

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÇARPIM OPERATÖRLERİ

Matematikçi Emine ÇELİK

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ömer GÖK

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
3. LATİS VE CEBİRSEL HOMOMORFİZMALAR	21
4. ÇARPIM OPERATÖRLERİ	37
5. YEREL YAKLAŞIM	48
6. SONUÇLAR	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	63

SİMGE LİSTESİ

$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
A^d	A 'nın ayrık tümleyeni
$\mathcal{A}$	Banach cebiri
$\mathcal{A}_\phi$	ϕ tarafından üretilen kapalı birimli cebir
$A \perp B$	Ayrık kümeler
B_x	x vektörü tarafından üretilen esas band
B_D	Bir Riesz uzayının alt kümesi olan D kümesi tarafından üretilen band
$\text{boy}X$	X lineer uzayının boyutu
$C(\Omega)$	Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı bütün sürekli reel değerli fonksiyonlar
$C_c(\Omega)$	Ω 'daki bütün kompleks değerli sürekli fonksiyonların Banach uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{C}ek(T)$	T 'nin çekirdeği
δ_x	x tarafından desteklenen Dirac ölçümü
E'	E 'nin topolojik duali
E''	E 'nin ikinci duali
E^*	E 'nin cebirsel duali
E_A	E 'nin A alt kümesi tarafından üretilen ideali
E_x	x vektörü tarafından üretilen esas ideal
E^+	E 'nin pozitif konisi
E^-	E 'nin sıralı duali
E_n^-	E 'nin sıralı sürekli duali
$E_{\mathbb{C}}$	E Banach latisinin $E \oplus iE$ kompleksleştirilmesi
$E \oplus F$	İki Riesz uzayının direkt toplamı
$\langle E, E' \rangle$	Riesz dual sistemi
$\mathcal{E}(T)$	T 'nin pozitif genişlemelerinin kümesi
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
$f \otimes u$	Rank-bir operatör
$f \circ \tau$	Bileşke operatör
I	Birim operatör

$\inf$	En büyük alt sınır
$\mathcal{L}(E, F)$	E ' den F ' ye lineer sınırlı operatörlerin vektör uzayı
$\mathcal{L}_b(E, F)$	E ' den F ' ye sıralı sınırlı operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_b(E, \mathbb{R})$	E ' deki bütün sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin vektör uzayı
$\mathcal{L}_n(E, \mathbb{R})$	E ' deki bütün sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı
$\mathcal{L}_r(E, F)$	Düzenli operatörlerin uzayı
M_v	v ile tanımlı çarpım operatörü
μ	Ölçüm
$\emptyset$	Boş küme
$Orth(E)$	E ' den E ' ye ortomorfizmaların kümesi
$ \sigma (E, E')$	Mutlak zayıf topoloji
P_B	B üzerine sıralı izdüşüm
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\sup$	En küçük üst sınır
T'	Eşlenik operatör
$\{T\}'$	T operatörünün komutantı
$T_{\mathbb{C}}$	Kompleks lineer operatör
x^+	x ' in pozitif kısmı
x^-	x ' in negatif kısmı
$ x $	x ' in mutlak değeri
$\ x\ $	x vektörünün normu
$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$	İndeks kümesi A olan net
$x_\alpha \uparrow x$	x_α neti artan ve supremumu x
$x_\alpha \downarrow x$	x_α neti azalan ve infimumu x
$x \vee y$	x ve y ' nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y ' nin infimumu
$x \perp y$	x ve y ' nin ayrıklığı
$\mathcal{X}_V$	V kümesinin karakteristik fonksiyonu

$\bar{z}$	z ' nin kompleks eşleniği
$\mathcal{Z}(E)$	Merkez operatörlerin topluluğu
$\subset$	Alt küme
$\subseteq$	Alt küme veya eşit
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük veya eşit
$\preceq$	Sıralama bağıntısı
$\neq$	Eşit değil
$:=$	Tanım olarak eşit
$\Rightarrow$	İse
$\ \cdot \ _r$	r – norm
$\prod$	Çarpım sembolü
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim, arakesit
$\sum$	Toplam sembolü

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Ömer GÖK' e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

K kompakt Hausdorff uzayındaki bütün sürekli fonksiyonların $C(K)$ -uzayları arasındaki latis homomorfizmaların özellikleri düşünülerek, onların cebirsel homomorfizmalarla ilişkileri verildi. Latis (örgü) homomorfizmaların genişleme özellikleri kadar $C(K)$ -uzayları arasındaki latis ve cebirsel homomorfizmaların temel niteliği sunuldu. $C(K)$ -uzaylarındaki çarpım operatörleri tartışıldı. Bir Banach latis olarak birimli bir Soyut M -uzayı (AM -uzayı) çok önemli olan bir f -cebiri yapısına sahiptir. Bir AM -uzayının halka yapısından faydalanılarak Banach latislerde operatörlerin faydalı bazı “yerel yaklaşım” özellikleri çıkarıldı. Örneğin, birimli bir E , AM -uzayını alırsak, E'' ikinci dualinin sıralı izdüşümleri E' nin çarpım operatörleri tarafından “yerel olarak” yaklaştırılabilir.

Anahtar kelimeler: Çarpım operatörü, latis homomorfizması, cebirsel homomorfizma, Soyut M -uzayı (AM -uzayı), ortomorfizma, bileşke operatör.

ABSTRACT

Considering the properties of lattice homomorphisms between the spaces $C(K)$ of all continuous functions on a compact Hausdorff space K , it is given their relation to algebraic homomorphisms. The basic characterization of lattice and algebraic homomorphisms between $C(K)$ -spaces as well as some extension properties of lattice homomorphisms are presented. Multiplication operators on $C(K)$ -spaces are discussed. An abstract M -space (AM-space) with unit as a Banach lattice has an f -algebra structure which is very important. Utilizing the ring structure of an AM-space, some useful “local approximation” properties of operators on Banach lattices are derived. For example, if we take an AM-space E with unit, then the order projections of the second dual E'' can be approximated “locally” by the multiplication operators of E .

Keywords: Multiplication operator, lattice homomorphism, algebraic homomorphism, Abstract M -space (AM-space), orthomorphism, composition operator.

1. GİRİŞ

Stefan Banach' ın (1932) normlu uzaylar arasındaki lineer operatörlere ilişkin gelecekteki gelişmelere temel oluşturan incelemesinden sonra operatörlerle çalışmak analizde araştırmanın kalbi haline gelmiştir. Pek çok bölümüyle onun araştırmaları, uzayların topolojik yapılarıyla ve operatörlerin topolojik özellikleriyle sınırlı kalmıştır. Aynı zamanda operatör teorisinin, operatörler arasındaki uzayların sıralı yapılarını da içeren; operatörlerin topolojik ve cebirsel çalışmalarıyla paralel olarak gelişen bir durumu daha vardır.

Hemen hemen her klasik Banach uzayı doğal sıralı özelliğe sahiptir bu da uzayların cebirsel ve topolojik yapıları ile bağdaşır. Operatörler, pozitif operatörler olarak bilinen sıralı yapılarını korurlar. Bunlar ilk olarak Riesz (1930, 1940), Freudenthal (1936) ve Kantorovich (1935, 1936) tarafından 1930' lu yılların ortalarında tanıtılmıştır. Bu dönemde operatörlerin sıralı ve topolojik özelliklerinin incelenmesi birbirleriyle alakalı değildi ve oldukça uzun bir süre için çok az ortak özelliğe sahip oldukları görülmüyordu. Sovyetler Birliği' nden Kantorovich vd. (1950) ile Japonya' dan (Nakano, 1950) tarafından yapılan incelemeler 1950' li yıllarda, sıralı uzaylar arasındaki operatörlerin kuramsal geribeslenmelerini oluşturmuyordu. Yine bu dönem de pek çok kitap ve inceleme yayınlanmıştır.

1960 yılının başlarında operatörlerin topolojik ve sıralı yapılarının ilişik olduğu ve onlarla beraber çalışılabileceği görüldü. Bundan sonraki araştırmalar birleşmiş bir biçimde bu yapıları içine alan bir teori üretme amacındaydı. Operatörlerin sıralı ve topolojik özelliklerinin birleşimi çeşitli ülkelerde pek çok matematikçinin çabasıyla oluşmuştur. Bu birleşim dönemi 1980' ler öncesi ve 1980' ler sonrası olarak iki bölüme ayrılır.

