

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ayhan ZENGİN

CAPUTO-FABRIZIO KESİRLİ TÜREV OPERATÖRÜ İLE SİGARA
İÇME DİNAMİĞİNİN ANALİZİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

AĞRI – 2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAPUTO-FABRIZIO KESİRLİ TÜREV OPERATÖRÜ İLE SİGARA İÇME DİNAMİĞİNİN ANALİZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Ali Dokuyucu

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Bu tezde sigara içme dinamiği modeli Caputo-Fabrizio kesirli türevine genişletilmiştir. Genişletilmiş modelin varlık çözümü için sabit nokta teoremi kullanılmış, ardından Picard'ın teklik teoremleri kullanılarak teklik çözümünün hangi şartlar altında sağlandığı incelenmiştir. Teorik çözümlerden sonra, Adams-Bashforth metodu Caputo-Fabrizio türevine uyarlanmış ve nümerik çözümler modele uygulanmıştır. Son durumda $(0, 1)$ aralığındaki farklı kesirli türev değerleri için nümerik simülasyonlar oluşturulmuş ve ayrıntılı olarak analizi yapılmıştır.

2023, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: Matematiksel modelleme, Caputo-Fabrizio Kesirli Türev Operatörü, Varlık, Teklik, Nümerik çözüm

ABSTRACT

Master Thesis

ANALYSIS OF SMOKING DYNAMICS WITH THE CAPUTO-FABRIZIO FRACTIONAL DERIVATIVE OPERATOR

Advisor of Thesis: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali Dokuyucu

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assoc. Prof. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

In this thesis, the smoking dynamics model has been extended to the Caputo-Fabrizio fractional derivative. The fixed point theorem has been utilized for the existence solution of the extended model, followed by the application of Picard's technical theorems to investigate the conditions under which the technical solution is achieved. After the theoretical solutions, the Adams Bashforth method has been adapted to the Caputo-Fabrizio derivative, and numerical solutions have been applied to the model. Subsequently, numerical simulations have been generated and extensively analyzed for different fractional derivative values within the interval $(0, 1)$.

2023, 55 pages

Key Words: Mathematical modeling, Caputo-Fabrizio Fractional Differential Operator, Existence, Uniqueness, Numerical solution

TEŞEKKÜR

Tez çalışma sürecinde, ders döneminden bu ana dek emeğin, saygının ve öğrenme ile oluşan aydınlanmanın bilinci ile, başta danışman hocam Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU' ya lisansüstü eğitimimde tercih edilebilecek bölümler hakkında sağladığı bilgi, eğitimim süresince gösterdiği anlayış ve rehberliği adına en kalbi duygularla teşekkür ederim.

Seminer sunumunda beni dinleyerek katkılarda bulunan, bu çalışmada da kullandığım Latex programını öğrendiğim Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN hocam ile bilimsel araştırma ve yayın etiği ile ilgili önemli bilgiler paylaşan Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR hocama, yine bu yolculukta bana olan güvenleri ve teşvikleri için Doç. Dr. Erdal BAŞARAN ile abim Orhan ZENGİN'e teşekkür ederim.

22.06.2023

Ayhan ZENGİN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	7
2.1. Gamma ve Beta Fonksiyonu	7
2.2. Kesirli Basamaktan Diferansiyel Denklemlerin Türev ve İntegral Operatör- leri	8
2.3. Çözümün Varlığı ve Tekliği	13
2.3.1. Varlık Çözümü	13
2.3.2. Teklik Çözümü	14
3. MATERYAL YÖNTEM	18
3.1. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev Operatörü	18
3.2. Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörü	23
3.3. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev Operatörlerinin Bazı Özellikleri	25
3.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi ile İki Aşamalı Adams-Bashforth Şeması	28
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	33
4.1. Sigara İçme Dinamiğinin Matematiksel Modeli	33
4.1.1. Sigara İçme Dinamiği Modelinin Varlık Çözümü	34
4.1.2. Sigara İçme Dinamiği Modelinin Teklik Çözümü	40
4.1.3. Sigara İçme Dinamiği Modelinin Nümerik Çözümü	41
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	49
KAYNAKLAR	50

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Gamma Fonksiyonu	7
3.1 $\iota = 0.66$ olmak üzere $[-8, 25]$ zaman aralığında NFD_t nin simülasyonu	20
3.2 $\iota = 0.66$ olmak üzere $[-8, 25]$ zaman aralığında UFD_t nin simülasyonu	21
3.3 $\iota = 0.1$ olmak üzere $[-8, 50]$ zaman aralığında NFD_t nin simülasyonu	21
3.4 $\iota = 0.1$ olmak üzere $[-8, 50]$ zaman aralığında UFD_t nin simülasyonu	22
4.1 $P(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev degerleri için grafiği	46
4.2 $L(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev degerleri için grafiği	46
4.3 $S(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev degerleri için grafiği	47
4.4 $Q(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev degerleri için grafiği	47
4.5 $R(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev degerleri için grafiği	48

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	: Reel Sayılar
R^+	: Pozitif Reel Sayılar
$\in$	: Elemanıdır
$n!$	: Faktöriyel ($n!=1.2.3...n$)
$\lim$	: Limit
$Re(z)$	: z Karmaşık Sayısının Reel kısmı
$Re(\lambda)$	: λ Karmaşık Sayısının Reel kısmı
Σ	: Toplam Sembolü
Π	: Çarpım Sembolü
$\int$	: İntegral
$\mathcal{L}$	: Laplace
$\Gamma(n)$	: Gama Fonksiyonu
$B(z, \lambda)$	: Beta Fonksiyonu
$E_\gamma(p)$	: Tek Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{(\gamma, \theta)}(p)$	: İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$\sinh$	: Sinüs hiperbolik fonksiyonu
$\cosh$	: Kosinüs hiperbolik fonksiyonu
${}^C\mathfrak{D}^\lambda f(t)$	: Caputo Kesirli Türevi
$\mathfrak{D}^{-\lambda} f(t)$	: Kesirli İntegral
${}_a^{CF}\mathfrak{D}_t^\lambda f(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi
${}_0^{AC}\mathfrak{D}_x^{\iota, \beta} f(t)$	: Atangana Caputo Kesirli Türevi
${}^{ABC}\mathfrak{D}^\lambda f(t)$	: Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli türevi
${}^{ABR}\mathfrak{D}^\lambda f(t)$	: Riemann Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli türevi
${}^{CF}I^\lambda f(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli integrali
${}_a^{AB}I_t^\lambda f(t)$	: Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere genel anlamda hareket halinde olan dinamik sistemlerin matematiksel modelinin oluşturulması, türeve ve türevin anlamına ihtiyaç duyar. Türevin hikayesinin eski Yunanlıların bir çembere istenilen noktada teğet çizme merakı ile başladığı bilinse de, bir niceliğin nasıl bir hızla değiştiği, bir noktada-özel bir anda sağladığı bilgi, eğim hız gibi kavramlara kazandırdığı anlam sebebi ile, bir çok bilim insanının ilgi odağı olmuştur.

Türevin fiziksel sistemler üzerine önemli katkıları olacağından ilk çalışmalar Newton, Euler, L'Hospital, Abel, Riemann gibi önemli bilim insanları tarafından yapılmıştır. Bir fonksiyonun bağımsız değişkeninin en küçük değişikliği sonucu, fonksiyonun verdiği tepkiyi inceleyerek bu fonksiyonun asimtotik davranışını incelemişlerdir. Anlık değişim hızı olarak ifade edilen türev, öncelikli olarak Matematik, Geometri, Fizik ve yine Mühendislik ve Teknoloji alanlarında kullanılmıştır. Bu alanlarda kullanılmasına rağmen problemin mevcut durumundan ayrı, geçmiş veya etki ettikleri hakkında bilgi sağlayamaması tam sayı mertebeden türevin sınırlılıkları olarak görülebilir. Bu sınırlılıkları ortadan kaldıran bir türev tanımına ihtiyaç duyulması kaçınılmaz olmuştur.

Kesirli mertebeden türev, problemin sadece mevcut durumuna bağlı olmayan, fiziksel yorumda geniş bir çerçeve sunan, hafıza ve öğrenme etkisi sağlayan, tam sayı mertebeden türeve nazaran daha kapsamlı bir matematiksel kavramdır. Klasik türevde türevler arası geçişler keskin olmaktadır. Kesirli türev bu keskin geçişleri minimize ederek geçişlerin daha rahat görülmesini, dolayısıyla daha sağlıklı yorumların yapılabilmesini mümkün kılar. Ayrıca değişken sayısı fazla olan elektrik, optik, mekanik, hastalık modelleri gibi gerçek hayat problemlerinde kesirli mertebeden türev tanımları daha pratik ve gerçekçi sonuçlar sağlamıştır.

Bilinir ki L'Hospital'in, Leibniz'e n. mertebeden türev için mertebenin $1/2$ durumunu sorması üzerine Leibniz'in 30.09.1695 tarihinde durumun şu anda bir paradoks gibi görünse de bir gün çok kullanışlı sonuçlar doğuracağından söz etmesi ile kesirli türevin temeli atılmıştır (Miller ve Ross, 1993). Bahsi geçen mektuplaşmanın akabinde 1738'de Euler, 1820'de Lacroix $1/2$. mertebeden türevi formüle etmiş, 1822'de Fourier pozitif kesirli türev tanımını yapmış ve kesirli türev bir çok matematikçinin çalışma alanı olmuştur. Euler'in 1729'da Gamma fonksiyonunu tanımlaması da bu çalışmalara kolaylık sağlamıştır.

Günümüze ışık tutan geometrik ve fiziksel yorumla ilgili, kesirli türevin de ilk uygulaması olan çalışmayı Abel 1823'te "tautochrone problemi"ni çözerek sağlamıştır. 1832 yılında Liouville üstel fonksiyonların kesirli türev tanımlarını ve kesirli integral tanımlarını yaparak çalışmalara hız kazandırmış. Yine Liouville kesirli diferansiyel denklemleri çözmeye çalışmış, üç ayrı makale yayımlayıp çalışmaları ileri taşıyarak kesirli türevin öncülerinden olmuştur. 1847'de Riemann tarafından Liouville'in çalışmaları desteklenip Riemann-Liouville tanımı yapılmıştır (Butzer ve Westphal, 2000). Bu tanımın ilk çalışması 1869'da yayımlanan Sonin'in "keyfi mertebeden diferansiyel" makalesinde ortaya konmuş. 1892'de Riemann, kesirli integral ile geliştirdiği teorisini yayımlamıştır.

20. yüzyılda kesirli hesap çalışmaları oldukça üst seviyeye ulaşmış. Al-Bassam, Davis, Erdelyi, Hardy, Kober, Little Wood, Osler, Riesz, Samko, Sneddon, Weyl, Zygmund gibi matematikçiler çok sayıda çalışma yayımlamışlardır. Bu çalışmalar incelendiğinde matematiğin teorikten farklı olarak uygulama alanına ihtiyaç duyduğu görülmektedir. Kesirli türevin de diğer bilim dallarına uygulanabilir olması ve problemin çözümüne yönelik pratik, güvenilir ve gerçekçi sonuçlar sunması bu ihtiyacı karşılayacaktır.

1974 yılında kesirli türevi konu alan ilk uluslararası konferans Bertram Ross tarafından Connecticut (ABD) eyaletinde New Haven Üniversitesi'nde yapılmıştır. Aynı yıl Oldham ve Spanier tarafından kesirli hesapların temel tanım ve yöntemlerini içeren ilk kitap yazılmıştır (Oldham ve Spanier, 1974). Bu konferanslardan ikincisi 1984'de Glasgow (İsviçre) şehrinde ve üçüncüsü 1989'da Tokyo'da Nihon Üniversitesi'nde yapılmıştır. 1980 yıllarında Japonya'da matematiksel etkinlikler düzenlenmiş, kesirli türevin dört ciltlik bir makalede adi diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanışı gözlemlenmiştir. Yakın zamana kadar kronolojik olarak (McBride, 1979), (Friedrich, 1991), (Miller ve Ross, 1993), (Kiryakova, 1993), (Podlubny, 1998), (Chen ve Moore, 2001), (Hilfer, 2003), (Kilbas ve diğ., 2006), (Ahmad ve Sivasundaram, 2009), (Diethelm, 2010) ve (Odibat, 2010) gibi kesirli türev hakkında yazılan kitaplar ile yine bu alanda yayımlanan dergiler (Fractional Calculus and Applied Analysis, Journal Of Fractional Calculus) bu alana yön veren ve destekleyen çalışmalar olmuştur.

2004 yılından bu zamana 2 yılda bir uluslararası Automatic Control Federasyonu(IFAC) tarafından "Fractional Differentiation and Applications" adlı konferans düzenlenmektedir. Ayrıca kesirli türev alanında Uluslararası Hesaplamalı Matematik ve Mühendislik konferansları (CMES-2022-2021-...2016) öte yandan 2007 yılında Sabancı Üniversitesi'nde düzenlenmiş olan "kesirli mertebeden sistemler" isimli oturum gibi faaliyetler kesirli türevin ülkemizde de önem kazandığını göstermektedir.

Bu çalışmalarla birlikte kesirli mertebeden türev ve kesirli mertebeden integral denklemler ile ilgili çalışmalar ivme kazanmış, sonuçta Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Marchaud, Riesz, Riesz-Miller, Miller- Ross, Weyl, Erdelyi-Kober kesirli türev tanımları yapılmıştır. Bu türev tanımları arasından Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımları yakın zamana kadar literatürde en yaygın kullanılan türev tanımları olmuştur. Geleneksel olarak adlandırılan R-L ve Caputo kesirli türev tanımlarının singüler yapıda bir çekirdek fonksiyonuna sahip olmaları sebebi ile problemin matematiksel modellemesinde hesapsal zorluk yaratmakta ve çok sayıda sayısal hesaplama gerektirdiğinden algoritma kurmakta da ayrıca güçlük çıkarmaktadır. Diğer yandan kuvvet fonksiyonu gibi çekirdek fonksiyonlarının, günlük hayatta üstel tipten davranışa sahip verilerin modellenmesinde de yetersiz kalacağı ve tam anlamıyla bellek etkisine sahip olamayacağı görülmektedir. Bu gibi zayıflıkları çekirdek fonksiyonlarının değiştirilmesi ile ortadan kaldıran ve literatüre önemli derecede katkı sağlayan (Caputo ve Fabrizio, 2015) ve (Atangana ve Baleanu, 2016) kesirli türev tanımları yapılmıştır.

