



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN KATEGORİSİNDE
CAT¹-OBJELER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bestami BERBEROĞLU

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN**

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342412 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Bestami BERBEROĞLU tarafından hazırlanan “**ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN KATEGORİSİNDE CAT¹-OBJELER**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Ali AYTEKİN

Pamukkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Yunus ATALAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 12 / 09 / 2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Bestami BERBEROĞLU

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde değerli bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, her aşamada desteğini ve ilgisini esirgemeyen kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan, sabırları, sevgileri ve destekleriyle bugünlere gelmemi sağlayan aileme minnettarım.

Ayrıca bu tez çalışmasının gerçekleşmesine, 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkür ederim.

Bestami BERBEROĞLU
Aksaray, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	4
2.1 Kategori Teorisi Hakkında Temel Kavram ve Sonuçlar	4
2.2 Gruplar Hakkında Temel Kavram ve Sonuçlar	7
2.3 Çaprazlanmış Modüller Hakkında Temel Kavram ve Sonuçlar	13
2.4 Cat^1 –Gruplar Hakkında Temel Kavram ve Sonuçlar	18
3. CAT^1 -ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER	22
4. KATEGORİ DENKLİKLERİ	27
4.1 Çaprazlanmış Kareler	27
4.2 Cat^2 –Gruplar.....	37
4.3 Çift Grup–Grupoidler	41
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	44
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER KATEGORİSİNDE CAT^1 OBJELER

Bestami BERBEROĞLU

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN

ÖZET

Çaprazlanmış modül kavramı, ilk kez 1946 yılında tanımlanmış ve bağlantılı homotopi 2-tipleri için önemli bir cebirsel model olarak ortaya çıkmıştır. Bu yapı, homotopi teorisinin yanı sıra grup temsilleri, homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teorisi ve diferansiyel geometri gibi matematiğin birçok alanında uygulanmıştır. Sonraki yıllarda Brown, Higgins ve Loday gibi araştırmacılar, çaprazlanmış modüllerin farklı yönlerini geliştirerek, bu yapıları hem cebirsel hem de kategorik açıdan zenginleştirmiştir. Özellikle, 1982’de, cat^1 -gruplar tanımlanarak, çaprazlanmış modüller ile cat^1 -gruplar arasında doğal bir kategorik denklik kurulmuş ve bu nesnelerin homotopi tipleriyle bağlantısını gösterilmiştir.

Bu tezde temel amaç, çaprazlanmış modüller kategorisinde cat^1 -objelerin incelenmesi ve bu yapıların sistematik biçimde karakterize edilmesidir. İlk olarak kategori teorisi, grup teorisi ve çaprazlanmış modüller ile ilgili temel kavramlar verilmiş, ardından cat^1 -grupların tanımı ve özellikleri sunulmuştur. Daha sonra, çaprazlanmış modüller kategorisinde cat^1 -çaprazlanmış modüller tanımlanmış, bu yapıların homotopik ve cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, cat^1 -çaprazlanmış modüller ile bazı cebirsel yapılar arasındaki doğal denklikler ayrıntılı biçimde incelenmiş ve bu yapılar arasındaki ilişkiler örneklerle desteklenmiştir.

Sonuç olarak, tez çalışması hem çaprazlanmış modüller kuramına katkıda bulunmakta hem de bu yapıların kategorik denklikler üzerinden farklı alanlarda uygulanabilirliğini göstermektedir. Böylece elde edilen sonuçlar, yüksek boyutlu cebirsel modellerin daha derinlemesine anlaşılması için önemli bir adım teşkil etmektedir.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış Modül, Cat^1 -grup, Çaprazlanmış Kare, Cat^2 -grup.

Eylül, 2025; 49 sayfa

M.Sc. THESIS

CAT¹-OBJECTS IN THE CATEGORY OF CROSSED MODULES

Bestami BERBEROĞLU

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN

ABSTRACT

The concept of crossed modules was initially introduced in 1946 as a fundamental algebraic model for connected homotopy 2-types. This structure has found applications not only in homotopy theory but also in representation theory of groups, homology and cohomology, algebraic K-theory, and differential geometry. In the following decades, researchers such as Brown, Higgins, and Loday further developed various aspects of crossed modules, enriching these structures from both algebraic and categorical perspectives. In particular, in 1982, the concept of cat^1 -groups is introduced and a natural categorical equivalence is established between crossed modules and cat^1 -groups, highlighting their deep connection with homotopy types.

The main aim of this thesis is to investigate cat^1 -objects within the category of crossed modules and to characterize these structures systematically. First, fundamental notions from category theory, group theory, and crossed modules are presented, followed by the definition and properties of cat^1 -groups. Subsequently, cat^1 -crossed modules are introduced in the category of crossed modules, and their homotopical and algebraic properties are explored. Furthermore, the natural equivalence between cat^1 -crossed modules and cat^1 -groups is studied in detail, with several illustrative examples provided.

In conclusion, this thesis contributes to the theory of crossed modules and demonstrates the applicability of these structures through categorical equivalences. The results obtained represent a significant step toward a deeper understanding of higher-dimensional algebraic models and their potential applications across different areas of mathematics.

Keywords: Crossed Module, Cat^1 -group, Crossed Square, Cat^2 -group

September, 2025; 49 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Grup homomorfizmi diyagramı.	11
Şekil 2.2.	Çaprazlanmış modül morfizmi diyagramı.	16
Şekil 2.3.	Cat^1 -grup morfizmi diyagramı.	20
Şekil 3.1.	Cat^1 -çaprazlanmış modül diyagramı.	22
Şekil 3.2.	Cat^1 -çaprazlanmış modül morfizmi diyagramı.	25
Şekil 4.1.	Çaprazlanmış kare diyagramı.	27
Şekil 4.2.	İçerme çaprazlanmış karesi.	28
Şekil 4.3.	Whitehead çaprazlanmış karesi.	28
Şekil 4.4.	Çaprazlanmış kare morfizmi diyagramı.	29
Şekil 4.5.	Cat^2 -grup diyagramı.	38
Şekil 4.6.	Cat^2 -grup morfizmi diyagramı.	38
Şekil 4.7.	Çift grup-grupoid diyagramı.	41
Şekil 4.8.	Aşıkâr çift grup-grupoid diyagramı.	41
Şekil 4.9.	Temel çift grup-grupoid diyagramı.	42
Şekil 4.10.	Çift grup-grupoid morfizmi diyagramı.	42
Şekil 5.1.	Doğal kategori denklikleri diyagramı.	45

1. GİRİŞ

Kategorik yöntemler ve homotopi teorisi, modern cebirin en önemli araştırma alanlarından biridir. Bu bağlamda, çaprazlanmış modül kavramı, yüksek boyutlu cebirsel ve topolojik yapıların modellenmesinde özel bir yere sahiptir. İlk kez Whitehead tarafından 1946 yılında tanımlanan çaprazlanmış modüller, bağlantılı homotopi 2-tiplerinin cebirsel modelleri olarak ortaya çıkmıştır (Whitehead, 1946). Whitehead'in çalışmaları, homotopi grupları arasındaki ilişkilerin anlaşılması ve operatörlerin sistematik biçimde incelenmesi açısından öncü niteliktedir (Whitehead, 1948, 1949).

Bu temel fikir, sonraki yıllarda genişletilmiş ve çeşitli araştırmacılar tarafından zenginleştirilmiştir. Higgins (1971), kategori teorisinin grup yapılarıyla bütünleştirilmesine yönelik çalışmalar yapmış ve bu çalışmalar önemli bir referans olmuştur. Brown ve Higgins (1978, 1981), çaprazlanmış modüller ile grup-grupoidler arasındaki bağlantıyı ortaya koymuş ve bu yapıların homotopik modellerde oynadığı rolü detaylı şekilde açıklamıştır. Özellikle Brown ve Loday (1987), Van Kampen tipli teoremler geliştirerek homotopik bilgilerin diyagramlar aracılığıyla taşınabileceğini göstermiştir. Bu katkılar, çaprazlanmış modüllerin yalnızca soyut cebirsel bir araç değil, aynı zamanda topolojik fenomenlerin cebirsel modelleri olduğunu göstermiştir.

Loday (1982) cat^1 -grupları tanımlamış ve bunlar ile çaprazlanmış modüller arasında doğal bir denklik kurmuştur. Bu çalışma, homotopi tiplerinin cebirsel modellerini daha sistematik bir biçimde incelenebilir hale getirmiştir. Loday'ın yaklaşımı, homotopi gruplarının sınırlı sayıda boyutunun incelenmesinde kullanılan cebirsel modelleri daha anlaşılır kılmıştır. Conduché (1984) tarafından genelleştirilmiş modüller üzerine yapılan çalışmalar ve Ellis (1995) tarafından çapraz kareler üzerine yapılan araştırmalar, bu konunun daha ileri düzeyde kombinatorial ve homotopik bağlamlarda da kullanılabileceğini göstermiştir.

Çaprazlanmış modüllerin uygulamaları oldukça geniştir. Norrie (1990) tarafından yapılan çalışmalar, grup etkimeleri ve grup otomorfizmaları bağlamında çaprazlanmış modüllerin nasıl kullanılabileceğini ortaya koymuştur. Mutlu ve Porter (1998), çapraz kompleksler ile CW-kompleksler arasındaki homotopi sınıflandırmasını incelemiş; Porter (1987, 1998) ise hem iç kategoriler hem de topolojik kuantum alan teorileri

bağlamında çaprazlanmış modüllerin önemini vurgulamıştır. Bu sonuçlar, çaprazlanmış modüllerin yalnızca cebirsel topolojiyle değil, aynı zamanda matematiğin fiziksel modelleriyle de yakından ilişkili olduğunu göstermektedir.

Modern dönemde, çaprazlanmış modüller diferansiyel geometri ve matematiksel fizikte de ortaya çıkmıştır. Jurčo (2002) çaprazlanmış modüllerin bundle gerbe ve string gruplarıyla ilişkisini açıklarken; Martins ve Picken (2011), iki boyutlu holonomi kavramı üzerinden bu yapıların diferansiyel geometriye uygulanabileceğini göstermiştir. Yetter (1992, 1993) tarafından yapılan homotopi 2-tiplerinden türeyen topolojik kuantum alan teorileri üzerine çalışmaları, çaprazlanmış modüllerin matematiksel fizikteki rolünü daha da pekiştirmiştir. Bu tür uygulamalar, çaprazlanmış modüllerin hem cebirsel topoloji hem de teorik fizik için vazgeçilmez bir araç olduğunu ortaya koymaktadır.

Son zamanlarda, Arvasi ve Ulualan (2015), çaprazlanmış kareler için serbestlik şartları ile ilgili çalışmıştır. Akız vd. (2013), örtü teorisini iç grupoidler ve çapraz modüller bağlamında ele almış; Temel vd. (2020), grup-grupoidlerin kategorisindeki çaprazlanmış modülleri tanımlayarak literatüre yeni bir yapı kazandırmış ve çift grup-grupoidler ile doğal olarak denk olduklarını göstermişlerdir. Bununla birlikte çaprazlanmış modüllerin yükselmeleri (Şahan, 2019), normallik ve bölüm yapıları (Şahan ve Mucuk, 2020) alana özgün katkılar sunmuştur. Bu araştırmalar, özellikle gruplar ile çok işlemli gruplar kategorisi çerçevesinde çaprazlanmış modüllerin genişletilmesi bakımından önemlidir (Orzech, 1972a, 1972b).

Ayrıca Exel'in (1997) Fell demetleri üzerine yaptığı araştırmalar, çaprazlanmış modüllerin C^* -cebirlerle ilişkisini ortaya koyarak, bu yapıların fonksiyonel analizle bağlantısını göstermiştir. Böylece, çaprazlanmış modüller yalnızca homotopi teorisinin soyut araçları değil, aynı zamanda analitik yapılara da uygulanabilir hale gelmiştir.

Bu tez çalışmasında, çaprazlanmış modüller kategorisinde cat^1 -objelerin tanımı ve özellikleri incelenmiştir. İlk olarak, kategori teorisi, grup teorisi ve çaprazlanmış modüllerle ilgili temel kavramlar hatırlatılmıştır. Daha sonra, cat^1 -grupların yapısı ve özellikleri açıklanmış, ardından çaprazlanmış modüller kategorisinde cat^1 -çaprazlanmış modüller tanımlanmıştır. Bu yapıların homotopik ve cebirsel özellikleri

sistematik biçimde analiz edilmiştir. Son olarak, cat^1 -çaprazlanmış modüller ile çaprazlanmış kareler, cat^2 -gruplar ve çift grup-grupoidler arasındaki doğal kategorik denklik ayrıntılı olarak ortaya konmuş ve çeşitli örneklerle desteklenmiştir.

Elde edilen bulgular, çaprazlanmış modüller kuramına hem kuramsal hem de uygulamalı bakımdan katkı sağlamaktadır. Özellikle, homotopik tiplerin modellenmesinde kullanılan araçların daha kapsamlı bir şekilde karakterize edilmesi, yüksek boyutlu cebirsel topolojinin gelişmesine önemli bir destek sunmaktadır. Ayrıca bu çalışma, ileride cat^2 -gruplar, çift grup-grupoidler ve daha genel n –yapılar üzerine yapılacak araştırmalara bir temel teşkil etmektedir.



2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Kategori Teorisi Hakkında Temel Kavram ve Sonuçlar

Matematiksel yapıların ve aralarındaki ilişkilerin genel bir teorisi olan kategori teorisi, 20. yüzyılın ortalarında Eilenberg ve Mac Lane (1942, 1945) tarafından cebirsel topolojideki temel çalışmalarında tanıtılmıştır. Bir kategori, objelerden ve aralarındaki morfizmlerden (oklar) oluşur; bu morfizmlerin birleştirilebilirliği ve birim morfizmlerinin varlığı belirli aksiyomlarla tanımlanır. Kategori, bir "yönlendirilmiş uzay için kombinatoryal bir model" veya "yönlendirilmiş homotopi 1-tipi" olarak düşünülebilir. Bu temel yapı, daha karmaşık cebirsel ve topolojik kavramların modellenmesi için zemin hazırlamıştır. Şimdi kategori teorisindeki bazı temel kavramları ve sonuçları Mucuk (2013) kaynağında verildiği şekilde hatırlatalım.

