & & \uparrow \pi_1 & & \\ & & A & & \end{array}$$

dönüşümleri vardır.

A , B -ejektif olduğundan $X'' \leq_e X'$ ve $g : B \rightarrow A$ iken $g|_{X''} = (iof)|_{X''}$ olur.

$h = \pi_1 \circ g$ diyelim. $h|_{X''} = f|_{X''}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} g|_{X''} = (iof)|_{X''} &\Rightarrow g(X'') = (iof)(X'') \\ &\Rightarrow \pi_1(g(X'')) = \pi_1((iof)(X'')) \\ &\Rightarrow h(X'') = (\pi_1 \circ i)(f(X'')) \\ &\Rightarrow h(X'') = 1_A(f(X'')) \\ &\Rightarrow h(X'') = f(X'') \\ &\Rightarrow h|_{X''} = f|_{X''} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak A' , B' -ejektiftir. ■

Önerme 3.4 $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_1 'in , M_2 -ejektif olması için gerek ve yeter şart $K \cap M_1 = 0$ özelliğindeki her $K \leq M$ için $M = M_1 \oplus M_3$ ve $K \cap M_3 \leq_e K$ olacak biçimde bir $M_3 \leq M$ olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$: M_1, M_2 -ejektif olsun. $\pi_i : M \rightarrow M_i (i = 1, 2)$ leri kanonik izdüşümler olarak alalım. Bu durumda $\pi_2 : K \rightarrow M_2$ dönüşümü birebir olur. $\pi_2(K) = \overline{K}$ diyelim. M_1 M_2 -ejektif olduğundan bir $X \leq_e \overline{K}$ ve $h : M_2 \rightarrow M_1$ homomorfizması vardır öyle ki $h|_X = \pi_1 \pi_2^{-1}|_X$ dir. $M_3 = \{h(y) + y : y \in M_2\}$ diyelim. Bir $m \in M$ için $m_i \in M_i$ 'ler vardır öyle ki

$$m = m_1 + m_2 = (m_1 - h(m_2)) + (h(m_2) + m_2) \in M_1 + M_3$$

dür. Böylece $M = M_1 + M_3$ dür. $y \in M_1 \cap M_3$ alalım. Bu durumda $y = y_1 = h(y_2) + y_2$ olacak biçimde $y_i \in M_i$ vardır. Buradan $y_1 - h(y_2) = y_2 \in M_1 \cap M_2 = 0$ olup $y = y_1 = h(0) + 0 = 0$ dan $M_1 \cap M_3 = 0$ bulunur. Böylece $M = M_1 \oplus M_3$ elde edilir.

Şimdi $0 \neq k \in K$ alalım. Buradan $k = \pi_1(k) + \pi_2(k)$ olur. $K \cap M_1 = 0$ olduğundan $\pi_2(k) \neq 0$ dır. $X \leq_e \pi_2(K) = \overline{K}$ olduğundan $0 \neq \pi_2(k)r = \pi_2(kr) \in X$ olacak biçimde $r \in R$ vardır. Böylece $0 \neq kr = \pi_1(kr) + \pi_2(kr)$ olur. Fakat $\pi_1(kr) = h(\pi_2(kr))$ olduğundan $0 \neq kr = h(\pi_2(kr)) + \pi_2(kr) \in K \cap M_3$ dir. Böylece $K \cap M_3 \leq_e K$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $K \cap M_1 = 0$ özelliğindeki her $K \leq M$ için $M = M_1 \oplus M_3$ ve $K \cap M_3 \leq_e K$ olacak biçimde bir $M_3 \leq M$ olduğunu kabul edelim. $L \leq M_2$ ve $\varphi : L \rightarrow M_1$ bir homomorfizma olsun. $H = \{-\varphi(x) + x : x \in L\}$ diyelim. Bu durumda $H \leq M$ ve $H \cap M_1 = 0$ olur. Varsayım gereği, $M = M_1 \oplus H'$ ve $H' \cap L \leq_e L$ olacak biçimde bir $H' \leq M$ vardır. $\pi : M \rightarrow M_1$ projeksiyon dönüşümü olsun. $x \in H' \cap L$, $\pi(x) = \pi(\varphi(x) + (-\varphi(x) + x)) = \pi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ bulunur. Dolayısıyla $\pi|_{H' \cap L} = \varphi|_{H' \cap L}$ olur. Böylece M_1, M_2 -ejektifdir. ■

Önerme 3.5 M_1 ve M_2 G -extending modül olsunlar. Buna göre M_1, M_2 -ejektif ise $M = M_1 \oplus M_2$ modülü G -extending modüldür.

Kanıt. Y , M nin herhangi bir alt modülü olsun. Bu durumda ya $Y \cap M_1 = 0$ ya da $Y \cap M_1 \neq 0$ dır. İlk olarak $Y \cap M_1 = 0$ olsun. Önerme 3.4'den en az bir $M_3 \leq M$ vardır öyle ki $M = M_1 \oplus M_3$ ve $Y \cap M_3 \leq_e Y$ dir. $M = M_1 \oplus M_2 = M_1 \oplus M_3$, $M/M_1 \cong M_2$ ve $M/M_1 \cong M_3$ olduğundan $M_2 \cong M_3$ tür. Böylece M_2 G -extending olduğundan M_3 G -extendingdir. $Y \cap M_3 \leq M_3$ olduğundan $X \leq_e Y \cap M_3$ ve $X \leq_e D$ olacak biçimde $X \leq M_3$ ve $D \leq_d M_3$ vardır. Ayrıca $M_3 \leq_d M$ olduğundan $D \leq_d M$ dir. $Y \cap M_3 \leq_e Y$ ve $X \leq_e Y \cap M_3$ olduğundan $X \leq_e Y \cap M_3 \leq_e Y$ şeklinde yazılabilir. Buradan $X \leq_e Y$ olarak bulunur. Sonuç olarak M G -extending modüldür.

Şimdi $Y \cap M_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda $Y \cap M_1$ 'in Y 'de bir K tümleyeni vardır ve $(Y \cap M_1) \oplus K \leq_e Y$ dir. Böylece $(Y \cap M_1) \cap K = K \cap M_1 = 0$ dır. Yine Önerme 3.4'den $K \cap M_4 \leq_e K$ olacak şekilde en az bir $M_4 \leq_d M$ vardır. O halde $M = M_1 \oplus M_2 = M_1 \oplus M_3 = M_1 \oplus M_4$ şeklinde yazılabilir. $M_2 \cong M_4$ olduğundan M_4 de G -extendingdir. $K \cap M_1 \leq M_4$ olduğundan en az bir $X_2 \leq M_4$ ve $D_2 \leq_d M_4$ vardır öyle ki $X_2 \leq_e K \cap M_4$ ve $X_2 \leq_e D_2$ dir. Ayrıca M_1 de G -extending ve $Y \cap M_1 \leq M_1$ olduğundan en az bir $X_1 \leq M_1$ ve $D \leq_d M_1$ vardır öyle ki $X_1 \leq_e Y \cap M_1$ ve $X_1 \leq_e D_1$ dir. Diğer yandan $X_1 \leq_e Y \cap M_1$ ve $X_2 \leq_e K \cap M_4 \leq_e K$ olduğundan $X_1 \oplus X_2 \leq_e (Y \cap M_1) \oplus K \leq_e Y$ ve $X_1 \oplus X_2 \leq_e D_1 \oplus D_2 \leq_d M_1 \oplus M_4 = M$ dir. Sonuç olarak M G -extending modüldür. ■

Yardımcı Teorem 3.6 [5, Theorem 2.13] $M = M_1 \oplus M_2$ olmak üzere M_1 ve M_2 $FIEP$ özelliğini sağlayan GQC modüller olsun. M 'nin $FIEP$ özelliğini sağlayan GQC modül olması için gerek ve yeter koşul M_i 'nin M_j -ejektif ($i \neq j$) ve $M = M_1 \oplus M_2$ 'nin exchangeable olmasıdır.