Matematik ile Fizik alanlarında J. Hristov'un R-L kesirli türevi ile difüzyon çalışması (Hristov, 2013), (Závada, 2002), Z. Rahimi'nin mekanik problemlere yerel olmayan kesirli türev modeli (Rahimi ve dig., 2017), Y. Sun, B. Indraratna ve ark.'nın kümülatif deformasyonu tahmin eden modeli (Sun ve dig., 2017), (Naber, 2004) ile (Caputo ve dig., 2008) çalışmaları, Mühendislik alanında Kumar ve ark.'nın nano teknolojide uygulanan gelişigüzel sıralı diferansiyel modeli (Kumar ve dig., 2016), Baleanu ve ark.'nın yine aynı alanda kesirli analizdeki yeni gelişmeleri incelemeleri (Baleanu ve dig., 2010), biyoloji alanında (Cesarone ve dig., 2004) ile (Caputo ve Cametti, 2008) çalışmaları, tıp alanında (El-Shahed, 2003), jeofizik alanında (Iaffaldano ve dig., 2006), biyomühendislik alanında (Magin, 2006) ve finans alanında da (Caputo, 2014) kesirli türev çalışmaları ve benzer şekilde yine bu alanlarla ilgili olan (Dokuyucu ve Dutta, 2021), (Bulut ve dig., 2013), (Owolabi, 2017), (Carvalho ve Pinto, 2017), (Alkahtani ve Atangana, 2016), (Singh ve dig., 2016), (Kumar ve dig., 2018) ve (Atangana ve Alkahtani, 2015) gibi çok sayıda çalışma geçmişten günümüze farklı bilim alanlarında gerçek anlamda etkili olmuştur.

Sürekli çalışan dinamik sistemlerde kontrol teorisi, elektrik, optik, mekanik, sosyal bilimler, yer altı kaynakları ve hastalık modelleri gibi günlük hayat problemleri, ayrıca viskoelastik maddelerin gevşeme hareketleri, akustik, yayılma hareketleri, biyokimyasal kayıt cihazları, elektromanyetik, ekonomi, olasılık-istatistik, kaotik dinamikler, deprem titreşim hareketleri ve hatta duygusal süreçler gibi bir çok problem kesirli mertebeden türev kullanılarak modellenmiştir (Nataraj, 2010).

Caputo-Fabrizio(2015) ve Atangana-Baleanu(2016) tanımlarından sonra bu tanımlar kullanılarak yalıtkan ortamda elektromanyetik dalgalar, ısı transferi sistemleri, geçirimsiz yer altı suyu akışı, sıg su yüzündeki dalga hareketi, elektrik devreleri gibi problemlerde etkili sonuçlar elde edilmiştir (Abdollahi ve dig., 2018; Dokuyucu ve dig., 2018; Alqahtani, 2016; Atangana ve Alqahtani, 2016; Gómez-Aguilar ve dig., 2016; Khan ve dig., 2017; Tahir ve dig., 2017).

Bu çalışmada da bir hastalık modeli örneği olan sigara içme dinamikleri Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü ile incelenmiştir.

Sigara dünyadaki sağlık sorunlarının ana nedenlerinden biridir. Dünya Sağlık Örgütü' ne göre tütün içmek diğer bir çok hastalıkla birlikte kalp hastalıkları, mide ülseri, astım, lekeli dişler, yüksek tansiyon, damar hastalıkları ve obstrüktif akciğer hastalıklarının en büyük nedenidir. Her yıl 7 milyonu doğrudan 1,2 milyonu ise pasif içici olan 8,2 milyon insan sigara sebebi ile hayatını kaybediyor. DSÖ. nün 2021 raporuna göre Dünya genelinde 2021'de yaklaşık 1,5 milyar kişi sigara içiyor ve 2025'de 1,7 milyara ulaşacağı tahmin ediliyor. Dünyada her yıl 3 milyon 500 bin hektar ormanlık alan tütün ekimi için yok ediliyor ve atmosfere yıllık 84 megaton karbondioksit eş değeri sera gazı salınımı ile yaklaşık 4,5 trilyon sigara izmaritinin doğaya atılması binlerce kimyasalın havaya suya ve toprağa karışmasına sebep oluyor. Anlaşıldığı gibi temelde sağlık sorunu olan sigara aynı zamanda sosyal ekonomik ve çevresel bir sorundur. Sigara bağımlılık yapıcı bir madde olması ve içerisinde en tehlikelileri arsenik, benzin, kadmiyum, hidrojen siyanid, toluen, amonyak ve propilen glikol olmak üzere 4000'in üzerinde kanserojen ve toksik madde bulunması sebebi ile sağlık açısından ciddi bir problem teşkil etmektedir. Bu doğrultuda yavaş öldürücü diye adlandırabileceğimiz, önlenabilir ölümlerin en önemli etkeni olan sigara içme dinamiğini değerlendirerek optimal kontrolleri açısından en verimli şekilde gerçekleştirilebilmesi için matematiksel modellerden geçmişten bu güne faydalanılmıştır. Öyle ki doğrudan ya da dolaylı olarak her bilim insanı, doktor, matematikçi ve toplumsal sorunlara duyarlı her birey sağlıklı ve uzun bir ömür için tütün kullanımını kontrol altına almaya çalışır.

Modern epidemiyolojinin oluşumunu sağlayan, hastalık yayılımının matematiksel modelleme fikri ilk kez 1766'da D. Bernoulli tarafından sunulmuştur. 20. yüzyılın başlarında R. Ross ve W. Hamer tarafından salgın hastalık modellerinin dinamiklerini açıklamak üzere kitlesel eylem yasası kullanılmıştır. Daha sonra L. Reed ve WH Frost ile bir topluluktaki duyarlı, enfekte ve bağışık bireyler arasındaki ilişkiyi gösteren Reed-Frost salgın modeli kurulmuştur (Haq ve dig., 2018). Günümüzde de salgın modelleri kesirli türev operatörleri ile incelenerek etkili sonuçlar elde edilmiştir (Dokuyucu ve Dutta, 2020).

Hastalık modellerinden sigara kullanımını bırakmak ile ilgili sırasıyla C. Castillo Garsow ve ark. tarafından ilk kez basit bir matematiksel model olan nüfusun sabit kaldığı varsayılarak özellikle tütün kullanımı olmak üzere uyuşturucu kullanımının dinamiklerini incelemek için genel bir epidemiyolojik model sunulmuştur (Castillo-Garsow ve dig., 1997). Lubin ve Caporaso, sigara içme davranışını ve akciğer kanserini tartışmış (Lubin ve Caporaso, 2006). Sharomi ve Gumel hafif ve zincir sınıfları tanıtan, belirli bir popülasyonu sigara içme açısından birbirinden farklı bir dizi alt popülasyona ayıran yeni bir model önermiş (Sharomi ve Gumel, 2008). Castillo Garsow'un modelinden farklı olarak nüfusun sabit olmadığı bir durumu ayrıca ara sıra sigara içen davranışını da dikkate alan yeni bir sigara bırakma modeli G. Zaman ve ark. tarafından sunulmuştur (Zaman, 2011). Kesirli türev içeren bir sigarayı bırakma modelinin dinamikleri çok adımlı genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile sayısal olarak incelenmiş (Ertürk ve dig., 2012). Alkhudhari ve ark. sigara içmeyi tanımlayan matematiksel denklemlerin genel dinamiklerini analiz etmişler (Alkhudhari ve dig., 2014). A. Zeb ve ark. tarafından eğitim kampanyası, sigara karşıtı sakız ve anti nikotin kontrol değişkenleri ile uyuşturucu ilaç ve bir toplumda sigara kullanımının ortadan kaldırılması için optimal kontrol teorisi önerilmiş (Zeb ve dig., 2015). Eğitim programlarının etkisi altında sigara içme dinamiklerini ve bireyin sigarayı bırakma kararlılığını inceleyen bir matematiksel modeli A. Yadav ve ark. ortaya koymuştur. Kararlılığın tek başına sigarayı yok etmek için yeterli olmadığı, ancak sigara içen popülasyonun prevalansını azaltabileceği sonucuna ulaşılmıştır (Yadav ve dig., 2015). Sigara kullanımı ile ilgili eğitim ve medya kampanyaları yoluyla sigaranın zararlarının farkında olan bireylerin sayısını dikkate alan bir modeli O. J. Algahtani, A. Zeb ve ark. sunmuşlar (Algahtani ve dig., 2015). Q. Din ve ark. nüfusun; sigara içmeyenler, sigara içenler, sigarayı geçici olarak bırakanlar, sigarayı kalıcı olarak bırakanlar ve sigara nedeniyle hastalıkla ilişkili kişiler olmak üzere beş sınıfa ayrıldığı bir sigara içme modelinin nitel davranışını incelemişler (Din ve dig., 2016). Khalid ve ark. sigarayı bırakmanın kesirli matematiksel modelini açıklamışlar (Khalid ve dig., 2016). Zeb, Zaman, Erturk ve diğ. sigarayı bırakma dinamiğini ergen nikotin bağımlılığı üzerinde ele alarak modeli kesirli düzende geliştirmek için Caputo türevini kullanmışlar (Zeb ve dig., 2018). F. Haq ve diğ. tarafından kesirli sıralı bir model kullanılarak sigarayı bırakma dinamikleri incelenmiş, Laplace Adomian ayrıştırma yöntemi ile yaklaşık çözümler elde edilmiştir (Haq ve dig., 2018).

Bu çalışmalardan farklı ve literatüre yön vereceğini düşündüğümüz, sigara içme dinamiğine daha kesin ve pratik sonuçlar elde edeceğimiz singüler olmayan bir çekirdek fonksiyonu içeren Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımının sigarayı bırakma dinamikleri matematik modeline uygulanıp çözümü tartışılmıştır. Potansiyel sigara içenler, ara sıra sigara içenler, ağır içiciler, geçici olarak sigarayı bırakanlar ve kalıcı olarak sigarayı bırakanlar olmak üzere beş sınıfa ayırdığımız model sunulmuş, parametreler de ayrıntılı olarak tanımlanmıştır. Modelin analizi yapılırken Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörünün çekirdeği yardımıyla sigara içme dinamiği modeli bu türev operatörüne genişletilmiştir. Genişletilmiş modelin sabit nokta teoremi yardımıyla varlık çözümü yapılmış ardından Picard'ın teklik teoremleri yardımı ile teklik çözümünün hangi şartlar altında sağlandığının araştırması yapılmıştır. Teorik çözümler tamamlandıktan sonra Adams-Bashforth metodunu kesirli türev operatörüne entegre ederek nümerik çözümler modele uygulanmıştır. Son aşamada ise $(0, 1)$ aralığındaki farklı kesirli türev değerleri için nümerik simülasyonlar yapılmıştır.

Bu tezin ikinci bölümü kuramsal temeller olup tezde kullanılan temel tanım, teorem ve lemma vb. ifadelerle ayrılmıştır. Üçüncü bölüm materyal ve yöntem olup araştırma bulgularında kullanılan ana tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölüm araştırma bulguları olup matematiksel modelin varlığının ve tekliğinin çözümü yapılmış ayrıca nümerik yaklaşımlar yardımıyla grafikleri çizilerek simülasyonlara yer verilmiştir. Son bölüm tartışma sonuç kısmına ayrılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Gamma ve Beta Fonksiyonu

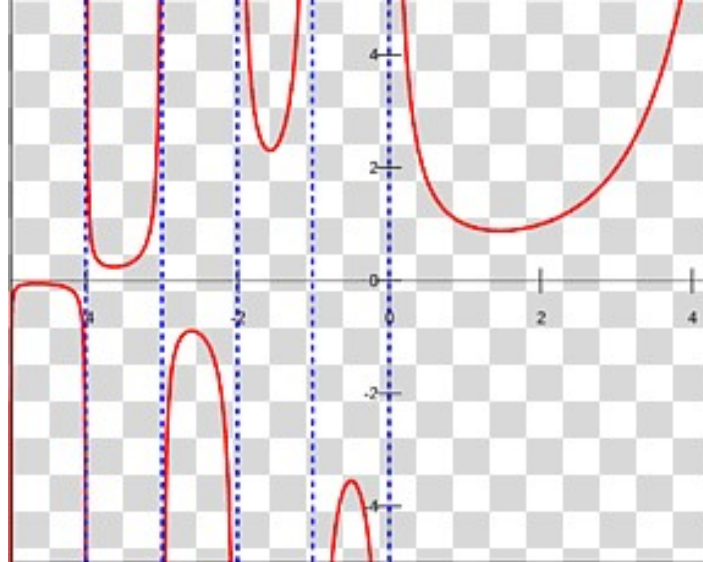
Gamma Fonksiyonu

Faktöriyelin karmaşık ve reel sayılara genelleştirilmesi olarak bilinen Gamma fonksiyonu kesirli analiz alanında oldukça önemlidir.

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad n \in R, \quad (2.1)$$

formu ile tanımlıdır. Bu fonksiyon, n 'nin sıfırdan büyük olduğu durumda yakınsaktır.



Şekil 2.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonun sık kullanılan bazı özellikleri

- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

şeklinde sıralanabilir.

Yukarıda verilen özellikler birbirleri ile ilişkili olup kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = [e^{-t} t^n]_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = n\Gamma(n) \quad (2.2)$$

şeklinde ispat edilir.

Beta Fonksiyonu

$$B(p, v) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{v-1} dt, \quad \text{Re}(p) > 0, \text{Re}(v) > 0$$

şeklinde tanımlanan ve bir çok durumda kullanılması daha doğru olan integral fonksiyonudur.

Beta Fonksiyonunun Özellikleri :

- 1) $B(p) = \frac{\Gamma(p)^2}{\Gamma(2p)}$,
- 2) $B(p, v) = B(v, p)$,
- 3) $B(p, v) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(v)}{\Gamma(p+v)}$,
- 4) $B(p, v) = \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+v}} dt, \quad \text{Re}(p) > 0, \text{Re}(v) > 0,$
- 5) $B\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$

2.2. Kesirli Basamaktan Diferansiyel Denklemlerin Türev ve İntegral Operatörleri

Tanım 2.1 $f, [a, b]$ aralığında integrale sahip bir fonksiyon ve $n \geq \iota \geq n - 1$ durumunda, $n \in \mathbb{N}^+$ için ι . dereceden Riemann-Liouville' in kesirli türevleri,

$${}_a D_t^\iota f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \iota)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\iota-1} f(\tau) d\tau,$$

$${}_t D_b^\iota f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \iota)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (t - \tau)^{n-\iota-1} f(\tau) d\tau,$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.2 Caputo kesirli türevi,

$${}_a^C D_t^\iota f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \iota)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\iota-n+1}}, \quad n - 1 \leq \iota < n \quad (2.3)$$

ile tanımlanır.

Öyle ki

$${}_a D_t^\iota f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \iota)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t - \tau)^\iota}, \quad \iota \in (0, 1) \quad (2.4)$$

$\iota = n, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$D_n^\iota f(t) = f^n(x)$$

eşitliği yazılır. $n = 0$ olması halinde ise Caputo kesirli türevi,

$$D_0^\iota f(t) = f(x)$$

olarak tanımlanır.

Tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları ile açıklanabilir olması Caputo kesirli türev tanımını diğer tanımlardan ayıran ve bu tanıma kullanışlı hale getiren bir özelliktir denilebilir.

Diğer taraftan 2015 yılında tanımı yapılmış olan Caputo ve Fabrizio türev tanımını gerekli kılan Caputo türev tanımının $(t - \tau)^{-\iota}$ çekirdeği için $t = \tau$ olması durumunda singüler yapıda bir problem oluşturmaktadır.