1980 öncesi dönemi, vektör uzaylarının sıralı yapılarının temellerinin ve operatörlerin latis özelliklerinin pek çoğunun verildiği dönem olarak tanımlanır. Bu dönemde kısmî sıralı vektör uzaylarının teorisi pek çok ülkedeki matematikçilerin çabaları ile geliştirilmiştir. Konu üzerine Peressini (1967), Jameson' ın (1970) yazdığı incelemeler vardır ve Schaefer (1974) kitabının son bölümünde sıralı vektör uzaylarına değinmiştir. Luxemburg ve Zaanen (1971), Vulikh (1967), Kaplan (1985) Riesz uzaylarının sıralı yapılarını; Fremlin (1974), Aliprantis ve Burkinshaw (1978) Riesz uzaylarının topolojik özelliklerini çalışırken Krasnoselsky vd. (1966), Krieger (1969), Lacey (1974), Lindenstrauss ve Tzafriri (1977, 1979), Schaefer (1974), Schwarz (1984) Banach latisler ve pozitif operatörler üzerine incelemeler yazmışlardır.

1980 sonrası dönemi bilinen bütün noktalarla pozitif operatörlerin çalışılması ile nitelenmiştir.

Bazı kompaktlık özelliklerine sahip pozitif operatörler tarafından sınırlanan operatörlerin özelliklerine dikkat çekilmiştir. Bu dönemde aynı zamanda latis yapılarına dayanarak integral operatörlerinin tam bir çalışmasını buluruz. Bu dönemde pozitif operatörler hakkındaki incelemeler Aliprantis ve Burkinshaw (1985), Arendt vd. (1986), Bukhvalov vd. (1992), Meyer-Nieberg (1991), Zaanen (1983, 1997) tarafından yazılmıştır. Bu listeye en son olarak Abramovich vd. (1992), Abramovich ve Kitover (2000), Kusraev (2000), Wnuk' un (1999) pozitif operatörleri içeren kitapları eklenir.

Matematik içindeki önemli rolünden başka Riesz uzayı teorisi ve pozitif operatörler teorisi birkaç bilim dalı için de önemli uygulamalara sahiptir. Riesz uzayı ve pozitif operatörler teorisi alanının oyun teorisi, finans, ekonomi, nükleer reaktör teorisi, istatistiksel karar teorisi ve planlanmış nüfus dinamikleri gibi faydalı içeriğe sahip olduğu bulunmuştur.

Bu tezin amacı operatörlerin topolojik ve sıralı yapılarından yararlanarak; Banach latisler arasında tanımlı operatörlerin bir kaç özel sınıfının özelliklerini ayrıntılarıyla sunmaktır.

İkinci bölümde Banach latis ve operatör teorisindeki, tezde kullanılan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bununla ilgili olarak Riesz uzayı, Banach latis, esas ideal, izdüşüm, pozitif operatör, dual, bir operatörün bileşeni, ortomorfizma gibi operatörlerin belli sınıflarını içine alan tanımların yanı sıra bunlarla ilgili sonraki bölümlerde yararlandığımız temel teoremlere değinilmiştir.

Operatörlerin önemli sınıfları arasından çarpım operatörleri ile latis ve cebirsel homomorfizmaların özelliklerini bölümlere ayırarak sunacağız. Operatörlerin bu sınıflarının sıralı teorik özellikleri üzerinde duracağız.

Latis ve cebirsel homomorfizmaları incelediğimiz üçüncü bölümde $C(\Omega)$ -uzayları arasındaki latis homomorfizmalarına değinilecektir ve bu bölüm latis homomorfizmaların genişlemesi hakkında birkaç temel sonucu içermektedir.

Dördüncü bölümde çarpım operatörlerin sunumu $C(\Omega)$ -uzayları çerçevesinde yapılacaktır. Kakutani-Bohnenblust-Krein Yaklaşım Teoremi vasıtasıyla bu çerçeve, AM-uzayı üzerindeki çarpım operatörlerini çalışmaya izin verir.

Son olarak, beşinci bölümü ve nihayetinde araştırmamızı AM-uzayındaki, Dedekind tam ve yarı iç noktalı Banach latislerdeki pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri ile ilgili sunduğumuz teoremlerle tamamlamış olacağız.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezde önceden bilinmesi gerekli tanımlar, teoremler, önermeler ve sonuçlar verilmiştir.

2.1 Tanım

Bir E sıralı vektör uzayında her $x, y \in E$ eleman çifti için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu da E 'nin elemanı ise E 'ye Riesz uzayı (veya vektör latis) denir. Burada supremum ve infimumun gösterimi şu şekildedir.

$$x \vee y := \sup\{x, y\}$$

$$x \wedge y := \inf\{x, y\}.$$

Bir Riesz uzayındaki herhangi bir x vektörü için; x 'in pozitif kısmı $x^+ := x \vee 0$, x 'in negatif kısmı $x^- := (-x) \vee 0$, x 'in mutlak değeri $|x| := x \vee (-x)$ şeklinde tanımlanır.

E bir sıralı vektör uzayı ise $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine E 'nin pozitif konisi denir.

x^+ , x^- ve $|x|$ vektörleri aşağıda verilen teoremdaki özelliklere sahiptir.

2.2 Teorem

E bir vektör latis olsun. $x \in E$ için şunlar sağlanır.

$$(1) \ x = x^+ - x^-$$

$$(2) \ |x| = x^+ + x^-$$

$$(3) \ x^+ \wedge x^- = 0 \text{ (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).}$$

2.3 Tanım

Bir sıralı kümede bir $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ netine eğer $\alpha_1 \geq \alpha_2$ için $x_{\alpha_1} \leq x_{\alpha_2}$ oluyorsa azalan net denir ve sembol olarak $x_\alpha \downarrow$ ile gösterilir. $x_\alpha \downarrow x$ notasyonu $x_\alpha \downarrow$ ve $x = \inf\{x_\alpha\}$ anlamına gelir.

Benzer şekilde $\alpha_2 \leq \alpha_1$ için $x_{\alpha_2} \leq x_{\alpha_1}$ oluyorsa $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ netine artan net denir ve sembol

olarak $x_\alpha \uparrow$ ile gösterilir. $x_\alpha \uparrow x$ notasyonu $x_\alpha \uparrow$ ve $x = \sup\{x_\alpha\}$ anlamına gelir.

2.4 Tanım

Bir Y sıralı vektör uzayına eğer her n için $nx \leq y$ ifadesi $x \leq 0$ olmasını gerektiriyorsa Archimedean sıralı vektör uzayı denir.

2.5 Tanım

Bir Riesz uzayında iki x ve y elemanına $|x| \wedge |y| = 0$ sağlanıyorsa ayrık elemanlar denir ve sembol olarak $x \perp y$ ile gösterilir. Bir Riesz uzayının iki A ve B alt kümesine her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \perp b$ sağlanıyorsa ayrık kümeler denir ve sembol olarak $A \perp B$ ile gösterilir.

A , bir E Riesz uzayının boş olmayan bir alt kümesi ise $A^d := \{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$ ile tanımlı A^d kümesine A 'nın ayrık tümleyeni denir. $A \cap A^d = \{0\}$ ' dır.

2.6 Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. E 'nin bir A alt kümesine $|x| \leq |y|$, $y \in A$ ifadesi $x \in A$ olmasını gerektiriyorsa solid (katı) denir. E 'nin bir solid vektör alt uzayına ideal denir. E 'nin boş olmayan bir A alt kümesi tarafından üretilen ideal A 'yı içeren en küçük idealdir. Bu ideal,

$$E_A = \left\{ x \in E : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \text{ olan } \exists x_1, \dots, x_n \in A \text{ ve } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \right\} \text{ şeklinde verilir ve } A' \text{ yı}$$

kapsayan bütün ideallerin kesişimi ile örtüşür. Eğer $A = \{x\}$ ise $E_x = E_{\{x\}}$, x vektörü tarafından üretilen esas ideal adını alır.

Burada, $E_x = \{y \in E : |y| \leq \lambda |x| \text{ olacak şekilde } \lambda \geq 0 \text{ vardır}\}$ şeklinde yazılır.

E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. E 'nin bir B idealine, eğer E 'de supremuma sahip her $A \subset B$ altkümesi için $\sup(A) \in B$ ise band denir.

Bir A idealinin bir band olması için gerek ve yeter koşul $\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ ifadesinin $x \in A$ 'yı sağlamasıdır. D bir E Riesz uzayının boş olmayan bir alt kümesi ise D 'yi içeren en küçük B_D bandına D tarafından üretilen band denir. Eğer $D = \{x\}$ ise $B_x = B_{\{x\}}$ e, x vektörü tarafından üretilen esas band denir.