Tanım 2.1. Bir $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ kategorisi; objelerin sınıfı olarak adlandırılan C_0 , morfizmlerin sınıfı olarak adlandırılan C_1 , sırasıyla başlangıç ve bitiş dönüşümleri olarak adlandırılan $d_0, d_1: C_1 \rightarrow C_0$ fonksiyonları, birim morfizm dönüşümü olarak adlandırılan $i: C_1 \rightarrow C_0$ fonksiyonu ve

$$C_1 \times_{C_0} C_1 = \{ (b, a) \in C_1 \times C_1 \mid d_0(b) = d_1(a) \} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmış olmak üzere bileşke işlemi olarak adlandırılan

$$\begin{aligned} m : C_1 \times_{d_0, d_1} C_1 &\rightarrow C_1 \\ (b, a) &\mapsto m(b, a) = b \circ a \end{aligned} \quad (2.2)$$

fonksiyonundan oluşur. Bu altılı sistemin aşağıdaki şartları sağlaması gerekir:

- i) $d_0 i = d_1 i = 1_{C_0}$,
- ii) $\pi_1: C_1 \times_{d_0, d_1} C_1 \rightarrow C_1$ ve $\pi_2: C_1 \times_{d_0, d_1} C_1 \rightarrow C_1$ izdüşüm fonksiyonları için $d_0 m = d_0 \pi_2$ ve $d_1 m = d_1 \pi_1$,
- iii) $m(1_{C_1} \times m) = m(m \times 1_{C_1})$,
- iv) $m(id_0, 1_{C_1}) = m(1_{C_1}, id_1) = 1_{C_1}$.

Örnek 2.2. C_0 tüm kümelerin sınıfı, C_1 tüm fonksiyonların sınıfı olmak üzere m fonksiyonların bileşke işlemi ve her A kümesi için $i(A) = 1_A$ birim fonksiyonu olarak

oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye kümelerin kategorisi denir ve bu kategori **SET** ile gösterilir.

Örnek 2.3. C_0 tüm topolojik uzayların sınıfı, C_1 tüm topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonların sınıfı olmak üzere m fonksiyonların bileşke işlemi ve her X topolojik uzayı için $i(X) = 1_X$ birim fonksiyon alınarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye topolojik uzayların kategorisi denir ve bu kategori **Top** ile gösterilir.

Örnek 2.4. C_0 tüm noktalı topolojik uzayların sınıfı, C_1 tüm noktalı topolojik uzaylar arasındaki noktalı sürekli fonksiyonların sınıfı olmak üzere m fonksiyonların bileşke işlemi ve her (X, x_0) noktalı topolojik uzayı için $i((X, x_0)) = 1_{(X, x_0)}$ birim fonksiyon alınarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye noktalı topolojik uzayların kategorisi denir ve bu kategori **Top*** ile gösterilir.

Tanım 2.5. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ bir kategori olmak üzere $x \in C_0$ olsun. Eğer her $y \in C_0$ için $d_0(a) = x$ ve $d_1(a) = y$ olacak şekilde bir tek $a \in C_1$ varsa bu x nesnesine $\mathcal{C}$ kategorisinin bir başlangıç nesnesi denir.

Tanım 2.6. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ bir kategori olmak üzere $y \in C_0$ olsun. Eğer her $x \in C_0$ için $d_0(a) = x$ ve $d_1(a) = y$ olacak şekilde bir tek $a \in C_1$ varsa bu y nesnesine $\mathcal{C}$ kategorisinin bir bitiş nesnesi denir.

Tanım 2.7. Bir $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ kategorisindeki herhangi iki $x, y \in C_0$ nesneleri için aşağıdaki şartı sağlayan bir $P \in C_0$ nesnesi ve $p_1: P \rightarrow x$, $p_2: P \rightarrow y$ morfizmlerine x, y nesnelerinin çarpımı denir:

- Herhangi bir z nesnesi ile herhangi iki $f_1: z \rightarrow x$ ve $f_2: z \rightarrow y$ morfizmi verildiğinde, $p_1u = f_1$ ve $p_2u = f_2$ olacak şekilde bir tek $u: z \rightarrow P$ morfizmi vardır.

Tanım 2.8. Bir $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ kategorisindeki herhangi iki $a: x \rightarrow z$ ve $b: y \rightarrow z$ morfizmi için aşağıdaki şartı sağlayan bir $P \in C_0$ nesnesi ve $p_1: P \rightarrow x$, $p_2: P \rightarrow y$ morfizmlerine a, b morfizmlerinin geri çekmesi (pullback) denir:

- $ap_1 = bp_2$,

- herhangi bir Q objesi ile $af_1 = bf_2$ olacak şekilde herhangi iki $f_1: Q \rightarrow x$ ve $f_2: Q \rightarrow y$ morfizmi verildiğinde, $p_1u = f_1$ ve $p_2u = f_2$ olacak şekilde bir tek $u: Q \rightarrow P$ morfizmi vardır.

Her kategoride geri çekme olması gerekmez. Şimdi geri çekmelere sahip olan bir kategori örneği verelim.

Örnek 2.9. **Set** kategorisindeki $f: A \rightarrow C$ ve $g: B \rightarrow C$ fonksiyonları için geri çekme

$$A \times_C B = \{ (a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b) \} \quad (2.3)$$

olmak üzere $(A \times_C B, \pi_1, \pi_2)$ üçlüsünden oluşur.

Örnek 2.10. **Gp** kategorisindeki $f: A \rightarrow C$ ve $g: B \rightarrow C$ grup homomorfizmleri için geri çekme

$$A \times_C B = \{ (a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b) \} \quad (2.4)$$

olmak üzere $(A \times_C B, \pi_1, \pi_2)$ üçlüsünden oluşur.

Kümeler arasında fonksiyon olarak tanımlanan dönüşümler olduğu gibi kategoriler arasında da fanktor olarak tanımlanan dönüşümler vardır. Şimdi fanktor tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.11. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ ve $\mathcal{C}' = (C'_0, C'_1, d'_0, d'_1, i', m')$ birer kategori olmak üzere $F_0: C_0 \rightarrow C'_0$ ve $F_1: C_1 \rightarrow C'_1$ birer fonksiyon olsun. Eğer bu F_0 ve F_1 fonksiyonları kategoriye oluşturan yapısal dönüşümleri ile uyumlu ise, yani $F_0d_0 = d'_0F_1$, $F_0d_1 = d'_1F_1$, $F_1i = i'F_0$ ve $F_1m = m'(F_1 \times F_1)$ ise, $F = (F_0, F_1)$ ikilisine $\mathcal{C}$ den $\mathcal{C}'$ ne bir fanktor denir.

Örnek 2.12. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ bir kategori olmak üzere her objeyi kendine ve her morfizmi de yine kendine eşleyen

$$1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad (2.5)$$

dönüşümü bir fanktordur.

Kategoriler arasında dönüşümler (fanktorlar) olduğu gibi fanktorlar arasında da dönüşümler tanımlanabilir. Şimdi doğal dönüşümler olarak adlandırılan fanktorlar arasındaki dönüşümlerin tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.13. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ ve $\mathcal{C}' = (C'_0, C'_1, d'_0, d'_1, i', m')$ birer kategori ve $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ birer fanktor olmak üzere bir $\eta: C_0 \rightarrow C'_0$ dönüşümü $d'_0\eta = F_0$, $d'_1\eta = F_1$ ve her $a \in C_1$ için $G_1(a) \circ \eta(d_0(a)) = \eta(d_1(a)) \circ F_1(a)$ şartlarını sağlıyorsa bu η dönüşümüne F den G ye bir doğal dönüşüm denir ve bu durum $\eta: F \Rightarrow G$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ ve $\mathcal{C}' = (C'_0, C'_1, d'_0, d'_1, i', m')$ birer kategori ve $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ birer fanktor olmak üzere bir $\eta: F \Rightarrow G$ bir doğal dönüşüm olmak üzere her $x \in C_0$ için $\eta(x)$ bir izomorfizm ise bu η dönüşümüne F den G ye bir doğal izomorfizm denir ve bu durum $\eta: F \simeq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.15. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ ve $\mathcal{C}' = (C'_0, C'_1, d'_0, d'_1, i', m')$ birer kategori ve $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ile $G: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ birer fanktor olmak üzere $\eta: 1_{\mathcal{C}} \simeq GF$ ve $\mu: 1_{\mathcal{C}'} \simeq FG$ olacak şekilde η ve μ doğal izomorfizmleri varsa $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ kategorileri doğal olarak denktir denir ve bu durum $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$ ile gösterilir.

Tanım 2.16. $\mathcal{C} = (C_0, C_1, d_0, d_1, i, m)$ geri çekmelere sahip bir kategori olmak üzere bir $\mathcal{C}' = (C'_0, C'_1, d'_0, d'_1, i', m')$ kategorisi için $C'_0, C'_1 \in C_0$ ve $d'_0, d'_1, i', m' \in C_1$ şartları sağlıyorsa bu $\mathcal{C}'$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinde bir iç kategori denir.

2.2 Gruplar Hakkında Temel Kavram ve Sonuçlar

Bu alt bölümde tezin diğer bölümde kullanılan gruplar hakkında temel tanım ve sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.17. $A \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $+: A \times A \rightarrow A$ ikili işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa $(A, +)$ ikilisine bir grup denir:

- i) her $a, b, c \in A$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$;
- ii) her $a \in A$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olacak şekilde bir $0 \in A$ vardır;
- iii) her $a \in A$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak şekilde bir $-a \in A$ vardır.

Bir $(A, +)$ grubunda her $a, b \in A$ için $a + b = b + a$ oluyorsa bu $(A, +)$ grubuna bir abelyan grup denir.

Örnek 2.18. $+$ işlemi bilinen toplama işlemini göstermek üzere $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ birer abelyan grup yapısına sahiptir. $\mathbb{R} - \{0\}$ kümesi bilinen çarpma işlemine $(\cdot)$ göre bir abelyan gruptur. 2×2 tipinde determinantı 0 dan farklı olan tüm reel değerli matrislerin kümesi, $GL(2; \mathbb{R})$, matrisler üzerindeki bilinen çarpma işlemine $(\otimes)$ göre abelyan olmayan bir gruptur ve bu gruba genel lineer grup denir.

Tanım 2.19. $(A, +)$ bir grup ve $S \subseteq A$ olmak üzere S kümesi de aynı $+$ işlemi ile birlikte bir grup yapısına sahip ise $(S, +)$ ikilisine $(A, +)$ grubunun bir alt grubu denir ve bu durum $(S, +) \leq (A, +)$ ile gösterilir.

Örnek 2.20. $(A, +)$ herhangi bir grup olmak üzere $(\{0\}, +) \leq (A, +)$ ve $(A, +) \leq (A, +)$ dir. Bu alt gruplara aşikâr alt gruplar denir.

Örnek 2.21. $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$ dir.

Örnek 2.22. 2×2 tipinde determinantı 1 olan tüm reel değerli matrislerin kümesi, $SL(2; \mathbb{R})$, matrisler üzerindeki bilinen çarpma işlemine $(\otimes)$ göre özel lineer grup olarak adlandırılan bir gruptur ve $SL(2; \mathbb{R}) \leq GL(2; \mathbb{R})$ dir.

Buradan itibaren, aksi gerekmedikçe, bir $(A, +)$ grubu grup işlemi belirtilmeden kısaca A ile gösterilecektir.

Önerme 2.23. A bir grup ve $\{S_i \mid i \in I\}$ sınıfı A grubunun alt gruplarının bir sınıfı olsun. Bu durumda $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ kümesi de A grubunun bir alt grubudur.

Tanım 2.24. A bir grup ve $S \subseteq A$ olmak üzere A grubunun S kümesini içeren en küçük alt grubuna, diğer bir ifadeyle Önerme 2.7'ye göre A grubunun S kümesini içeren tüm alt gruplarının kesişimine A grubunun S kümesi tarafından üretilen alt grubu denir ve bu alt grup $\langle S \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 2.25. A bir grup ve $H, K \leq A$ olsun. Bu durumda her $h \in H$ ve $k \in K$ için h ile k elemanlarının komütatörü olarak adlandırılan $[h, k] = h + k - h - k$ olmak üzere A grubunun

$$\langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle \quad (2.6)$$

alt grubuna H ve K tarafından üretilen komütatör alt grubu denir ve bu alt grup $[H, K]$ ile gösterilir. Özel olarak $H = K = A$ olarak alınırsa $[A, A]$ alt grubuna kısaca A grubunun komütatör alt grubu ya da türetilmiş alt grubu denir ve yine kısaca A' ile gösterilir.

Tanım 2.26. A bir grup ve $S \leq A$ olsun. Bu durumda her $a \in A$ için

$$a + S = \{ a + s \mid s \in S \} \quad (2.7)$$

kümesine A grubunun S alt grubuna göre bir sol koseti,

$$S + a = \{ s + a \mid s \in S \} \quad (2.8)$$

kümesine ise A grubunun S alt grubuna göre bir sağ koseti denir.

Örnek 2.27. Toplamsal $\mathbb{Z}$ grubunun $3\mathbb{Z}$ alt grubu için üç farklı sağ ve sol koset vardır. Bunlardan sol kosetler;

$$\dots = -3 + 3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} = 3 + 3\mathbb{Z} = \dots$$

$$\dots = -2 + 3\mathbb{Z} = 1 + 3\mathbb{Z} = 4 + 3\mathbb{Z} = \dots \quad (2.9)$$

$$\dots = -1 + 3\mathbb{Z} = 2 + 3\mathbb{Z} = 5 + 3\mathbb{Z} = \dots$$

dır. Toplamsal $\mathbb{Z}$ grubu abelyan bir grup olduğundan sol kosetlerin sağ kosetlere eşit olduğu kolaylıkla görülebilir.

Örnek 2.28. $\{1,2,3\}$ kümesinden kendisine tanımlanan birebir ve örten tüm fonksiyonların kümesi $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ fonksiyonların bileşke işlemine göre abelyan olmayan bir gruptur. Bu grubun $N = \{e, (123), (132)\}$ alt grubuna göre sol ve sağ kosetleri her bir eleman için birbirine eşittir. Fakat bu durum $H = \{e, (12)\}$ alt grubu için geçerli değildir.

Tanım 2.29. A bir grup ve $N \leq A$ olmak üzere her $a \in A$ için $a + N = N + a$ oluyorsa bu N alt grubuna A grubunun bir normal alt grubu denir ve bu durum $N \trianglelefteq A$ ile gösterilir.

Örnek 2.11'den de anlaşılacağı üzere abelyan grupların her alt grubu bir normal alt gruptur. Örnek 2.12'da verilen $N = \{e, (123), (132)\}$ için $N \trianglelefteq S_3$ fakat $H = \{e, (12)\}$ için $H \not\trianglelefteq S_3$ dır.

Örnek 2.30. Bir A grubu için $A' = [A, A]$ komütatör alt grubu olmak üzere $A' \trianglelefteq A$ dır.