Yardımcı Teorem 3.7 [6, Theorem 3.4] M bir R -modül olsun. Buna göre,
(1) M , $FIEP$ özelliğini sağlayan G -extending modül ise M 'nin herhangi direk toplananı da $FIEP$ özelliğini sağlayan G -extending modüldür.
(2) M 'nin (C_3) koşulunu sağlayan G -extending modül olması için gerek ve yeter şart M 'nin $FIEP$ özelliğini sağlayan GQC modül olmasıdır.

Kanıt. $A' \leq_e A$, $B' \leq_e B$ ve $f : A' \rightarrow B'$ bir izomorfizma olsun. Gösterelim ki, $A \cong B$ dir. M modülü (C_2) koşulunu sağladığından (C_3) koşulunu da sağlar. Bu durumda kabulümüzden $A \oplus B \leq_d M$ dir. $M = A \oplus B \oplus X$ biçiminde yazılabilir. Buradan $A \oplus B = M_1$ ve $X = M_2$ olarak adlandırabiliriz. Yardımcı Teorem 3.7 (2)'den M , *FIEP* özelliğini sağlayan *GQC* modüldür ve yine Yardımcı Teorem 3.7 (1)'den M_i 'ler, *FIEP* özelliğini sağlayan *G-extending* modüllerdir. Diğer yandan, M (C_3) özelliğini sağladığından her bir $M_i \leq_d M$ lerde (C_3) koşulunu sağlar. Böylece Yardımcı Teorem 3.7 (2)'den M_i 'ler, *FIEP* özelliğini sağlayan *GQC* modüllerdir. Ayrıca Yardımcı Teorem 3.6'den $i \neq j$ olmak üzere M_i , M_j -ejektif olup B 'nin A -ejektif olduğu elde edilir. Böylece bir $X \leq_e A'$ ve bir $g : A \rightarrow B$ homomorfizması vardır öyle ki $f|_X = g|_X$ dir.

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A \\ & & \downarrow f & & \searrow g \\ & & B' & & \\ & & \downarrow i & & \\ & & B & & \end{array}$$

Ayrıca, $X \leq_e A' \leq_e A$ olduğundan $X \leq_e A$ olur. Şimdi g dönüşümünün bir monomorfizma olduğunu görelim. $0 \neq a \in \text{Ker } g$ alalım. Bu durumda $g(a) = 0$ dir. $0 \neq a \in A$ ve $X \leq_e A$ olduğundan $0 \neq ar \in X$ olacak biçimde en az bir $r \neq 0 \in R$ vardır. Diğer taraftan, $ar \in X$ olduğundan $0 = g(ar) = f(ar)$ olur. f izomorfizma olduğundan da $ar = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $\text{Ker } g = 0$ olup g 'nin monomorfizma olduğu elde edilir. Son olarak, g 'nin essential monomorfizma, yani $g(A) \leq_e B$ olduğunu görelim. $X \leq_e A' \leq_e A$ iken $f(x) \leq_e f(A')$ olduğunu biliyoruz. $U \leq B$ ve $g(A) \cap U = 0$ olsun.

$$\begin{aligned}
g(X) \cap U \subseteq g(A) \cap U = 0 &\Rightarrow g(X) \cap U \subseteq g(A') \cap U \subseteq g(A) \cap U = 0 \\
&\Rightarrow g(X) \cap U = 0, g(A') \cap U = 0 \\
&\Rightarrow f(X) \cap U = 0 \\
&\Rightarrow 0 = f(X) \cap U \leq_e f(A') \cap U \\
&\Rightarrow f(A') \cap U = 0 \\
&\Rightarrow B' \cap U = 0 \\
(B' \leq_e B) &\Rightarrow U = 0
\end{aligned}$$

Buradan g 'nin essential monomorfizma olduğu görülür. Yardımcı Teorem 3.1'den g bir izomorfizma olup $A \cong B$ elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 3.8 $M = A \oplus B, X \leq M$ ve $p : M \rightarrow A$ projeksiyon dönüşümü olsun. Eğer $X' \leq_e A$ olacak biçimde bir $X' \leq_e X$ var ise $p|_X$ bir monomorfizma ve $p(X) \leq_e A$ dır.

Kanıt. $M = A \oplus B, X' \leq_e X$ ve $X' \leq_e A$ olsun. Bu durumda $X' \cap B \leq_e A \cap B = 0$ dır. Buradan $X' \cap B = 0$ olur. Diğer yandan, $X' \cap B \leq_e X \cap B$ olduğundan $X \cap B = 0$ olur. Böylece, $p : M = A \oplus B \rightarrow A$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $p|_X$ monomorfizmadır. Sonuç olarak, $X' \leq_e X \leq_e A$ olup $p(X) \leq_e p(A) = A$ elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 3.9 [9, Lemma 2.1] P bir R -modül olsun. Her bir M_i extending modüller olmak üzere, $P = \bigoplus_I M_i$ olsun. $I = \{0, 1, 2, 3, \dots, w, w + 1, \dots\}$ iyi sıralı indeks kümesini ve M nin bir X alt modülünü göz önüne alalım. Bu durumda $T(i) \leq_e T(i)^* \leq_d M_i$ alt modülleri, $M_i = T(i)^* \oplus N_i$ ayrışmaları ve bir $\bigoplus_I X_i \leq_e X$ alt modülü vardır öyle ki aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (1) $X(0) = T(0) \leq_e T(0)^*$
 - (2) $X(k) \leq T(k) \oplus \sum_{i \neq k} N_i, k \in I$
 - (3) $\sigma(X(k)) = T(k) \leq_e T(k)^*, X(k) \cong \sigma(X(k)), (\sigma(X(k))), k \in I$
- $P = \bigoplus_I T(i)^* \oplus (\bigoplus_I N_i) \rightarrow \bigoplus_I T(i)^*$ projeksiyon dönüşümdür.
- (4) $X \cong \sigma(X), (\sigma|_{X(k)})$

[9, Lemma 2.1]'in ispatında, "Her ne kadar M_i 'ler extending olsa da keyfi bir $X \leq M_i$ alt modülü için, X ' in bir dik toplananda essential olarak kapsanması

yerine, X 'in bir alt modülünün bir dik toplananda essential olarak kapsandığı alındığı için M_i 'ler extending yerine G -extending alınabilir." Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Yardımcı Teorem 3.10 *M bir modül, her bir M_i , G^+ -extending olmak üzere $M = \bigoplus_I M_i$ ve $X \leq M$ olsun. $I = \{0, 1, 2, 3, \dots, w, w+1, \dots\}$ iyi sıralı indeks kümesini göz önüne alalım. $T(i) \leq_e T(i)^* \leq_d M_i$ alt modülleri, $M_i = T(i)^* \oplus N_i$ ayrışmaları ve $\bigoplus_I X_i \leq_e X$ alt modülü vardır. Öyle ki aşağıdaki özellikler sağlanır:*

$$(1) X(0) = T(0)$$

$$(2) X(k) \leq T(k) \oplus \sum_{i \in I} N_i, k \in I$$

$$(3) \sigma : M = (\bigoplus_I T(i)^*) \oplus (\bigoplus_I N(i)) \rightarrow \bigoplus_I T(i)^*$$

projeksiyon dönüşümü olmak üzere her $k \in I$ için $\sigma(X(k)) = T(k)$ ve $X(k) \cong \sigma(X(k))$ dır.