Tanım 2.3 Bahsi geçen (2.4) Caputo denklemindeki çekirdek $(t - \tau)^{-\iota}$ dır. Bu çekirdek yerine $e^{-\frac{\iota}{1-\iota}}$ ve $\frac{1}{\Gamma(1-\iota)}$ yerine de $\frac{M(\iota)}{(1-\iota)}$ yazılırsa

$${}^{CF}\mathfrak{D}_t^\iota f(t) = \frac{M(\iota)}{(1-\iota)} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right] d\tau, \quad (2.5)$$

Caputo-Fabrizio türev tanımı elde edilir. Tanımda verilen $M(\iota)$ normalleştirme sabiti ve $M(0)$ ile $M(1)$ 'in değeri 1 dir (Caputo ve Fabrizio, 2015).

Tanım 2.4 $b > 0$, $f \in H^1(0, b)$ olması koşulu ile Caputo kesirli türevi,

$${}^CD^\iota f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\iota)} \int_0^t (t-s)^{-\iota} f'(s) ds, \quad t > 0, \quad 0 < \iota < 1$$

yazılabilir.

Bu denklemin çekirdeği $(t-s)^{-\iota}$ yerine $e^{-\frac{\iota}{1-\iota}t}$ ve $\frac{1}{\Gamma(1-\iota)}$ yerine de $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\iota^2)}}$ yazılırsa, $\iota \in (0, 1)$ için yeni Caputo-Fabrizio kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$${}^{CF}\mathfrak{D}^\iota f(t) = \frac{(2-\iota)M(\iota)}{2(1-\iota)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\iota}{1-\iota}(t-s)\right] f'(s) ds, \quad t > 0.$$

Burada, $M(\iota)$, ι 'ya bağlı normalleştirme sabitidir.

Caputo türev tanımında olduğu gibi bu tanımda da f sabit fonksiyon olmak üzere,

$${}^{CF}\mathfrak{D}^\iota f = 0$$

olduğu görülür. Yeni çekirdek için $t = s$ anında teklik problemi oluşmamaktadır.

Laplace dönüşümü bu yeni kesirli türev tanımına uygulandığında

ι , $(0, 1)$ açık aralığında bir değer alınırsa,

$$\mathfrak{L}({}^{CF}\mathfrak{D}^\iota f(t))(s) = \frac{(2-\iota)M(\iota)}{2(s+\iota(1-s))} (s\mathfrak{L}(f(t))(s) - f(0)), \quad s > 0. \quad (2.6)$$

Burada bir f fonksiyonunun Laplace dönüşümü $\mathfrak{L}(f(t))$ olarak tanımlanır.

Bu nedenledir ki Laplace dönüşümü Caputo-Fabrizio türevi ile çalışıldığında oldukça etkili bir araçtır.

Tanım 2.5 Caputo-Fabrizio kesirli integrali,

$${}^{CF}I^\iota f(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} u(t) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0, \quad 0 < \iota < 1$$

şeklinde tanımlanır. ((3.2) bölümde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.)

Giriş bölümünde de sözel olarak yer verilen geçmişten günümüze bazı kesirli türev ve integral çalışmaları :

Leonhard Euler (1730): Tanımını yaptığı aşağıdaki özellik ve Gamma fonksiyonu yardımıyla,

$$\frac{d^a x^m}{dx^a} = m(m-1).(m-2).(m-3) \dots (m-a+1)x^{m-a}.$$

eşitliğini kullanarak,

$$\frac{d^a x^m}{dx^a} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-a+1)} x^{m-a},$$

tanımını elde eder.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1820-1822):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - py) dp,$$

bağıntısından,

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - py + n\frac{\pi}{2}) dp,$$

tanımını elde eder.

Nielh Henrik Abel (1823-1826): ι keyfi bir değer olmak üzere:

$$\int_0^a \frac{k'(\mu) d\mu}{(a-\mu)^\iota} = \varphi(a),$$

integrali ile,

$$k(a) = \frac{1}{\Gamma(1-\iota)} \frac{d^{-\iota} \varphi(a)}{da^{-\iota}},$$

tanımını elde eder.

Joseph Liouville (1832-1855): Liouville $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i a_i^v e^{a_i x}$ bağıntısı yardımıyla,

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i a_i^v e^{a_i x},$$

tanımını elde eder.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1847-1876):

$$D^{-\iota} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\iota)} \int_c^z (z-t)^{\iota-1} f(t) dt + \varphi(t),$$

ile integral tanımını elde eder.

Riemann ve Liouville: $m-1 \leq \iota \leq m$ olması koşulu ile,

$${}_a D_t^\iota f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\iota)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\iota-m+1}},$$

türevi tanımlanır.

Anton Carl Grünwald, Aleksey Vasilievich Letnikov:

$${}_a D_t^v f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-v} \sum_{i=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^i \binom{v}{i} f(t-ih),$$

kesirli mertebeden türevi tanımlanır.

Michele Caputo (1967): $n-1 \leq \iota \leq n$ şartı ile

$${}_a^C D_t^\iota f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\iota)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\iota-n+1}}, \quad (2.7)$$

biçiminde ifade eder.

Michele Caputo , Mauro Fabrizio (2015): $f, H^1(a, b)$ de tanımlı, $\iota \in [0, 1]$ ve $b > a$ koşulu ile Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$${}_a\mathfrak{D}_t^\iota f(t) = \frac{M(\iota)}{(1-\iota)} \int_a^t f'(\tau) e^{\left[\frac{-\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right]} d\tau, \quad (2.8)$$

Caputo-Fabrizio kesirli integrali

$${}^{CF}I^\iota f(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} u(t) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0, \quad 0 < \iota < 1 \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır. Tanımda verilen $M(\iota)$ normalleştirme sabiti ve $M(0)$ ile $M(1)$ 'in değeri 1 dir.

Jorge Losada, Juan J. Nieto (2015): Caputo-Fabrizio kesirli türevi $\iota \in (0, 1)$ koşulu ile, ι . mertebeden

$${}^{CF}\mathfrak{D}^\iota f(t) = \frac{1}{(1-\iota)} \int_0^t f'(s) \exp\left[\frac{-\iota}{1-\iota}(t-s)\right] ds, \quad t \geq 0 \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır.

2.3. Çözümün Varlığı ve Tekliği

Bir denklem sisteminde çözümün varlığı ve tekliği, başlangıç değer problemi içeren diferansiyel denklemlerle ilgilidir. Dolayısıyla varlık ve teklik çözümleri için, çözümün ilk olarak varlığı sonra da tekliği araştırılır.

2.3.1. Varlık Çözümü

Tanım 2.6

$$y'' = g(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

başlangıç değeri olsun. Burada $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $g, I \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyondur. I üzerinde tanımlanmış ve aşağıda yer alan başlangıç şartlarını doğrulayan bir $\vartheta(t)$ fonksiyonuna (1) – (2) başlangıç değer problemi için çözüm oluşturur denir.

1. $t \in I$ durumunda $\vartheta'(t)$ mevcuttur.

2. $\vartheta(t_0) = y_0, \quad t_0 \in I$

3. $t \in I$ üzere $(t, \vartheta(t)) \in I \times R$

4. $t \in I$ üzere $\vartheta'(t) = g(t, \vartheta(t))$

Tanım 2.7 $\forall (t, y_1) ve (t, y_2) \in R(a, b)$ olmak üzere

$$|g(t, y_1) - g(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

eşitsizliğini sağlayan sıfırdan büyük K sabiti var ise g fonksiyonu (a, b) reel aralığı için Lipschitz şartını sağlar. Ayrıca K , Lipschitz sabiti olarak adlandırılır.

Tanım 2.8 H üzerinde tanımlı bir Banach uzayı X ve $E \geq H$ şartı ile belli bir aralıkta bir benzerlik oluşturur.

$$x \leq y \Rightarrow y - x \in H$$

2.3.2. Teklik Çözümü

Teorem 2.1 $g(t, x)$ ve $\frac{\delta(g)}{\delta(x)}$, $R(a, b) = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ aralığı için t ve x 'e bağlı sürekli, aynı zamanda Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonlar olması durumunda, (1)-(2) koşulu altında başlangıç koşullu problemi için $|g(t, x)| \leq M$ ve $h = \min(a, \frac{b}{M})$ ise $|t - t_0| \leq h$ eşitsizliğinde, tanımlı tek bir $x(t)$ çözümü mevcuttur.

1. $t \in I$ üzere $\vartheta'(t)$ vardır.

2. $\vartheta(t_0) = x_0, t_0 \in I$.

Teorem 2.2 (Picard-Lindelöf Teoremi): Başlangıç değer probleminde $A \subset IR^2$ ve f fonksiyonu $A \rightarrow IR$ tanımlı olması koşulu ile bir A alanı ve $\frac{dz}{dy} = f(y, z)$ ve $f(y_0) = z_0$ şartlarıyla tanımlansın. Öyle ki f fonksiyonu A alanında sürekli ayrıca $f(y, z)$ ile f fonksiyonları Lipschitz kuralı ile A da sürekli ise sıfırdan büyük sabit bir ϵ değeri için A alanında benzersiz bir çözüm var olur.

İspat $(y_0, z_0) \in A$ olmak üzere (y_0, z_0) noktaları A alanında birer nokta, ayrıca $a > 0, b > 0$ koşulu ile sabit iki nokta olsun.

$D = \{(y, z) : |y - y_0| \leq a \quad |z - z_0| \leq b\} \subset A$ olması koşulu ile dikdörtgensel alan olsun. $M = \max_{(y,z) \in R} f(y, z)$ ve $h = \min(a, \frac{b}{M})$ için $|y - y_0| \leq h$ eşitsizliğini sağlayan başlangıç değeri probleminin benzersiz bir çözümü vardır. Buradan $a < \frac{b}{M}$ olması durumunda $h = a$ dolayısıyla ve $R_1 = R$ bulunur. $\frac{b}{M} < a$ olması durumunda ise $h = \frac{b}{M}$ bulunur. O halde $R_1 \subset R$ olur. R ve R_1

$$R = \{(y, z) : |y - y_0| \leq a, |z - z_0| \leq b\}$$

$$R_1 = \{(y, z) : |y - y_0| \leq h, |z - z_0| \leq b\}$$

olarak tanımlansın. Ardışık yaklaşımlarla bu teoremin ispatı yapılabilir. Öyle ki çözümün bulunması için çözüme yakınsayacak fonksiyon dizisi kullanılır. O halde, $|y - y_0| < h$ aralığında $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3 \dots$ fonksiyonları tanımlansın.

$$\begin{aligned}\varpi_1 &= z_0 + \int_{y_0}^y f(t, z_0) dt \\ \varpi_2 &= z_0 + \int_{y_0}^y f(t, \varpi_1(t)) dt \\ \varpi_3 &= z_0 + \int_{y_0}^y f(t, \varpi_2(t)) dt \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \varpi_n &= z_0 + \int_{y_0}^y f(t, \varpi_{n-1}(t)) dt\end{aligned}$$

Öncelikle başlangıç değeri probleminin $[y_0, y_0 + h]$ aralığı için varlık durumu ispatlanır. Yine aynı yolla $[y_0 - h, y_0]$ aralığında da varlığı ispatlanır. Ardından da çözümün teklik durumunun ispatı yapılır. İspat dört adımda incelenir:

$\varpi_{n-1}(y)$ fonksiyonunun $[y_0, y_0 + h]$ 'da türevli ve $y \in [y_0, y_0 + h]$ için $|\varpi_{n-1}(y) - z_0| \leq b$ olduğu varsayılırsa, $(y, \varpi_{n-1}(y)) \in R_1$ olur. $(y, \varpi_{n-1}(y))$ 'de tanımlı ve sürekli olan bir $f(y, \varpi_{n-1}(y))$ fonksiyonu vardır. O zaman $[x_0, x_0 + h]$ da $|f(x, \varpi_{n-1}(x))| \leq M$ bulunur. $\varpi_n(y) = z_0 + \int_{y_0}^y f(t, \varpi_{n-1}(y)) dt$ olduğu düşünülürse:

1. ϖ_n var olan bir fonksiyondur ve $[x_0, x_0 + h]$ aralığında sürekli olan türevi mevcuttur.

Diğer yandan:

$$\begin{aligned}
|\varpi_n(y) - z_0| &= \left| \int_{y_0}^y f(t, \varpi_{n-1}(y)) dt \right| \\
&\leq \int_{y_0}^y f(t, \varpi_{n-1}(y)) dt \\
&\leq \int_{y_0}^y M dt = M(y - y_0) \quad h = \min(a, \frac{b}{M}) \\
&\leq Mh \leq b
\end{aligned}$$

$(y, \varpi_n(y))$ R_1 aralığında bulunan noktadır. Bundan dolayı $f(y, \varpi_n(y))$, $[y_0, y_0 + h]$ da tanımlı sürekli bir fonksiyondur. n değerinin 1 olduğu varsayılırsa, bu durumda $\varpi_1(y) = z_0 + \int_{y_0}^y f(t, z_0) dt$ bulunur. O halde ϖ_1 fonksiyonu $[y_0, y_0 + h]$ aralığında tanımlanabilen ve sürekli olan bir fonksiyondur. Bununla birlikte,

$$\begin{aligned}
|\varpi_1(y) - z_0| &\leq \int_{y_0}^y |f(t, z_0)| dt \\
&\leq M(y - y_0) \leq Mh \leq b
\end{aligned}$$

Öyleyse $n = 1$ için $(y, \varpi_1(y))$, R_1 'de tanımlı bir nokta, $f(\varpi_1(y))$, $[y_0, y_0 + h]$ kapalı aralığında sürekli olan bir fonksiyon ve de $[y_0, y_0 + h]$ kapalı aralığında bir çözümdür. Yukarıdaki denklemden tanımlanan ϖ_n fonksiyonu, tümevarım formu ile $[y_0, y_0 + h]$ kapalı aralığındaki özellikleri gösterir. Öyleyse ϖ fonksiyonu $[y_0, y_0 + h]$ kapalı aralığında vardır ve denklemin çözümüdür. Böylece ispat gerçekleştirilmiş olur.

2. $(y_0, y_0 + h)$ aralığında $\{\varpi_n\}$ çözümü tektir ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$[y_0, y_0 + h] \text{ aralığında } |\varpi_n(y) - \varpi_{n-1}(y)| \leq \frac{M \iota^n}{n!}, \text{dır.}$$

$y \in (y_0, y_0 + h)$ aralığında $|\varpi_{n-1}(y) - \varpi_{n-2}(y)| \leq \frac{M \iota^{n-2}}{(n-1)!} (y - y_0)^{n-1}$ olduğu varsayılarak,

$$\begin{aligned}
|\varpi_n(y) - \varpi_{n-1}(y)| &= \left| \int_{y_0}^y (f(t, \varpi_{n-1}(t)) - f(t, \varpi_{n-2}(t))) dt \right| \\
&\leq \int_{y_0}^y |f(t, \varpi_{n-1}(t)) - f(t, \varpi_{n-2}(t))| dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Birinci bölümünden $y \in (y_0, y_0 + h)$ aralığında $|\varpi_n(y) - z_0| \leq b$ olur. Öyle ki $(y, \varpi_{n-1}(y))$ ve $(y, \varpi_{n-2}(y))$ noktaları olmak üzere $y \in (y_0, y_0 + h)$ aralığında R_1 de iki nokta olduğu söylenebilir. Lipschitz teoremi ile,

$$|\varpi_n(y) - \varpi_{n-1}(y)| \leq \iota \int_{y_0}^y |\varpi_{n-1}(t) - \varpi_{n-2}(t)| dt \text{ yazılır.}$$

$$\begin{aligned}
|\varpi_n(y) - \varpi_{n-1}(y)| &\leq \iota \int_{y_0}^y |\varpi_{n-1}(t) - \varpi_{n-2}(t)| dt \\
&\leq \iota \int_{y_0}^y \frac{M \iota^{n-2}}{(n-1)!} (t - y_0)^{n-1} dt \\
&\leq \frac{M \iota^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{(t - y_0)^n}{n} \right]_{y_0}^y = \frac{M \iota^{n-1}}{n!} (y - y_0)^n = \frac{M}{\iota} \frac{\iota^n}{n!} h^n \\
&\leq \frac{M}{\iota} \frac{(\iota h)^n}{n!} \quad \left(|y - y_0| \leq h \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle ispat sağlanır. O halde çözüm tektir denir.