Tanım 2.31. A ve B birer grup olmak üzere $A \times B$ kümesi

$$\begin{aligned} (A \times B) \times (A \times B) &\rightarrow A \times B \\ ((a, b), (a_1, b_1)) &\mapsto (a, b) + (a_1, b_1) = (a + a_1, b + b_1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

işlemi ile birlikte bir gruptur. Bu gruba A ve B gruplarının direkt çarpım grubu denir.

Tanım 2.32. A bir grup ve $N \trianglelefteq A$ olsun. Bu durumda $A/N = \{a + N \mid a \in A\}$ bölüm kümesi

$$\begin{aligned} + : A/N \times A/N &\rightarrow A/N \\ (a + N, a_1 + N) &\mapsto (a + N) + (a_1 + N) = a + a_1 + N \end{aligned} \quad (2.11)$$

işlemi ile birlikte bir grup yapısına sahiptir ve bu A/N grubuna bölüm grubu denir.

Bir A grubu için A/A' bölüm grubuna A grubunun abelyanlaştırması denir ve A^{ab} ile gösterilir.

Tanım 2.33. A ve B birer grup ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere her $a, a_1 \in A$ için $f(a + a_1) = f(a) + f(a_1)$ oluyorsa, ya da diğer bir ifadeyle Şekil 2.1'de verilen diyagram değişmeli ise, bu f fonksiyonuna bir grup homomorfizmi denir.

$$\begin{array}{ccc}
A \times A & \xrightarrow{+} & A \\
f \times f \downarrow & & \downarrow f \\
B \times B & \xrightarrow{+} & B
\end{array}$$

Şekil 2.1. Grup homomorfizmi diyagramı.

C_0 tüm grupların sınıfı, C_1 tüm grup homomorfizmlerinin sınıfı olmak üzere m grup homomorfizmlerinin bileşke işlemi ve her A grubu için $i(A) = 1_A$ birim grup homomorfizmi alınarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye grupların kategorisi denir ve bu kategori **Gp** ile gösterilir.

Örnek 2.34. Bir (X, x_0) noktalı topolojik uzayını $\pi_1(X, x_0)$ temel grubuna eşleyen

$$\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Gp} \quad (2.12)$$

dönüşümü bir funktordur.

Tanım 2.35. Bir $f: A \rightarrow B$ grup homomorfizmi için

$$\ker f = \{ a \in A \mid f(a) = 0 \} \quad (2.13)$$

kümesine f homomorfizminin çekirdeği denir ve $\ker f \trianglelefteq A$ dir. Ayrıca

$$\text{Im } f = \{ f(a) \mid a \in A \} \quad (2.14)$$

kümesine f homomorfizminin görüntüsü denir ve $\text{Im } f \leq B$ dir.

Bir $f: A \rightarrow B$ grup homomorfizmi için $A = B$ ise bu f dönüşümüne A grubunun bir endomorfizmi denir. A grubunun tüm endomorfizmlerinin kümesi $\text{End}(A)$ ile gösterilir. Diğer taraftan, eğer f grup homomorfizmi örten ise bu f dönüşümüne bir grup epimorfizmi denir. Birebir ve örten olan bir $f: A \rightarrow B$ grup homomorfizmine bir izomorfizm ve bu durumda A ve B gruplarına izomorf gruplar denir. Özel olarak, bir A grubundan kendisine tanımlanan izomorfizmlere otomorfizm denir. A grubunun tüm otomorfizmlerinin kümesi fonksiyonların bileşke işlemi ile birlikte bir gruptur. Bu gruba A grubunun otomorfizma grubu denir ve $\text{Aut}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.36. A ve B birer grup olmak üzere

$$\begin{aligned}\theta &: B \times A \rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto \theta(b, a) = b \cdot a\end{aligned}\tag{2.15}$$

ile gösterilen θ fonksiyonu

- i) her $a, a_1 \in A$ ve $b \in B$ için $b \cdot (a + a_1) = b \cdot a + b \cdot a_1$;
- ii) her $a \in A$ ve $b, b_1 \in B$ için $(b + b_1) \cdot a = b \cdot (b_1 \cdot a)$;
- iii) her $a \in A$ için $0 \cdot a = a$

şartları sağlanıyorsa bu θ fonksiyonuna B grubunun A grubu üzerine bir etkimesi denir.

Dikkat edelim ki Tanım 2.19 (i) şartında $a = 0 = a_1$ olarak alınırsa $b \cdot 0 = 0$ olarak elde edilir.

Örnek 2.37. A bir grup ve $N \trianglelefteq A$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\theta &: A \times N \rightarrow N \\ (a, n) &\mapsto \theta(a, n) = a \cdot n = a + n - a\end{aligned}\tag{2.16}$$

fonksiyonu A grubunun N normal alt grubu üzerine bir etkimesini tanımlar. Bu etkiye özel olarak konjügasyon etkimesi olarak adlandırılır.

Örnek 2.38. A ve B herhangi iki grup olmak üzere

$$\begin{aligned}\theta &: B \times A \rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto \theta(b, a) = b \cdot a = a\end{aligned}\tag{2.17}$$

fonksiyonu B grubunun A grubu üzerine bir etkimesini tanımlar. Bu etkiye özel olarak aşıkâr etkiye olarak adlandırılır.

Önerme 2.39. A ile B birer grup ve

$$\begin{aligned}\theta &: B \times A \rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto \theta(b, a) = b \cdot a\end{aligned}\tag{2.18}$$

fonksiyonu B grubunun A grubu üzerine bir etkimesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\theta^*(b) &: A \rightarrow A \\ a &\mapsto \theta^*(b)(a) = b \cdot a\end{aligned}\tag{2.19}$$

otomorfizmi ile tanımlanan

$$\begin{aligned}\theta^* &: B \rightarrow \text{Aut}(A) \\ b &\mapsto \theta^*(b)\end{aligned}\tag{2.20}$$

dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

A ile B birer grup ve

$$\begin{aligned}\theta &: B \times A \rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto \theta(b, a) = b \cdot a\end{aligned}\tag{2.21}$$

fonksiyonu B grubunun A grubu üzerine bir etkimesi olsun. Bu durumda $A \times B$ kartezyen çarpım kümesi

$$\begin{aligned}(A \times B) \times (A \times B) &\rightarrow A \times B \\ ((a, b), (a_1, b_1)) &\mapsto (a, b) + (a_1, b_1) = (a + b \cdot a_1, b + b_1)\end{aligned}\tag{2.22}$$

işlemi ile birlikte bir grup yapısına sahiptir. Bu gruba A ve B gruplarının yarı-direkt çarpım grubu denir ve $A \rtimes B$ ile gösterilir.

2.3 Çaprazlanmış Modüller Hakkında Temel Kavram ve Sonuçlar

Çaprazlanmış modül kavramı, ilk olarak J. H. C. Whitehead tarafından 1946 ve 1949 tarihli makalelerinde biçimsel olarak tanıtılmıştır. Bu fikirler, Brown, Higgins ve Sivera'nın temel çalışmalarıyla daha da geliştirilmiş ve açıklanmıştır. Çaprazlanmış modüller, esas olarak cebirsel topolojiden, özellikle de homotopi teorisinden, yüksek boyutlu topolojik uzayları cebirsel olarak modellemek amacıyla ortaya çıkmıştır. Sıklıkla "2-boyutlu gruplar" olarak tanımlanırlar, çünkü temel gruptan (1-boyutlu) daha fazla bilgi yakalarlar ancak tam yüksek boyutlu cebirsel yapılardan daha basittirler.

Çaprazlanmış modülün tanımı ve özel koşulları, görünüşte farklı kavramları bir araya getirme ve genelleştirme arzusundan kaynaklanan derin bir matematiksel soyutlamayı temsil eder. Bu yapı, sadece yeni bir soyutlama olmakla kalmaz, aynı zamanda normal alt gruplar ve modüller gibi tanıdık cebirsel nesnelerin ve homotopi grupları gibi topolojik fenomenlerin "yüksek boyutlu" yönlerini yakalayan bir çerçeve sunar. Bu birleştirme, farklı alanlardaki karmaşık matematiksel örüntülerin daha tutarlı bir şekilde anlaşılmasını sağlar. Örneğin, çaprazlanmış modüllerin normal alt grupları ve modülleri genelleştirdiği vurgusu ve "2-boyutlu gruplar" olarak nitelendirilmesi, belirli "yüksek boyutlu" özelliklerin iki "daha düşük boyutlu" cebirsel arasındaki yapılandırılmış bir etkileşimle yakalanabileceğini gösteren başarılı bir çabayı işaret eder. Çaprazlanmış modüller, klasik grup teorisindeki normal alt gruplar, iç otomorfizmler ve modüller gibi görünüşte farklı kavramları tek bir tutarlı çerçeve altında birleştiren güçlü bir genelleme sağlar.

Peiffer özdeşliği ve eşdeğişkenlik koşulunun belirli biçimleri keyfi aksiyomlar değildir; daha ziyade, belirli geometrik veya kategorik yapıları modellemeye çalışırken ortaya çıkan gerekli sonuçlardır. Bu koşullar, çaprazlanmış modülün iç tutarlılığını ve grup sunumlarındaki "ilişkiler arasındaki özdeşlikler" veya topolojik uzaylardaki homotopi grupları arasındaki etkileşim gibi fenomenleri doğru bir şekilde temsil etme yeteneğini sağlar. Topolojik bağlamlarda, bu koşullar, cebirsel modelin (çaprazlanmış modülün) eğrilerin ve homotopilerin geometrik özelliklerini doğru bir şekilde yansıtmalarını sağlar; burada Peiffer özdeşliği, yüksek boyutlu yapı içindeki belirli bir "sıfır-homotopi" veya "komutatör" ilişkisine karşılık gelir.

Bu alt bölümde çaprazlanmış modüllerin tanımı, temel özellikleri ve bazı önemli sonuçlar ele alınacaktır.

Tanım 2.40. Gruplar üzerinde tanımlanan bir çaprazlanmış modül $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ aşağıdaki bileşenlerden oluşan bir sistemdir:

- A ve B birer grup;
- $\alpha: A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi ve
- $\theta: B \times A \rightarrow A$, $(b, a) \mapsto \theta(b, a) = b \cdot a$ fonksiyonu B grubunun A grubu üzerine bir etkimesi

olmak üzere bu sistem

- i) **Eşdeğişkenlik:** her $a \in A$ ve $b \in B$ için $\alpha(b \cdot a) = b + \alpha(a) - b$ ve
- ii) **Peiffer Özdeşliği:** her $a, a_1 \in A$ için $\alpha(a) \cdot a_1 = a + a_1 - a$;

şartlarını sağlamaktadır.

Örnek 2.41. A bir grup ve $N \trianglelefteq A$ olmak üzere $i: N \rightarrow A$, $n \mapsto i(n) = n$ şeklinde tanımlanan i içine dönüşümü ve A grubunun N normal alt grubu üzerine konjugasyon etkimesi (her $a \in A$ ve $n \in N$ için $a \cdot n = a + n - a$ şeklinde tanımlanan etkiye) ile birlikte $\mathcal{X} = (A, N, i, \theta)$ dörtlüsü bir çaprazlanmış modül yapısına sahiptir.

Örnek 2.42. A bir grup olmak üzere her $a \in A$ elemanını $\varphi_a: A \rightarrow A$, $x \mapsto \varphi_a(x) = a + x - a$ şeklinde tanımlanan otomorfizme eşleyen $\varphi: A \rightarrow \text{Aut}(A)$ grup homomorfizmi ile birlikte $\text{Aut}(A)$ grubunun A grubu üzerine $\theta(f, a) = f \cdot a = f(a)$ şeklinde tanımlı etkimesi ile birlikte $\mathcal{X} = (A, \text{Aut}(A), \varphi, \theta)$ dörtlüsü bir çaprazlanmış modüldür. Bu çaprazlanmış modüle otomorfizm çaprazlanmış modül denir.

Örnek 2.43. P bir grup ve M , bir P -modül olsun. M grubundan P grubuna tanımlanan aşikar homomorfizm $\delta: M \rightarrow P$ (M grubunun tüm elemanlarını P grubunun birim elemanına eşleyen dönüşüm) $\mathcal{X} = (M, P, \delta, \theta)$ şeklinde bir çaprazlanmış modül oluşturur. Burada θ , P grubunun M üzerinde verilen P -modül etkimesidir.

Bu örnek, grup halkaları üzerindeki modüller kategorisinin çaprazlanmış modüller kategorisine gömüldüğünü gösterir. Bu, modüllerin, sınır dönüşümünün aşikâr dönüşüm olduğu ve Peiffer özdeşliğinin modülün değişmeli doğası nedeniyle sağlandığı çaprazlanmış modüllerin özel, "dejenere" bir durumu olduğu anlamına gelir.

Örnek 2.44. X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x_0 \in A$ olmak üzere noktalı bir (X, A, x_0) topolojik uzay çifti için, ikinci göreceli homotopi grubundan temel gruba olan homotopi sınır dönüşümü $\partial: \pi_2(X, A, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ bir çaprazlanmış modül oluşturur.

Bu örnek, cebirsel topolojide bir köşe taşı örneğidir. Noktalı topolojik uzay çiftlerinden çaprazlanmış modüllere giden bu dönüşüm, genelleştirilmiş bir Van Kampen teoremini sağlar ve bu değişmeli olmayan göreceli homotopi gruplarının hesaplanmasına olanak tanır. Çaprazlanmış modüller, bu bağlamda, bir uzayın "2-tipini" yakalamak için çok önemlidir; bu, temel grubunu ve ikinci homotopi grubunu, aralarındaki etkimelerle birlikte içerir. Bu, 2-boyutlu homotopi bilgisi için güçlü bir cebirsel model sağlar. Bu örnek, Whitehead'in çaprazlanmış modüller için orijinal motivasyonuna doğrudan değinir. Cebirsel yapının, bir alt uzay dikkate alındığında, bir topolojik uzaydaki eğriler (1-boyutlu) ve yüzeyler (2-boyutlu) arasındaki etkileşimi nasıl hassas bir şekilde kodladığını gösterir. Serbest çaprazlanmış modül kavramı da burada ortaya çıkar.

Örnek 2.45. $\{0\}$ teke elemanlı bir grubu temsil etmek üzere $\mathbf{0} = (\{0\}, \{0\}, 1, 1)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Burada 1 dönüşümleri aşikâr grup homomorfizmleridir. Bu çaprazlanmış modüle sıfır çaprazlanmış modülü denir.