Önerme 3.11 [3, 11.8] *M bir R -modül olsun. $M = X \oplus Y$ ve $X \oplus N = \bigoplus A_i$ iken $X \oplus N = X \oplus (\bigoplus B_i)$, $(B_i \subseteq A_i)$ biçiminde yazılabilir.*

Kanıt. Kabulden $X \oplus N = \bigoplus A_i$ vardır.

$$Y \oplus X \oplus N = Y \oplus (\bigoplus A_i) \Rightarrow M + N = (Y \oplus A_j) \oplus (\bigoplus_{i \neq j} A_i) \text{ olur.}$$

M exchange propertyi sağladığından

$$M \oplus N = M \oplus C \oplus (\bigoplus_{i \neq j} B_i), C \subseteq Y \oplus A_j, B_i \leq A_i \text{ olarak yazılabilir.}$$

$$Y \subseteq Y \oplus C \subseteq Y \oplus A_j, (C \subseteq Y \oplus A_j) \text{ olup [3, Lemma 11.2]'den } Y \oplus C = Y \oplus ((Y \oplus C) \cap A_j) \text{ biçiminde yazılabilir.}$$

$$X \oplus Y \oplus C = X \oplus Y \oplus ((Y \oplus C) \cap A_j)$$

$$M \oplus C = X \oplus Y \oplus ((Y \oplus C) \cap A_j)$$

$$= M \oplus ((Y \oplus C) \cap A_j)$$

$$= M \oplus B_j$$

$$M \oplus C \oplus (\bigoplus_{i \neq j} B_i) = M \oplus B_j \oplus (\bigoplus_{i \neq j} B_i)$$

$$M \oplus N = M \oplus (\bigoplus B_i)$$

eşitliğinin varlığından söz edebiliriz.

Ayrıca, $X \leq X \oplus N = \oplus A_i$ ve $B_i \leq A_i \Rightarrow \oplus B_i \leq \oplus A_i$ olduğundan

$X \oplus (\oplus_{i \in I} B_i) \subseteq \oplus_{i \in I} A_i$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} \oplus A_i \cap (M + N) &= \oplus A_i \cap (M \oplus (\oplus B_i)) \\ &= \oplus A_i \cap (X \oplus Y \oplus (\oplus B_i)) \\ &= (X \oplus (\oplus B_i)) + (\oplus A_i \cap Y) \end{aligned}$$

eşitliğini buluruz.

Modüler kuralından, $\oplus A_i \cap (M + N) = N + (M \cap (\oplus A_i))$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} M + (M \cap (\oplus A_i)) &= M \cap (X \oplus N) \\ &= X \oplus (M \cap N) \end{aligned}$$

eşitliğinde $M \cap N = 0$ dir.

Diğer taraftan, $(\oplus A_i \cap Y) = (X \oplus N) \cap Y$ eşitliğini göz önüne alırsak $N \cap Y \leq M \cap Y = 0$ olduğundan $N \cap Y = 0$ olur.

O halde $N \oplus X = (X \oplus (\oplus B_i))$ dir. ■

Tanım 3.12 M bir modül olsun. Bir (Sonlu) I index kümesi ve N ve A_i keyfi modülleri için $M \oplus N = \oplus_I A_i$ iken $B_i \subseteq A_i$ ($i \in I$) alt modülleri için $M \oplus N = M \oplus (\oplus_I B_i)$ oluyorsa M modülü **(sonlu) değişim özelliğine ((finite) exchange property) sahiptir** denir.

Önerme 3.13 $M = X \oplus Y$ olsun. M 'nin exchange özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart X ve Y 'nin exchange özelliğine sahip olmasıdır.

Kanıt. X ve Y 'nin exchange özelliğine sahip olduğunu varsayalım. $A = M \oplus N = \oplus_{i \in I} A_i$ olsun. Böylece $A = X \oplus Y \oplus N = \oplus_{i \in I} A_i$ olup, Y exchange özelliğine sahip olduğundan, $B_i \subseteq A_i$ olmak üzere $A = X \oplus Y \oplus N = Y \oplus (\oplus B_i)$ olarak yazılabilir. X exchange özelliğine sahip olduğundan, $C_i \leq B_i \leq A_i$ olmak üzere $M = X \oplus (Y \oplus N) = X \oplus (Y \oplus (\oplus C_i)) = M \oplus (\oplus C_i)$ olur. Böylece M 'nin exchange özelliğine sahip olduğu görülür.

Tersine, $M = X \oplus Y$ exchange özelliğine sahip ve $X' \cong X$ olmak üzere $A = X' \oplus N = \oplus A_i$ olsun. $M \oplus N = X \oplus Y \oplus N \cong A \oplus Y = Y \oplus (\oplus_{i \in I} A_i) =$

$(Y \oplus A_j) \oplus (\oplus_{i \neq j} A_i)$ olup M exchange özelliğine sahip olduğundan $C \leq Y \oplus A_j$ ve $B_i \subseteq A_i, (i \neq j)$ alt modülleri vardır ve $B = M' \oplus C \oplus (\oplus_{i \neq j} B_i)$ şeklinde yazılabilir. [3, Lemma 11.2]'den $Y \subseteq Y \oplus C \subseteq Y \oplus A_j$ olmak üzere $Y \oplus C = Y \oplus B_j$ olur. Böylece $B_j = (Y \oplus C) \cap A_j$ dir. Buradan $M' \oplus C = (X' \oplus Y) \oplus C = X' \oplus Y \oplus B_j$ dir. Bu ifadeyi yerine yazarsak $B = X' \oplus Y \oplus B_j \oplus (\oplus_{i \neq j} B_i) = X' \oplus Y \oplus (\oplus_I B_i)$ dir. $X \oplus (\oplus_I B_i) \subseteq A$ olmak üzere modüler kuralından $A \cap (Y + (X' \oplus (\oplus_I B_i))) = (A \cap Y) + (X' \oplus (\oplus_I B_i))$ dir. $A = X' \oplus (\oplus_I B_i)$ dir. Dolayısıyla X exchange özelliğini sağlar. Benzer şekilde Y 'nin exchange özelliğini sağladığını gösterebiliriz. ■

Teorem 3.14 (C_2) özelliğini sağlayan herhangi bir G -extending modül exchange özelliğine sahiptir.