2.7 Tanım

Bir vektör uzayında bir $P:V \rightarrow V$ lineer operatörüne $P^2 = P$ ise izdüşüm (projeksiyon) denir. Eğer bir P izdüşümü bir Riesz uzayında tanımlı ve P aynı zamanda bir pozitif operatör ise bu durumda P 'ye pozitif izdüşüm denir.

Bir E Riesz uzayındaki bir B bandına $E = B \oplus B^\perp$ yi sağlıyorsa izdüşüm bandı denir.

2.8 Tanım

Bir Riesz uzayında her band izdüşüm bandı ise bu Riesz uzayı izdüşüm özelliğine sahiptir denir.

B , bir E Riesz uzayında bir izdüşüm bandı olsun. Böylece, $E = B \oplus B^\perp$ sağlanır ve buradan her $x \in E$ elemanı $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^\perp$ olmak üzere bir tek $x = x_1 + x_2$ ayrıştırmasına sahiptir. O zaman, $P_B: E \rightarrow E$ izdüşümü $P_B(x) := x_1$ ile tanımlanır. Açıkça, P_B bir pozitif izdüşümdür. P_B formundaki izdüşüme sıralı izdüşüm (veya band izdüşümü) denir. Böylece sıralı izdüşümler izdüşüm bandlarıyla bire-bir bir biçimde ilişkilendirilebilirler.

Bir Riesz uzayındaki x elemanına x tarafından üretilen B_x bandı (yani $B_x = \{y: |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$) bir izdüşüm bandı ise izdüşüm elemanı denir. Tek bir eleman tarafından üretilen banda esas band denir. Bir Riesz uzayındaki her eleman bir izdüşüm elemanı ise bu Riesz uzayı esas izdüşüm özelliğine (PPP) sahiptir denir.

2.9 Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. Bir $e > 0$ vektörüne eğer $E_e = E$ ise yani, her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde bir $\lambda \geq 0$ varsa sıralı birim (=güçlü birim=birim) denir.

$e > 0$ vektörüne eğer e tarafından üretilen band B_e için $B_e = E$ ise yani, her $x \in E^+$ için $x \wedge ne \uparrow x$ sağlanıyorsa zayıf sıralı birim denir.

2.10 Tanım

Bir kısmî sıralı vektör uzayında $x \leq y$ olmak üzere $[x, y] = \{z: x \leq z \leq y\}$ formundaki bir alt kümeye sıralı aralık denir. Bir E Riesz uzayının bir vektör alt uzayı olan A 'ya her $x, y \in A$

için E' de alınan supremum $x \vee y$ ve infimum $x \wedge y$, A' ya aitse Riesz alt uzayı (veya bir vektör alt latis) denir. Her ideal Riesz alt uzayıdır.

2.11 Tanım

Bir Riesz uzayı üzerinde bir $\|\cdot\|$ normuna $|x| \leq |y|$ için $\|x\| \leq \|y\|$ sağlanıyorsa bir latis norm denir. Bir latis norm ile tanımlı bir Riesz uzayına normlu Riesz uzayı denir. Eğer normlu bir Riesz uzayı aynı zamanda tam ise Banach latis adını alır.

Bir normlu Riesz uzayında her x için $\|x\| = \| |x| \|$ 'tir.

2.12 Tanım

Bir Z sıralı vektör uzayının bir Y vektör alt uzayına her $z \in Z$ için $z \leq y'$ yi sağlayan bir $y \in Y$ varsa Z' yi majorize eder denir.

2.13 Tanım

X bir vektör uzayı olsun. X' in boş olmayan A alt kümesine $x, y \in A$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğunda $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ oluyorsa konveks küme denir.

2.14 Tanım

C , bir reel Z Banach uzayının boş olmayan bir konveks alt kümesi olsun. Bir $c \in C$ noktasına eğer bir $u, v \in C$ ve bir $\alpha \in (0, 1)$ için $c = \alpha u + (1 - \alpha)v$ ifadesi $u = v = c$ olmasını gerektiriyorsa uç nokta denir.

2.15 Tanım

E' nin bir normlu Riesz uzayı olduğunu kabul edelim. Eğer E_e , E içinde yoğun ise $e \in E^+$ elemanına E^+ nin bir yarı iç noktası denir.

2.16 Tanım

Bir Riesz uzayında tanımlı bir latis normuna $x_\alpha \downarrow 0$ ifadesi $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ 'ı sağlıyorsa sıralı sürekli norm denir. Bir Banach latisin normu sıralı sürekli ise Banach latis sıralı sürekli norma

sahiptir denir.

2.17 Tanım

Bir Riesz uzayına, uzayın üstten sınırlı her boştan farklı alt kümesi bir en küçük üst sınıra sahipse (veya benzer şekilde uzayın alttan sınırlı her boştan farklı alt kümesi bir en büyük alt sınıra sahipse) Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Benzer olarak, bir Riesz uzayına, uzayın üstten sınırlı her sayılabilir alt kümesi bir en küçük üst sınıra sahipse σ – Dedekind tam Riesz uzayı denir.

2.18 Tanım

İki vektör uzayında tanımlı $T : X \rightarrow Y$ dönüşümüne her $x, y \in X$ ve her α, β skalerleri için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ oluyorsa lineer operatör (veya sadece operatör) denir.

X, Y normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir operatör ise T 'nin normu $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ şeklinde tanımlıdır.

2.19 Tanım

$T : X \rightarrow Y$ iki sıralı vektör uzayı arasında tanımlı bir operatör olsun

(1) $x \geq 0$ için $Tx \geq 0$ sağlanıyorsa T 'ye pozitif operatör denir ve sembol olarak $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ şeklinde gösterilir.

(2) $x > 0$ için $Tx > 0$ sağlanıyorsa T 'ye kesin pozitif operatör denir.

(3) Eğer T iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabiliyorsa T 'ye düzenli (regüler) operatör denir.

İki sıralı vektör uzayı X ve Y 'de tanımlı bütün regüler operatörlerin topluluğu $\mathcal{L}_r(X, Y)$ ile gösterilir. A , bir sıralı vektör uzayı X 'in bir alt kümesi olsun. Her $a \in A$ için $x \leq a \leq y$ 'yi sağlayan $x, y \in X$ varsa A 'ya sıralı sınırlı denir.

2.20 Tanım

İki Riesz uzayındaki bir $T : E \rightarrow F$ operatörüne E 'de $x \perp y$ olduğunda F 'de $Tx \perp Ty$

oluyorsa ayrıklığı koruyan operatör denir.

2.21 Tanım

$T : X \rightarrow Y$ iki sıralı vektör uzayı arasında tanımlı bir operatör olsun. T , X ' in sıralı sınırlı alt kümelerini Y ' nin sıralı sınırlı alt kümelerine taşıyorsa, T ' ye sıralı sınırlı operatör denir.

Her pozitif operatör (ve buradan her regüler operatör) sıralı sınırlıdır. Buna ek olarak, sıralı sınırlı bir operatör regüler olmak zorunda değildir. X ' ten Y ' ye bütün sıralı sınırlı operatörlerin topluluğu $\mathcal{L}_b(X, Y)$ ile gösterilir.

2.22 Tanım

$\tau : \Omega \rightarrow \Omega$, bir Ω kompakt Hausdorff uzayında sürekli bir dönüşüm olmak üzere $C_\tau(x) = x \circ \tau$ formülüyle tanımlı $C_\tau : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ operatörüne bileşke operatör denir.

2.23 Tanım

$T : E \rightarrow F$ iki Riesz uzayında bir operatör olsun. $|T| := T \vee (-T)$ varsa $(|T|, \mathcal{L}(E, F))$ ' deki $\{T, -T\}$ kümesinin supremumu ise $|T|$ ' ye T ' nin modülü denir.

2.24 Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. Bir $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneline her $x \in E^+$ için $f(x) \geq 0$ sağlanıyorsa pozitif fonksiyonel denir. Ayrıca, bir f lineer fonksiyoneline f , E ' nin sıralı sınırlı alt kümelerini $\mathbb{R}$ ' nin sınırlı alt kümelerine götürüyorsa sıralı sınırlı fonksiyonel denir. E ' deki bütün sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin E^- vektör uzayına sıralı dual denir, yani, $E^- := \mathcal{L}_b(E, \mathbb{R})$ ' dir. $\mathbb{R}$ bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan E^- pozitif lineer fonksiyoneller tarafından üretilen bir vektör uzayıdır ve E^- bir Dedekind tam Riesz uzayıdır.