3. $n \rightarrow \infty$ olması durumunda ϖ_n sürekli fonksiyonu $[y_0, y_0 + h]$ aralığında eşit aralıklarla ϖ fonksiyonuna yakınsar.
4. ϖ fonksiyonunda limit $[y_0, y_0 + h]$ aralığında başlangıç değer problemine karşılık gelmektedir.

3. MATERYAL YÖNTEM

Geleneksel türev tanımlarından Riemann-Liouville kesirli türevi matematiksel hesaplamada oldukça etkili ve kesirli türev alanına önemli derecede katkısı olan bir tanımdır. Bu tanımın fiziksel yorum gerektiren başlangıç değer problemlerinde kullanışlı olmaması sebebi ile matematiğin uygulama alanında ve mühendislik problemlerinde kullanılacak bir tanım 1967 yılında Caputo tarafından geliştirilmiştir. (2.17) de gösterilen Caputo tanımı fiziksel olarak yorumlanabilir olması ve tam sayı mertebeden türevler ile benzer şekilde çalışması bağlamında diğer kesirli türev tanımlarından bir adım ileride yer almıştır. Öyle ki bu iki tanımın da singüler yapıda çekirdek içermeleri, dolayısıyla $t = \tau$ anında mevcut probleme cevap verememeleri durumu bir eksiklik oluşturmuştur.

Tekillik problemini çekirdek fonksiyonunun değiştirilmesi ile ortadan kaldıran, ayrıca üstel tipten işlem gerektiren günlük hayat problemlerine pratik ve gerçekçi bir çözüm sunacak yeni bir tanım Caputo ve Fabrizio tarafından 2015 yılında yapılmıştır.

Zamansal ve mekansal değişkenler ile ilişkili Caputo-Fabrizio tanımı; zaman değişkenine bağlı ilk gösterimde oluşan kesirli türev sonuçları tam sayı üslerine dönüşeceğinden Laplace dönüşümünü, mekansal değişkene bağlı ikinci gösterim ise non-local kesirli türevler için Fourier dönüşümü ile çalışılmasını gerektirir.

Giriş bölümünde de yer verildiği üzere Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımı ile farklı türde problem içeren bir çok çalışmaya pratik ve gerçekçi sonuçlar bulunması, bu türev operatörünün gerekliliğini ve önemini göstermektedir.

3.1. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev Operatörü

Caputo'nun bilinen ι . mertebeden kesirli zaman türevi UFD_t ; $0 \leq \iota \leq 1$, $a \in [-\infty, t)$, $f \in H^1(a, b)$, $a < b$ olması koşulu ile,

$$D_t^{(\iota)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\iota)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\iota} d\tau, \quad (3.1)$$

şeklindedir.

Caputo kesirli türevinin çekirdeği $(t-\tau)^{-\iota}$ yerine $\exp(-\frac{\iota}{1-\iota}t)$ ve $\frac{1}{\Gamma(1-\iota)}$ ifadesi yerine $\frac{M(\iota)}{1-\iota}$ getirilirse,

$$D_t^{(\iota)} f(t) = \frac{M(\iota)}{(1-\iota)} \int_a^t f'(\tau) \exp[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}] d\tau \quad (3.2)$$

yeni kesirli zaman türevi NFD_t elde edilir. Bu tanımda $M(0)$ ve $M(1)$ in değeri 1 olup $M(\iota)$ normalleştirme sabiti olarak adlandırılır. $f(t)$ sabit fonksiyonu için kesirli türevin değeri sıfır bulunur. Ayrıca (3.1) denklem sisteminde $t = \tau$ anındaki tekillik sorunu yeni tanımda giderilmiştir. Yeni tanım için önemli sayılabilecek bir başka husus da $H^1(a, b)$ den farklı uzaylarda kullanılabilir olmasıdır.

Öyle ki, f fonksiyonu için $f \in L_1(-\infty, b)$ uzayı alınırsa,

$$D_t^{(\iota)} f(t) = \frac{\iota M(\iota)}{(1-\iota)} \int_{-\infty}^t (f(t) - f(\tau)) \exp[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}] d\tau \quad (3.3)$$

denklemini oluştur. Verilen sistemde $\nu = \frac{1-\iota}{\iota} \in [0, \infty]$ ve $\iota = \frac{1}{1+\nu} \in [0, 1]$ için,

$$D_t^{(\nu)} f(t) = \frac{N(\nu)}{\nu} \int_a^t f'(\tau) \exp[-\frac{(t-\tau)}{\nu}] d\tau \quad (3.4)$$

yazılır. Bu denklem sisteminde $N(0)$ ile $N(\infty)$ değerleri 1'dir. Ayrıca $N(\nu)$, $M(\iota)$ ile benzer işleve sahip normalleştirme sabitidir.

Diğer yandan,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\nu} \exp[-\frac{(t-\tau)}{\nu}] = \delta(t-\tau), \quad (3.5)$$

$\iota \rightarrow 1$ olduğunda $\nu \rightarrow 0$ olacaktır.

Yukarıda verilen denklemlerden hareketle (Hewitt ve Stromberg, 2013),

$$\begin{aligned}\lim_{\iota \rightarrow 1} D_t^{(\iota)} f(t) &= \lim_{\iota \rightarrow 1} \frac{M(\iota)}{1 - \iota} \int_a^t f'(t) \exp\left[-\frac{\iota(t - \tau)}{1 - \iota}\right] d\tau \\ &= \lim_{\nu \rightarrow 1} \frac{N(\nu)}{\nu} \int_a^t f'(t) \exp\left[-\frac{(t - \tau)}{\nu}\right] d\tau \\ &= f'(t)\end{aligned}\quad (3.6)$$

elde edilir. Ayrıca, $\iota \rightarrow 0$ için $\nu \rightarrow +\infty$ olacağından,

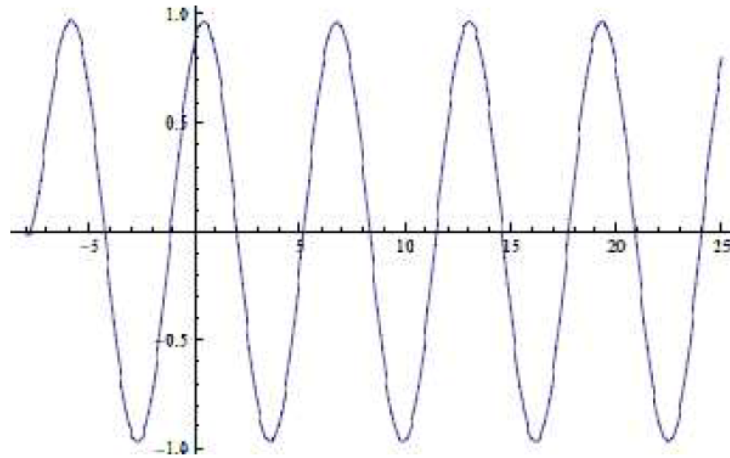
$$\begin{aligned}\lim_{\iota \rightarrow 0} D_t^{(\iota)} f(t) &= \lim_{\iota \rightarrow 0} \frac{M(\iota)}{1 - \iota} \int_a^t f'(t) \exp\left[-\frac{\iota(t - \tau)}{1 - \iota}\right] d\tau \\ &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{N(\nu)}{\nu} \int_a^t f'(t) \exp\left[-\frac{(t - \tau)}{\nu}\right] d\tau \\ &= f(t) - f(a).\end{aligned}\quad (3.7)$$

yazılabilir.

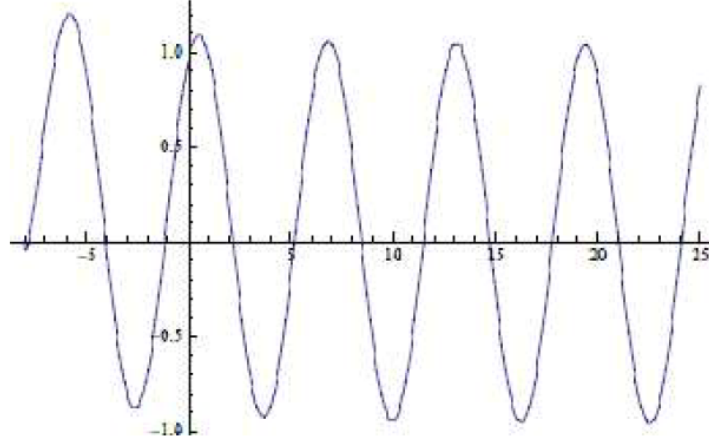
$\iota = 0.66$, $a = -8$ ve $\nu = 1$ olmak üzere bir fonksiyonun yeni kesirli zaman türevini $f(t) = \sin \nu t$ olarak ele alalım.

$$D_t^{(0.66)} \sin \nu t = \frac{M(0.66)}{0.33} \int_a^t \cos \tau \exp - 2(t - \tau) d\tau.$$

Bu türevin simülasyonu ile aşağıdaki grafikler oluşur.

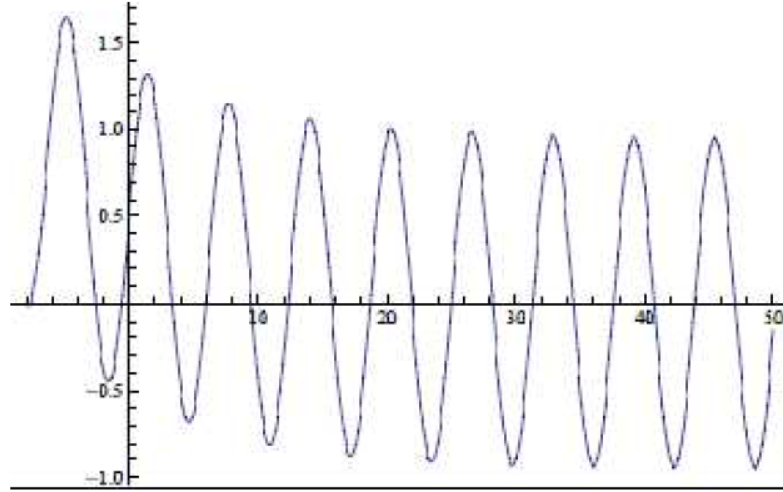


Şekil 3.1. $\iota = 0.66$ olmak üzere $[-8, 25]$ zaman aralığında NFD_t nin simülasyonu

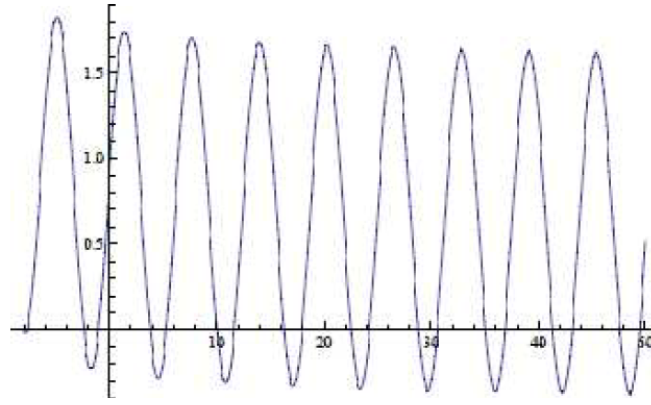


Şekil 3.2. $\iota = 0.66$ olmak üzere $[-8, 25]$ zaman aralığında UFD_t nin simülasyonu

$\iota = 0.66$ alınarak elde edilen iki simülasyondan NFD_t ile UFD_t nin benzer olduğu görülür. Fakat, $\iota = 0.1$ gibi sıfıra yakın bir değer alındığında farklı bir durumla karşılaşılır.



Şekil 3.3. $\iota = 0.1$ olmak üzere $[-8, 50]$ zaman aralığında NFD_t nin simülasyonu



Şekil 3.4. $\iota = 0.1$ olmak üzere $[-8, 50]$ zaman aralığında UFD_t nin simülasyonu

Görüldüğü üzere şekil 3.3 ile şekil 3.4, $\iota = 0.1$ için NFD_t ve UFD_t simülasyonları bakımından farklılıklar göstermiştir. UFD_t , NFD_t ye kıyasla öncekinden fazla etkilenir denilebilir.

$1 \leq n$ ve $\iota \in [0, 1]$ için $(n + \iota)$. mertebeden kesirli zaman türevi,

$$D_t^{(\iota+n)} f(t) = D_t^{(\iota)} (D_t)^{(n)} f(t). \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1 $s = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere NFD_t için, $f(t)$ fonksiyonu $f^{(s)}(\iota) = 0$ ise,

$$D_t^{(n)} (D_t^{(\iota)} f(t)) = D_t^{(\iota)} (D_t^{(n)} f(t)) \quad (3.9)$$

eşitliği yazılır.

İspat $n = 1$ alındığında $D_t^{(\iota+1)} f(t)$ nin tanımı ve (3.9) denklem sisteminden,

$$D_t^{(\iota)} (D_t^{(1)} f(t)) = \frac{M(\iota)}{(1-\iota)} \int_a^t f''(\tau) \exp\left[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right] d\tau \quad (3.10)$$

$f'(\iota) = 0$ olduğu varsayıp gerekli düzenlemeler ile,

$$\begin{aligned}
D_t^{(\iota)}(D_t^{(1)}f(t)) &= \frac{M(\iota)}{(1-\iota)} \int_a^t \left(\frac{d}{d\tau} f'(\tau) \right) \exp\left[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right] d\tau \\
&= \frac{M(\iota)}{(1-\iota)} \left[\frac{d}{d\tau} f'(\tau) \exp\left[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right] d\tau - \frac{\iota}{1-\iota} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right] d\tau \right] \\
&= \frac{M(\iota)}{1-\iota} \left[f'(t) - \frac{\iota}{1-\iota} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right] d\tau \right]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

bağıntısı oluşturulur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
D_t^{(1)}(D_t^{(\iota)}f(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{M(\iota)}{1-\iota} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right] d\tau \right) \\
&= \frac{M(\iota)}{1-\iota} \left[f'(t) - \frac{\iota}{1-\iota} \int_a^t f'(\tau) \exp\left[-\frac{\iota(t-\tau)}{1-\iota}\right] dt \right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

denklemleri yazılabilir. Bu sistemde $n > 1$ için ispat genellenebilir.