Tanım 2.46. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ ve $\mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta')$ birer çaprazlanmış modül olsun. $f_A: A \rightarrow A'$ ve $f_B: B \rightarrow B'$ birer grup homomorfizmi olmak üzere eğer

- i) $f_B \alpha = \alpha' f_A$;
- ii) her $a \in A$ ve $b \in B$ için $f_A(\theta(b, a)) = \theta'(f_B(b), f_A(a))$

şartları sağlanıyorsa $f = \langle f_A, f_B \rangle$ ikilisine $\mathcal{X}$ den $\mathcal{X}'$ ne bir çaprazlanmış modül morfizmi denir (bakınız Şekil 2.2).

$$\begin{array}{ccccc}
 B \times A & \xrightarrow{\theta} & A & \xrightarrow{\alpha} & B \\
 \downarrow f_B \times f_A & & \downarrow f_A & & \downarrow f_B \\
 B' \times A' & \xrightarrow{\theta'} & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B'
 \end{array}$$

Şekil 2.2. Çaprazlanmış modül morfizmi diyagramı.

C_0 tüm çaprazlanmış modüllerin sınıfı, C_1 tüm çaprazlanmış modül morfizmlerinin sınıfı olmak üzere m çaprazlanmış modül morfizmlerinin bileşke işlemi ve her $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ çaprazlanmış modülü için $i(\mathcal{X}) = 1_{\mathcal{X}} = \langle 1_A, 1_B \rangle$ birim çaprazlanmış

modül morfizmi olarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye çaprazlanmış modüllerin kategorisi denir ve bu kategori **XMod(Gp)** ile gösterilir.

Bir $f = \langle f_A, f_B \rangle: \mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta) \rightarrow \mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta')$ çaprazlanmış modül morfizmi için $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ ise bu $f = \langle f_A, f_B \rangle$ dönüşümüne $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülün bir endomorfizmi denir. $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülün tüm endomorfizmlerinin kümesi $\text{End}(\mathcal{X})$ ile gösterilir. Diğer taraftan, eğer f_A ve f_B grup homomorfizmlerinin her ikisi de birer grup epimorfizmi (örten) ise bu $f = \langle f_A, f_B \rangle$ dönüşümüne bir çaprazlanmış modül epimorfizmi; eğer her ikisi de birer grup izomorfizmi (birebir ve örten) ise $f = \langle f_A, f_B \rangle$ dönüşümüne bir çaprazlanmış modül izomorfizmi denir. Özel olarak, bir $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülünden kendisine tanımlı izomorfizmlere çaprazlanmış modül otomorfizmi denir ve tüm otomorfizmlerinin kümesi $\text{Aut}(\mathcal{X})$ ile gösterilir.

Tanım 2.47. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ ve $\mathcal{H} = (C, D, \gamma, \psi)$ birer çaprazlanmış modül olmak üzere

- i) $C \leq A$ ve $D \leq B$;
- ii) γ, α morfizminin C grubuna kısıtlamasıdır ve
- iii) ψ, θ fonksiyonunun $D \times C$ üzerine kısıtlamasıdır

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{H} = (C, D, \gamma, \psi)$ çaprazlanmış modülüne $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ çaprazlanmış modülün bir alt çaprazlanmış modülü denir ve bu durum $\mathcal{H} \leq \mathcal{C}$ ile gösterilir.

Örnek 2.48. $f = \langle f_A, f_B \rangle: \mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta) \rightarrow \mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere $\mathcal{H} = \text{Im } f = (\text{Im } f_A, \text{Im } f_B, \gamma, \psi)$ bir çaprazlanmış modül olup $\mathcal{H} = \text{Im } f \leq \mathcal{X}'$ dir.

Önerme 2.49. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ ve $\mathcal{H} = (C, D, \gamma, \psi)$ birer çaprazlanmış modül olmak üzere $\mathcal{H} \leq \mathcal{C}$ dir ancak ve ancak $i = \langle i_C, i_D \rangle: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{X}$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

Tanım 2.50. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ ve $\mathcal{N} = (S, T, \sigma, \psi)$ birer çaprazlanmış modül ve $\mathcal{N} \leq \mathcal{X}$ olsun. Eğer,

- i) $T \trianglelefteq B$;

- ii) her $b \in B$ ve $s \in S$ için $\theta(b, s) = b \cdot s \in S$ ve
- iii) her $t \in T$ ve $a \in A$ için $\theta(t, a) - a = t \cdot a - a \in S$

şartları sağlanıyorsa $\mathcal{N} = (S, T, \sigma, \psi)$ çaprazlanmış modülüne $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ çaprazlanmış modülünün bir normal alt çaprazlanmış modülü veya kısaca bir ideali denir ve bu durum $\mathcal{N} \trianglelefteq \mathcal{X}$ ile gösterilir.

Örnek 2.51. $f = \langle f_A, f_B \rangle: \mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta) \rightarrow \mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere $\mathcal{N} = \ker f = (\ker f_A, \ker f_B, \gamma, \psi)$ bir çaprazlanmış modül olup $\mathcal{N} = \ker f \trianglelefteq \mathcal{X}'$ dır.

Gruplar için tanımlanan komütatör alt grup kavramı çaprazlanmış modüllere Norrie tarafından aktarılmıştır. Aşağıda Salemkar vd. tarafından verilen tanımını hatırlatılmıştır.

Tanım 2.52. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ bir çaprazlanmış modül olsun, $\mathcal{N} = (S, H, \alpha, \theta)$ ve $\mathcal{M} = (U, N, \alpha, \theta)$ bu $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülünün iki ideali olsun. Bu durumda

- $[N, S] = \langle n \cdot s - s \mid s \in S, n \in N \rangle;$
- $[H, U] = \langle h \cdot u - u \mid h \in H, u \in U \rangle;$
- $[H, N] = \langle h + n - h - n \mid h \in H, n \in N \rangle$

olmak üzere $([N, S] + [H, U], [H, N], \alpha, \theta)$ bir çaprazlanmış modüldür. Bu çaprazlanmış modüle $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{M}$ tarafından üretilen komütatör alt çaprazlanmış modül denir ve bu alt çaprazlanmış modül $[\mathcal{N}, \mathcal{M}]$ ile gösterilir.

2.4 Cat¹–Gruplar Hakkında Temel Kavram ve Sonuçlar

Loday (1982), cat¹–grupları homotopi tiplerinin alternatif bir modeli olarak tanımlamıştır. 1982 tarihli "Spaces with finitely many nontrivial homotopy groups" adlı makalesi, n –küp uzaylarının temel n –cat–grup kavramını tanıtmıştır. Ronnie Brown, bu n –cat–grupların, homotopi grupları $n + 1$ boyutunun üzerinde kaybolan bağlantılı uzayların zayıf noktalı homotopi tipini modellediğini belirtmiştir. Cat¹–grup terimi, gruplar kategorisindeki bir iç kategoriye atıfta bulunmanın özlü bir yoludur. Bir cat¹–grubun tanımındaki "çekirdek komütatör koşulu", iç kategori için yer değiştirme kuralını belirler.

Loday'ın cat^1 -grupları tanıtması, matematiğin soyut, birleştirici kavramları somut, hesaplama açısından izlenebilir formülasyonlarla dengeleme ihtiyacını vurgular. Cat^1 -gruplar, Grp 'deki iç kategorilere eşdeğerdir. Tanımları "tamamen grup teorik terimlerle" yapılmıştır ve "daha kategorik olarak ifade edilmiş versiyondan genellikle daha kolay kontrol edilebilir". Bu durum, Loday'ın, mevcut bir kavrama kategorik olarak eşdeğer olsa bile, grup teorisyenleri için daha erişilebilir veya pratik bir formülasyon aradığını gösterir. Bu, aynı matematiksel nesnenin farklı biçimselleştirmelerinin farklı amaçlara hizmet edebileceğini gösterir – biri teorik zarafet ve genelleme için, diğeri pratik uygulama ve hesaplama.

Tanım 2.53. Bir $\mathcal{A} = (A, s, t)$ cat^1 -grubu; bir A grubu ve aşağıdaki şartları sağlayan bu A grubunun $s, t: A \rightarrow A$ ile gösterilen iki endomorfizminden oluşur:

- i) $st = t, ts = s$ ve
- ii) $[\ker s, \ker t] = \{0\}$ dir.

Bu tanımda $[\ker s, \ker t]$ ifadesi A grubunun $\ker s$ ve $\ker t$ alt grupları tarafından üretilen komütatör alt grubunu temsil etmektedir. Bu komütatör alt grubun sadece birim elemandan oluşan $\{0\}$ aşikâr alt grubuna eşit olması ise $\ker s$ ve $\ker t$ alt gruplarının elemanlarının değişmeli olduğu, yani her $x \in \ker s$ ve her $y \in \ker t$ için $x + y = y + x$ olduğu, anlamına gelmektedir. Bununla birlikte; ss ve tt bileşkelerini hesaplamak istersek (i) şartından

$$\begin{aligned}
 ss &= s(ts) \\
 &= (st)s \\
 &= ts \\
 &= s
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned}
 tt &= t(st) \\
 &= (ts)t \\
 &= st \\
 &= t
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 2.54. Herhangi bir A grubu $s = t = 1_A$ birim grup homomorfizmi olmak üzere $\mathcal{A} = (A, 1_A, 1_A)$ şeklinde bir cat^1 -grup olarak düşünülebilir.

Örnek 2.55. Herhangi bir A grubu için $s = \Delta\pi_1$ ve $t = \Delta\pi_2$ olarak seçilirse $\mathcal{A} = (A \times A, \Delta\pi_1, \Delta\pi_2)$ bir cat^1 -grup yapısına sahiptir. Burada $\Delta: A \rightarrow A \times A$, $a \mapsto (a, a)$ diyagonal dönüşümü, $\pi_1, \pi_2: A \times A \rightarrow A$ sırasıyla birinci ve ikinci izdüşüm fonksiyonlarını temsil etmektedir.

Tanım 2.56. $\mathcal{A} = (A, s, t)$ ve $\mathcal{A}' = (A', s', t')$ birer cat^1 -grup ve $f: A \rightarrow A'$ bir grup homomorfizmi olsun. Eğer $fs = s'f$ ve $ft = t'f$ oluyorsa, diğer bir ifadeyle Şekil 2.3'te verilen diyagram değişmeli ise, bu f dönüşümüne bir cat^1 -grup morfizmi denir.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightleftharpoons[s]{s} & A \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ A' & \xrightleftharpoons[s']{t'} & A' \end{array}$$

Şekil 2.3. Cat^1 -grup morfizmi diyagramı.

C_0 tüm cat^1 -grupların sınıfı, C_1 tüm cat^1 -grup morfizmlerinin sınıfı olmak üzere m grup homomorfizmlerinin bileşke işlemi ve her $\mathcal{A}$ cat^1 -grubu için $i(\mathcal{A}) = 1_G$ birim grup homomorfizmi olarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye cat^1 -grupların kategorisi denir ve bu kategori **Cat¹ – (Gp)** ile gösterilir.

Loday, gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüllerin kategorisi **XMod(Gp)** ile cat^1 -grupların kategorisi **Cat¹ – (Gp)** arasında doğal bir denklik olduğunu göstermiştir. Bu denkliğin detaylarına diğer bölümlerde ihtiyacımız olduğundan bu denklik ve ispatından kısaca bahsedeceğiz.

Teorem 2.57. Gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüllerin kategorisi **XMod(Gp)** ile cat^1 -grupların kategorisi **Cat¹ – (Gp)** doğal olarak denktir (Loday, 1982).

İspat: Öncelikle bir $F: \mathbf{XMod}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Cat}^1 - (\mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ ve $\mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta')$ birer çaprazlanmış modül ve $f = \langle f_A, f_B \rangle: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} s &: A \rtimes B \rightarrow A \rtimes B \\ (a, b) &\mapsto s(a, b) = (0, b) \end{aligned} \quad (2.25)$$

ve

$$\begin{aligned} t &: A \rtimes B \rightarrow A \rtimes B \\ (a, b) &\mapsto t(a, b) = (0, \alpha(a) + b) \end{aligned} \quad (2.26)$$

olmak üzere $F_0(\mathcal{X}) = \mathcal{A} = (A \rtimes B, s, t)$ bir $\mathbf{cat}^1$ -gruptur. Ayrıca $F_1(f) = f_A \times f_B$ bir $\mathbf{cat}^1$ -grup morfizmidir.

Diğer taraftan, bir $G: \mathbf{Cat}^1 - (\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{XMod}(\mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım. $\mathcal{A} = (A, s, t)$ ve $\mathcal{A}' = (A', s', t')$ birer $\mathbf{cat}^1$ -grup ve $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir $\mathbf{cat}^1$ -grup morfizmi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \theta &: \text{Im } s \times \ker s \rightarrow \ker s \\ (s(a), x) &\mapsto \theta(s(a), x) = s(a) \cdot x = s(a) + x - s(a) \end{aligned} \quad (2.27)$$

olmak üzere $G_0(\mathcal{A}) = (\ker s, \text{Im } s, t|_{\ker s}, \theta)$ bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca $G_1(f) = \langle f|_{\ker s}, f|_{\text{Im } s} \rangle$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olur.

Son olarak $GF \simeq 1_{\mathbf{XMod}(\mathbf{Gp})}$ ve $FG \simeq 1_{\mathbf{Cat}^1 - (\mathbf{Gp})}$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece ispat tamamlanır.

3. CAT¹-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu bölümde, Loday (1982) tarafından sunulan teknikler kullanılarak, çaprazlanmış modüller kategorisindeki cat^1 -objeleri karakterize ediyoruz. Bu objeler bağlantılı tüm homotopi 3-tiplerini modellemektedir.

Tanım 3.1. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ bir çaprazlanmış modül ve kaynak (source) ile hedef (target) olarak adlandırılan $s := \langle s_A, s_B \rangle$ ile $t := \langle t_A, t_B \rangle$ çaprazlanmış modül morfizmleri $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülünün birer endomorfizmi olsun.

$$s, t: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \quad (3.1)$$

Eğer,

- i) $st = t, ts = s$;
- ii) $[\ker s = (\ker s_A, \ker s_B, \alpha, \theta), \ker t = (\ker t_A, \ker t_B, \alpha, \theta)] = \mathbf{0}$

şartları sağlanıyorsa $(\mathcal{X}, s, t)$ üçlüsü bir cat^1 -çaprazlanmış modül olarak adlandırılır (Şekil 3.1).

Burada $\mathbf{0}$ ifadesi sıfır çaprazlanmış modülünü ($\mathbf{0} = (\{0\}, \{0\}, 1, 1)$) temsil etmektedir.

$$\begin{array}{ccc} A & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_A} \\ \xrightarrow{t_A} \end{array} & A \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_B} \\ \xrightarrow{t_B} \end{array} & B \end{array}$$

Şekil 3.1. Cat^1 -çaprazlanmış modül diyagramı.