Kanıt. $M, (C_2)$ özelliğini sağlayan bir modül olsun. $P = M \oplus N = \oplus_I A_i$ ve $A_i \cong^{\varepsilon_i} M$ olsun. $M \oplus (\oplus_I N_i)$ olacak biçimde en az bir $N_i \subseteq A_i$ olduğunu göstermeliyiz. M, G -extending ve $A_i \cong M$ olduğundan A_i lerde G -extendingdir. Yardımcı Teorem 3.9'den $A_i = T_i \oplus N_i$ ayrışmaları ve $\oplus X_i \leq_e M$ alt modülleri vardır öyle ki aşağıdakiler özellikler sağlanır:

- (1) $\sigma : P = \oplus(A_i) = \oplus(T_i \oplus N_i) = (\oplus T_i) \oplus (\oplus N_i) \rightarrow \oplus T_i$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $\sigma(X(0)) = X(0) = T(0)$ 'dir.
- (2) Her $k \in I$ için $X(k) \leq T(k) \oplus (\oplus_{i < k} N_i)$ 'dir.
- (3) Her $k \in I$ için $X(k) \cong \sigma(X_k) \leq_e T_k$

M G -extending ve $X(i) \leq M$ olduğundan $Y_i \leq_e M_i$ olacak biçimde en az bir $Y_i \leq_e X(i)$ ve $M_i \leq_d M$ vardır. $P_\alpha : P = (\oplus T_i) \oplus (\oplus N_i) \rightarrow \oplus T_\alpha$ projeksiyon dönüşümü olsun. (3) numaralı özellikten $X(k) \cong \sigma(X_k) \leq_e T_k$ olduğunu hatırlayalım. Böylece $\sigma : X(k) \rightarrow \sigma(X_k)$ dönüşümü bir izomorfizma olup $\sigma|_{Y_\alpha} : Y_\alpha \rightarrow \sigma(X(\alpha))$ dönüşümü monomorfizmadır. Buradan $P_{\alpha|M_\alpha}$ bir monomorfizmadır. Gerçekten, $x \in P_{\alpha|M_\alpha}$ alırsak, $x \in M_\alpha, x \in (\oplus_I T_i) \oplus (\oplus_I N_i)$ ve $P_\alpha(x) = 0$ dir. Buradan $x \notin T_\alpha$ dir. Fakat $x \in M_\alpha \cap ((\oplus_{k \neq \alpha} T_k) \oplus (\oplus_I N_i))$ olup $x \in M_\alpha \cap (\oplus_{k \neq \alpha} T_k)$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca $Y_\alpha \cap (M_\alpha \cap (\oplus_{k \neq \alpha} T_k)) =$

0 ve $Y_\alpha \leq_e M_\alpha$ olduğundan $M_\alpha \cap (\oplus_{k \neq \alpha} T_k) = 0$ olmalıdır. O halde $x = 0$ elde ederiz. (2) numaralı şarttan $Y_\alpha \leq T_\alpha \oplus (\oplus_{i < \alpha} N_i)$ olup $P_\alpha(Y_\alpha) = \sigma(Y_\alpha)$ dır.

Diğer yandan $Y_\alpha \leq_e X_\alpha$ olduğundan $\sigma(Y_\alpha) \leq_e \sigma(X_\alpha) = T_\alpha$ olur. Böylece

$$\sigma(Y_\alpha) = P_\alpha(Y_\alpha) \leq P_\alpha(M_\alpha) \leq T_\alpha \quad (*)$$

olup $P_\alpha(M_\alpha) \leq_e T_\alpha$ elde edilir. Böylece $\varepsilon_\alpha : A_\alpha \rightarrow M$ izomorfizma dönüşümleri olmak üzere $\varepsilon_\alpha(P_\alpha(M_\alpha)) \leq_e \varepsilon_\alpha(T_\alpha)$ elde edilir. $\varepsilon_\alpha P_{\alpha|M_\alpha} : M_\alpha \rightarrow M$ olduğundan, $\varepsilon_\alpha P_{\alpha|M_\alpha} : M_\alpha \rightarrow \varepsilon_\alpha(T_\alpha)$ dır. Böylece Yardımcı Teorem 3.1 ve $\varepsilon_\alpha(P_\alpha(M_\alpha)) = (\varepsilon_\alpha P_\alpha)(M_\alpha) = \varepsilon_\alpha(T_\alpha)$ eşitliğinden $\varepsilon_\alpha P_{\alpha|M_\alpha}$ örtendir. Sonuç olarak, $P_{\alpha|M_\alpha}$ hem örten hem de bire-bir olduğundan bir izomorfizmadır.

$\pi_\alpha : P = (\oplus_I T_i) \oplus (\oplus_I N_i) \rightarrow \oplus_{i < \alpha} N_i$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $f_\alpha = -\pi_\alpha(P_{\alpha|M_\alpha})^{-1} : T_\alpha \rightarrow \oplus_{i < \alpha} N_i$ olsun. f_α örtendir. (*) dan $P_\alpha(Y_\alpha) \leq_e P_\alpha(M_\alpha) = T_\alpha$ olduğundan $Y_\alpha \leq_e T_\alpha \rightarrow^{f_\alpha} \oplus_{i < \alpha} N_i \geq \{t_\alpha - f_\alpha(t_\alpha) | t_\alpha \in T_\alpha\}$ dır. Ayrıca,

$$Y_\alpha \leq_e T_\alpha \oplus (\oplus_{i < \alpha} N_i) \leq T_\alpha \oplus (\oplus_I N_i) \leq \langle T_\alpha \rightarrow^{f_\alpha} \oplus_{i < \alpha} N_i \rangle \oplus (\oplus_I N_i) \leq P$$

olup $P = (\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle) \oplus (\oplus_I N_i)$ ve

$$\oplus_I Y_i \leq_e (\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle) \text{ ve } \oplus_I Y_i \leq_e M$$

dir.

$q : P = (\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle) \oplus (\oplus_I N_i) \rightarrow \oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle$ ve $\pi_M : P = M \oplus N \rightarrow M$ projeksiyon dönüşümleri olsunlar. Bu durumda $\pi_M |_{\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle} \circ q |_M : M \rightarrow M$ bir homomorfizmadır. İlk olarak $\pi_M |_{\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle} \circ q |_M$ nin örten olduğunu gösterelim. Bunun için $\pi_M |_{\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle} \circ q |_M$ 'nin büyük monomorfizma olduğunu gösterelim.

$\oplus_I Y_i \leq_e \oplus_I X_i \leq_e M$ olduğundan $\oplus_I Y_i \leq_e M$ olur. $\oplus_I Y_i \leq_e M \cap (\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle) \leq M$ ve $\oplus_I Y_i \leq_e M$ olduğundan da $M \cap (\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle) \leq_e M$ elde edilir. Böylece $\pi_M |_{\oplus_I \langle T_i \rightarrow^{f_i} \oplus_{k < i} N_k \rangle} \circ q |_M$ büyük monomorfizma olup Yardımcı Teorem 3.1'den örtendir.

Şimdi $q|_M$ nin birebir olduğunu gösterelim. $q : P \rightarrow \bigoplus_I \langle T_i \xrightarrow{f_i} \bigoplus_{k < i} N_k \rangle$ projeksiyon dönüşümü olsun. Yardımcı Teorem 3.8 den $\bigoplus Y_i \leq_e M$ ve $\bigoplus Y_i \leq_e \bigoplus_I \langle T_i \xrightarrow{f_i} \bigoplus_{k < i} N_k \rangle$ olduğundan $q|_M$ birebir olur.

Ayrıca Yardımcı Teorem 3.8 den $\pi_M|_{\bigoplus_I \langle T_i \xrightarrow{f_i} \bigoplus_{k < i} N_k \rangle}$ da birebirdir.

Özetlersek,

- $\pi_M|_{\bigoplus_I \langle T_i \xrightarrow{f_i} \bigoplus_{k < i} N_k \rangle} \circ q|_M$ örten
- $q|_M$ birebir
- $\pi_M|_{\bigoplus_I \langle T_i \xrightarrow{f_i} \bigoplus_{k < i} N_k \rangle}$ birebirdir.

O halde $q|_M$ örtendir.