3.2. Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörü

Tanım 3.1 $0 < b$, $f \in H_1(0, b)$ ve $\iota \in (0, 1)$ koşulu ile Caputo kesirli türevi :

$${}^C D^\iota f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\iota)} \int_0^t (t-s)^{-\iota} f'(s) ds, \quad t > 0,$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemde $(t-s)^{-\iota}$ çekirdeği yerine $e^{-\frac{\iota}{1-\iota}t}$ ve $\frac{1}{\Gamma(1-\iota)}$ yerine de $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\iota^2)}}$ yazılırsa $\iota \in (0, 1)$ için yeni Caputo-Fabrizio kesirli türevi,

$${}^{CF} \mathfrak{D}^\iota f(t) = \frac{(2-\iota)M(\iota)}{2(1-\iota)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\iota}{1-\iota}(t-s)\right] f'(s) ds, \quad t > 0.$$

şeklinde tanımlanır (Caputo ve Fabrizio, 2015).

Tanımda ifade edilen $M(\iota)$, ι ya bağlı normalleştirme sabitidir. Bu tanımda da Caputo tanımında olduğu gibi f sabit fonksiyonu düşünüldüğünde, ${}^{CF} D^\iota f = 0$ olur. Ayrıca ilk tanımdan farklı olarak $t = s$ anında tekillik problemi giderilmiştir.

Laplace dönüşümü bu yeni kesirli türev tanımına uygulandığında, $0 < \iota < 1$ olmak üzere,

$$\mathfrak{L}[^{CF}\mathfrak{D}^\iota f(t)](s) = \frac{(2-\iota)M(\iota)}{2(s+\iota(1-s))}(s\mathfrak{L}[f(t)](s) - f(0)), \quad s > 0. \quad (3.13)$$

formu elde edilir. Bu denklem sisteminde bir f fonksiyonunun Laplace dönüşümü $\mathfrak{L}(f(t))$ olarak tanımlanır. Laplace dönüşümünün Caputo-Fabrizio tanımı ile çalışıldığında etkili bir metod olacağı açıktır.

$\iota \in (0, 1)$ olması koşulu ile ι . mertebeden kesirli türev tanımı ile kesirli integral tanımının da yapılması gereklilik oluşturmıştır. O halde Caputo-Fabrizio kesirli integrali elde edilsin.

$\iota \in (0, 1)$ için kesirli türev denklemini,

$$^{CF}D^\iota f(t) = u(t), \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

Laplace dönüşümü ile,

$$\mathfrak{L}[^{CF}D^\iota f(t)](s) = \mathfrak{L}[u(t)](s), \quad s > 0$$

Ardından (3.13) denklem sistemi yardımı ile,

$$\frac{(2-\iota)M(\iota)}{2(s+\iota(1-s))}(s\mathfrak{L}[f(t)](s) - f(0)) = \mathfrak{L}[u(t)](s), \quad s > 0.$$

elde edilir. Benzer bir şekilde,

$$\mathfrak{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s}f(0) + \frac{2\iota}{s(2-\iota)M(\iota)}\mathfrak{L}[u(t)](s) + \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}\mathfrak{L}[u(t)](s), \quad s > 0$$

yazılır.

Buradan ters Laplace özellikleri kullanılarak,

$$f(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}u(t) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t u(s)ds + f(0), \quad t \geq 0 \quad (3.15)$$

ya da $f(0)$ fonksiyonu c sabiti ile değiştirilerek,

$$f(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}u(t) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t u(s)ds + c, \quad t \geq 0$$

şeklini alır. Denklem sisteminde yer alan c değeri reel bir sabit ve (3.14)'ün bir çözümüdür.

(3.14) kesirli türev denklem sistemi:

$$\frac{(2-\iota)M(\iota)}{2(1-\iota)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\iota}{1-\iota}(t-s)\right] f'(s)ds = u(t), \quad t \geq 0.$$

ve ya,

$$\int_0^t \exp\left[\frac{\iota}{1-\iota}s\right] f'(s)ds = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} \exp\left(\frac{\iota}{1-\iota}t\right)u(t), \quad t \geq 0.$$

şeklinde yazılır.

Ortak parantez uygulanarak,

$$f'(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}(u'(t) + \frac{\iota}{1-\iota}u(t)), \quad t \geq 0.$$

denkleminde ulaşılır. Gerekli düzenlemeler ile (3.15) denkleminde,

$$f(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}[u(t) - u(0)] + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t u(s)ds + f(0), \quad t \geq 0$$

şeklini alır. Sonuçta Caputo-Fabrizio kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlanır (Losada ve Nieto, 2015).

Tanım 3.2 Bir fonksiyonun ι . mertebeden kesirli integrali $0 < \iota < 1$ olmak üzere,

$${}^{CF}I^\iota f(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}u(t) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t u(s)ds, \quad t \geq 0$$

şeklinde gösterilir.

3.3. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev Operatörlerinin Bazı Özellikleri

Teorem 3.2 Sabit bir f fonksiyonu için $\iota \in (0, 1)$ olmak üzere,

$${}^{CF}D^\iota f(t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.16)$$

denklem sisteminin bir çözümü olsun.

$$f(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}u(t) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t u(s)ds + f(0), \quad t \geq 0$$

denkleminin ispatı düşünüldüğünde $t \geq 0$ için $f(t) = f(0)$ olmasını sağlayan (3.16)'nın çözümü elde edilir. O halde f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Önerme 3.1 Aşağıda yer alan başlangıç değer probleminin $\iota \in (0, 1)$ için benzersiz bir çözümü,

$${}^{CF}D^\iota f(t) = \sigma(t), \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

$$f(0) = f_0 \in R \quad (3.18)$$

şeklinde

$$f(t) = f_0 + a_\iota(\sigma(t) - \sigma(0)) + b_\iota I' \sigma(t), \quad t \geq 0 \quad (3.19)$$

Bu denklem sisteminde $I' \sigma(t)$, σ nun a ve b ilkeli;

$$a_\iota = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}, \quad b_\iota = \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \quad (3.20)$$

ile tanımlanır.

İspat f_1 ve f_2 , (3.17) ve (3.18) başlangıç değer probleminin iki çözümü olsun.

Öyleyse,

$${}^{CF}D^\iota f_1(t) - {}^{CF}D^\iota f_2(t) = [{}^{CF}D^\iota(f_1 - f_2)](t) = 0 \quad \text{ve} \quad (f_1 - f_2)(0) = 0$$

Önerme (3.1)'den $f_1 - f_2 = 0$ olup $t \geq 0$ için $f_1(t) = f_2(t)$ dir.

Buradan da,

$$f(t) = \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}u(t) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t u(s)ds + f(0), \quad t \geq 0$$

ve

$$f(t) = f_0 + a_\iota(\sigma(t) - \sigma(0)) + b_\iota I' \sigma(t), \quad t \geq 0$$

halinde tanımlanan fonksiyonların,

$${}^{CF}D^\iota f(t) = \sigma(t), \quad t \geq 0$$

şeklinde kesirli türevinin bir çözümü olduğu görülür. Ayrıca (3.19) denkleminde $t = 0$ alınırsa f_0 değeri elde edilir. O halde (3.17) ve (3.18) başlangıç değer problemlerinin çözümü (3.19) denklemdir. Diğer yandan $\iota = 1$ için (3.17) denkleminin çözümü σ 'nın olağan ilkelidir.

$${}^{CF}D^\iota f(t) = \lambda f(t) + u(t), \quad t \geq 0 \tag{3.21}$$

lineer kesirli diferansiyel denklemi $\lambda \in R$ ve λ sıfırdan farklı olacak şekilde incelensin. Önerme (3.1) ile (3.21) denkleminin çözümünün,

$$f(t) = f_0 + a_\iota[(\lambda(f(t) - f_0)) + u(t) - u(0)] + b_\iota \int_0^t [\lambda f + u](s)ds, \quad t \geq 0$$

şeklinde bir f fonksiyonu olduğu kabul edilsin. (3.20)'de tanımlanan a_ι ve b_ι burada kullanılır. Benzer bir şekilde,

$$(1 - \lambda a_\iota)f(t) - \lambda b_\iota I^1 f(t) = (1 - \lambda a_\iota)f_0 + s_\iota(u(t) - u(0)) + b_\iota I^1 u(t), \quad t \geq 0$$

ifadesi yazılır. $\lambda a_\iota = 1$ alınırsa,

$$f(t) = -\frac{a_\iota}{\lambda b_\iota}u'(t) - \frac{b_\iota}{\lambda}u(t), \quad t \geq 0$$

λa_ι nın 1 den farklı olduğu durumda,

$$f(t) - \frac{\lambda b_\iota}{1 - \lambda a_\iota} I^1 f(t) = \tilde{\sigma}(t), \quad t \geq 0 \quad (3.22)$$

olur. Ayrıca $\lambda = 0$ durumu etkilemez, $f = \tilde{\sigma}$ bulunur. (3.22) denklemi için,

$$f(t) - \tilde{\lambda} I^1 f(t) = \tilde{\sigma}(t), \quad t \geq 0$$

yazılır. Eşitlik düzenlenirse,

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda b_\iota}{1 - \lambda a_\iota}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$f'(t) = \tilde{\lambda} f(t) + \tilde{\sigma}(t), \quad t \geq 0$$

elde edilir.

Yapılan ispat ile bir başlangıç değer koşulu için benzersiz bir çözümü olan diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

Önerme 3.2 $\iota \in (0, 1)$ aralığı ve $\lambda \in R$ için bir başlangıç değer probleminin,

$${}^{CF}D^\iota f(t) = \lambda f(t) + u(t), \quad t \geq 0$$

$$f(0) = f_0 \in R,$$

benzersiz bir çözüme sahip olduğu kanıtlanmış olur.

3.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi ile İki Aşamalı Adams-Bashforth Şeması

Aşağıda yer alan kesirli diferansiyelin genel denklemi düşünülerek, Caputo-Fabrizio kesirli türevi;

$${}_0^{CF}D_t^\iota y(t) = f(t, y(t)) \quad (3.23)$$

veya

$$\frac{M(\iota)}{1-\iota} \int_0^t y'(\tau) \exp \left[-\frac{\iota}{1-\iota}(t-\tau) \right] d\tau = f(t, y(t)). \quad (3.24)$$

olarak yazılabilir. Bu denklem sistemlerine analizin temel teoremi uygulanarak,

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\iota}{M(\iota)} f(t, y(t)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.25)$$

denklemini elde edilir. Buradan hareketle,

$$y(t_{n+1}) - y(0) = \frac{1-\iota}{M(\iota)} f(t_n, y(t_n)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_{n+1}} f(t, y(t)) d_t \quad (3.26)$$

ve

$$y(t_n) - y(0) = \frac{1-\iota}{M(\iota)} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_n} f(t, y(t)) d_t \quad (3.27)$$

(3.26) ve (3.27) denklemleri taraf tarafa çıkarılarak;

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) d_t, \quad (3.28)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem için,

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) d_t &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{f(t_n, y_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} d_t \\ &= \frac{3h}{2} f(t_n, y_n) - \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

bulunur. Gerekli işlemler ile;

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{3h\iota}{2M(\iota)} f(t_n, y_n) - \frac{h\iota}{2M(\iota)} f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

ifadesi oluşturulur. Düzenleme yapılarak;

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \left\{ \frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3h\iota}{2M(\iota)} \right\} f(t_n, y_n) - \left\{ \frac{1-\iota}{M(\iota)} - \frac{h\iota}{2M(\iota)} \right\} f(t_{n-1}, y_{n-1}).$$

yazılır. Daha sade bir ifade ile

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \left\{ \frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3h\iota}{2M(\iota)} \right\} f(t_n, y_n) - \left\{ \frac{1-\iota}{M(\iota)} - \frac{h\iota}{2M(\iota)} \right\} f(t_{n-1}, y_{n-1}). \quad (3.30)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu denklem ile Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörünün iki aşamalı Adams-Bashforth yöntemi elde edilmiş olur.

Aşağıdaki teoremler yakınsama ve kararlılık sonuçlarını verir.

Teorem 3.3

$${}_0^{CF}D_t^\iota y(t) = f(t, y(t)) \quad (3.31)$$

denkleminin bir çözümü $y(t)$ fonksiyonu olsun. Burada f , sınırlı sürekli bir fonksiyon ve Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \left\{ \frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3h\iota}{2M(\iota)} \right\} f(t_n, y_n) - \left\{ \frac{1-\iota}{M(\iota)} - \frac{h\iota}{2M(\iota)} \right\} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \mathfrak{R}_\iota^n,$$

burada $\|\mathfrak{R}_\iota^n\| \leq M$ şeklinde tanımlanır.

İspat Caputo-Fabrizio türev tanımına göre,

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\iota}{M(\iota)} f(t, y(t)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.32)$$

denklemini ele alındığında t_{n+1} noktasında ;

$$y(t_{n+1}) = \frac{1-\iota}{M(\iota)} f(t_n, y(t_n)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

eşitliğine ulaşılır.

Ayrıca, sahip olunan mevcut noktada;

$$y(t_n) = \frac{1-\iota}{M(\iota)} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_n} f(t, y(t)) dt.$$

eşitliği oluşur.

Böylece,

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \\
&= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \left\{ \frac{f(t_n, y_n)}{h} (t - t_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (t - t_n) + \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t - t_i)}{h(-1^i)} f(t_i, y_i) \right\} dt.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

buradan da

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \left\{ \frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3h\iota}{2M(\iota)} \right\} f(t_n, y_n) - \left\{ \frac{1-\iota}{M(\iota)} - \frac{h\iota}{2M(\iota)} \right\} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\
&\quad + \underbrace{\frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t - t_i)}{h(-1^i)} f(t_i, y_i) dt}_{\text{hata terimi}}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

bağıntısı elde edilir. Oluşan hata terimi aşağıdaki gibi gösterilir:

$$R_n^\iota = \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t - t_i)}{h(-1^i)} f(t_i, y_i) dt.$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
\|R_n^\iota\|_\infty &= \left\| \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t - t_i)}{h(-1^i)} f(t_i, y_i) dt \right\|_\infty \\
&\leq \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t - t_i)}{h(-1^i)} f(t_i, y_i) dt \right\|_\infty \\
&\leq \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \left| \frac{(t - t_i)}{h(-1^i)} \right| \|f(t_i, y_i)\|_\infty dt \\
&< \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{|(t - t_i)|}{h(-1^i)} \sup_{i \in I} \left\{ \max_{i \in I} |f(t_i, y_i)| \right\} dt \\
&< \frac{\iota}{M(\iota)} \frac{(n+1)! h^{n+1}}{4} M,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

eşitsizliği, dolayısı ile

$$\|R_n^\iota\|_\infty < \frac{\iota}{M(\iota)} (n+1)! h^{n+1} M,$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 3.4

$${}_0^{CF}D_t^\iota y(t) = f(t, y(t))$$

denkleminin bir çözümü $y(t)$ fonksiyonu olsun. Her $n \in N$ için;

$$\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty < \frac{1-\iota}{M(\iota)} \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty + \frac{\iota h^{n+1}(n+1)!}{4M(\iota)}.$$

Öyle ki,

$$n \rightarrow \infty \rightarrow \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty \rightarrow 0,$$

Benzer şekilde,

$$n \rightarrow \infty \rightarrow \|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty \rightarrow 0,$$

olur.