Önerme 3.2. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ bir çaprazlanmış modül ve

$$s := \langle s_A, s_B \rangle, t := \langle t_A, t_B \rangle: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \quad (3.2)$$

çaprazlanmış modül morfizmleri $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülünün birer endomorfizmi olsun. Bu durumda $(\mathcal{X}, s, t)$ üçlüsü bir cat^1 -çaprazlanmış modüldür ancak ve ancak

- i) $s_A t_A = t_A, s_B t_B = t_B, t_A s_A = s_A$ ve $t_B s_B = s_B$,

- ii) her $n \in \ker t_B$ ve $s \in \ker s_A$ için $n \cdot s = s$,
- iii) her $h \in \ker s_B$ ve $u \in \ker t_A$ için $h \cdot u = u$,
- iv) $[\ker s_B, \ker t_B] = \{0\}$.

dir.

Not 3.3. Burada Önerme 3.2.'deki (i) şartının aslında Tanım 3.1'deki (i) şartına denk olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca, Önerme 3.2'deki (i) ve (iv) şartlarından (B, s_B, t_B) üçlüsünün bir cat^1 -grup olduğu anlaşılmaktadır. Son olarak, $\ker s$ ve $\ker t$ alt çaprazlanmış modülleri $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülünün birer ideali olduklarından, $\mathcal{X}$ çaprazlanmış modülünün $\ker s$ ve $\ker t$ tarafından üretilen komütatör alt çaprazlanmış modülü

$$\begin{aligned}
[\ker s, \ker t] &= [(\ker s_A, \ker s_B, \alpha, \theta), (\ker t_A, \ker t_B, \alpha, \theta)] \\
&= ([\ker t_B, \ker s_A] + [\ker s_B, \ker t_A], [\ker s_B, \ker t_B, \alpha, \theta]) \quad (3.3) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

olur ki Önerme 3.2'deki (ii)-(iv) şartlarından bu komütatör alt çaprazlanmış modülünün sıfır çaprazlanmış modülü olduğunu görürüz.

Örnek 3.4. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere

$$\begin{aligned}
s &= 1_{\mathcal{X}} = \langle 1_A, 1_B \rangle \\
t &= 1_{\mathcal{X}} = \langle 1_A, 1_B \rangle
\end{aligned} \quad (3.4)$$

birim çaprazlanmış modül morfizmleri alınırsa $(\mathcal{X}, 1_{\mathcal{X}}, 1_{\mathcal{X}})$ bir cat^1 -çaprazlanmış modül yapısına sahiptir.

Örnek 3.5. $\mathcal{A} = (A, s, t)$ bir cat^1 -grup ve $\mathcal{N} = (N, s_N, t_N)$, $\mathcal{A} = (A, s, t)$ cat^1 -grubunun bir ideali olsun. Bu durumda $(\mathcal{X} = (N, A, \text{inc}, \text{conj}), s, t)$ bir cat^1 -çaprazlanmış modül olur. Özel olarak; $N = A$ alınarak oluşturulan $(\mathcal{X} = (A, A, 1_A, \text{conj}), s, t)$ ve $N = \{0\}$ alınarak oluşturulan $(\mathcal{X} = (\{0\}, A, 0_A, \text{conj}), s, t)$ birer cat^1 -çaprazlanmış modüldür.

Örnek 3.6. $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere A ve B gruplarının sırasıyla kendi üzerlerine konjügasyon etkimelerinden elde edilen

$A \rtimes A$ ve $B \rtimes B$ yarı-direkt çarpım gruplarının birer cat^1 -grup yapısına sahip olduklarını biliyoruz. Bu durumda $(\mathcal{X} = (A \rtimes A, B \rtimes B, \alpha \times \alpha, \theta \times \theta), s, t)$ bir cat^1 -çaprazlanmış modül yapısına sahiptir.

Önerme 3.7. $(\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta), s, t)$ üçlüsü bir cat^1 -çaprazlanmış modül olmak üzere (A, s_A, t_A) bir cat^1 -gruptur.

İspat: Önerme 3.2'deki (i) şartından dolayı sadece $[\ker s_A, \ker t_A] = \{0\}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x \in \ker s_A$ ve $z \in \ker t_A$ olsun. Burada $x \in \ker s_A$ ve

$$s := \langle s_A, s_B \rangle, : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \quad (3.5)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= s_A(x) \\ &= \alpha(s_A(x)) \\ &= s_B(\alpha(x)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

olup böylece $\alpha(x) \in \ker s_B$ olduğu görülür. Ayrıca $z \in \ker t_A$ olduğundan

$$\begin{aligned} t_A(-x + z + x) &= t_A(-x) + t_A(z) + t_A(x) \\ &= t_A(-x) + t_A(x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $-x + z + x \in \ker t_A$ anlamına gelir. Böylece Önerme 3.2'deki (iii) şartından

$$\alpha(x) \cdot (-x + z + x) = -x + z + x \quad (3.8)$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ bir çaprazlanmış modül olduğundan Peiffer özdeşliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(x) \cdot (-x + z + x) &= x + (-x + z + x) - x \\ &= z \end{aligned} \quad (3.9)$$

bulunur. Eşitlik (3.8) ve (3.9) dan $-x + z + x = z$, yani $x + z = z + x$ olup bu ise $[\ker s_A, \ker t_A] = \{0\}$ olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.8. $(\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta), s, t)$ üçlüsü bir cat^1 -çaprazlanmış modül olmak üzere

$$\alpha: (A, s_A, t_A) \rightarrow (B, s_B, t_B) \quad (3.10)$$

bir cat^1 -grup morfizmidir.

İspat: Bunun için $s_B \alpha = \alpha s_A$ ve $t_B \alpha = \alpha t_A$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Fakat

$$s := \langle s_A, s_B \rangle, t := \langle t_A, t_B \rangle: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \quad (3.11)$$

birer çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan bu eşitliklerin doğruluğu sağlanmış olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.9. $(\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta), s, t)$ ve $(\mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta'), s', t')$ birer cat^1 -çaprazlanmış modül olmak üzere bir $f := (f_A, f_B): (\mathcal{X}, s, t) \rightarrow (\mathcal{X}', s', t')$ cat^1 -çaprazlanmış modül morfizmi aşağıdaki şartları sağlayan $f_A: A \rightarrow A'$ ve $f_B: B \rightarrow B'$ grup homomorfizmlerinden oluşur:

- i) $\langle f_A, f_B \rangle: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir ve
- ii) $f_A: (A, s_A, t_A) \rightarrow (A', s_{A'}, t_{A'})$ ve $f_B: (B, s_B, t_B) \rightarrow (B', s_{B'}, t_{B'})$ birer cat^1 -grup morfizmidir.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightleftharpoons[t]{s} & \mathcal{X} \\ \downarrow \langle f_A, f_B \rangle & & \downarrow \langle f_A, f_B \rangle \\ \mathcal{X}' & \xrightleftharpoons[t']{s'} & \mathcal{X}' \end{array}$$

Şekil 3.2. Cat^1 -çaprazlanmış modül morfizmi diyagramı.

Şekil 3.2'den de görüleceği gibi, bir cat^1 -çaprazlanmış modül morfizmi, bir araya geldiğinde bir çaprazlanmış modül morfizmi olan iki cat^1 -grup morfizminden oluşur. Diğer bir ifadeyle her bir bileşeni birer cat^1 -grup morfizminden oluşan bir çaprazlanmış modül morfizmidir diyebiliriz.

C_0 tüm cat^1 -çaprazlanmış modüllerin sınıfı, C_1 tüm cat^1 -çaprazlanmış modül morfizmlerinin sınıfı olmak üzere m çaprazlanmış modül morfizmlerinin bileşke işlemi ve her $(\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta), s, t)$ cat^1 -çaprazlanmış modülü için $i((\mathcal{X}, s, t)) = 1_{\mathcal{X}}$ çaprazlanmış modül morfizmi olarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye cat^1 -çaprazlanmış modüllerin kategorisi denir ve bu kategori **Cat**¹ – **(XMod(Gp))** ile veya kısaca **Cat**¹ – **XMod** gösterilir.



4. KATEGORİ DENKLİKLERİ

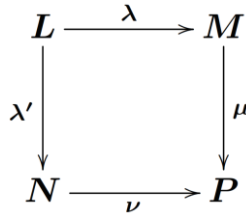
Bu bölümde, üçüncü bölümde yani tanımlanmış olan cat^1 -çaprazlanmış modül cebirsel yapısının kategorik olarak hangi cebirsel yapılara denk olduğu gösterilecektir.

4.1 Çaprazlanmış Kareler

Bu kısımda, Guin-Waléry ve Loday (1981) tarafından tanımlanan çaprazlanmış kare yapısını, ilgili morfizm kavramını ve bazı örnekleri hatırlatacağız.

Tanım 4.1. Gruplar üzerinde tanımlanan bir çaprazlanmış kare Şekil 4.1’de değişmeli diyagramı verilen ve $\lambda: L \rightarrow M$, $\lambda': L \rightarrow N$, $\mu: M \rightarrow P$ ve $\nu: N \rightarrow P$ olarak adlandırılan dört grup homomorfizmi, P grubunun kendi üzerine konjugasyon etkimesi olmak üzere L , M ve N grupları üzerine keyfi etkimleri ve bir $h: M \times N \rightarrow L$ fonksiyonundan oluşur. Bunlar her $l \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ve $p \in P$ için aşağıdaki şartları sağlamak zorundadır:

- i) $\lambda: L \rightarrow M$, $\lambda': L \rightarrow N$, $\mu: M \rightarrow P$ ve $\nu: N \rightarrow P$ birer çaprazlanmış modüldür, $\mu\lambda = \nu\lambda'$ ve λ ile λ' dönüşümleri P -eküivaryant, yani $\lambda(p \cdot l) = p \cdot \lambda(l)$ ve $\lambda'(p \cdot l) = p \cdot \lambda'(l)$ dir.
- ii) $\lambda(h(m, n)) = m + n \cdot (-m)$, $\lambda'(h(m, n)) = m \cdot n - n$,
- iii) $h(\lambda(l), n) = l + n \cdot (-l)$, $h(m, \lambda'(l)) = m \cdot l - l$,
- iv) $h(m + m', n) = m \cdot h(m', n) + h(m, n)$,
 $h(m, n + n') = h(m, n) + n \cdot h(m, n')$ ve
- v) $h(p \cdot m, p \cdot n) = p \cdot h(m, n)$.



Şekil 4.1. Çaprazlanmış kare diyagramı.

Örnek 4.2. P herhangi bir grup ve M ile N bu P grubunun herhangi iki normal altgrubu olsunlar. Bu durumda Şekil 4.2’de verilen diyagram

$$\begin{aligned}
h : M \times N &\rightarrow M \cap N \\
(m, n) &\mapsto h(m, n) = [m, n] = m + n - m - n
\end{aligned} \tag{4.1}$$

fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış kare yapısına sahiptir. Burada P grubunun diğerleri üzerine etkimesi de konjügasyon etkimesidir.

$$\begin{array}{ccc}
M \cap N & \xrightarrow{\text{inc}} & M \\
\downarrow \text{inc} & & \downarrow \text{inc} \\
N & \xrightarrow{\text{inc}} & P
\end{array}$$

Şekil 4.1. İçerme çaprazlanmış karesi.

Örnek 4.3. X bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Burada $(X; A, B)$ işaretli topolojik uzay üçlüsü için Şekil 4.3’de verilen sınır dönüşümlerinin oluşturduğu kare

$$h: \pi_2(A, A \cap B) \times \pi_2(B, A \cap B) \rightarrow \pi_3(X; A, B) \tag{4.2}$$

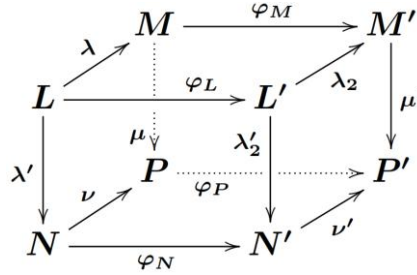
Whitehead triad çarpımı ile birlikte bir çaprazlanmış kare yapısına sahiptir. Bu çaprazlanmış kare Whitehead çaprazlanmış karesi veya temel çaprazlanmış kare olarak adlandırılır.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_3(X; A, B) & \xrightarrow{\lambda} & \pi_2(A, A \cap B) \\
\downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\
\pi_2(B, A \cap B) & \xrightarrow{\nu} & \pi_1(A \cap B)
\end{array}$$

Şekil 4.3. Whitehead çaprazlanmış karesi.

Tanım 4.4. $\mathcal{X}_2 = (L, M, N, P)$ ve $\mathcal{X}'_2 = (L', M', N', P')$ birer çaprazlanmış kare olmak üzere $\varphi_L: L \rightarrow L'$, $\varphi_M: M \rightarrow M'$, $\varphi_N: N \rightarrow N'$ ve $\varphi_P: P \rightarrow P'$ birer grup homomorfizmi olsunlar. Eğer bu grup homomorfizmleri ile oluşturulan küpün (Şekil 4.4) her yüzeyi değişmeli, yani $\lambda_2 \varphi_L = \varphi_M \lambda$, $\lambda'_2 \varphi_L = \varphi_N \lambda'$, $\nu' \varphi_N = \varphi_P \nu$ ve $\mu' \varphi_M = \varphi_P \mu$, ve bu grup homomorfizmleri ile h ve h' fonksiyonları arasında uyumluluk varsa, yani her $m \in M$ ve $n \in N$ için $\varphi_L(h(m, n)) = h'(\varphi_M(m), \varphi_N(n))$ eşitliği sağlanıyorsa bu

$\langle \varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P \rangle$ dörtlüsüne $\mathcal{X}_2$ çaprazlanmış karesinden $\mathcal{X}'_2$ çaprazlanmış karesine bir çaprazlanmış kare morfizmi denir.



Şekil 4.4 Çaprazlanmış kare morfizmi diyagramı.

$\mathcal{C}_0$ tüm çaprazlanmış karelerin sınıfı, $\mathcal{C}_1$ tüm çaprazlanmış kare morfizmlerinin sınıfı olmak üzere m çaprazlanmış kare morfizmlerinin bileşke işlemi ve her $\mathcal{X}_2 = (L, M, N, P)$ çaprazlanmış karesi için $i(\mathcal{X}_2) = 1_{\mathcal{X}_2} := \langle 1_L, 1_M, 1_N, 1_P \rangle$ birim çaprazlanmış kare morfizmi olarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye çaprazlanmış karelerin kategorisi denir ve bu kategori $\mathbf{X}_2\mathbf{Mod}(\mathbf{Gp})$ ile veya kısaca $\mathbf{X}_2\mathbf{Mod}$ gösterilir.