E bir Riesz uzayı olsun. E ' deki bütün sıralı sürekli lineer fonksiyonellerin $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{R})$ vektör uzayı E_n^- ile gösterilir. Yani, $E_n^- := \mathcal{L}_n(E, \mathbb{R})$ ' dir. E_n^- ' ye E ' nin sıralı sürekli duali denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2.25 Tanım

Bir V vektör uzayının V^* cebirsel duali V' deki bütün lineer fonksiyonelleri içeren vektör uzayıdır. İki vektör uzayında tanımlı bir $T:V \rightarrow W$ operatörü için T' nin cebirsel eşleniği olan $T^*:W^* \rightarrow V^*$ operatörü her $f \in W^*$ ve $v \in V$ için $T^*f(v) = f(Tv)$ ile tanımlanır. Bu standart dual terminolojisinde $\langle T^*f, v \rangle = \langle f, Tv \rangle$ şeklinde yazılır. $S:V \rightarrow W$ başka bir operatör ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise o zaman, $(S+T)^* = S^* + T^*$ ve $(\alpha T)^* = \alpha T^*$ dır.

$T:E \rightarrow F$ iki Riesz uzayında bir sıralı sınırlı operatör olduğu zaman T^*, F^- yi E^- ye taşır. Gerçekten, A, E' nin sıralı sınırlı alt kümesi ve $f \in E^-$ ise $T^*f(A) = f(T(A))$ dan $T^*f(A), \mathbb{R}'$ nin sınırlı bir alt kümesidir ve böylece $T^*f \in E^-$ dir. T^* in F^- ye kısıtlanışına T' nin (sıralı) eşleniği denir ve T' ile gösterilir. Yani, $T':F^- \rightarrow E^-$, her $f \in F^-$ ve $x \in E$ için $\langle T'f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle$ sağlanır.

Eğer T bir pozitif operatör ise T' nin eşleniği T' de pozitif operatördür.

Reel (kompleks) normlu bir X uzayı için $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ Banach uzayı ($\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$), X' ile gösterilir ve X' in norm duali (veya sadece duali) adını alır. $X'' = (X')'$ Banach uzayına X' in ikinci (veya çift) duali denir. Her $x \in X'$ i $x(x') = x'(x)$ formülü yolu ile X'' de bir lineer fonksiyonel olarak göz önüne alırsak, X' in X'' ne doğal izometrik gömülmesini elde ederiz, yani X' i X'' nin bir alt uzayı olarak görebiliriz.

2.26 Tanım

E normlu bir Riesz uzayı ise E' nin E' norm duali de bir Banach latistir ve aşağıda verilen latis işlemleri her $x' \in E'$ ve $x \in E^+$ için

$$(x')^+(x) = \sup\{x'(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

$$(x')^-(x) = \sup\{-x'(y) : 0 \leq y \leq x\} \text{ ve}$$

$$|x'| (x) = \sup\{x'(y) : |y| \leq x\} \text{ dir.}$$

E', E^- sıralı dualinde bir idealdir ve eğer E bir Banach latis ise $E' = E^-$ dir (Abramovich

ve Aliprantis, 2002).

2.27 Tanım

F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ iki Riesz uzayında tanımlı bir pozitif operatör ise $\mathcal{L}_b(E, F)$ ' de $S \wedge (T - S) = 0$ ' ı sağlayan $S : E \rightarrow F$ operatörüne T ' nin bir bileşeni denir. Q, F ' de bir sıralı izdüşüm ve P, E ' de bir sıralı izdüşüm olmak üzere QTP formundaki operatörler T ' nin en basit bileşenleridir ve elementer bileşenler adını alır.

2.28 Tanım

$T : E \rightarrow F$ Riesz uzaylarında tanımlı bir pozitif operatör olsun. Her $x \in E$ için $|Sx| \leq T(|x|)$ sağlanıyorsa $S : E \rightarrow F$ operatörüne T tarafından kısıtlanan operatör (ya da T kısıtlar S ' yi) denir.

- (1) T ' nin S ' yi kısıtlayan bir pozitif operatör olması için gerek ve yeter koşul $-T \leq S \leq T$ olmasıdır.
- (2) S pozitif ise T ' nin S ' yi kısıtlayan bir operatör olması için gerek ve yeter koşul $0 \leq S \leq T$ olmasıdır.
- (3) F bir Dedekind tam Riesz uzayı ise S ' nin T tarafından kısıtlanması için gerek ve yeter koşul $|S| \leq T$ olmasıdır.

2.29 Tanım

Bir E Banach latisi,

- (1) $x \wedge y = 0$ ' ı sağlayan her $x, y \in E^+$ için $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ise E ' ye Soyut L-uzayı (Soyut Lebesgue uzayı) denir ve AL ile gösterilir.
- (2) $x \wedge y = 0$ ' ı sağlayan her $x, y \in E^+$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ ise E ' ye Soyut M-uzayı (Soyut Maksimum uzayı) denir ve AM ile gösterilir.

E bir Soyut M-uzayı olmakla birlikte bir sıralı birime de sahipse “birimli bir Soyut M-uzayı” adını alır.

Eğer E, e birimli bir Soyut M-uzayı ise $\|x\|_\infty = \inf\{\lambda > 0 : |x| \leq \lambda e\} = \min\{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda e\}$

formülü E' de bir latis norm tanımlar. Bu norm altında E bir Soyut M-uzayıdır ve kapalı birim yuvarı $[-e, e]$ sıralı aralığı ile uyur. Birimli bir Soyut M-uzayı, e sıralı birimi için yukarıdaki tanımladığımız norm ile düşünülür.

2.30 Sonuç

Her Soyut-L (AL-uzayı) uzayı sıralı sürekli norma sahiptir (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.31 Tanım

İki Riesz uzayında tanımlı bir $T: E \rightarrow F$ pozitif operatörüne eğer E' deki her x ve y için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ şartı sağlanıyorsa latis (veya Riesz) homomorfizması denir. Bire-bir bir latis homomorfizmasına latis (veya Riesz) izomorfizması denir. İki Banach latis arasında tanımlı bir T latis izomorfizmasına her $x \in E$ için $\|Tx\| = \|x\|$ oluyorsa bir latis izometrisi denir. İki Banach latise eğer birinden diğerine bir latis izometrisi varsa latis izometriktir denir.

T latis izomorfizması için T' nin çekirdeği $\text{Çek}(T) = \text{Ker}(T) = \{x: T(x) = 0\}$ bir idealdir.

2.32 Tanım

$T: X \rightarrow Y$ iki Banach uzayında tanımlı bir operatör olsun. X' in her $\{x_n\}$ sınırlı dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y' de yakınsak (zayıf yakınsak) bir alt dizisi varsa T' ye bir kompakt (zayıf kompakt) operatör denir.

Her kompakt operatör zayıf kompakttır ve zayıf kompakt operatörler otomatik olarak süreklidir.

2.33 Tanım

Bir $(x, y) \rightarrow xy$ ikili işlemi (bir çarpım) ile bir $\mathcal{A}$ vektör uzayına her $x, y, z \in \mathcal{A}$ ve her α skaleri için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa cebir denir.

$$(1) (xy)z = x(yz) \text{ ve } (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

$$(2) x(y+z) = xy + xz \text{ ve } (x+y)z = xz + yz.$$

Bir $\mathcal{A}$ cebirine her $x \in \mathcal{A}$ için $xe = ex = x$ ' i sağlayan bir e vektörü (tek türlü tanımlıdır ve $\mathcal{A}$ ' nın birimi denir) varsa birimsel cebir denir.

Bir $\mathcal{A}$ cebirine, aynı zamanda bir $\|\cdot\|$ norm altında her $x, y \in \mathcal{A}$ için $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ eşitsizliğini sağlayan bir Banach uzayı ise Banach cebiri denir.

2.34 Tanım

Bir birleşmeli çarpım altında bir E Riesz uzayına bu çarpıma göre cebir özelliklerini sağlıyorsa ve $x, y \in E^+$ için $xy \in E^+$ oluyorsa Riesz cebiri denir.

2.35 Tanım (Birkhoff-Pierce)

Bir E Riesz cebirine her $z \in E^+$ için $x \wedge y = 0$ olması $(xz) \wedge y = (zx) \wedge y = 0$ olmasını gerektiriyorsa f – cebiri denir.

2.36 Tanım

İki vektör uzayında tanımlı bir $T : V \rightarrow W$ operatörüne eğer T ' nin değer kümesi bir boyutlu ise rank-bir operatör denir. Buradan, eğer $T : V \rightarrow W$ bir rank-bir operatör ve w , T ' nin değer kümesinde sıfırdan farklı bir vektör ise, o zaman her $v \in V$ için $T(v) = f(v)w$ ' yu sağlayan V ' de bir tek türlü tanımlı f lineer fonksiyoneli vardır. $f(v)w$ değeri tensör çarpım notasyonu ile $(f \otimes w)(v)$ ile gösterilir, yani, $T = f \otimes w$ yazılabilir.