$\pi_M|_{\bigoplus_I \langle T_i \xrightarrow{f_i} \bigoplus_{k < i} N_k \rangle} = f$ ve $q|_M = g$ olarak tanımlayalım. $f \circ g$ örten, g birebir ve f birebir olduğundan g örtendir. Gerçekten de, $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow A$ ve $f \circ g : C \rightarrow B$ olsun. $a \in A$ için $f(a) \in B$ dir. $f \circ g$ örten olduğundan $(f \circ g)(c) = f(a)$ olacak biçimde en az bir $c \in C$ vardır. f birebir olduğundan $a = g(c)$ dir. O halde $q|_M = g$ örtendir.

Sonuç olarak, $q|_M$ birebir ve örten olduğundan izomorfizmadır.

$q : P = (\bigoplus_I \langle T_i \xrightarrow{f_i} \bigoplus_{k < i} N_k \rangle) \oplus (\bigoplus_I N_i) \rightarrow \bigoplus_I \langle T_i \xrightarrow{f_i} \bigoplus_{k < i} N_k \rangle$ olup $q|_M$ birebir ve örten olduğundan $P = M \oplus (\bigoplus_I N_i)$ şeklinde yazılabilir. ■

Teorem 3.15 M_1 ve M_2 , (C_2) koşulunu sağlayan G -extending modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda M modülünün (C_2) şartını sağlayan G -extending modül olması için gerek ve yeter koşul M_i 'nin M_j -ejektif ($i \neq j$) olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$: M , (C_2) koşulunu sağlayan G -extending modül olsun. Bu durumda M , (C_3) koşulunu da sağlar. Böylece Yardımcı Teorem 3.7(2)'den M modülü $FIEP$ özelliğini sağlayan bir GQC modüldür. Diğer yandan Yardımcı Teorem 3.7(1)'den M_1 ve M_2 dik toplananları da $FIEP$ özelliğini sağlayan bir GQC modüllerdir. Sonuç olarak, Yardımcı Teorem 3.6'den M_1 , M_2 -ejektif ya da M_2 , M_1 -ejektiftir.

$\Leftarrow$: M_1 ile M_2 modülleri C_2 koşulunu sağlayan G -extending modüller ve M_i , M_j -ejektif ($i \neq j$) olsun. Teorem 3.14'dan M_1 ve M_2 modülleri $FIEP$ özelliğini

sağlarlar. Böylece $M = M_1 \oplus M_2$ 'de *FIEP* özelliğini sağlar. Yardımcı Teorem 3.6 ve Yardımcı Teorem 3.7'den M modülü (C_3) koşulunu sağlayan *G*-extending modüldür. A ve B , M modülünün dik toplananları, $f : A \rightarrow B$ bir monomorfizma ve $f(A) \leq_e B$ olsun. Yardımcı Teorem 3.1'den f 'nin örten dönüşüm olduğunu gösterelim.

$M = M_1 \oplus M_2$ exchangeable olduğundan, $T_i \subseteq M_i$ olmak üzere M 'nin $M = B \oplus T_1 \oplus T_2$ biçiminde bir ayrışımı vardır. Böylece $N_i \leq_d M_i$ olup

$M_i = N_i \oplus T_i$ şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$M = M_1 \oplus M_2 = B \oplus T_1 \oplus T_2 = N_1 \oplus N_2 \oplus T_1 \oplus T_2$$

olup $B \cong N_1 \oplus N_2$ dir. $\tau : N_1 \oplus N_2 \rightarrow B$ bir izomorfizma dönüşümü olsun.

$B_i = \tau(N_i)$ ve $B'_i = f(A) \cap B_i$ ($i = 1, 2$) olsun. Bu durumda $B = \tau(N_1 \oplus N_2) = \tau(N_1) \oplus \tau(N_2) = B_1 \oplus B_2$ olur. Ayrıca $f(A) \leq_e B$ olduğundan $B'_i = f(A) \cap B_i \leq_e B \cap B_i = B_i$ dir. Şimdi $B'_1 \oplus B'_2 \leq_e f(A)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $C \leq f(A)$ olmak üzere $[(f(A) \cap B_1) \oplus (f(A) \cap B_2)] \cap C = 0$ olsun. $(B'_1 \oplus B'_2) \cap C = 0$ ise $C = 0$ olur. Buradan $(B'_1 \oplus B'_2) \leq_e f(A)$ olur. $f(A) \leq_e B$ iken $C \leq f(A)$ ise $C \leq B$ olur. Şimdi $C \neq 0$ olsun. $f(A) \leq_e B$ olduğundan

$0 \leq_e [(f(A) \cap B_1) \oplus (f(A) \cap B_2)] \cap C \leq_e [(B \cap B_1) \oplus (B \cap B_2)] \cap C = (B_1 \oplus B_2) \cap C = C$ olup $C = 0$ bulunur. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $(B'_1 \oplus B'_2) \leq_e f(A)$ dır. Diğer yandan, $A'_i = f^{-1}(B'_i)$ alırsak,

$$\begin{aligned} B'_1 \oplus B'_2 \leq_e f(A) &\Rightarrow f^{-1}(B'_1 \oplus B'_2) \leq_e f^{-1}(f(A)) = A \\ &\Rightarrow f^{-1}(B'_1) \oplus f^{-1}(B'_2) \leq_e A \\ &\Rightarrow f^{-1}(f(A) \cap B_1) \oplus f^{-1}(f(A) \cap B_2) \leq_e A \\ &\Rightarrow [f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(B_1)] \oplus [f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(B_2)] \leq_e A \\ &\Rightarrow (A \cap f^{-1}(B_1)) \oplus (A \cap f^{-1}(B_2)) = (A'_1 \oplus A'_2) \leq_e A \end{aligned}$$

olur.

A GQC modül olduğundan, $A''_i \leq_e A'_i$ alt modülleri ve $A''_i \leq_e A_i$ olacak biçimde bir $A = A_1 \oplus A_2$ ayrışımı vardır. Böylece $f(A''_i) \leq_e f(A_i)$ elde edilir.

Ayrıca $B'_i \leq_e B_i$ olduğundan $A''_i \leq_e A'_i = f^{-1}(B'_i) \leq_e f^{-1}(B_i)$ dir. Buradan $f(A''_i) \leq_e B_i$ elde edilir.

$p_i : B = B_1 \oplus B_2 \rightarrow B_i$ ($i = 1, 2$) projeksiyon dönüşümleri olsunlar. Yardımcı Teorem 3.8'den $p_i \upharpoonright_{f(A_i)}$ monomorfizma ve $f(A_i) \leq B_i$ olduğundan $p_i(f(A_i)) \leq_e B_i$ dir.