İspat

$$\begin{aligned} \|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty &= \left\| \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) d_t \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1-\iota}{M(\iota)} \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty + \frac{\iota}{M(\iota)} \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) d_t \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1-\iota}{M(\iota)} \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \sum_{i=0}^n \prod_{i=0}^n \frac{(t-t_i)}{h(-1)} \right|_\infty d_t \\ &< \frac{1-\iota}{M(\iota)} \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty + \frac{\iota h^{n+1}(n+1)!}{4M(\iota)}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

O halde $n \rightarrow \infty$ için $\|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty \rightarrow 0$ dır. Diğer yandan $n \rightarrow \infty$ iken $\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty \rightarrow 0$ olur. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde sigara içme dinamiği modeli tanıtılarak modelin çözümünün sabit nokta teoremi ile varlığı ve Picard-Lindelöf dönüşümü ile tekliği incelenmiş, ardından Adams-Bashforth metodu Caputo-Fabrizio kesirli türevine entegre edilerek genişletilmiş matematiksel modelin nümerik çözümleri hesaplanmıştır.

4.1. Sigara İçme Dinamiğinin Matematiksel Modeli

Sigara içme dinamiğinin matematiksel modeli aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}D_t^\iota P(t) &= a - aP(t) - bP(t)S(t), \\D_t^\iota L(t) &= -aL(t) + bP(t)L(t) - cL(t)S(t), \\D_t^\iota S(t) &= -n_1S(t) + cL(t)S(t) + fQ(t), \\D_t^\iota Q(t) &= -n_2Q(t) + n_3S(t), \\D_t^\iota R(t) &= -aR(t) + n_4S(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Burada D_t^ι kesirli türev operatörü ve $0 < \iota \leq 1$ olmak üzere $P(0) = \delta_1$, $L(0) = \delta_2$, $S(0) = \delta_3$, $Q(0) = \delta_4$, $R(0) = \delta_5$ başlangıç koşulları ve $n_1 = a - d$, $n_2 = a + f$, $n_3 = d(1 - e)$, $n_4 = ed$ 'dir.

(4.1) denklem sisteminde ;

$P(t)$, potansiyel sigara içenler

$L(t)$, ara sıra sigara içenler

$S(t)$, ağır içiciler

$Q(t)$, sigarayı geçici olarak bırakanlar

$R(t)$, sigarayı kalıcı olarak bırakanları temsil etmektedir.

Ayrıca, bu denklem sisteminin parametreleri ;

a , doğal ölüm oranı

b , ara sıra sigara içenler ile potansiyel sigara içenler arasındaki temas oranı

c , ara sıra sigara içenler ile sigarayı geçici bırakanların temas oranı

d , sigarayı bırakma oranı

e , sigarayı kalıcı olarak bırakanların d oranında kalan kısmı

f , sigarayı geçici bırakanlar ile sigara içenler arasındaki temas oranı

$(1 - e)$,sigarayı geçici olarak bırakanların oranı (d oranında)

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu bölümde (4.1) denklem sisteminde yer alan sigara içme dinamiği matematiksel modelinin önce varlık çözümü ve teklik çözümü yapılacaktır. Ardından kesirli türev operatörüne uyarlanmış Adams-Bashforth metodu kullanılarak Caputo-Fabrizio operatörüne genişletilmiş modelin nümerik çözümleri hesaplanacak ve Mathematica programı ile simülasyonlar oluşturulacaktır. Son olarak elde edilen sonuçların ayrıntılı olarak analizi yapılacaktır.

4.1.1. Sigara İçme Dinamiği Modelinin Varlık Çözümü

Bu bölümde sabit nokta teoremi kullanılarak (4.1)'de belirtilen denklem sisteminin varlık çözümü incelenecektir.

Caputo ve Fabrizio kesirli türev operatörü ile,

$$\begin{aligned} {}^{CF}D_0^\iota P(t) &= a - aP(t) - bP(t)S(t), \\ {}^{CF}D_0^\iota L(t) &= -aL(t) + bP(t)L(t) - cL(t)S(t), \\ {}^{CF}D_0^\iota S(t) &= -n_1S(t) + cL(t)S(t) + fQ(t), \\ {}^{CF}D_0^\iota Q(t) &= -n_2Q(t) + n_3S(t), \\ {}^{CF}D_0^\iota R(t) &= -aR(t) + n_4S(t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

denklem sistemi elde edilir. Başlangıç değerleri (4.1)'de belirtildiği üzere varlık çözümü için Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
P(0) - \delta_1 &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}(a - aP(t) - bP(t)S(t)) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (a - aP(y) - bP(y)S(y))dy, \\
L(0) - \delta_2 &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}(-aL(t) + bP(t)L(t) - cL(t)S(t)) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (-aL(y) + bP(y)L(y) - cL(y)S(y))dy, \\
S(0) - \delta_3 &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}(-n_1S(t) + cL(t)S(t) + fQ(t)) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (-n_1S(y) + cL(y)S(y) + fQ(y))dy, \\
Q(0) - \delta_4 &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}(-n_2Q(t) + n_3S(t)) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (-n_2Q(y) + n_3S(y))dy, \\
R(0) - \delta_5 &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}(-aR(t) + n_4S(t)) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (-aR(y) + n_4S(y))dy.
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit bir görünüm elde etmek adına,

$$\begin{aligned}
G_1(t, P) &= a - aP(t) - bP(t)S(t), \\
G_2(t, L) &= -aL(t) + bP(t)L(t) - cL(t)S(t), \\
G_3(t, S) &= -n_1S(t) + cL(t)S(t) + fQ(t), \\
G_4(t, Q) &= -n_2Q(t) + n_3S(t), \\
G_5(t, R) &= -aR(t) + n_4S(t).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

notasyonları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
W_1 &= -a - b, \\
W_2 &= -a + 1 - c, \\
W_3 &= -n_1 + c, \\
W_4 &= -n_2, \\
W_5 &= -a.
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin ispatı için,

$$\|P(t)\| \leq \beta_1, \|L(t)\| \leq \beta_2, \|S(t)\| \leq \beta_3, \|Q(t)\| \leq \beta_4, \|R(t)\| \leq \beta_5 \text{ olsun.}$$

Teorem 4.1 *Lipschitz koşulu $i = 1, 2, \dots, 5$ olmak üzere G_i çekirdekleri ile sağlanıyor ise $W_i < 1$ ($\forall i, i = 1, 2, \dots, 5$) şartı da H asimtotu için sağlanır.*

İspat Öncelikle $G_1(t, P)$ 'nin teoremi sağladığı incelenecektir. $P(t)$ ve $P_1(t)$ iki ayrı fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|G_1(t, P) - G_1(t, P_1)\| &= \|(a - aP - bPS) - (a - aP_1 - bP_1S)\| \\ &\leq (-a - b)\beta_3\|P - P_1\| \\ &= W_1\beta_3\|P - P_1\|. \end{aligned}$$

Benzer şekilde sırasıyla $G_2(t, L)$, $G_3(t, S)$, $G_4(t, Q)$ ve $G_5(t, R)$ çekirdeklerinin de Teorem (4.1)'i sağladığı gösterilirse;

$L(t)$ ve $L_1(t)$ iki ayrı fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|G_2(t, L) - G_2(t, L_1)\| &= \|(-aL + bPL - cLS) - (-aL_1 + bPL_1 - cL_1S)\| \\ &\leq (-a + 1 - c)(\beta_1 - \beta_3)\|L - L_1\| \\ &= W_2(\beta_1 - \beta_3)\|L - L_1\|, \end{aligned}$$

$S(t)$ ve $S_1(t)$ iki ayrı fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|G_3(t, S) - G_3(t, S_1)\| &= \|(-n_1S + cLS + fQ) - (-n_1S_1 + cLS_1 + fQ)\| \\ &\leq (-n_1 + c)\beta_2\|S - S_1\| \\ &= W_3\beta_2\|S - S_1\|, \end{aligned}$$

$Q(t)$ ve $Q_1(t)$ iki ayrı fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|G_4(t, Q) - G_4(t, Q_1)\| &= \|(-n_2Q + n_3S) - (-n_2Q_1 + n_3S)\| \\ &\leq -n_2\|Q - Q_1\| \\ &= W_4\|Q - Q_1\|, \end{aligned}$$

$R(t)$ ve $R_1(t)$ iki ayrı fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}\|G_5(t, R) - G_5(t, R_1)\| &= \|(-aR + n_4S) - (-aR_1 + n_4S)\| \\ &\leq -a\|R - R_1\| \\ &= W_5\|R - R_1\|.\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 çekirdekleri için $W_i < 1$, ($i = 1, 2, \dots, 5$) indislerini sağlayan daralma söz konusudur. O halde G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 çekirdekleri için Lipschitz koşulu sağlanır ve Teorem (4.1) ispatlanmış olur.

(4.1) denklem sisteminde de belirtildiği üzere başlangıç değerleri sıfır kabul edilerek oluşturulan denklem daha basit bir şekilde ,

$$\begin{aligned}P(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_1(t, P(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_1(y, P(y))dy \\ L(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_2(t, L(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_2(y, L(y))dy \\ S(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_3(t, S(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_3(y, S(y))dy \\ Q(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_4(t, Q(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_4(y, Q(y))dy \\ R(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_5(t, R(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_5(y, R(y))dy.\end{aligned}\tag{4.4}$$

yazılabilir. Daha sonra öz yinelemeli metod kullanılarak,

$$\begin{aligned}P(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_1(t, P_{n-1}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_1(y, P_{n-1}(y))dy \\ L(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_2(t, L_{n-1}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_2(y, L_{n-1}(y))dy \\ S(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_3(t, S_{n-1}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_3(y, S_{n-1}(y))dy \\ Q(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_4(t, Q_{n-1}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_4(y, Q_{n-1}(y))dy \\ R(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_5(t, R_{n-1}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)}\int_0^t G_5(y, R_{n-1}(y))dy.\end{aligned}\tag{4.5}$$

denklemini elde edilir.

Bu denklemin her biri için ardışık terimler arasındaki farklar uygulandığında,

$$\begin{aligned}
(P_{n+1} - P_n)(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} (G_1(t, P_n(t)) - G_1(t, P_{n-1}(t))) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (G_1(y, P_n(y)) - G_1(y, P_{n-1}(y))) dy, \\
(L_{n+1} - L_n)(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} (G_2(t, L_n(t)) - G_2(t, L_{n-1}(t))) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (G_2(y, L_n(y)) - G_2(y, L_{n-1}(y))) dy, \\
(S_{n+1} - S_n)(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} (G_3(t, S_n(t)) - G_3(t, S_{n-1}(t))) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (G_3(y, S_n(y)) - G_3(y, S_{n-1}(y))) dy, \\
(Q_{n+1} - Q_n)(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} (G_4(t, Q_n(t)) - G_4(t, Q_{n-1}(t))) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (G_4(y, Q_n(y)) - G_4(y, Q_{n-1}(y))) dy, \\
(R_{n+1} - R_n)(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} (G_5(t, R_n(t)) - G_5(t, R_{n-1}(t))) \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t (G_5(y, R_n(y)) - G_5(y, R_{n-1}(y))) dy.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde elde edilir.

(4.6) denklem sistemindeki her bir denklemin normu alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|(P_{n+1} - P_n)(t)\| &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} \|(G_1(t, P_n(t)) - G_1(t, P_{n-1}(t)))\| \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t \|(G_1(y, P_n(y)) - G_1(y, P_{n-1}(y)))\| dy, \\
\|(L_{n+1} - L_n)(t)\| &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} \|(G_2(t, L_n(t)) - G_2(t, L_{n-1}(t)))\| \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t \|(G_2(y, L_n(y)) - G_2(y, L_{n-1}(y)))\| dy, \\
\|(S_{n+1} - S_n)(t)\| &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} \|(G_3(t, S_n(t)) - G_3(t, S_{n-1}(t)))\| \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t \|(G_3(y, S_n(y)) - G_3(y, S_{n-1}(y)))\| dy, \\
\|(Q_{n+1} - Q_n)(t)\| &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} \|(G_4(t, Q_n(t)) - G_4(t, Q_{n-1}(t)))\| \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t \|(G_4(y, Q_n(y)) - G_4(y, Q_{n-1}(y)))\| dy, \\
\|(R_{n+1} - R_n)(t)\| &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} \|(G_5(t, R_n(t)) - G_5(t, R_{n-1}(t)))\| \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t \|(G_5(y, R_n(y)) - G_5(y, R_{n-1}(y)))\| dy.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir.

Teorem 4.2 *Sigara içme dinamiği matematiksel modeli için,*

$$\omega = \max\{W_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlandığı durumda bir çözümü mevcuttur.

İspat Teorem ispatlanırken denklem sistemlerine kolaylık sağlayacak ifadeler,

$$\begin{aligned}
\chi_{1n}(t) &= P_{n+1}(t) - P_n(t), \\
\chi_{2n}(t) &= L_{n+1}(t) - L_n(t), \\
\chi_{3n}(t) &= S_{n+1}(t) - S_n(t), \\
\chi_{4n}(t) &= Q_{n+1}(t) - Q_n(t), \\
\chi_{5n}(t) &= R_{n+1}(t) - R_n(t),
\end{aligned}$$

şeklinde oluşturularak öncelikle,

$$\begin{aligned}
\|\chi_{1n}(t)\| &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} \|G_1(t, P_n(t)) - G_1(t, P(t))\| \\
&+ \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t \|G_1(y, P_n(y)) - G_1(y, P(y))\| dy \\
&\leq \left(\frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \right) W_1 \|P_n - P\| \\
&\leq \left(\frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \right)^n \omega^n \|P - P_1\|.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|\chi_{2n}(t)\| &\leq \left(\frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \right)^n \omega^n \|L - L_1\|, \\
\|\chi_{3n}(t)\| &\leq \left(\frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \right)^n \omega^n \|S - S_1\|, \\
\|\chi_{4n}(t)\| &\leq \left(\frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \right)^n \omega^n \|Q - Q_1\|, \\
\|\chi_{5n}(t)\| &\leq \left(\frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \right)^n \omega^n \|R - R_1\|.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitsizlikleri elde edilir. O halde $i = 1, 2, \dots, 5$ olmak üzere $\chi_{in}(t) \rightarrow 0$ için $n \rightarrow \infty$ bulunarak ispat edilmiş olur.