İki vektör uzayında tanımlı bir $T : V \rightarrow W$ operatörüne eğer T ' nin değer kümesi sonlu boyutlu ise sonlu-rank operatörü denir. Böylece, $T : V \rightarrow W$ bir sonlu-rank operatörü ve

$w_1, \dots, w_k$, $T(V)$ değer kümesinin bir tabanı ise, o zaman $T(v) = \sum_{i=1}^k f_i(v)w_i$ ' dir, yani,

$T = \sum_{i=1}^k f_i \otimes w_i$ olacak şekilde tek türlü tanımlı $f_1, \dots, f_k$ lineer fonksiyonelleri vardır.

İki vektör uzayında tanımlı bir $T : V \rightarrow W$ operatörünün sonlu-rank operatör olması için gerek ve yeter koşul $T = \sum_{i=1}^n g_i \otimes u_i$ olacak şekilde W ' da $u_1, \dots, u_n$ vektörlerinin (lineer bağımsız olması şart değil) ve V ' de $g_1, \dots, g_n$ lineer fonksiyonellerinin var olmasıdır.

Bir sonlu boyutlu operatörün değer kümesinin boyutuna operatörün rankı denir. Böylece bir rank- k operatörü değer kümesi k boyutunda olan sonlu boyutlu bir operatördür. Sıfır operatörü 0 ranklı bir sonlu-rank operatörüdür.

2.37 Tanım

u ve v birimli iki AM-uzayında tanımlı bir $T : E \rightarrow F$ pozitif operatörüne eğer $Tu = v$ ise Markov operatörü denir.

2.38 Teorem

Bir E Banach latisinde aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) E sıralı sürekli norma sahiptir.
- (2) E üzerindeki her sürekli lineer fonksiyonel sıralı süreklidir.
- (3) E , E'' ' de bir idealdir.
- (4) E' deki sıralı aralıklar zayıf kompakttır.
- (5) E' deki her sıralı sınırlı ayırık dizi norma göre sıfıra yakınsar (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.39 Teorem

Bir Banach latisten bir normlu Riesz uzayına tanımlı her sıralı sınırlı operatör süreklidir (ve buradan bir Banach latisteki her pozitif ve her düzenli operatör de süreklidir) (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.40 Tanım

Reel veya kompleks bir Riesz uzayında tanımlı bir $T : E \rightarrow F$ operatörü birim operatörün bir çarpımı ile sınırlanıyorsa merkez operatör adını alır. Yani, T' nin bir merkez operatör olması için gerek ve yeter koşul her $x \in E$ için $|Tx| \leq \lambda |x|$ eşitsizliğini sağlayan bir $\lambda > 0$ skalerinin var olmasıdır.

Merkez operatörlerin topluluğu $\mathcal{Z}(E)$ ile gösterilir ve $\mathcal{Z}(E)$, E Banach latisinin merkezi olarak isimlendirilir.

Her merkez operatör düzenlidir ve her pozitif merkez operatörü bir latise homomorfizmasıdır.

Merkez operatörleri, ortomorfizmalar olarak bilinen operatörlere özel örneklerdir. Bir Riesz uzayı üzerinde sıralı sınırlı bir $T: E \rightarrow E$ operatörüne $|x| \wedge |y| = 0$ ifadesi, $|x| \wedge |Ty| = 0$ ı sağlıyorsa ortomorfizma denir. Bir E Riesz uzayındaki bütün ortomorfizmaların topluluğu bir vektör uzayı formundadır ve bu vektör uzayı $Orth(E)$ ile gösterilir. Yani, $Orth(E) := \{T \in \mathcal{L}_b(E) : x \perp y \text{ ise } Tx \perp y \text{ dir}\}$.

$Orth(E)$, $\mathcal{L}_b(E)$ ' nin bir vektör alt uzayıdır.

Bir Riesz uzayı üzerindeki bir $T: E \rightarrow E$ operatörü, E ' nin her B bandı için $T(B) \subseteq B$ ise band koruyan operatör adını alır. Her band koruyan operatör ayrıklığı korur.

Bir band koruyan operatörün sıralı sınırlı olmasına ihtiyaç yoktur (Abramovich vd., 1979; Zaanen, 1975). Bununla birlikte, bir Banach latiste band koruyan operatörlerle merkez operatörler örtüşür.

2.41 Teorem

Bir Banach latiste tanımlı verilen bir $T: E \rightarrow E$ operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) T bir merkez operatördür.
- (2) T bir ortomorfizmadır.
- (3) T bir band koruyan operatördür (Abramovich vd., 1979).

2.42 Teorem

E bir Banach latise ve E_u , bir $u \in E$ vektörü tarafından üretilen esas ideal olsun. $\|x\|_\infty = \inf \{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda |u|\}$ normu altında E_u esas ideali $|u|$ birimli bir Soyut M-uzayı (AM-uzayı)'dır (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

Keyfi bir E Banach latisini düşünelim ve $0 < u \in E$ olsun Teorem 2.42' den biliyoruz ki $\|x\|_\infty = \inf \{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda u\}$ normu altında E_u esas ideali u birimli bir Soyut M-uzayı (AM-uzayı)'dır. Bu nedenle her $x \in E_u$ elemanı, $M_x(y) = xy$ formülü yolu ile E_u ' da bir M_x merkez operatörü tanımlar. E_u üzerindeki her M_x merkez operatörü E ' nin $\|\cdot\|$ normuna göre

süreklidir (nitekim, $\|M_x\| = \|x\|_\infty$ 'dur) ve buradan M_x, E' de E_u ' nun $\|\cdot\|$ -kapamışı olan $\overline{E_u}$ üzerindeki bir $\|\cdot\|$ -süreklili operatör olarak tek türlü genişler. Bu genişlemeyi de yine M_x ile gösterelim. Eğer E_u, E' de yoğun ise M_x ' in tek sürekli genişlemesi aynı zamanda E' nin bir merkez operatörüdür.

2.43 Teorem

E bir Banach latis olsun ve $0 < u \in E, \overline{E_u} = E'$ yi sağlasın. E_u ' dan $\mathcal{Z}(E)'$ ye tanımlı $x \rightarrow M_x$ dönüşümü bir örten latis izometrisidir ve buradan $\mathcal{Z}(E)$ merkezi Soyut M-uzayı E_u ile özdeşleştirilebilir (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.44 Teorem (Kakutani-Bohnenblust-Krein)

Bir E Banach latisinin e birimli bir Soyut M-uzayı olması için gerek ve yeter koşul E' nin, bir tek (yukarı homeomorfizm) kompakt Hausdorff uzayı Ω için, $C(\Omega)$ uzayına latis izometrik olmasıdır. Böyle bir durumda, e birimi Ω' da tanımlı sabit **1** fonksiyonu ile özdeşleştirilebilir.

Ayrıca, bir E Banach latisinin bir Soyut M-uzayı olması için gerek ve yeter koşul, E' nin bir $C(\Omega)$ uzayının kapalı bir vektör alt latisine latis izometrik olmasıdır (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

Bir Ω kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $C(\Omega)$ Banach latisinin Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul Ω' 'nın uçsal bağlantısız veya Stonean olmasıdır (yani gerek ve yeter koşul Ω' 'nın her açık altkümesinin kapanışının da açık olmasıdır).

2.45 Teorem

E ve F iki Riesz uzayı ve F Dedekind tam ise o zaman, her $S, T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ ve her $x \in E^+$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$(1) \left\{ \sum_{i=1}^n S(x_i) \vee T(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \right\} \uparrow S \vee T(x)$$

$$(2) \left\{ \sum_{i=1}^n S(x_i) \wedge T(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \right\} \downarrow S \wedge T(x) \text{ ve}$$

$$(3) \left\{ \sum_{i=1}^n |T(x_i)| : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \right\} \uparrow |T|(x) \text{ ' dir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).}$$

2.46 Teorem

E esas izdüşüm özelliğine sahip ve F Dedekind tam olmak üzere $T : E \rightarrow F$ iki Riesz uzayında tanımlı bir pozitif operatör olsun. Eğer S, T ' nin bir bileşeni ise verilen $x \in E^+$, $0 \leq f \in F_n^-$ ve $\varepsilon > 0$ için E ' de çiftler ayrık sıralı $P_1, \dots, P_n$ izdüşümleri ve F ' de sıralı $Q_1, \dots, Q_n$ izdüşümleri vardır öyle ki T ' nin $\sum_{i=1}^n Q_i T P_i (= \bigvee_{i=1}^n Q_i T P_i)$ basit bileşeni $\left\langle f, \left| S - \sum_{i=1}^n Q_i T P_i \right| x \right\rangle < \varepsilon$ ' u sağlar (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2.47 Tanım

Bir E Riesz uzayında bir $0 < x \in E$ elemanını göz önüne alalım. Bir x -adım fonksiyonu bir $s \in E$ elemanıdır öyle ki, $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ' yi sağlayan $x = x_1 + \dots + x_n$ olacak şekilde x ' in ikişer ayrık $x_1, \dots, x_n$ bileşenleri ve $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ reel sayıları vardır. x ' in her bileşeni bir x -adım fonksiyonudur. x -adım fonksiyonları x tarafından üretilen ideale aittir.