Teorem 4.5. Gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış karelerin kategorisi $\mathbf{X}_2\mathbf{Mod}$ ile $\mathbf{cat}^1$ -çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{XMod}$ doğal olarak denktir.

İspat: Öncelikle $\mathcal{X}_2 = (L, M, N, P)$ ve $\mathcal{X}'_2 = (L', M', N', P')$ çaprazlanmış karelerini ve bir $\langle \varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P \rangle: \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}'_2$ çaprazlanmış kare morfizmi alalım. Buradan $A = L \rtimes N, B = M \rtimes P$, her $(l, n) \in A$ için $s_A(l, n) = (0, n)$, $t_A(l, n) = (0, \lambda'(l) + n)$, her $(m, p) \in B$ için $s_B(m, p) = (0, p)$, $t_B(m, p) = (0, \mu(m) + p)$, $\alpha = \lambda \times \nu$ ve B grubunun A grubu üzerine θ etkimesi

$$\begin{aligned} B \times A &\rightarrow A \\ ((m, p), (l, n)) &\mapsto (m, p) \cdot (l, n) = (m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n), p \cdot n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak tanımlanırsa $(\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta), s = \langle s_A, s_B \rangle, t = \langle t_A, t_B \rangle)$ üçlüsü bir $\mathbf{cat}^1$ -çaprazlanmış modül olur. Öncelikle $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ dörtlüsünün bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim:

i) her $(l, n) \in A$ ve her $(m, p) \in B$ için

$$\begin{aligned}
\alpha((m, p) \cdot (l, n)) &= (\lambda \times \nu)((m, p) \cdot (l, n)) \\
&= (\lambda \times \nu)(m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n), p \cdot n) \\
&= (\lambda(m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n)), \nu(p \cdot n)) \\
&= (\lambda(m \cdot (p \cdot l)) + \lambda(h(m, p \cdot n)), \nu(p \cdot n)) \\
&= (m + \lambda(p \cdot l) - m + m + (p \cdot n) \cdot (-m), \nu(p \cdot n)) \\
&= (m + p \cdot \lambda(l) + (p \cdot n) \cdot (-m), \nu(p \cdot n)) \\
&= (m, p) + (\lambda \times \nu)(l, n) - (m, p) \\
&= (m, p) + \alpha(l, n) - (m, p)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ii) her $(l, n), (l_1, n_1) \in A$ için

$$\begin{aligned}
\alpha((l, n) \cdot (l_1, n_1)) &= (\lambda \times \nu)((l, n) \cdot (l_1, n_1)) \\
&= (\lambda(l), \nu(n)) \cdot (l_1, n_1) \\
&= (\lambda(l) \cdot (\nu(n) \cdot l_1) + h(\lambda(l), \nu(n) \cdot n_1), \nu(n) \cdot n_1) \\
&= (\lambda(l) \cdot (n \cdot l_1) + l + (\nu(n) \cdot n_1) \cdot (-l), \nu(n) \cdot n_1) \\
&= (l + (n \cdot l_1) - l + l + (\nu(n) \cdot n_1) \cdot (-l), \nu(n) \cdot n_1) \\
&= (l + (n \cdot l_1) + (\nu(n) \cdot n_1) \cdot (-l), \nu(n) \cdot n_1) \\
&= (l, n) + (l_1, n_1) - (l, n)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olduğundan (A, B, α, θ) bir çaprazlanmış modüldür. Şimdi $s = \langle s_A, s_B \rangle, t = \langle t_A, t_B \rangle$ dönüşümlerinin birer çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim. Önce $s = \langle s_A, s_B \rangle$ dönüşümünün bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim:

i) her $(l, n) \in A$ için

$$\begin{aligned}
s_B(\alpha(l, n)) &= s_B((\lambda \times \nu)(l, n)) \\
&= s_B(\lambda(l), \nu(n)) \\
&= (0, \nu(n))
\end{aligned} \tag{4.6}$$

ve diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\alpha(s_A(l, n)) &= (\lambda \times \nu)(s_A(l, n)) \\
&= (\lambda \times \nu)(0, n) \\
&= (0, \nu(n))
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olduğundan $s_B \alpha = \alpha s_A$ dır.

ii) her $(l, n) \in A$ ve her $(m, p) \in B$ için

$$\begin{aligned}
s_A((m, p) \cdot (l, n)) &= s_A(m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n), p \cdot n) \\
&= (0, p \cdot n)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ve diğer taraftan

$$\begin{aligned}
s_B(m, p) \cdot s_A(l, n) &= (0, p) \cdot (0, n) \\
&= (0, p \cdot n)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. Böylece $\langle s_A, s_B \rangle$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

Şimdi $t = \langle t_A, t_B \rangle$ dönüşümünün bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim:

i) her $(l, n) \in A$ için

$$\begin{aligned}
t_B(\alpha(l, n)) &= t_B((\lambda \times \nu)(l, n)) \\
&= t_B(\lambda(l), \nu(n)) \\
&= (0, \mu(\lambda(l)) + \nu(n))
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ve diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\alpha(t_A(l, n)) &= (\lambda \times \nu)(t_A(l, n)) \\
&= (\lambda \times \nu)(0, \lambda'(l) + n) \\
&= (0, \nu(\lambda'(l) + n)) \\
&= (0, \nu(\lambda'(l)) + \nu(n))
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olduğu bulunur. Buradan $\mu\lambda = \nu\lambda'$ olduğundan $t_B \alpha = \alpha t_A$ olduğu görülür.

ii) her $(l, n) \in A$ ve her $(m, p) \in B$ için

$$\begin{aligned}
t_A((m, p) \cdot (l, n)) &= t_A(m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n), p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'(m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n)) + p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'(m \cdot (p \cdot l)) + \lambda'(h(m, p \cdot n)) + p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'(m \cdot (p \cdot l)) + \lambda'(h(m, p \cdot n)) + p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'(m \cdot (p \cdot l)) + m \cdot (p \cdot n) - p \cdot n + p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'(m \cdot (p \cdot l)) + m \cdot (p \cdot n))
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ve diğer taraftan $\xi = (\mu(m) + p) \cdot (\lambda'(l) + n)$ dersek

$$\begin{aligned}
t_B(m, p) \cdot t_A(l, n) &= (0, \mu(m) + p) \cdot (0, \lambda'(l) + n) \\
&= (0 + h(0, \xi), \xi) \\
&= (0, \xi) \\
&= (0, \mu(m) \cdot (p \cdot \lambda'(l)) + \mu(m) \cdot (p \cdot n)) \\
&= (0, \lambda'(m \cdot (p \cdot l)) + m \cdot (p \cdot n))
\end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur. Böylece $\langle t_A, t_B \rangle$ dönüşümü de bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

Simdi Tanım 3.1'de verilen cat^1 -çaprazlanmış modül şartlarının sağlandığını göstermeliyiz.

- i) $s_A t_A = t_A$, $s_B t_B = t_B$, $t_A s_A = s_A$ ve $t_B s_B = s_B$ olduğu kolaylıkla görülebilir.
- ii) her $(m, p) \in \ker t_B$ ve $(l, n) \in \ker s_A$ için $\mu(m) = -p$ ve $n = 0$ olup

$$\begin{aligned}
(m, p) \cdot (l, n) &= (m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot 0), p \cdot 0) \\
&= (\mu(m) \cdot (p \cdot l) + h(m, 0), 0) \\
&= ((-p) \cdot (p \cdot l) + 0, 0) \\
&= ((-p + p) \cdot l, 0) \\
&= (0 \cdot l, 0) \\
&= (l, 0) \\
&= (l, n)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

dır.

- iii) her $(m, p) \in \ker s_B$ ve $(l, n) \in \ker t_A$ için $p = 0$ ve $\lambda'(l) = -n$ olup

$$\begin{aligned}
(m, p) \cdot (l, n) &= (m \cdot (0 \cdot l) + h(m, 0 \cdot n), 0 \cdot n) \\
&= (m \cdot l + h(m, \lambda'(-l)), n) \\
&= (m \cdot l + m \cdot (-l) + l, n) \\
&= (m \cdot (l + (-l)) + l, n) \\
&= (m \cdot 0 + l, n) \\
&= (0 + l, n) \\
&= (l, n)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

dir.

iv) her $(m, p) \in \ker s_B$ ve her $(m_1, p_1) \in \ker t_B$ için $p = 0$ ve $\mu(m_1) = -p_1$ olup

$$\begin{aligned}
(m, p) + (m_1, p_1) - (m, p) &= (m, 0) + (m_1, p_1) - (m, 0) \\
&= (m + m_1, p_1) + (-m, 0) \\
&= (m + m_1 + p_1 \cdot (-m), p_1) \\
&= (m + m_1 + \mu(-m_1) \cdot (-m), p_1) \\
&= (m + m_1 + (-m_1) + (-m) + m_1, p_1) \\
&= (m_1, p_1)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olduğundan $[\ker s_B, \ker t_B] = \{0\}$ bulunur.

Sonuç olarak $(\mathcal{X}, s, t)$ üçlüsünün bir cat^1 -çaprazlanmış modül olduğu görülür. Benzer şekilde $\mathcal{X}'_2 = (L', M', N', P')$ çaprazlanmış karesinden de $(\mathcal{X}', s', t')$ cat^1 -çaprazlanmış modülü elde edilir. Ayrıca, bu durumda, $\langle \varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P \rangle: \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}'_2$ çaprazlanmış kare morfizminden elde edilen $(\varphi_L \times \varphi_N, \varphi_M \times \varphi_P): (\mathcal{X}, s, t) \rightarrow (\mathcal{X}', s', t')$ dönüşümü bir cat^1 -çaprazlanmış modül morfizmidir. Böylelikle, **X₂Mod** Gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış karelerin kategorisinden **Cat¹ - XMod** cat^1 -çaprazlanmış modüllerin kategorisine bir **F** fanktoru tanımlamış olduk.

Tersine olarak $(\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta), s, t)$ ve $(\mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta'), s', t')$ birer cat^1 -çaprazlanmış modül ve $f := (f_A, f_B): (\mathcal{X}, s, t) \rightarrow (\mathcal{X}', s', t')$ bir cat^1 -çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda $L = \ker s_A$, $M = \ker s_B$, $N = \text{Im } s_A$, $P = \text{Im } s_B$, $\lambda = \alpha|_{\ker s_A}$, $\lambda' = t_A|_{\ker s_A}$, $\mu = t_B|_{\ker s_B}$, $\nu = \alpha|_{\text{Im } s_A}$ ve her $m \in M$ ve $n \in N$ için $h: M \times N \rightarrow L$, $(m, n) \mapsto h(m, n) = m \cdot n - n$ olmak üzere $\mathcal{X}_2 =$

(L, M, N, P) bir çaprazlanmış karedir. Gerçekten; burada P grubunun L , M ve N grupları üzerine etkimeleri sırasıyla

$$\begin{aligned} P \times L &\rightarrow L \\ (p, l) &\mapsto p \cdot l = \theta(p, l) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} P \times M &\rightarrow M \\ (p, m) &\mapsto p \cdot m = p + m - p \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} P \times N &\rightarrow M \\ (p, n) &\mapsto p \cdot n = \theta(p, n) \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi, öncelikle, $h: M \times N \rightarrow L$ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ ve $n \in N$ için $s_B(m) = 0$ olur ve $s_A(a) = n$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} s_A(m \cdot s_A(a) - s_A(a)) &= s_A(m \cdot s_A(a)) - s_A s_A(a) \\ &= s_B(m) \cdot s_A s_A(a) - s_A s_A(a) \\ &= 0 \cdot s_A(a) - s_A(a) \\ &= s_A(a) - s_A(a) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

olup $m \cdot n - n \in L$ olduğu görülür. Yani h dönüşümü iyi tanımlıdır. Şimdi çaprazlanmış kare şartlarının ((i)-(v)) sağlandığını gösterelim.

- i) $\lambda: L \rightarrow M$, $\lambda': L \rightarrow N$, $\mu: M \rightarrow P$ ve $\nu: N \rightarrow P$ morfizmlerinin uygun etkimelerle birlikte birer çaprazlanmış modül olduğu açıkça görülmektedir. Gerçekten, (A, s_A, t_A) ve (B, s_B, t_B) birer cat^1 -grup olduğundan Teorem 2.57 gereği $\lambda': L \rightarrow N$ ve $\mu: M \rightarrow P$ birer çaprazlanmış modüldür. Ayrıca, Örnek 2.48'den $\nu: N \rightarrow P$, Örnek 2.51'den $\lambda: L \rightarrow M$ birer çaprazlanmış modüldür. Bununla birlikte $\mu\lambda = \nu\lambda'$ olduğu kolaylıkla görülmektedir. Bu şart için, son olarak, her $p \in P$ ve her $l \in L$ için

$$\begin{aligned}
\lambda(p \cdot l) &= \alpha(p \cdot l) \\
&= p + \alpha(l) - p \\
&= p \cdot \alpha(l) \\
&= p \cdot \lambda(l)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

ve $p \in P = \text{Im } s_B$ olduğundan $p = s_B(b)$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. O halde

$$\begin{aligned}
\lambda'(p \cdot l) &= t_A(s_B(b) \cdot l) \\
&= t_B s_B(b) \cdot t_A(l) \\
&= s_B(b) \cdot t_A(l) \\
&= p \cdot \lambda'(l)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

olur. Yani, λ ve λ' dönüşümleri P –invarianttır.

ii) her $m \in M$ ve $n \in N$ için $n = s_A(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ olup

$$\begin{aligned}
\lambda h(m, n) &= \lambda(m \cdot n - n) \\
&= \alpha(m \cdot n - n) \\
&= m + \alpha(n) - m - \alpha(n) \\
&= m + \alpha(n) \cdot (-m) \\
&= m + v(n) \cdot (-m) \\
&= m + n \cdot (-m)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda' h(m, n) &= \lambda'(m \cdot s_A(a) - s_A(a)) \\
&= t_A(m \cdot s_A(a) - s_A(a)) \\
&= t_A(m \cdot s_A(a)) - t_A(s_A(a)) \\
&= t_B(m) \cdot t_A(s_A(a)) - s_A(a) \\
&= \mu(m) \cdot s_A(a) - s_A(a) \\
&= \mu(m) \cdot n - n \\
&= m \cdot n - n
\end{aligned} \tag{4.24}$$

bulunur.