4.1.2. Sigara İçme Dinamiği Modelinin Teklik Çözümü

Bu kısımda Picard'ın teklik teoremleri yardımıyla sigara içme dinamiği matematiksel modelinin çözümünün tek olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.3 (4.2) denklem sisteminde yer alan sigara içme dinamiği matematiksel modelinin aşağıda gösterilen eşitsizlik sağlandığında tek bir çözümü olacaktır.

$$\left(\frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \right) W_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

İspat $P(t), L(t), S(t), Q(t), R(t)$ ile birlikte $\tilde{P}(t), \tilde{L}(t), \tilde{S}(t), \tilde{Q}(t), \tilde{R}(t)$ (4.2) denklem sisteminin çözümleri olduğu varsayılarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_1(t, \tilde{P}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t G_1(y, \tilde{P}(y))dy \\
\tilde{L}(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_2(t, \tilde{L}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t G_2(y, \tilde{L}(y))dy \\
\tilde{S}(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_3(t, \tilde{S}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t G_3(y, \tilde{S}(y))dy \\
\tilde{Q}(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_4(t, \tilde{Q}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t G_4(y, \tilde{Q}(y))dy \\
\tilde{R}(t) &= \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)}G_5(t, \tilde{R}(t)) + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t G_5(y, \tilde{R}(y))dy.
\end{aligned}$$

denklem sistemi yazılabilir. Bu denklem sisteminin normu alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|P(t) - \tilde{P}(t)\| &\leq \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} \|G_1(t, P(t)) - G_1(t, \tilde{P}(t))\| \\
&\quad + \frac{2\iota}{(2-\iota)M(\iota)} \int_0^t \|G_1(y, P(y)) - G_1(y, \tilde{P}(y))\| dy \\
&\leq \frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} W_1 \|P - \tilde{P}\| + \frac{2\iota W_1}{(2-\iota)M(\iota)} \|P - \tilde{P}\|.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Buradan hareketle,

$$\left(\frac{2(1-\iota)}{(2-\iota)M(\iota)} W_1 + \frac{2\iota W_1}{(2-\iota)M(\iota)} - 1 \right) \|P - \tilde{P}\| \geq 0$$

eşitsizliği yazılabilir.

Sonuç olarak $\|P - \tilde{P}\| = 0$ ise $P(t) = \tilde{P}(t)$ olacağı açıktır. Yine aynı metod kullanılarak $L(t) = \tilde{L}(t)$, $S(t) = \tilde{S}(t)$, $Q(t) = \tilde{Q}(t)$ ve $R(t) = \tilde{R}(t)$ eşitlikleri yazılır. Böylece modelin çözümünün tek olduğu ispatlanmış olur.

4.1.3. Sigara İçme Dinamiği Modelinin Nümerik Çözümü

(4.2) denklem sisteminde gösterilen Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörüne genişletilmiş sigara modeli analizin temel teoremi ile düzenlenerek,

$J_i, i = 1, 2, \dots, 5$ çekirdekleri için,

$$\begin{aligned}
P(t) - P(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_1(t, P(t)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^t J_1(\tau, P(\tau)), \\
L(t) - L(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_2(t, L(t)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^t J_2(\tau, L(\tau)), \\
S(t) - S(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_3(t, S(t)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^t J_3(\tau, S(\tau)), \\
Q(t) - Q(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_4(t, Q(t)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^t J_4(\tau, Q(\tau)), \\
R(t) - R(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_5(t, R(t)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^t J_5(\tau, R(\tau)).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

denklem sistemi elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} - P(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_1(t_n, P(t_n)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_{n+1}} J_1(\tau, P(\tau)), \\
L_{n+1} - L(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_2(t_n, L(t_n)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_{n+1}} J_2(\tau, L(\tau)), \\
S_{n+1} - S(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_3(t_n, S(t_n)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_{n+1}} J_3(\tau, S(\tau)), \\
Q_{n+1} - Q(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_4(t_n, Q(t_n)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_{n+1}} J_4(\tau, Q(\tau)), \\
R_{n+1} - R(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_5(t_n, R(t_n)) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_{n+1}} J_5(\tau, R(\tau)).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ile,

$$\begin{aligned}
P_n - P(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_1(t_{n-1}, P(t_{n-1})) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_n} J_1(\tau, P(\tau)), \\
L_n - L(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_2(t_{n-1}, L(t_{n-1})) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_n} J_2(\tau, L(\tau)), \\
S_n - S(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_3(t_{n-1}, S(t_{n-1})) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_n} J_3(\tau, S(\tau)), \\
Q_n - Q(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_4(t_{n-1}, Q(t_{n-1})) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_n} J_4(\tau, Q(\tau)), \\
R_n - R(0) &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} J_5(t_{n-1}, R(t_{n-1})) + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_0^{t_n} J_5(\tau, R(\tau)).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

denklem sistemleri elde edilir.

(4.14) ile (4.13) denklem sistemindeki her bir denklemin kendi içinde farkı alındığında,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} - P_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_1(t_n, P(t_n)) - J_1(t_{n-1}, P(t_{n-1}))\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} J_1(t, P(t)), \\
L_{n+1} - L_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_2(t_n, L(t_n)) - J_2(t_{n-1}, L(t_{n-1}))\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} J_2(t, L(t)), \\
S_{n+1} - S_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_3(t_n, S(t_n)) - J_3(t_{n-1}, S(t_{n-1}))\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} J_3(t, S(t)), \\
Q_{n+1} - Q_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_4(t_n, Q(t_n)) - J_4(t_{n-1}, Q(t_{n-1}))\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} J_4(t, Q(t)), \\
R_{n+1} - R_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_5(t_n, R(t_n)) - J_5(t_{n-1}, R(t_{n-1}))\} + \frac{\iota}{M(\iota)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} J_5(t, R(t)).
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sistem (4.14) ve (4.13)'ten hareketle,

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_{n+1}} J_1(t, P(t)) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_1(t_n, P_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{J_1(t_{n-1}, P_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} J_1(t_n, P_n) - \frac{h}{2} J_1(t_{n-1}, P_{n-1}), \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} J_2(t, L(t)) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_2(t_n, L_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{J_2(t_{n-1}, L_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} J_2(t_n, L_n) - \frac{h}{2} J_2(t_{n-1}, L_{n-1}), \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} J_3(t, S(t)) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_3(t_n, S_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{J_3(t_{n-1}, S_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} J_3(t_n, S_n) - \frac{h}{2} J_3(t_{n-1}, S_{n-1}), \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} J_4(t, Q(t)) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_4(t_n, Q_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{J_4(t_{n-1}, Q_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} J_4(t_n, Q_n) - \frac{h}{2} J_4(t_{n-1}, Q_{n-1}), \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} J_5(t, R(t)) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_5(t_n, R_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{J_5(t_{n-1}, R_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} \\
&= \frac{3h}{2} J_5(t_n, R_n) - \frac{h}{2} J_5(t_{n-1}, R_{n-1}).
\end{aligned}$$

ifadesi oluşturulur. Buradan,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} - P_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_1(t_n, P_n) - J_1(t_{n-1}, P_{n-1})\} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} J_1(t_n, P_n) \\
&\quad - \frac{\iota h}{2M(\iota)} J_1(t_{n-1}, P_{n-1}), \\
L_{n+1} - L_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_2(t_n, L_n) - J_2(t_{n-1}, L_{n-1})\} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} J_2(t_n, L_n) \\
&\quad - \frac{\iota h}{2M(\iota)} J_2(t_{n-1}, L_{n-1}), \\
S_{n+1} - S_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_3(t_n, S_n) - J_3(t_{n-1}, S_{n-1})\} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} J_3(t_n, S_n) \\
&\quad - \frac{\iota h}{2M(\iota)} J_3(t_{n-1}, S_{n-1}), \\
Q_{n+1} - Q_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_4(t_n, Q_n) - J_4(t_{n-1}, Q_{n-1})\} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} J_4(t_n, Q_n) \\
&\quad - \frac{\iota h}{2M(\iota)} J_4(t_{n-1}, Q_{n-1}), \\
R_{n+1} - R_n &= \frac{1-\iota}{M(\iota)} \{J_5(t_n, R_n) - J_5(t_{n-1}, R_{n-1})\} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} J_5(t_n, R_n) \\
&\quad - \frac{\iota h}{2M(\iota)} J_5(t_{n-1}, R_{n-1}).
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= P_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_1(t_n, P_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_1(t_{n-1}, P_{n-1}), \\
L_{n+1} &= L_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_2(t_n, L_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_2(t_{n-1}, L_{n-1}), \\
S_{n+1} &= S_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_3(t_n, S_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_3(t_{n-1}, S_{n-1}), \\
Q_{n+1} &= Q_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_4(t_n, Q_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_4(t_{n-1}, Q_{n-1}), \\
R_{n+1} &= R_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_5(t_n, R_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_5(t_{n-1}, R_{n-1}).
\end{aligned}$$

denklem sistemine ulaşılır.

$${}_0^{CF} \mathfrak{D}_t^\iota = f(t, x(t)) \quad (4.15)$$

denklemini düşünüldüğünde Teorem (3.3)'e göre yukarıda gösterilen denklem sistemi,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= P_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_1(t_n, P_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_1(t_{n-1}, P_{n-1}) + {}^1 R_\iota^n, \\
L_{n+1} &= L_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_2(t_n, L_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_2(t_{n-1}, L_{n-1}) + {}^2 R_\iota^n, \\
S_{n+1} &= S_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_3(t_n, S_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_3(t_{n-1}, S_{n-1}) + {}^3 R_\iota^n, \\
Q_{n+1} &= Q_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_4(t_n, Q_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_4(t_{n-1}, Q_{n-1}) + {}^4 R_\iota^n, \\
R_{n+1} &= R_n + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{3\iota h}{2M(\iota)} \right) J_5(t_n, R_n) + \left(\frac{1-\iota}{M(\iota)} + \frac{\iota h}{2M(\iota)} \right) J_5(t_{n-1}, R_{n-1}) + {}^5 R_\iota^n.
\end{aligned}$$

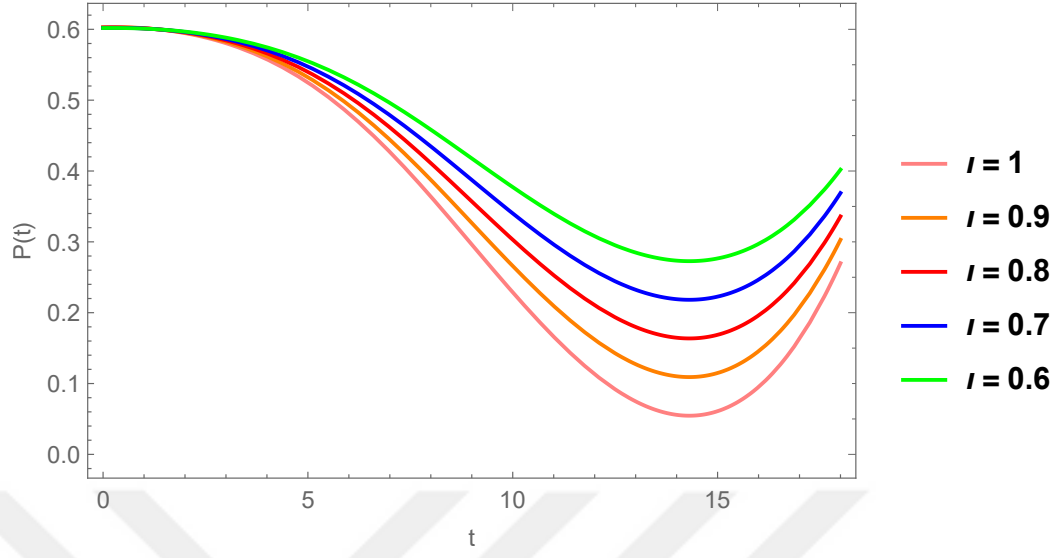
olarak yazılır. Böylece,

$$\|{}^i R_\iota^n\|_\infty < \frac{\iota}{M(\iota)} (+1)! h^{n+1} M, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

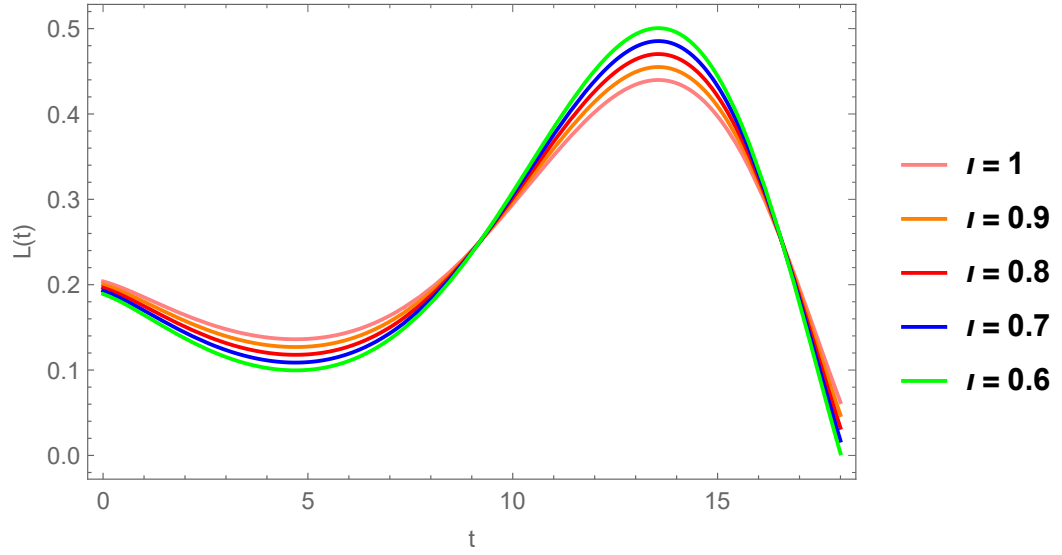
eşitsizliği elde edilmiş olur.

Nümerik çözümleri yukarıda yapılan, (4.2) Sigara içme dinamiği matematiksel modeli simülasyonlarının zamana bağlı değişimi, her bir fonksiyon için farklı kesirli mertebeden değerler kullanılarak grafiklerle aşağıda gösterilmiştir.

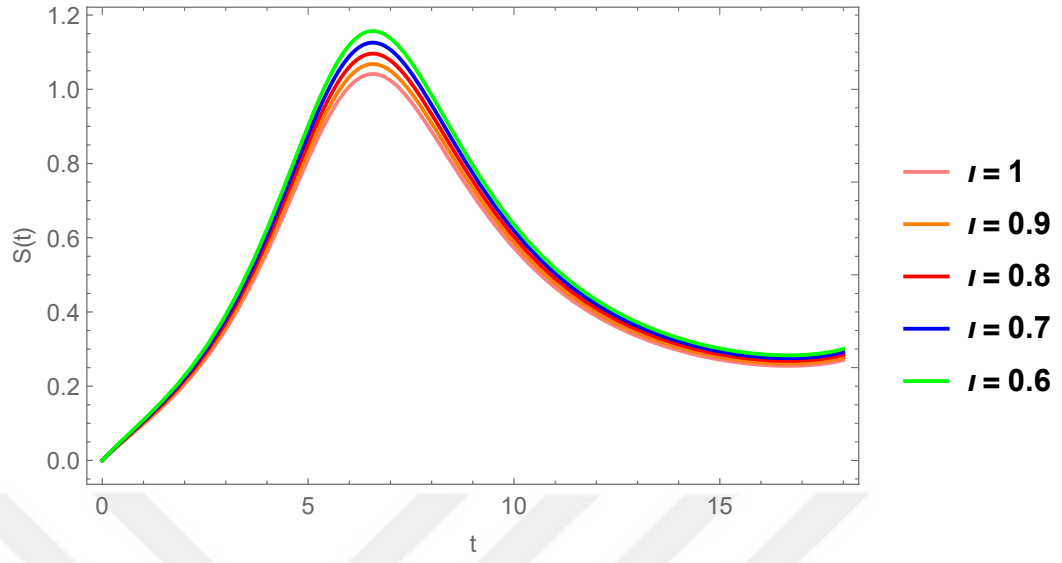
Grafikler incelendiğinde, şekil (4.1)'de potansiyel sigara içenlerin zamanla önce azaldığı sonra arttığı, şekil (4.2)'de ara sıra sigara içenlerde belli bir süre azalma eğilimi olsa da sonrasında zamanla arttığı ve ardından sert bir azalma olduğu, şekil (4.3)'de ağır içicilerin hızlı bir yükseliş sonrasında zamanla düşüş yaşadığı, şekil (4.4)'de sigarayı geçici bırakanların başta az miktarda düştüğü ardından belli bir t zamanına kadar arttığı daha sonra tekrar azaldığı ve şekil (4.5)'de sigarayı kalıcı olarak bırakanların bir miktar sabit seyredip ardından zamana bağlı arttığı gözlemlenmiştir.