2.48 Teorem

F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $S, T : E \rightarrow F$ iki Riesz uzayında tanımlı pozitif operatörler olsun. Eğer $0 \leq S \leq T$ ise, her $\varepsilon > 0$ için $0 \leq S - \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i \leq \varepsilon T$ ' yi sağlayan pozitif $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ reel sayıları ve T ' nin $C_1, \dots, C_n$ bileşenleri vardır.

Özellikle, her n için $0 \leq S - S_n \leq n^{-1} T$ ' yi ve $0 \leq S_n \uparrow S$ ' yi sağlayan T -adım operatörlerinin bir $\{S_n\}$ dizisi vardır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2.49 Teorem

İki Archimedean Riesz uzayında bir $T: E \rightarrow F$ sıralı sınırlı operatörü ayrıklığı koruyorsa o zaman, T' nin modülü vardır ve her $x \in E$ için $|T|(|x|) = |T(|x|)| = |T(x)|$ dir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2.50 Teorem

G , bir E Dedekind tam Riesz uzayının bir Riesz alt uzayı ve $T: G \rightarrow E$ her $x \in G^+$ için $0 \leq T(x) \leq x$ i sağlayan bir operatör olsun. O zaman T , E' de pozitif bir ortomorfizmaya genişler. Özellikle E bir Dedekind tam ve $x \in E^+$ ise o zaman, her $|y| \leq x$ için $T(x) = y$ olacak şekilde bir $T: E \rightarrow E$ (B_x ' te tek türlü tanımlanmış) ortomorfizması vardır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2.51 Teorem

E bir Archimedean Riesz uzayı ve $e > 0$ olsun. O zaman, E üzerinde en az bir çarpım vardır ki bu da E' yi e birim elemanlı bir f - cebiri yapar (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2.52 Teorem

E birimli bir Archimedean f - cebiri olsun. O zaman, $u \rightarrow T_u$, (burada $T_u(x) = ux$ ' tir) E' den $Orth(E)'$ ye bir f - izomorfizmasıdır, yani, $Orth(E) = E'$ dir. Özellikle, $Orth(Orth(E)) = Orth(E)$ eşitliği sağlanır (Zaanen, 1975).

2.53 Tanım

Bir X vektör uzayındaki bir τ topolojisine $X \times X'$ ten X' e tanımlı $(x, y) \rightarrow x + y$ fonksiyonu ile $\mathbb{R} \times X'$ ten X' e tanımlı $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ fonksiyonu sürekli ise lineer topoloji denir. (X, τ) çiftine de topolojik vektör uzayı denir.

Bir X vektör uzayı üzerinde bir τ lineer topolojisine τ konveks kümelerden oluşan sıfırda bir tabanı varsa yerel konveks topolojisi denir ve $(X, \tau)'$ ya da yerel konveks uzayı denir.

E bir Riesz uzayı olsun. E' deki bir p yarınormuna E' de $|x| \leq |y|$ iken $p(x) \leq p(y)$ sağlanıyorsa $latis$ (veya Riesz) yarınormu denir. $Latis$ yarınormların bir ailesi tarafından üretilen E' de bir τ yerel konveks topolojisine yerel konveks solid topolojisi ve (E, τ) ' ya da yerel konveks solid Riesz uzayı denir.

2.54 Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. Her $f \in E^-$, $p_f(x) = |f|(|x|), x \in E$ formülü yolu ile E' de bir p_f $latis$ yarınormu tanımlar. Özellikle, E^- ' nin boş olmayan her A alt kümesi (Hausdorff olması gerekli değil) $\{p_f : f \in A\}$ $latis$ yarınormlarının ailesi yolu ile E' de bir yerel konveks solid topoloji üretir. Bu topoloji E üzerinde A tarafından üretilen mutlak zayıf topoloji adını alır ve $|\sigma|(E, A)$ ile gösterilir (eğer A , E' nin noktalarını ayrıştırıyorsa o zaman $|\sigma|(E, A)$ bir Hausdorff topolojisidir).

2.55 Tanım

E bir Riesz uzayı ve E' , E' nin noktalarını ayrıştıran E^- ' nin ideali olsun. O zaman, $\langle E, E' \rangle$ çiftine $\langle x, x' \rangle := x'(x)$ doğal dualitesi altında bir Riesz dual sistemi denir.

2.56 Teorem

Eğer $\langle E, E' \rangle$ bir Riesz dual sistemi ise E , $(E')_n^-$ içinde $|\sigma|((E')_n^-, E')$ –yoğundur (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2.57 Teorem (Schaefer)

(E, τ) esas izdüşüm özelliğine sahip bir yerel konveks-katı Riesz uzayı olsun. O zaman, her $x \in E^+$ için $[0, x]$ sıralı aralığı uç noktalarının τ –kapalı konveks kabuğudur (ve buradan $[0, x]$ aynı zamanda x' in bileşenlerinin τ –kapalı konveks kabuğudur) (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2.58 Teorem

Bir E Banach latisinin sıralı sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in E^+$ için bir $0 \leq y' \in E'$ vardır ki, $\|x'\| = 1$ olan her $x' \in E'$ için $(|x'| - y')^+ < \varepsilon$ sağlanır (Dodds ve Fremlin, 1979).

2.59 Tanım

Reel bir vektör uzayından sıralı bir vektör uzayına tanımlı $p : X \rightarrow Z$ fonksiyonu için

(a) her $x, y \in X$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(b) her $\lambda \geq 0$ ve her $x \in X$ için $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ ise p ' ye altlineerdir denir.

2.60 Teorem (Hahn-Banach-Kantorovich)

Y , bir X Reel vektör uzayının bir vektör alt uzayı, F bir Dedekind tam Riesz uzayı ve $p : X \rightarrow F$ bir altlineer fonksiyon olsun. Eğer bir $T : Y \rightarrow F$ operatörü her $y \in Y$ için $Ty \leq p(y)$ ' yi sağlarsa, T ' yi genişleten bir $S : X \rightarrow F$ operatörü vardır ve her $x \in X$ için $Sx \leq p(x)$ ' i sağlar (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.61 Teorem (Stone-Weierstrass)

K bir kompakt uzay ve F sabit-bir fonksiyonu $\mathbf{1}$ ' i içeren $C(K)$ ' nin bir vektör altlatisi olsun. Eğer F , K ' nin noktalarını ayrıştırıyorsa o zaman F , $C(K)$ ' de supremum norma göre yoğundur (Stone, 1937).

2.62 Teorem

J , bir E Riesz uzayında bir ideal ise J tarafından üretilen B_J bandı $B_J = \{x \in E : 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \text{ olacak şekilde } \exists \{x_\alpha\} \subseteq J\}$ şeklindedir.

Ayrıca, her $x \in E$ için x tarafından üretilen B_x esas bandı $B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$ şeklindedir (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.63 Yardımcı Teorem

Bir E normlu Riesz uzayında:

- (a) E^+ pozitif konisi norm (ve buradan zayıf) kapalıdır.
- (b) Sıralı aralıklar norm (ve buradan zayıf) kapalıdır.
- (c) Bir $\{x_\alpha\} \subseteq E$ neti $x_\alpha \uparrow$ ve $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ' ı sağlıyorsa $x_\alpha \uparrow x$ ' dir (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.64 Yardımcı Teorem

Bir f lineer fonksiyonelinin $f_1, \dots, f_n$ lineer fonksiyonellerinin gerdiği uzaya ait olması için

gerek ve yeter koşul $\bigcap_{n=1}^k \zeta e k f_i \subseteq \zeta e k f$ olmasıdır (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.65 Zorn Yardımcı Teoremi

Her boş olmayan kısmî sıralamalı kümedeki her zincirin bir üst sınırı varsa maksimal elemanı vardır (Gök, 1997).