iii) her $m \in M$, $l \in L$ ve $n \in N$ için $m \cdot l - l \in N$ olduğundan $m \cdot l - l = s_A(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ bulunur ki buradan

$$\begin{aligned}
 h(\lambda(l), n) &= \lambda(l) \cdot n - n \\
 &= \alpha(l) \cdot n - n \\
 &= l + n - l - n \\
 &= l + n \cdot (-l)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

ve

$$\begin{aligned}
 h(m, \lambda'(l)) &= m \cdot \lambda'(l) - \lambda'(l) \\
 &= t_B(m) \cdot t_A(l) - t_A(l) \\
 &= t_A(m \cdot l - l) \\
 &= t_A(s_A(a)) \\
 &= s_A(a) \\
 &= m \cdot l - l
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur.

iv) her $m, m' \in M$ ve her $n, n' \in N$ için

$$\begin{aligned}
 h(m + m', n) &= (m + m') \cdot n - n \\
 &= m \cdot (m' \cdot n) - n \\
 &= m \cdot (m' \cdot n) - m \cdot n + m \cdot n - n \\
 &= m \cdot (m' \cdot n - n) + (m \cdot n - n) \\
 &= m \cdot h(m', n) + h(m, n)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
 h(m, n + n') &= m \cdot (n + n') - (n + n') \\
 &= m \cdot n + m \cdot n' - n' + n \\
 &= m \cdot n - n + n + (m \cdot n' - n') + n \\
 &= h(m, n) + (n + h(m, n') + n) \\
 &= h(m, n) + n \cdot h(m, n)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

bulunur.

v) Son olarak her $p \in P$, her $m \in M$ ve her $n \in N$ için

$$\begin{aligned}
h(p \cdot m, p \cdot n) &= h(p + m - p, p \cdot n) \\
&= (p + m - p) \cdot (p \cdot n) - p \cdot n \\
&= (p + m - p + p) \cdot n - p \cdot n \\
&= p \cdot (m \cdot n) - p \cdot n \\
&= p \cdot (m \cdot n - n) \\
&= p \cdot h(m, n)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç olarak $\mathcal{X}_2 = (L, M, N, P)$ dörtlüsünün bir çaprazlanmış kare olduğu görülür. Benzer şekilde $(\mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta'), s', t')$ cat^1 -çaprazlanmış modülünden de $\mathcal{X}'_2 = (L', M', N', P')$ çaprazlanmış karesi elde edilir. Ayrıca, bu durumda, $\varphi_L = f_{A| \ker s_A}$, $\varphi_M = f_{B| \ker s_B}$, $\varphi_N = f_{A| \text{Im } s_A}$ ve $\varphi_P = f_{B| \text{Im } s_B}$ olmak üzere $f := (f_A, f_B): (\mathcal{X}, s, t) \rightarrow (\mathcal{X}', s', t')$ cat^1 -çaprazlanmış modül morfizminden elde edilen $\langle \varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P \rangle: \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}'_2$ dönüşümü bir çaprazlanmış kare morfizmidir. Böylelikle, **Cat¹ – XMod** cat^1 -çaprazlanmış modüllerin kategorisinden **X₂Mod** Gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış karelerin kategorisine bir **G** fanktoru tanımlamış olduk. Bu **F** ve **G** fanktorları için **FG** $\simeq 1_{\text{Cat}^1\text{-XMod}}$ ve **GF** $\simeq 1_{\text{X}_2\text{Mod}}$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Cat²–Gruplar

Tanım 4.6. G bir grup ve $i \in \{1, 2\}$ için $s_i, t_i: G \rightarrow G$ dört grup endomorfizmi olmak üzere eğer

i) her $i \in \{1, 2\}$ için

$$s_i t_i = t_i, t_i s_i = s_i, \tag{4.30}$$

ii) $i \neq j$ olacak şekilde her $i, j \in \{1, 2\}$ için

$$s_i s_j = s_j s_i, t_i t_j = t_j t_i, s_i t_j = t_j s_i, \tag{4.31}$$

iii) her $i \in \{1, 2\}$ için

$$[\ker s_i, \ker t_i] = \{0\} \tag{4.32}$$

şartları sağlanıyorsa (G, s_1, t_1, s_2, t_2) beşlisine bir cat^2 -grup denir (Loday, 1982).

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} & G \\ t_2 \downarrow & & \downarrow s_2 \\ G & & \end{array}$$

Şekil 4.5. Cat^2 -grup diyagramı.

Şekil 4.5'den de görülüyor ki (G, s_1, t_1, s_2, t_2) cat^2 -grubu aslında aynı G grubu üzerinde birbirinden bağımsız fakat birbiriyle uyumlu (G, s_1, t_1) ve (G, s_2, t_2) cat^1 -gruplarından oluşur.

(G, s_1, t_1, s_2, t_2) ve $(G', s'_1, t'_1, s'_2, t'_2)$ birer cat^2 -grup olmak üzere bir $f: G \rightarrow G'$ grup homomorfizmi her $i \in \{1, 2\}$ için $f s_i = s'_i f$ ve $f t_i = t'_i f$ şartlarını sağlıyorsa bu f dönüşümüne bir cat^2 -grup morfizmi denir. Kısaca belirtmek gerekirse bir cat^2 -grup morfizmi cat^2 -grubu oluşturan her bir cat^1 -grup için bir cat^1 -grup morfizmidir. Ya da başka bir ifadeyle $f: G \rightarrow G'$ grup homomorfizminin bir cat^2 -grup morfizmi olabilmesi için gerek ve yeter şart Şekil 4.6'da verilen diyagramın değişmeli olmasıdır.

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} & G & & \\ & \searrow f & & \searrow f & \\ t_2 \downarrow & & G' & \xrightleftharpoons[t'_1]{s'_1} & G' \\ & \searrow f & & \searrow f & \\ & & G' & \xrightleftharpoons[t'_2]{s'_2} & G' \end{array}$$

Şekil 4.6. Cat^2 -grup morfizmi diyagramı.

C_0 tüm cat^2 -grupların sınıfı, C_1 tüm cat^2 -grup morfizmlerinin sınıfı olmak üzere m cat^2 -grup morfizmlerinin (grup homomorfizmlerinin) bileşke işlemi ve her (G, s_1, t_1, s_2, t_2) cat^2 -grubu için $i((G, s_1, t_1, s_2, t_2)) = 1_{(G, s_1, t_1, s_2, t_2)} := 1_G$ birim grup homomorfizmi olarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye cat^2 -grupların kategorisi denir ve bu kategori $\mathbf{Cat}^2 - \mathbf{Gp}$ ile gösterilir.

Teorem 4.7. Cat^2 –grupların kategorisi $\mathbf{Cat}^2 - \mathbf{Gp}$ ile cat^1 –çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{XMod}$ doğal olarak denktir.

İspat: Öncelikle (G, s_1, t_1, s_2, t_2) ve $(G', s'_1, t'_1, s'_2, t'_2)$ cat^2 –gruplarını ve bir $f: (G, s_1, t_1, s_2, t_2) \rightarrow (G', s'_1, t'_1, s'_2, t'_2)$ cat^2 –grup morfizmi alalım. Burada, $A = \ker s_1$, $B = \text{Im } s_1$, $\alpha = t_1|_A$, $s_A = s_2|_A$, $t_A = t_2|_A$, $s_B = s_2|_B$ ve $t_B = t_2|_B$ olarak alınır

$$\begin{aligned} \theta : B \times A &\rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto \theta(b, a) = b \cdot a = b + a - b \end{aligned} \quad (4.33)$$

etkimesi ile birlikte Teorem 2.57’den $\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta)$ bir çaprazlanmış modül olur ve bununla birlikte $(\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta), s = \langle s_A, s_B \rangle, t = \langle t_A, t_B \rangle)$ bir cat^1 –çaprazlanmış modül olur. Gerçekten;

- i) (G, s_1, t_1, s_2, t_2) bir cat^2 –grup olduğundan $s_A t_A = t_A$, $s_B t_B = t_B$, $t_A s_A = s_A$, $t_B s_B = s_B$ olduğu açıktır.
- ii) (G, s_1, t_1, s_2, t_2) bir cat^2 –grup olduğundan her $n \in \ker t_B$ ve $s \in \ker s_A$ için

$$\begin{aligned} n + s &= s + n \\ n + s - n &= s \\ n \cdot s &= s, \end{aligned} \quad (4.34)$$

- iii) (G, s_1, t_1, s_2, t_2) bir cat^2 –grup olduğundan her $h \in \ker s_B$ ve $u \in \ker t_A$ için

$$\begin{aligned} h + u &= u + h \\ h + u - h &= u \\ h \cdot u &= u, \end{aligned} \quad (4.35)$$

- iv) (G, s_1, t_1, s_2, t_2) bir cat^2 –grup olduğundan $[\ker s_B, \ker t_B] = \{0\}$ dir.

Benzer şekilde $(G', s'_1, t'_1, s'_2, t'_2)$ cat^2 –grubundan $(\mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta'), s' = \langle s'_A, s'_B \rangle, t' = \langle t'_A, t'_B \rangle)$ cat^1 –çaprazlanmış modülü elde edilir. Ayrıca $f: (G, s_1, t_1, s_2, t_2) \rightarrow (G', s'_1, t'_1, s'_2, t'_2)$ cat^2 –grup morfizminden $f_A = f|_{\ker s_1}$ ve $f_B = f|_{\text{Im } s_1}$ olmak üzere $f := (f_A, f_B): (\mathcal{X}, s, t) \rightarrow (\mathcal{X}', s', t')$ cat^1 –çaprazlanmış modül morfizmi elde edilir. Bu şekilde bir $\mathbf{F}: \mathbf{Cat}^2 - \mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{Cat}^1 - \mathbf{XMod}$ fanktoru elde

etmiş oluruz.

Diğer taraftan $(\mathcal{X} = (A, B, \alpha, \theta), s, t)$ ve $(\mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta'), s', t')$ birer cat^1 -çaprazlanmış modül ve $f := (f_A, f_B): (\mathcal{X}, s, t) \rightarrow (\mathcal{X}', s', t')$ bir cat^1 -çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda

$$G := (\ker s_A \rtimes \text{Im } s_A) \rtimes (\ker s_B \rtimes \text{Im } s_B) \quad (4.36)$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} s_1 : G &\rightarrow G \\ ((a, x), (b, y)) &\mapsto ((0, x), (0, y)) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} t_1 : G &\rightarrow G \\ ((a, x), (b, y)) &\mapsto ((0, t_A(a) + x), (0, t_B(b) + y)) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} s_2 : G &\rightarrow G \\ ((a, x), (b, y)) &\mapsto ((0, 0), (b, y)) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} t_2 : G &\rightarrow G \\ ((a, x), (b, y)) &\mapsto ((0, 0), (\alpha(a), \alpha(x)) + (b, y)) \end{aligned} \quad (4.40)$$

olmak üzere (G, s_1, t_1, s_2, t_2) beşlisi bir cat^2 -grup yapısına sahiptir. Benzer şekilde $(\mathcal{X}' = (A', B', \alpha', \theta'), s', t')$ cat^1 -çaprazlanmış modülünden $(G', s'_1, t'_1, s'_2, t'_2)$ cat^2 -grubu elde edilir. Ayrıca $f := (f_A, f_B): (\mathcal{X}, s, t) \rightarrow (\mathcal{X}', s', t')$ cat^1 -çaprazlanmış modül morfizminden bir $f|_{\ker s_A} \times f|_{\text{Im } s_A} \times f|_{\ker s_B} \times f|_{\text{Im } s_B}: G \rightarrow G'$ cat^2 -grup morfizmi elde edilir. Bu şekilde bir $\mathbf{G}: \mathbf{Cat}^1 - \mathbf{XMod} \rightarrow \mathbf{Cat}^2 - \mathbf{Gp}$ fanktoru elde etmiş oluruz.

Son olarak bu $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{G}$ fanktorları için $\mathbf{FG} \simeq 1_{\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{XMod}}$ ve $\mathbf{GF} \simeq 1_{\mathbf{Cat}^2 - \mathbf{Gp}}$ doğal denklilikleri kolaylıkla görülebilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.3 Çift Grup–Grupoidler

Çift grup-grupoidler, Temel vd. (2020) tarafından grup-grupoidlerin (grupların kategorisindeki iç kategorilerin) kategorisindeki iç kategoriler olarak tanımlanmıştır. Şimdi çift grup-grupoidlerin detaylı tanımını aşağıda verelim.

Tanım 4.8. Bir $\mathcal{G} = (S, H, V, P)$ çift grup-grupoidi Şekil 4.7’deki diyagram değişmeli olacak şekilde birbiriyle uyumlu (S, H) , (S, V) , (H, P) ve (V, P) grup-grupoidlerinden oluşur.

$$\begin{array}{ccc}
 S & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xleftarrow{\varepsilon^h} \end{array} & H \\
 \begin{array}{c} \uparrow d_1^h \\ \downarrow d_0^v \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow d_1^H \\ \downarrow d_0^H \end{array} \\
 V & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^V} \\ \xleftarrow{\varepsilon^V} \end{array} & P \\
 & \begin{array}{c} \downarrow d_1^V \\ \uparrow d_0^V \end{array} &
 \end{array}$$

Şekil 4.7. Çift grup-grupoid diyagramı.

Örnek 4.9. $G = (G_1, G_0)$ bir grup-grupoid ise $\mathcal{G} = (G_1, G_1, G_0, G_0)$ bir çift grup-grupoid yapısına sahiptir. Bu çift grup-grupoid aşıkâr çift grup-grupoid olarak adlandırılır. Buradaki yapısal dönüşümler Şekil 4.8’deki diyagramda gösterilmiştir.

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{1} \end{array} & G_1 \\
 \begin{array}{c} \uparrow d_1^G \\ \downarrow d_0^G \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow d_1^G \\ \downarrow d_0^G \end{array} \\
 G_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{1} \end{array} & G_0 \\
 & \begin{array}{c} \downarrow d_1^G \\ \uparrow d_0^G \end{array} &
 \end{array}$$

Şekil 4.8. Aşıkâr çift grup-grupoid diyagramı.

Örnek 4.10. (A, B, α, θ) bir topolojik çaprazlanmış modül olmak üzere $\pi(A, B, \alpha, \theta) = (\pi(A \rtimes B), \pi(B), A \rtimes B, B)$ dörtlüsü bir çift grup-grupoid yapısına sahiptir (bakınız Şekil 4.9).

$$\begin{array}{ccc}
\pi(A \times B) & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xleftarrow{\varepsilon^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \end{array} & \pi(B) \\
\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ d_0^v \varepsilon^v d_1^v \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ d_0^H \varepsilon^H d_1^H \end{array} \\
A \times B & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^V} \\ \xleftarrow{\varepsilon^V} \\ \xrightarrow{d_1^V} \end{array} & B
\end{array}$$

Şekil 4.9. Temel çift grup-grupoid diyagramı.