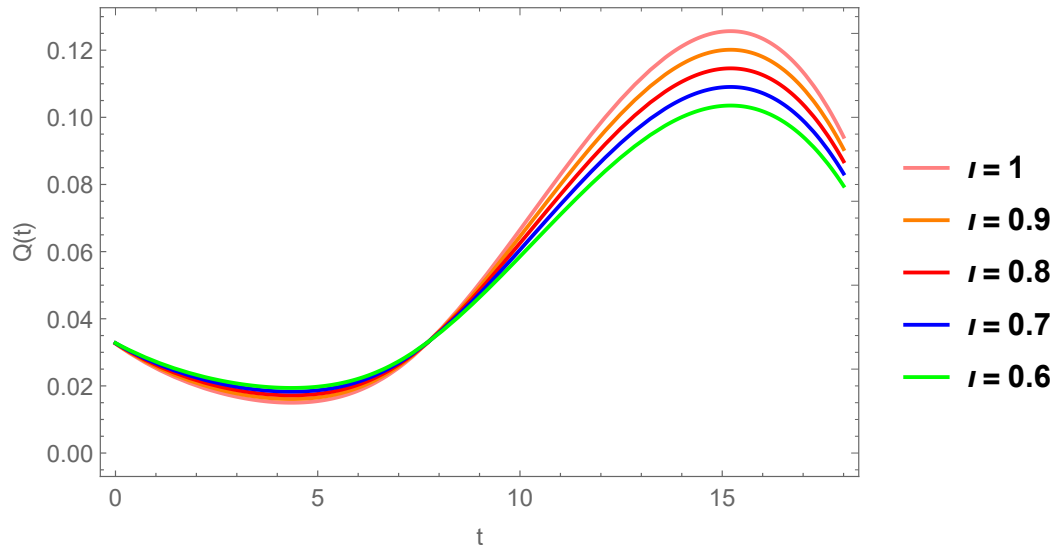
Şekil 4.1. $P(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği



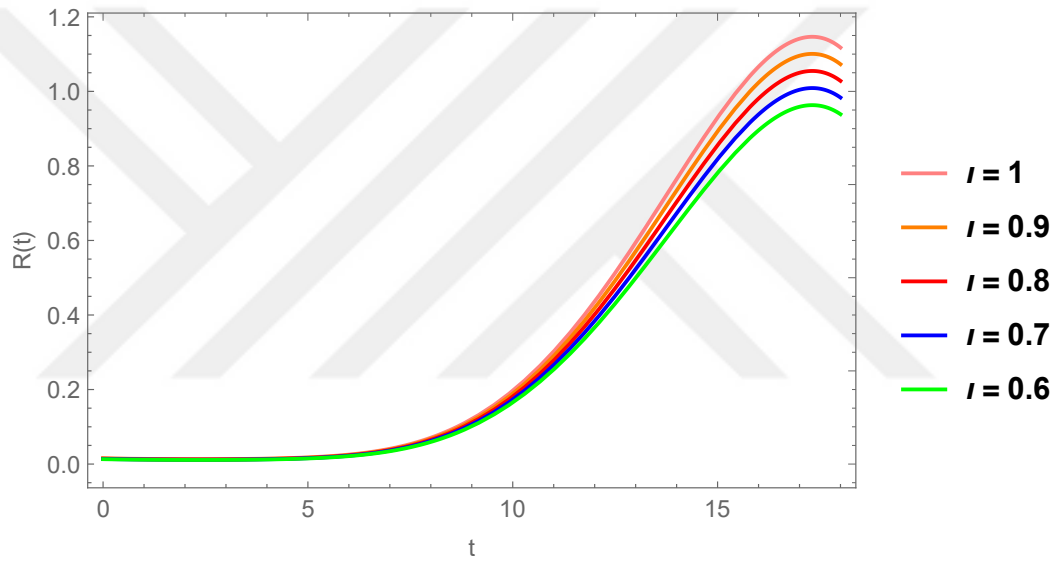
Şekil 4.2. $L(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği



Şekil 4.3. $S(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği



Şekil 4.4. $Q(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği



Şekil 4.5. $R(t)$ fonksiyonunun farklı mertebeden türev değerleri için grafiği

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde sigara içme dinamiği matematiksel modelinin analizi yapılmıştır. Beş farklı diferansiyel denklem içeren tam sayı mertebeden bu model kesirli mertebeden Caputo ve Fabrizio türev operatörüne genişletilmiştir. Genişletilmiş modelin çözümlerinin varlık ve teklik durumları sabit nokta teoremi kullanılarak incelenmiştir. Daha sonra Adams-Bashforth metodu ile nümerik çözümler modele uygulanmıştır. Son olarak $(0, 1)$ aralığında farklı kesirli mertebeden türev değerleri için simülasyonlar oluşturulmuştur. Yapılan bu çalışma ile problemin mevcut durumu, geçmişi ve etki ettikleri arasında bağ kuran ve hafıza etkisi gerektiren bu gibi matematiksel modellerin kesirli türev operatörü kullanılarak analizinin yapılmasının daha pratik ve güvenilir sonuçlar sağladığı görülmüştür. Bu tezi okuyan araştırmacılar tarafından sigara içme dinamiği modelinin farklı kesirli türev ve integral operatörleri ile analizi yapılarak Caputo-Fabrizio operatöründen elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmasının literatüre katkı sağlayacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

- Abdollahi, R., Khastan, A., Nieto, J., ve Rodríguez-López, R. (2018). On the linear fuzzy model associated with caputo–fabrizio operator. *Boundary Value Problems*, 2018:1–18.
- Ahmad, B. ve Sivasundaram, S. (2009). Existence results for nonlinear impulsive hybrid boundary value problems involving fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3(3):251–258.
- Algahtani, O., Zeb, A., Zaman, G., Momani, S., ve Jung, I. (2015). Mathematical study of smoking model by incorporating campaign class. *Wulfenia*, 22:205–216.
- Alkahtani, B. ve Atangana, A. (2016). Analysis of non-homogeneous heat model with new trend of derivative with fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, 89:566–571.
- Alkhudhari, Z., Al-Sheikh, S., ve Al-Tuwairqi, S. (2014). Global dynamics of a mathematical model on smoking. *International Scholarly Research Notices*, 2014.
- Alqahtani, R. (2016). Fixed-point theorem for caputo-fabrizio fractional nagumo equation with nonlinear diffusion and convection. *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9(5):1991–1999.
- Atangana, A. ve Alkahtani, B. (2015). Analysis of the keller–segel model with a fractional derivative without singular kernel. *Entropy*, 17(6):4439–4453.
- Atangana, A. ve Alqahtani, R. (2016). Numerical approximation of the space-time caputo-fabrizio fractional derivative and application to groundwater pollution equation. *Advances in Difference Equations*, 2016(1):1–13.
- Atangana, A. ve Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2):763–769.
- Baleanu, D., Güvenç, Z., Machado, J., ve others (2010). *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*, volume 10. Springer.
- Bulut, H., Baskonus, H., ve Belgacem, F. (2013). The analytical solution of some fractional

- ordinary differential equations by the sumudu transform method. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2013. Hindawi.
- Butzer, P. ve Westphal, U. (2000). An introduction to fractional calculus. In *Applications of fractional calculus in physics*, s. 1–85. World Scientific.
- Caputo, M. (2014). Alternative public economics. *Elgar, Cheltenham*.
- Caputo, M. ve Cametti, C. (2008). Diffusion with memory in two cases of biological interest. *Journal of theoretical biology*, 254(3):697–703.
- Caputo, M., Cametti, C., ve Ruggero, V. (2008). Time and spatial concentration profile inside a membrane by means of a memory formalism. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(8-9):2010–2018.
- Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.
- Carvalho, A. ve Pinto, C. (2017). A delay fractional order model for the co-infection of malaria and hiv/aids. *International Journal of Dynamics and Control*, 5(1):168–186.
- Castillo-Garsow, C., Jordan-Salivia, G., Rodriguez-Herrera, A., ve others (1997). Mathematical models for the dynamics of tobacco use, recovery and relapse.
- Cesarone, F., Caputo, M., ve Cametti, C. (2004). Memory formalism in the passive diffusion across a biological membrane. *J. Membrane Sci*, 250:79–84.
- Chen, Y. ve Moore, K. (2001). Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 01CH37228)*, volume 2, s. 1421–1426. IEEE.
- Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, volume 2004. Springer Berlin.
- Din, Q., Ozair, M., Hussain, T., ve Saeed, U. (2016). Qualitative behavior of a smoking

- model, *adv. Difference Equ*, 96(10):1186).
- Dokuyucu, M. A., Baleanu, D., ve Çelik, E. (2018). Analysis of keller-segel model with atangana-baleanu fractional derivative. *Filomat*, 32(16):5633–5643.
- Dokuyucu, M. A. ve Dutta, H. (2020). A fractional order model for ebola virus with the new caputo fractional derivative without singular kernel. *Chaos, Solitons & Fractals*, 134:109717.
- Dokuyucu, M. A. ve Dutta, H. (2021). Analysis of a fractional tumor-immune interaction model with exponential kernel. *Filomat*, 35(6):2023–2042.
- El-Shahed, M. (2003). Fractional calculus model of the semilunar heart valve vibrations. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume 37033, s. 711–714.
- Ertürk, V., Zaman, G., ve Momani, S. (2012). A numeric–analytic method for approximating a giving up smoking model containing fractional derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(10):3065–3074.
- Friedrich, C. (1991). Relaxation and retardation functions of the maxwell model with fractional derivatives. *Rheologica Acta*, 30:151–158.
- Gómez-Aguilar, J., Escobar-Jiménez, R., López-López, M., ve Alvarado-Martínez, V. (2016). Atangana-baleanu fractional derivative applied to electromagnetic waves in dielectric media. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 30(15):1937–1952.
- Haq, F., Shah, K., ur Rahman, G., ve Shahzad, M. (2018). Numerical solution of fractional order smoking model via laplace adomian decomposition method. *Alexandria Engineering Journal*, 57(2):1061–1069.
- Hewitt, E. ve Stromberg, K. (2013). *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag.
- Hilfer, R. (2003). On fractional relaxation. *Fractals*, 11(supp01):251–257.

- Hristov, J. (2013). Integral balance solutions to applied models involving time-fractional derivatives—the scope of the method and results thereof. *Commun. Frac. Calc*, 4:64–104.
- Iaffaldano, G., Caputo, M., ve Martino, S. (2006). Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand. *Hydrology and Earth System Sciences*, 10(1):93–100.
- Khalid, M., Khan, F., ve Iqbal, A. (2016). Perturbation-iteration algorithm to solve fractional giving up smoking mathematical model. *International Journal of Computer Applications*, 142(9):1–6.
- Khan, A., Abro, K., Tassaddiq, A., ve Khan, I. (2017). Atangana–baleanu and caputo fabrizio analysis of fractional derivatives for heat and mass transfer of second grade fluids over a vertical plate: a comparative study. *Entropy*, 19(8):279.
- Kilbas, A., Srivastava, H., ve Trujillo, J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier.
- Kiryakova, V. (1993). *Generalized fractional calculus and applications*. CRC press.
- Kumar, D., Singh, J., ve Baleanu, D. (2016). Numerical computation of a fractional model of differential-difference equation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11(6).
- Kumar, D., Singh, J., ve Baleanu, D. (2018). Modified kawahara equation within a fractional derivative with non-singular kernel.
- Losada, J. ve Nieto, J. (2015). Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):87–92.
- Lubin, J. ve Caporaso, N. (2006). Cigarette smoking and lung cancer: modeling total exposure and intensity. *Cancer Epidemiology Biomarkers & Prevention*, 15(3):517–523.
- Magin, R. (2006). *Fractional calculus in bioengineering* begell house publishers. Inc., Connecticut.
- McBride, A. (1979). *Fractional calculus and integral transforms of generalized functions*.

Number 31. Pitman Publishing.

Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. (*No Title*).

Naber, M. (2004). Time fractional schrödinger equation. *Journal of mathematical physics*, 45(8):3339–3352.

Nataraj, P. (2010). Fractional calculus and fractional differential equations with scilab. *SGGS IE and T*, s. 23–25.

Odibat, Z. (2010). Analytic study on linear systems of fractional differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(3):1171–1183.

Oldham, K. ve Spanier, J. (1974). The fractional calculus, vol. 111 of mathematics in science and engineering.

Owolabi, K. (2017). Mathematical modelling and analysis of two-component system with caputo fractional derivative order. *Chaos, Solitons & Fractals*, 103:544–554.

Podlubny, I. (1998). Fractional derivatives and integrals. *Fractional differential equations*, 198:41–117.

Rahimi, Z., Sumelka, W., ve Yang, X. (2017). Linear and non-linear free vibration of nano beams based on a new fractional non-local theory. *Engineering Computations*.

Sharomi, O. ve Gumel, A. (2008). Curtailing smoking dynamics: a mathematical modeling approach. *Applied Mathematics and Computation*, 195(2):475–499.

Singh, J., Kumar, D., ve Swroop, R. (2016). Numerical solution of time-and space-fractional coupled burgers' equations via homotopy algorithm. *Alexandria Engineering Journal*, 55(2):1753–1763.

Sun, Y., Indraratna, B., Carter, J., Marchant, T., ve Nimbalkar, S. (2017). Application of fractional calculus in modelling ballast deformation under cyclic loading. *Computers and Geotechnics*, 82:16–30.

- Tahir, M., Imran, M., Raza, N., Abdullah, M., ve Aleem, M. (2017). Wall slip and non-integer order derivative effects on the heat transfer flow of maxwell fluid over an oscillating vertical plate with new definition of fractional caputo-fabrizio derivatives. *Results in physics*, 7:1887–1898.
- Yadav, A., Srivastava, P., ve Kumar, A. (2015). Mathematical model for smoking: Effect of determination and education. *International Journal of Biomathematics*, 8(01):1550001.
- Zaman, G. (2011). Qualitative behavior of giving up smoking models. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series*, 34(2):403–415.
- Závada, P. (2002). Relativistic wave equations with fractional derivatives and pseudodifferential operators. *Journal of Applied Mathematics*, 2(4):163–197.
- Zeb, A., Bibi, F., ve Zaman, G. (2015). Optimal control strategies in square root dynamics of smoking model. *International Journal of Scientific World*, 3(1):91–97.
- Zeb, A., Erturk, V., Khan, U., Zaman, G., ve Momani, S. (2018). An approach for approximate solution of fractional-order smoking model with relapse class. *International Journal of Biomathematics*, 11(06):1850077.