2.66 Yardımcı Teorem

İki Riesz uzayında tanımlı bir $T : E \rightarrow F$ operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) T bir latis homomorfizmasıdır.
- (2) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$ sağlanır.
- (3) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ sağlanır.
- (4) E ' de $x \wedge y = 0$ sağlanıyorsa, F ' de $T(x) \wedge T(y) = 0$ sağlanır.
- (5) Her $x \in E$ için $T(|x|) = |T(x)|$ sağlanır (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

3. LATİS VE CEBİRSEL HOMOMORFİZMALAR

$C(\Omega)$ –uzayının bir Banach latisteki her esas idealin birimli bir Soyut M-uzayı olması gerçeğinden ve diğer yandan birimli bir Soyut M-uzayı anlatımı üzerindeki Kakutani-Bohnenblust-Krein Teoremi 2.44’ ten dolayı önemli olduğu görülüyor. Bu bölümde latis homomorfizmaların genişleme özelliği kadar $C(\Omega)$ –uzayları arasında latis ve cebirsel homomorfizmaların temel karakterlerini sunacağız. Aşağıdaki netice ile başlayalım.

3.1 Teorem

E bir Banach latis, $\mathcal{F}$, E ’ nin en çok sayılabilir alt kümesi ve $\mathcal{C}$, E ’ deki düzenli operatörlerin en çok sayılabilir bir topluluğu olsun. O zaman, bir $u > 0$ elemanı vardır öyle ki

(1) $\mathcal{F}$ kümesi E_u içerisinde bulunur. Yani, $\mathcal{F} \subseteq E_u$ ’ dur.

(2) $\mathcal{C}$ ’ deki her operatör, E_u esas idealini değişmez bırakır. Yani, her $T \in \mathcal{C}$ için $T(E_u) \subseteq E_u$ ’ dur.

İspat:

İspatı üç adımda yapacağız.

I. Adım: $\mathcal{F}$ en çok sayılabilir ise, $\mathcal{F}$ bir esas ideal tarafından kapsanır.

$\mathcal{F}$ ’ nin sayılabilir bir küme olduğunu kabul edelim ve $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \dots\}$ diyelim. Her i için

$x_i \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{\|x_n\|}$ ise $\mathcal{F} \subseteq E_u$ olduğuna dikkat edelim.

II. Adım: $\mathcal{F}$, E ’ nin bir en çok sayılabilir alt kümesi ise ve $T \in \mathcal{L}(E)$ bir düzenli operatör ise bir $u > 0$ vardır öyle ki $\mathcal{F} \subseteq E_u$ ve $T(E_u) \subseteq E_u$ ’ dur.

Bunu görmek için, T ’ nin sıfırdan farklı düzenli bir operatör olduğunu kabul edelim. Buradan $T_1, T_2 \geq 0$ ile $T = T_1 - T_2$ yazabiliriz. $S = T_1 + T_2 > 0$ olsun.

I. Adımdan bir $w > 0$ elemanı vardır öyle ki $\mathcal{F} \subseteq E_w$ ’ dur. Sonra $u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{S^n w}{\|S\|^n}$ pozitif

vektörünü düşünelim. $w \leq u$ olduğundan $\mathcal{F} \subseteq E_u$ olur. Bu ifade ile $T(E_u) \subseteq E_u$ sağlanır.

III.Adım: Genel durum.

$\mathcal{C}$ ' nin sayılabilir olduğunu kabul edelim, her i için $T_i \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{C} = \{T_1, T_2, \dots\}$ diyelim. $T_{i1}, T_{i2} \geq 0$ ile $T_i = T_{i1} - T_{i2}$ yazalım ve $S_i = T_{i1} + T_{i2} > 0$ olsun. $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{S_i}{\|S_i\|}$ pozitif operatörünü göz önüne alalım. II. Adımdan bir $u > 0$ vardır öyle ki $\mathcal{F} \subseteq E_u$ ' dur ve $S(E_u) \subseteq E_u$ ' dur. Şimdi, herhangi bir $x \in E_u$ alalım ve bir $\lambda > 0$ seçelim öyle ki $|x| \leq \lambda u$ ' dur. O zaman, her k için $|T_k x| \leq (T_{k1} + T_{k2})|x| = S_k |x| \leq \lambda S_k u$

$$= \lambda 2^k \|S_k\| \cdot \frac{S_k u}{2^k \|S_k\|} \leq \lambda 2^k \|S_k\| S u \in E_u \text{ olur. Buradan } T_k x \in E_u,$$

dur, yani, her k için $T_k(E_u) \subseteq E_u$ sağlanır.

Teorem 3.1' den şu önemli sonuç çıkar: E_u ' nun bir temsili $C(\Omega)$ -uzayı olduğu zaman $x \in E_u$ için bütün $T_k x$ vektörleri gibi $\mathcal{F}$ ' deki bütün vektörler Kompakt Hausdorff Ω uzayındaki sürekli fonksiyonlar olarak düşünülebilir. Bundan da pozitif operatörlerin özelliklerini çalışmak için sürekli fonksiyonların özelliklerini kullanabildiğimiz anlaşılıyor.

Ek olarak, $x \geq 0$ ise $\sqrt[n]{x}$ ' in yanında x ve y , E_u ' da vektörler olmak üzere $e^x, \frac{x}{1+|y|}$ gibi ifadeler de $C(\Omega)$ ' da fonksiyon olarak yorumlanır, ve buradan bu ifadeler E ' de iyi tanımlı vektörlerdir.

Dikkat edilmeli ki E_u , E ' de bir ideal olduğundan E_u ' nun $E_u \oplus iE_u$ kompleksleşmesi Ω ' daki bütün kompleks değerli sürekli fonksiyonların Banach uzayı olan $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ ile özdeşleştirilir.

Şimdi dikkatimizi latis homomorfizmalar ile $C(\Omega)$ -uzayı arasındaki özelliklere çevirelim. Görüldüğü gibi, şimdiki tanımımızla bunlar cebirsel homomorfizmalarla yakından ilgilidir.

3.2 Tanım

$T : C(\Omega) \rightarrow C(Q)$ bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in C(\Omega)$ için $T(fg) = T(f)T(g)$ oluyorsa T ' ye cebirsel homomorfizma (ya da bir çarpım operatörü) denir.

İlk önce $C(\Omega)$ -uzayından reel sayılara latis homomorfizmaları karakterize edelim.

3.3 Yardımcı Teorem

Sıfırdan farklı bir lineer $\phi: C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonelinin bir latis homomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $\phi = c\delta_{w_0}$ ' ı sağlayan bir $c > 0$ ve bir $w_0 \in \Omega$ (ikisi de tek olarak belirli) olmasıdır.

İspat:

Eğer $c \geq 0$ olan $\phi = c\delta_{w_0}$ ise açıkça ϕ bir latis homomorfizmadır. Yani, her $f, g \in C(\Omega)$ için $\phi(f \wedge g) = \min\{\phi(f), \phi(g)\}$ ' dir.

Tersi için, $\phi: C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ' nin bir latis homomorfizması olduğunu kabul edelim. Açıkça, ϕ bir pozitif lineer fonksiyoneldir. Buradan, Riesz Temsil Teoremi ile, her $f \in C(\Omega)$ için $\phi(f) = \int f d\mu$ ' yü sağlayan Ω ' da bir tek düzenli μ Borel ölçümü vardır. μ ' nün desteğinin tek nokta olduğunu ispatlayalım. Bunu görmek için μ ' nün desteğine ait iki farklı s ve t noktalarını göz önüne alalım. $f \wedge g = 0$ ve $f(s) = g(t) = 1$ ' i sağlayan iki $f, g \in C(\Omega)$ fonksiyonu seçelim. Bu, $0 = \phi(f \wedge g) = \min\{\phi(f), \phi(g)\} = \min\left\{\int f d\mu, \int g d\mu\right\} > 0$ ' ı sağlar ki bu da bir çelişkidir. Buradan μ ' nün desteği tek bir noktadan oluşur. Buna w_0 diyelim. Bu, her $f \in C(\Omega)$ için

$\phi(f) = \int f d\mu = \int_{\{w_0\}} f d\mu = f(w_0)\mu(\{w_0\}) = [\mu(\{w_0\})\delta_{w_0}](f)$ eşitliğini sağlar. Böylece ispat bitmiştir.

$C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ -uzayından kompleks sayılara cebirsel homomorfizması aşağıdaki sonuca göre belirlenir (Gelfand, 1941).

3.4 Yardımcı Teorem (Gelfand)

Sıfırdan farklı lineer bir $\phi: C_{\mathbb{C}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonelinin çarpımsal olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\phi = \delta_{w_0}$ olacak şekilde tek türlü bir $w_0 \in \Omega$ noktasının olmasıdır.