M FIEP olduğundan $T_i \leq_d M_i$ dik toplananları ve $\epsilon : T_1 \oplus T_2 \rightarrow A_1$ izomorfizma dönüşümü vardır. $p_1 f \epsilon|_{T_i} : T_i \rightarrow B_1$ bir monomorfizma ve $p_1 f \epsilon(T_1) \oplus p_1 f \epsilon(T_2) = p_1 f \epsilon(T_1 \oplus T_2) = p_1 f(A_1) \leq_e B_1$ ve Yardımcı Teorem 3.7 (1)'den $B_1 \leq_d M$ de G -extending olduğundan $X_i \leq_e p_1 f \epsilon(T_i)$ vardır öyle ki $X_1 \leq_e \overline{B_1}$ ve $X_2 \leq_e \overline{\overline{B_1}}$ olmak üzere $B_1 = \overline{B_1} \oplus \overline{\overline{B_1}}$ dir. $\overline{N_1} = \tau^{-1}(\overline{B_1})$ ve $\overline{\overline{N_1}} = \tau^{-1}(\overline{\overline{B_1}})$ olsun. Bu durumda

$$N_1 = \tau^{-1}(B_1) = \tau^{-1}(\overline{B_1} \oplus \overline{\overline{B_1}}) = \tau^{-1}(\overline{B_1}) \oplus \tau^{-1}(\overline{\overline{B_1}}) = \overline{N_1} \oplus \overline{\overline{N_1}}$$

dir. $q_1 : B_1 = \overline{B_1} \oplus \overline{\overline{B_1}} \rightarrow \overline{B_1}$ projeksiyon dönüşümü olsun. Yardımcı Teorem 3.8'den $q_1|_{p_1 f \epsilon(T_1)}$ monomorfizma ve $q_1(p_1 f \epsilon(T_1)) \leq_e \overline{B_1}$ dir. $g_1 = \tau^{-1}q_1 p_1 f \epsilon|_{T_1}$ olarak tanımlayalım. g_1 bir monomorfizmadır. Ayrıca $X_1 \leq_e p_1 f \epsilon(T_1)$ olduğundan $\tau^{-1}q_1(X_1) \leq_e g_1(T_1) \leq \overline{N_1}$ olur. $X_1 \leq_e \overline{B_1}$ olduğundan $q_1(X_1) \leq_e q_1(\overline{B_1}) = \overline{B_1}$ olup $\tau^{-1}(q_1(X_1)) \leq_e \tau^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{N_1}$ olur. Böylece $g_1(T_1) \leq_e \overline{N_1}$ elde edilir.

g_1 bir büyük monomorfizma ve Yardımcı Teorem 3.1'den g_1 epimorfizmadır. O halde g izomorfizmadır. g_1 izomorfizma ve $p_1 f \epsilon(T_1)$ izomorfizma olduğundan $q_1 \upharpoonright_{p_1 f \epsilon(T_1)} : p_1 f \epsilon(T_1) \rightarrow \overline{B_1}$ de bir izomorfizma dönüşümüdür. Böylece $B_1 = p_1 f \epsilon(T_1) \oplus \overline{\overline{B_1}}$ dir.

Şimdi $q_1 : B_1 = p_1 f \epsilon(T_1) \oplus \overline{\overline{B_1}} \rightarrow \overline{\overline{B_1}}$ projeksiyon dönüşümü olsun. Yardımcı Teorem 3.8'den $B_1 = \overline{B_1} \oplus \overline{\overline{B_1}} = p_1 f \epsilon(T_1) \oplus \overline{\overline{B_1}}$, $p_1 f \epsilon(T_2) \leq B$ ve $q_2 : B_1 \rightarrow \overline{\overline{B_1}}$ dönüşümü vardır. $X_2 \leq_e p_1 f \epsilon(T_2)$ öyle ki $X_2 \leq_e \overline{\overline{B_1}}$ dir. $q_2 \upharpoonright_{p_1 f \epsilon(T_2)}$ monomorfizma ve $q_2(p_1 f \epsilon(T_2)) \leq_e \overline{\overline{B_1}}$ dir. $g_2 = \tau^{-1}q_2 p_1 f \epsilon|_{T_2}$ olarak tanımlayalım. g_2 bir monomorfizmadır. Ayrıca

$$\begin{aligned} X_2 \leq_e p_1 f \epsilon(T_2) &\Rightarrow q_2(X_2) \leq_e q_2(p_1 f \epsilon(T_2)) \\ &\Rightarrow \tau^{-1}q_2(X_2) \leq_e \tau^{-1}q_2(p_1 f \epsilon(T_2)) \\ &\Rightarrow \tau^{-1}q_2(X_2) \leq_e \tau^{-1}q_2(T_2) \leq \overline{\overline{N_1}} \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} X_2 \leq_e \overline{\overline{B_1}} &\Rightarrow q_2(X_2) \leq_e q_2(\overline{\overline{B_1}}) = \overline{\overline{B_1}} \\ &\Rightarrow \tau^{-1}q_2(X_2) \leq_e \tau^{-1}(\overline{\overline{B_1}}) = \overline{\overline{N_1}} \end{aligned}$$

dir. O halde $g_2(T_2) \leq_e \overline{\overline{N_1}}$ olur.

M G -extending, $T_2 \leq_d M$ ve $\overline{\overline{N_1}} \leq_d M$ olacak biçimde $T_2 \cap \overline{\overline{N_1}} = 0$ olsun. O halde $T_2 \oplus \overline{\overline{N_1}} \leq_d M$ vardır. Buradan M , GQC ve $FIEP$ yi sağlar.

Yardımcı Teorem 3.6 ve Yardımcı Teorem 3.7'den T_2 , $\overline{\overline{N_1}}$ -ejektiftir. Böylece $Y_1 \leq_e g_2(T_2)$ olacak biçimde bir Y_1 alt modülü ve $h : \overline{\overline{N_1}} \rightarrow T_2$ homomorfizma dönüşümü vardır öyleki $h|_{Y_1} = g_2^{-1}|_{Y_1}$ dir.

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \longrightarrow & g_2(T_2) \xrightarrow{i} \overline{\overline{N_1}} \\ & & \downarrow g_2^{-1} \\ & & T_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow h \end{array}$$

Diğer yandan, $Y_1 \leq_e g_2(T_2)$ ve $g_2(T_2) \leq_e \overline{\overline{N_1}}$ olduğundan $Y_1 \leq_e \overline{\overline{N_1}}$ dir. Şimdi h 'nin bir monomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için h 'nin bir monomorfizma olmadığını kabul edelim. Bu durumda bir $x \in \text{Ker}(h)$ vardır. $x \in \overline{\overline{N_1}}$ ve $h(x) = 0$ dir. $Y_1 \leq_e \overline{\overline{N_1}}$ olduğundan $xR \cap Y_1 \neq 0$ olup en az bir $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq xr \in xR \cap Y_1$ dir. Böylece $0 = h(x)r = h(xr) = g_2^{-1}(xr)$ eşitliğinden $xr = g_2(0) = 0$ elde edilirki bu kabulümüzle çelişir. O halde olduğundan h bir monomorfizmadır.

$f : M \rightarrow N$ homomorfizma ve $B \leq_e N$ ise $f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

$g_2 : T_2 \rightarrow \overline{\overline{N_1}}$ ve $Y_1 \leq_e \overline{\overline{N_1}}$ olduğundan $h(Y_1) = g_2^{-1}(Y_1) \leq_e T_2$ dir.

$h(Y_1) \leq h(\overline{\overline{N_1}}) \leq T_2$ ve $h(Y_1) \leq_e T_2$ olduğundan $h(\overline{\overline{N_1}}) \leq_e T_2$ olur.

$hg_2 : T_2 \rightarrow T_2$ bir monomorfizma dönüşümüdür.

$g_2(T_2) \leq_e \overline{\overline{N_1}} \Rightarrow h(g_2(T_2)) \leq_e h(\overline{\overline{N_1}})$ dir.