$\mathcal{G} = (S, H, V, P)$ ve $\mathcal{G}' = (S', H', V', P')$ birer çift grup-grupoid olmak üzere $f_s: S \rightarrow S'$, $f_h: H \rightarrow H'$, $f_v: V \rightarrow V'$ ve $f_p: P \rightarrow P'$ grup-homomorfizmleri verilsin. Eğer Şekil 4.10'de verilen diyagram değişmeli oluyorsa $\mathcal{F} = (f_s, f_h, f_v, f_p)$ dördlüsüne $\mathcal{G}$ çift grup-grupoidinden $\mathcal{G}'$ çift grup-grupoidine tanımlı bir çift grup-grupoid morfizmi denir.

$$\begin{array}{ccccc}
& & H & \xrightarrow{f_h} & H' \\
& \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
S & \xrightarrow{f_s} & S' & & S' \\
& \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
& & P & \xrightarrow{f_p} & P' \\
& \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\
V & \xrightarrow{f_v} & V' & & V'
\end{array}$$

Şekil 4.10. Çift grup-grupoid morfizmi diyagramı.

$\mathcal{C}_0$ tüm çift grup-grupoidlerin sınıfı, $\mathcal{C}_1$ tüm çift grup-grupoid morfizmlerinin sınıfı olmak üzere m çift grup-grupoid morfizmlerinin bileşke işlemi ve her $\mathcal{G} = (S, H, V, P)$ çift grup-grupoidi için $i(\mathcal{G}) = 1_{\mathcal{G}} := (1_S, 1_H, 1_V, 1_P)$ birim çift grup-grupoid morfizmi olarak oluşturulan sistem bir kategori oluşturur. Bu kategoriye çift grup-grupoidlerin kategorisi denir ve bu kategori **DbGpGd** ile gösterilir.

Temel vd. (2020) çift grup-grupoidlerle ilgili aşağıdaki kategori denkliğini elde etmişlerdir.

Teorem 4.11. Çift grup-grupoidlerin kategorisi **DbGpGd** ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi **X₂Mod** doğal olarak denktir (Temel vd., 2020).

Teorem 4.5 ve Teorem 4.11'in bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.12. Çift grup-grupoidlerin kategorisi **DbGpGd** ile cat^1 -çaprazlanmış modüllerin kategorisi **Cat**¹ – **XMod** doğal olarak denktir.

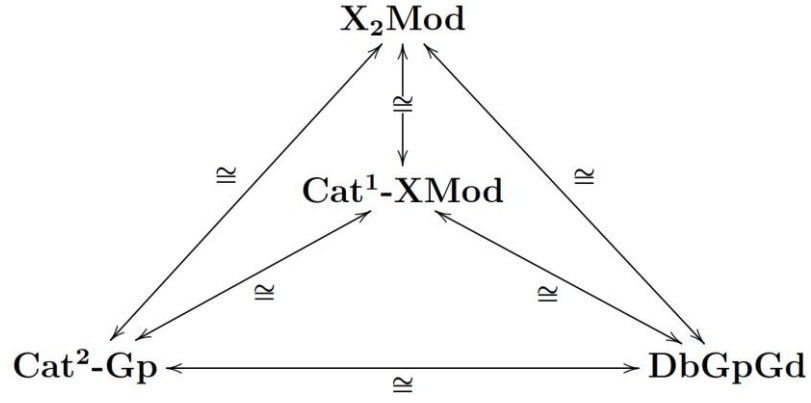


5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, öncelikle, çaprazlanmış modüllerin tarihsel gelişimi ve literatürdeki yeri gözden geçirilmiş, bu yapının homotopi teorisi, temsil teorisi, homoloji ve kohomoloji kuramı, cebirsel K-teorisi ve fonksiyonel analiz gibi farklı alanlarda oynadığı rol ortaya konmuştur. Çaprazlanmış modüllerin, yalnızca soyut bir cebirsel yapı değil, aynı zamanda topolojik fenomenleri doğru biçimde yansıtan bir model olduğu bir kez daha vurgulanmıştır. Bu bağlamda, Whitehead'ın öncü tanımından başlayarak Brown, Higgins ve Loday'ın katkılarıyla gelişen bu kuramsal çerçevenin önemi bir kez daha teyit edilmiştir.

Tezde, temel hedef olarak, gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorisinde cat^1 -obje yapıları oluşturulmuş ve tanımlanmıştır. Bu cebirsel yapılar cat^1 -çaprazlanmış modül olarak adlandırılmıştır. Bu yeni nesneler cebirsel açıdan incelenmiş, özellikleri sistematik bir biçimde ortaya konmuştur. Özellikle, bu yapıların homotopi tiplerini temsil etmedeki başarısı, klasik çaprazlanmış modül teorisinin bir üst boyuta taşınması anlamına gelmektedir. Böylece, homotopik bilgiyi taşıyan cebirsel modellerin daha esnek ve kapsayıcı bir hale gelmesi sağlanmıştır.

Son olarak cat^1 -çaprazlanmış modüllerin kategorisi **$\text{Cat}^1 - \mathbf{XMod}$** oluşturulup bu kategori ile çaprazlanmış karelerin kategorisi **$\mathbf{X}_2\mathbf{Mod}$** , cat^2 -grupların kategorisi **$\text{Cat}^2 - \mathbf{Gp}$** ve çift grup-grupoidlerin kategorisi **$\mathbf{DbGpGd}$** arasında doğal kategoriksel denklikler kurulmuştur. Bu denklikler Şekil 5.1'deki üçgenin iç kısmındaki denkliklerdir. Üçgenin kenarlarını oluşturan denklikler ise literatürdeki bilinen denkliklerdir. Bu bağlamda, bu dört cebirsel yapıdan herhangi ikisinin birbirine dönüşebilirliği fonktoriyel bir çerçevede adım adım gösterilmiş ve bu dönüşümlerin iki yönlü doğallığı ayrıntılı olarak ispatlanmıştır. Bu denklikler, matematikte sıkça rastlanan kavramsal zenginlik ve yöntem çeşitliliğinin bir örneğidir. Zira aynı matematiksel gerçeklik, farklı formalizm ve yapılarda kendisini gösterebilmekte, bu da araştırmacılara yeni bakış açıları sunmaktadır. Bu sayede, bir alanda zor görünen bir problem, diğer alanda daha kolay çözümlenebilir hale gelmektedir.



Şekil 5.1. Doğal kategori denklikleri diyagramı.

Tezde elde edilen bulgular, yalnızca teorik değil, aynı zamanda olası uygulamalar açısından da değerlidir. Özellikle homotopi tiplerinin incelenmesi, topolojik uzayların sınıflandırılması ve yüksek boyutlu cebirsel yapıların modellenmesi gibi konularda bu sonuçların doğrudan etkisi bulunmaktadır. Ayrıca, grup uzantılarının sınıflandırılması, temsil teorisi bağlamında grupların etkilerinin modellenmesi ve C^* -cebirler üzerindeki eylemlerin incelenmesi gibi farklı konularda da bu yapıların kullanılabileceği öngörülmektedir.

Bununla birlikte, elde edilen sonuçların matematiğin daha geniş alanlarına yayılabilmesi için çeşitli araştırma önerileri de sunulabilir. Öncelikle, cat^1 -çaprazlanmış modüllerin homolojik ve kohomolojik özelliklerinin derinlemesine incelenmesi, bu yapıların daha güçlü bir şekilde anlaşılmasını sağlayacaktır. Özellikle, grup homolojisi ve kohomolojisi ile olan ilişkilerin araştırılması hem teorik hem de uygulamalı açıdan zengin sonuçlar verebilir.

İkinci olarak, bu çalışmada elde edilen karakterizasyonların daha yüksek boyutlara genelleştirilmesi mümkündür. Örneğin, cat^2 -gruplar ve bunlara karşılık gelen cat^2 -çaprazlanmış modüller üzerine yapılacak çalışmalar, homotopi 3-tiplerinin cebirsel modellerinin daha iyi anlaşılmasına katkı sağlayacaktır. Benzer şekilde, çift grup-grupoidler veya daha genel olarak n –grupoidler bağlamında çaprazlanmış modüllerin rolü araştırılabilir. Bu tür çalışmalar, cebirsel topolojide yüksek boyutlu yapılara yönelik daha kapsamlı bir teori geliştirilmesine katkıda bulunacaktır.

Üçüncü olarak, çaprazlanmış modüllerin ve cat^1 -yapılarının topolojik gruplar, Lie grupları ve C^* -cebirler gibi daha zengin yapılara uygulanması dikkate değer bir

araştırma yönüdür. Özellikle, topolojik grup eylemleri ve diferansiyel geometrik yapılarla bağlantı kurulması hem cebirsel topoloji hem de geometrik analiz açısından yeni ufuklar açabilir.

Dördüncü olarak, bilgisayar cebiri bağlamında çaprazlanmış modüller ve Cat^1 -grupların algoritmik yönleri araştırılabilir. Bu yapıların hesaplamalı yöntemlerle modellenmesi ve somut örnekler üzerinden incelenmesi hem eğitimsel hem de araştırma açısından yararlı olacaktır. Özellikle SageMath veya GAP gibi cebirsel yazılımların bu bağlamda kullanılması, teorisinin daha geniş kitlelerce erişilebilir hale gelmesini sağlayabilir.

Elde edilen doğal denklikler ise, yüksek boyutlu homotopi teorisinin kategorik temellerine katkı sağladığı gibi, 2-boyutlu homolojik cebirsel yapılarla daha soyut seviyelerde çalışmak isteyen araştırmacılar için de güçlü bir araç sunmaktadır. Ayrıca, bu tür dönüşümler yoluyla daha karmaşık yapıların modellenmesi ve farklı kategorik sistemler arasında köprüler kurulması mümkün hale gelmektedir. Bu bağlamda elde edilen sonuçlar, gelecekte daha üst düzey çaprazlanmış yapıların (örneğin çaprazlanmış küpler, çaprazlanmış n –modüller) incelenmesi için de sağlam bir temel oluşturacaktır.

KAYNAKLAR

- Akız, H. F., Alemdar, N., Mucuk, O. ve Şahan, T., 2013. Coverings of internal groupoids and crossed modules in the category of groups with operations, *Georgian Mathematical Journal*, 20, 2, 223–238.
- Arvasi, Z. ve Ulualan, E., 2015. Homotopical aspects of commutative algebras I: freeness conditions for crossed squares, *Journal of Homotopy and Related Structures*, 10, 495–518.
- Brown, R. ve Higgins, P. J., 1978. On the algebra of cubes, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 21, 233–260.
- Brown, R. ve Higgins, P. J., 1981. On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42, 1, 193–212.
- Brown, R. ve Loday, J. L., 1987. Van Kampen theorems for diagrams of spaces, *Topology*, 26, 3, 311–335.
- Conduché, D., 1984. Modules Croisés Généralisés de Longueur 2, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 34, 155–178.
- Eilenberg, S. ve MacLane, S., 1942. Group Extensions and Homology, *Annals of Mathematics*, 43, 4, 757–831.
- Eilenberg, S. ve MacLane, S., 1945. General theory of natural equivalences, *Transactions of the American Mathematical Society*, 58, 231–294.
- Ellis, G.J., 1995. Crossed squares and combinatorial homotopy, *Mathematica Gottingensis, Schriftenreihe des SFB Geometrie und Analysis*, Heft 26, Göttingen.
- Exel, R., 1997. Amenability for Fell bundles, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 492, 41–73.
- Guin-Waléry, D. ve Loday, J. L., 1981. Obstruction a l’Excision en K-Theorie Algebrique, In: Friedlander, E.M., Stein, M.R. (eds) *Algebraic K-Theory Evanston 1980. Lecture Notes in Mathematics*, vol 854. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Higgins, P.J., 1971. *Categories and groupoids*, Van Nostrand Reinhold.
- Jurčo, B., 2002. Crossed module bundle gerbes; classification, string group and differential geometry, *Communications in Mathematical Physics*, 232, 569–581.
- Loday, J. L., 1982. Spaces with finitely many nontrivial homotopy groups, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 24, 2, 179–202.

- Martins, J. F. ve Picken, R., 2011. On two-dimensional holonomy, Transactions of the American Mathematical Society, 363, 4425–4455.
- Mucuk, O., 2013. Topoloji ve Kategori Teorisi (Geliştirilmiş 3. Basım), Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Mutlu, A. ve Porter, T., 1998. Fibrations of crossed complexes and homotopy classification of maps of CW-complexes, Journal of Pure and Applied Algebra, 116, 233–256.
- Norrie, K., 1990. Actions and automorphisms of crossed modules, Bulletin de la Société Mathématique de France, 118, 2, 129–146.
- Orzech, G., 1972a. Obstruction theory in algebraic categories, I, Journal of Pure and Applied Algebra, 2, 4, 287–314.
- Orzech, G., 1972b. Obstruction theory in algebraic categories, II, Journal of Pure and Applied Algebra, 2, 4, 315–340.
- Porter, T., 1987. Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 30, 3, 373–381.
- Porter, T., 1998. Topological quantum field theories from homotopy n –types, Journal of the London Mathematical Society, 58, 3, 723–732.
- Şahan, T., 2019. Further remarks on liftings of crossed modules, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 48, 3, 743–752.
- Şahan, T. ve Mucuk, O., 2020. Normality and quotient in the category of crossed modules within the category of groups with operations, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 38, 7, 169–179.
- Temel, S., Şahan, T. ve Mucuk, O., 2020. Crossed modules, double group-groupoids and crossed squares, Filomat, 34, 6, 1755–1769.
- Whitehead, J. H. C., 1946. Note on a previous paper entitled “On adding relations to homotopy groups”, Annals of Mathematics, 47, 4, 806–810.
- Whitehead, J. H. C., 1948. On operators in relative homotopy groups, Annals of Mathematics, 49, 610–640.
- Whitehead, J. H. C., 1949. Combinatorial homotopy. II, Bulletin of the American Mathematical Society, 55, 213–245.
- Yetter, D. N., 1992. Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed G –sets, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 1, 1, 1–20.
- Yetter, D. N., 1993. TQFT’s from homotopy 2-types, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 2, 1, 113–123.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Bestami BERBEROĞLU

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
Bölümü, 2018–2022

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik
Anabilim Dalı, 2022–2025

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Bestami BERBEROĞLU, Tunçar ŞAHAN, Cat¹-Çaprazlanmış Modüller, 11. Uluslararası Göbeklitepe Bilimsel Çalışmalar Kongresi, 17-18 Mayıs 2025, ŞANLIURFA.