$h(g_2(T_2)) \leq_e h(\overline{\overline{N_1}})$ ve $h(\overline{\overline{N_1}}) \leq_e T_2$ olduğundan $h(g_2(T_2)) \leq_e T_2$ dir. T_2 , C_2 özelliğini sağlar ve $hg_2 : T_2 \rightarrow T_2$ büyük monomorfizma olduğundan Yardımcı Teorem 3.1'den hg_2 örten olup hg_2 izomorfizmadır. $g_2 : T_2 \rightarrow \overline{\overline{N_1}}$ ve $n_1 \in \overline{\overline{N_1}}$ olsun. $h(n_1) \in h(\overline{\overline{N_1}})$ ve $h(\overline{\overline{N_1}}) \leq_e T_2$ olduğundan $h(n_1) \in T_2$ dir.

$$\begin{aligned} hg_2 : T_2 &\rightarrow T_2 \\ x &\mapsto h(n_1) \end{aligned}$$

izomorfizma olup örten olduğundan $h(n_1) = h(g_2)$ olacak biçimde $x \in T_2$ vardır. h homomorfizma olduğundan $n_1 = g_2(x)$ dir. O halde g_2 örtendir. $g_2 = \tau^{-1}q_2p_1f\epsilon|_{T_2}$ eşitliğinde g_2 ve τ^{-1} izomorfizma olduğundan $q_2p_1f\epsilon|_{T_2}$ de izomorfizmadır. Böylece,

$$\begin{aligned} B_1 &= p_1f\epsilon(T_1) \oplus \overline{\overline{B_1}} = p_1f\epsilon(T_1) \oplus p_1f\epsilon(T_2) \\ &= p_1(f\epsilon((T_1) \oplus (T_2))) \\ &= p_1(f(A_1)) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. $p_1|_{f(A_1)}$ izomorfizma olduğundan $B = f(A_1) \oplus B_2$ dir.

M FIEP olduğundan $T_i \leq_d M_i$ dik toplananları ve $\epsilon : T_1 \oplus T_2 \rightarrow A_2$ izomorfizma dönüşümü vardır. $p_1f\epsilon|_{T_i} : T_i \rightarrow B_2$ bir monomorfizma ve $p_1f\epsilon(T_1) \oplus p_1f\epsilon(T_2) = p_1f\epsilon(T_1 \oplus T_2) = p_1f(A_2) \leq_e B_2$ ve Yardımcı Teorem 3.7 (1)'den $B_2 \leq_d M$ de G -extending olduğundan $X_i \leq_e p_1f\epsilon(T_i)$ vardır öyle ki $X_1 \leq_e \overline{B_2}$ ve $X_2 \leq_e \overline{\overline{B_2}}$ olmak üzere $B_2 = \overline{B_2} \oplus \overline{\overline{B_2}}$ dir. $\overline{N_2} = \tau^{-1}(\overline{B_2})$ ve $\overline{\overline{N_2}} = \tau^{-1}(\overline{\overline{B_2}})$ olsun. Bu durumda

$$N_2 = \tau^{-1}(B_2) = \tau^{-1}(\overline{B_2} \oplus \overline{\overline{B_2}}) = \tau^{-1}(\overline{B_2}) \oplus \tau^{-1}(\overline{\overline{B_2}}) = \overline{N_2} \oplus \overline{\overline{N_2}}$$

dir. $\overline{q_1} : B_2 = \overline{B_2} \oplus \overline{\overline{B_2}} \rightarrow \overline{B_2}$ projeksiyon dönüşümü olsun. Yardımcı Teorem 3.8'den $\overline{q_1}|_{p_1f\epsilon(T_2)}$ monomorfizma ve $\overline{q_1}(p_1f\epsilon(T_2)) \leq_e \overline{B_2}$ dir. $\overline{g_1} = \tau^{-1}\overline{q_1}p_1f\epsilon|_{T_2}$ olarak tanımlayalım. $\overline{g_1}$ bir monomorfizmadır. Ayrıca $X_2 \leq_e p_1f\epsilon(T_2)$ olduğundan $\tau^{-1}\overline{q_1}(X_2) \leq_e \overline{g_1}(T_2) \leq \overline{N_2}$ olur.

$X_2 \leq_e \overline{B_2}$ olduğundan $\overline{q_1}(X_2) \leq_e \overline{q_1}(\overline{B_2}) = \overline{B_2}$ olup $\tau^{-1}(\overline{q_1}(X_2)) \leq_e \tau^{-1}(\overline{B_2}) = \overline{N_2}$ olur. Böylece $\overline{g_1}(T_2) \leq_e \overline{N_2}$ elde edilir.

$\overline{g_1}$ bir büyük monomorfizma ve Yardımcı Teorem 3.1'den $\overline{g_1}$ epimorfizmadır. O halde $\overline{g_1}$ izomorfizmadır. $\overline{g_1}$ izomorfizma ve $p_1f\epsilon(T_2)$ izomorfizma olduğundan $\overline{q_1}|_{p_1f\epsilon(T_2)} : p_1f\epsilon(T_2) \rightarrow \overline{B_2}$ de bir izomorfizma dönüşümüdür. Böylece $B_2 = p_1f\epsilon(T_2) \oplus \overline{\overline{B_2}}$ dir.

Şimdi $\overline{q_1} : B_2 = p_1f\epsilon(T_2) \oplus \overline{\overline{B_2}} \rightarrow \overline{\overline{B_2}}$ projeksiyon dönüşümü olsun. Yardımcı Teorem 3.8'den $B_2 = \overline{B_2} \oplus \overline{\overline{B_2}} = p_1f\epsilon(T_2) \oplus \overline{\overline{B_2}}$, $p_1f\epsilon(T_2) \leq B$ ve $\overline{q_2} : B_2 \rightarrow \overline{\overline{B_2}}$ dönüşümü vardır. $X_2 \leq_e p_1f\epsilon(T_2)$ öyle ki $X_2 \leq_e \overline{\overline{B_2}}$ dir. $\overline{q_2}|_{p_1f\epsilon(T_2)}$ monomorfizma ve $\overline{q_2}(p_1f\epsilon(T_2)) \leq_e \overline{\overline{B_2}}$ dir. $\overline{g_2} = \tau^{-1}\overline{q_2}p_1f\epsilon|_{T_2}$ olarak tanımlayalım. $\overline{g_2}$ bir monomorfizmadır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
X_2 \leq_e p_1 f \epsilon(T_2) &\Rightarrow \overline{q_2}(X_2) \leq_e \overline{q_2}(p_1 f \epsilon(T_2)) \\
&\Rightarrow \tau^{-1} \overline{q_2}(X_2) \leq_e \tau^{-1} \overline{q_2}(p_1 f \epsilon(T_2)) \\
&\Rightarrow \tau^{-1} \overline{q_2}(X_2) \leq_e \tau^{-1} \overline{q_2}(T_2) \leq \overline{\overline{N_2}}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
X_2 \leq_e \overline{\overline{B_2}} &\Rightarrow \overline{q_2}(X_2) \leq_e \overline{q_2}(\overline{\overline{B_2}}) = \overline{\overline{B_2}} \\
&\Rightarrow \tau^{-1} \overline{q_2}(X_2) \leq_e \tau^{-1}(\overline{\overline{B_2}}) = \overline{\overline{N_2}}
\end{aligned}$$

dir. O halde $\overline{g_2}(T_2) \leq_e \overline{\overline{N_2}}$ olur.

M G -extending, $T_2 \leq_d M$ ve $\overline{\overline{N_2}} \leq_d M$ olacak biçimde $T_2 \cap \overline{\overline{N_2}} = 0$ olsun. O halde $T_2 \oplus \overline{\overline{N_2}} \leq_d M$ vardır. Buradan M , GQC ve $FIEP$ yi sağlar.

Yardımcı Teorem 3.6 ve Yardımcı Teorem 3.7'den $T_2, \overline{\overline{N_2}}$ -ejektiftir. Böylece $Y_2 \leq_e \overline{g_2}(T_2)$ olacak biçimde bir Y_2 alt modülü ve $k : \overline{\overline{N_2}} \rightarrow T_2$ homomorfizma dönüşümü vardır öyleki $k|_{Y_2} = \overline{g_2}^{-1}|_{Y_2}$ dir.

$$\begin{array}{ccc}
Y_2 & \longrightarrow & \overline{g_2}(T_2) \xrightarrow{i} \overline{\overline{N_2}} \\
& & \downarrow \overline{g_2}^{-1} \\
& & T_2
\end{array}
\quad \begin{array}{c} \nearrow k \end{array}$$

Diğer yandan, $Y_2 \leq_e \overline{g_2}(T_2)$ ve $\overline{g_2}(T_2) \leq_e \overline{\overline{N_2}}$ olduğundan $Y_2 \leq_e \overline{\overline{N_2}}$ dir. Şimdi k 'nin bir monomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için k 'nin bir monomorfizma olmadığını kabul edelim. Bu durumda bir $a \in \text{Ker}(k)$ vardır. $a \in \overline{\overline{N_2}}$ ve $k(a) = 0$ dir. $Y_2 \leq_e \overline{\overline{N_2}}$ olduğundan $aR \cap Y_2 \neq 0$ olup en az bir $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq ar \in aR \cap Y_2$ dir. Böylece $0 = k(a)r = k(ar) = \overline{g_2}^{-1}(ar)$ eşitliğinden $ar = \overline{g_2}(0) = 0$ elde edilirki bu kabulümüzle çelişir. O halde olduğundan k bir monomorfizmadır.

$f : M \rightarrow N$ homomorfizma ve $B \leq_e N$ ise $f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

$\overline{g_2} : T_2 \rightarrow \overline{\overline{N_2}}$ ve $Y_2 \leq_e \overline{\overline{N_2}}$ olduğundan $k(Y_2) = \overline{g_2}^{-1}(Y_2) \leq_e T_2$ dir.

$k(Y_2) \leq k(\overline{\overline{N_2}}) \leq T_2$ ve $k(Y_2) \leq_e T_2$ olduğundan $k(\overline{\overline{N_2}}) \leq_e T_2$ olur.

$k\overline{g_2} : T_2 \rightarrow T_2$ bir monomorfizma dönüşümüdür.

$\overline{g_2}(T_2) \leq_e \overline{\overline{N_2}} \Rightarrow k(\overline{g_2}(T_2)) \leq_e k(\overline{\overline{N_2}})$ dir.

$k(\overline{g_2}(T_2)) \leq_e k(\overline{\overline{N_2}})$ ve $k(\overline{\overline{N_2}}) \leq_e T_2$ olduğundan $k(\overline{g_2}(T_2)) \leq_e T_2$ dir. $T_2, (C_2)$ özelliğini sağlar ve $k\overline{g_2} : T_2 \rightarrow T_2$ büyük monomorfizma olduğundan Yardımcı Teorem 3.1'den $k\overline{g_2}$ örten olup $k\overline{g_2}$ izomorfizmadır. $\overline{g_2} : T_2 \rightarrow \overline{\overline{N_2}}$ ve $n_2 \in \overline{\overline{N_2}}$

olsun. $k(n_2) \in k(\overline{N_2})$ ve $k(\overline{N_2}) \leq_e T_2$ olduğundan $k(n_2) \in T_2$ dir.

$$\begin{aligned} k\overline{g_2} : T_2 &\rightarrow T_2 \\ x &\mapsto k(n_2) \end{aligned}$$

izomorfizma olup örten olduğundan $k(n_2) = k(\overline{g_2})$ olacak biçimde $c \in T_2$ vardır. h homomorfizma olduğundan $n_2 = \overline{g_2}(c)$ dir. O halde $\overline{g_2}$ örtendir. $\overline{g_2} = \tau^{-1}\overline{q_2}p_1f\epsilon|_{T_2}$ eşitliğinde $\overline{g_2}$ ve τ^{-1} izomorfizma olduğundan $\overline{q_2}p_1f\epsilon|_{T_2}$ de izomorfizmadır. Böylece,

$$\begin{aligned} B_2 = p_1f\epsilon(T_2) \oplus \overline{B_2} &= p_1f\epsilon(T_1) \oplus p_1f\epsilon(T_2) \\ &= p_1(f\epsilon((T_1) \oplus (T_2))) \\ &= p_1(f(A_2)) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. $p_1|_{f(A_2)}$ izomorfizma olduğundan $B = B_2 \oplus f(A_2)$ dir.

$f(A'_i) \leq_e f(A_i)$ olduğundan $f(A'_1) \cap f(A'_2) \leq_e f(A_1) \cap f(A_2)$ dir. Ayrıca $f(A_i) \leq_e B_i$ olduğundan $f(A_1) \cap f(A_2) \leq_e B_1 \cap B_2$ dir. Buradan $f(A'_1) \cap f(A'_2) \leq_e B_1 \cap B_2$ olur. O halde $f(A'_1) \cap f(A'_2) = 0$ dir. Gerçekten, $f(A'_1) \cap f(A'_2) \leq_e f(A_1) \cap f(A_2)$ ve $0 \leq_e f(A_1) \cap f(A_2)$ yi düşündüğümüzde $f(A_1) \cap f(A_2) = 0$ olur. Böylece $f(A'_i) \leq_d B$ ve M , (C_3) şartını sağladığından $B \leq_d M$ de (C_3) şartını sağlar. Dolayısıyla $f(A) = f(A_1) \oplus f(A_2) \leq_d B$ dir. Ayrıca $f(A) \leq_e B$ olduğundan $f(A) = B$ olur. Böylece f dönüşümü örtendir. Buradan f bir izomorfizma dönüşümü olur. O halde M , (C_2) koşulunu sağlar.

■

Örnek 3.16 p bir asal sayı olsun. Bu durumda $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ -modülleri süreklidir. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cisim olup $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -ejektiftir. Böylece Teorem 3.15'den $\mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, C_2 koşulunu sağlayan G -extending modüldür. Ancak sürekli değildir (Örnek 2.15).

KAYNAKÇA

- [1] Akalan, E., Birkenmeier, G. F., Tercan, A. (2009). Goldie extending modules. *Comm. Algebra* 37:663-683.
- [2] Baba, Y., Oshiro, K. (2009). *Classical Artinian Rings and Related Topics*. Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [3] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. ve Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules*, Birkhauser, Berlin.
- [4] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., Wisbauer, R. (1994). *Extending Modules*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 313. Harlow/New York: Longman.
- [5] Kuratomi, Y. (2014). Goldie extending modules and generalizations of quasicontinuous modules. *Tsukuba J. Math.* 38(1):25-37.
- [6] Kuratomi, Y. On G -extending modules with finite internal exchange property. To appear *Vietnam J. Math.*
- [7] Mohamed, S.H. ve Muller, B.J. (1990). *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series, **147**, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [8] Oshiro, K. (1983). Continuous modules and quasi-continuous modules. *Osaka J. Math.* 20:681-694.
- [9] Oshiro, K., Rizvi, S. T. (1996). The exchange property of quasi-continuous modules with the finite exchange property. *Osaka J. Math.* 33:217-234.
- [10] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Reading: Gordon and Breach.

- [11] Zimmermann-Huisgen, B., Zimmermann, W. (1984). Classes of modules with the exchange property. *J. Algebra* 88:416-434.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Şeyma EROL
Yabancı Dil : İngilizce

- -

Eğitim Geçmişi:

- 2012-2017, Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