İspat:

Eğer $\phi = \delta_{w_0}$ ise her $f, g \in C(\Omega)$ için $\phi(fg) = (fg)(w_0) = f(w_0)g(w_0) = \phi(f)\phi(g)$ sağlanır. Yani, ϕ çarpımsal lineer fonksiyoneldir.

Tersi için, ϕ 'nin $C(\Omega)$ 'da sıfırdan farklı çarpımsal bir lineer fonksiyonel olduğunu kabul edelim. $\phi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1}^2) = [\phi(\mathbf{1})]^2$ ve ϕ sıfırdan farklı olduğundan $\mathbf{1}, \Omega$ 'da sabit bir fonksiyonu olmak üzere $\phi(\mathbf{1}) = 1$ 'dir. $M = \{x \in C(\Omega) : \phi(x) = 0\}$, ϕ fonksiyonelinin çekirdeği olsun. Bir $w_0 \in \Omega$ noktasının olduğunu göstermeliyiz ki $M \subseteq \{x \in C(\Omega) : x(w_0) = 0\}$ olsun.

Eğer böyle bir nokta yoksa, her $w \in \Omega$ için $x_w(w) \neq 0$ olacak şekilde M 'de bir x_w fonksiyonu bulabiliriz. x_w sürekli olduğundan w noktasının bir V_w komşuluğu vardır öyle ki her $t \in V_w$ için $x_w(t) \neq 0$ 'dır. Ω 'nın kompaktlığından Ω 'nın tamamını örten $V_{w_1}, \dots, V_{w_n}$ komşulukları vardır. $\bar{z}$, bir $z \in C(\Omega)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğini göstermek üzere $x = \sum_{i=1}^n x_{w_i} \cdot \bar{x}_{w_i}$ fonksiyonunu düşünelim. Fonksiyon seçimiyle her $w \in \Omega$ için $x(w) > 0$ 'dır ve böylece $y = \frac{1}{x} \in C(\Omega)$ 'dir. Şimdi $xy = \mathbf{1}$ özdeşliği ile ϕ 'nin $\phi(x)\phi(y) = 1$ çarpımsalını birleştirelim. Buradan $\phi(x) \neq 0$ 'dır. Diğer yandan, her w için $\phi(x_w) = 0$ olduğundan $\phi(x) = 0$ olur ve bu da bir çelişkidir. O halde, $M \subseteq \{x \in C(\Omega) : x(w_0) = 0\}$ olacak şekilde bir $w_0 \in \Omega$ vardır.

Şimdi $\{x \in C(\Omega) : x(w_0) = 0\} \subseteq M$ olduğunu göstereceğiz. Bunun sonunda $x(w_0) = 0$ 'ı sağlayan bir $x \in C(\Omega)$ olsun. Eğer $u = \phi(x)\mathbf{1} - x$ ise buradan $u \in M$ olduğu açıktır ve bu nedenle $0 = u(w_0) = \phi(x)$ 'tir. Böylece, $x \in M$ 'dir ve $M = \{x \in C(\Omega) : x(w_0) = 0\}$ 'dır.

Son olarak, eğer $x \in C(\Omega)$ ise $x - \phi(x)\mathbf{1} \in M$ 'dir ve buradan $x(w_0) - \phi(x) = 0$ 'dır ya da $\phi(x) = x(w_0)$ olarak yazabiliriz. w_0 'ın tekliği $C(\Omega)$ ile noktalarının ayrışmasından gelir.

Bu bilgiler ışığında $C(\Omega)$ -uzayları arasındaki latis homomorfizmalarını karakterize edelim.

3.5 Teorem

Bir $T : C(\Omega) \rightarrow C(Q)$ pozitif operatörünün bir latis homomorfizması olması için gerek ve yeter koşul bir $\tau : Q \rightarrow \Omega$ dönüşümünün ve bir $w \in C(Q)$ ağırlık fonksiyonunun olmasıdır öyle ki her $f \in C(\Omega)$ ve her $q \in Q$ için $Tf(q) = w(q)f(\tau(q))$ ' dur.

Bu durumda, $w = T\mathbf{1}_\Omega$ ve τ dönüşümü tek olarak belirlidir ve $\tau, \{q \in Q : w(q) > 0\}$ kümesinde süreklidir.

İspat:

Teoremdaki T ' yi göz önüne alırsak, T ' nin bir latis homomorfizması olduğu açıktır. Tersini için, T ' nin bir latis homomorfizması olduğunu farz edelim. O zaman her $q \in Q$ için $(\delta_q \circ T)(f) = \delta_q(Tf) = [Tf](q)$ ' dur. T latis homomorfizması olduğundan $\delta \circ T : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli de bir latis homomorfizmasıdır. Böylece Yardımcı Teorem 3.3' ten $[Tf](q) = (\delta_q \circ T)(f) = w(q)f(\tau(q))$ olacak şekilde bir tek sabit $w(q) \geq 0$ ve bir $\tau(q) \in \Omega$ noktası (tek olması gerekmez) vardır. $f = \mathbf{1}_\Omega$ alırsak, $w = T\mathbf{1}_\Omega \in C(Q)$ olduğunu elde ederiz. Eğer $w(q) > 0$ ise $\tau(q)$ tek türlü belirtilebilir. $\tau, \{q \in Q : w(q) > 0\}$ kümesi üzerinde süreklidir. Bunu görmek için $\{q \in Q : w(q) > 0\}$ kümesinde $q_\alpha \rightarrow q$ ifadesinin sağlandığını kabul edelim. O zaman, $w(q_\alpha) \rightarrow w(q) > 0$ ve

$w(q_\alpha)f(\tau(q_\alpha)) = Tf(q_\alpha) \rightarrow Tf(q) = w(q)f(\tau(q))$ ' dur. Buradan, her $f \in C(\Omega)$ için $f(\tau(q_\alpha)) \rightarrow f(\tau(q))$ ' dur. Bu $\tau(q_\alpha) \rightarrow \tau(q)$ ' yu sağlar ve böylece $\tau, \{q \in Q : w(q) > 0\}$ kümesi üzerinde süreklidir.

3.6 Teorem

Reel $C(K)$ -uzayları arasındaki her cebirsel homomorfizma bir latis homomorfizmasıdır. Bununla beraber tersi yanlıştır.

İspat:

$T : C(\Omega) \rightarrow C(Q)$ bir cebirsel homomorfizma olsun. Açıkça, T bir pozitif operatördür.

Gerçekten de, eğer $f \geq 0$ ise o zaman $Tf = T\left(\left(\sqrt{f}\right)^2\right) = \left[T\left(\sqrt{f}\right)\right]^2 \geq 0$ ' dir. Burada eğer $f \in C(\Omega)$ ise $|T(f)|^2 = [T(f)]^2 = T(f^2) = T(|f|^2) = [T(|f|)]^2$, dir ve buradan $|T(f)| = T(|f|)$ ' dir.

Şimdi cebirsel homomorfizmaları karakterize edelim.

3.7 Teorem

Reel ya da kompleks $C(K)$ -uzayları arasındaki bir T operatörünün bir cebirsel homomorfizma olması için gerek ve yeter koşul Q ' nun bir tek hem açık hem kapalı V alt kümesi ve her $f \in C(\Omega)$ için $Tf = \mathcal{K}_V.(f \circ \tau)$ ' yu sağlayan V ' de sürekli bir $\tau: Q \rightarrow \Omega$ dönüşümünün olmasıdır. Ayrıca, τ dönüşümü V üzerinde tek türlü olarak belirlenir.

İspat:

$\Rightarrow$: Teoremdeki T operatörünün cebirsel homomorfizma olduğu açıktır.

$\Leftarrow$: Bu taraf için T ' nin cebirsel homomorfizma olduğunu kabul edelim. Reel ve kompleks durumlarını ayrı ayrı ele alacağız.

I. Durum: $T: C(\Omega) \rightarrow C(Q)$ operatörünün Reel $C(K)$ -uzayları arasında cebirsel bir homomorfizma olduğunu kabul edelim. Teorem 3.6' dan, T bir latıs homomorfizmasıdır. Bu nedenle Teorem 3.5' ten bir $\tau: Q \rightarrow \Omega$ dönüşümü ve $w \in C(Q)$ vardır öyle ki her $f \in C(\Omega)$, her $q \in Q$ için $Tf(q) = w(q)f(\tau(q))$ ' dur.

Buna ek olarak, $w = T\mathbf{1}_\Omega$ olduğu ve τ dönüşümünün $\{q \in Q: w(q) > 0\}$ kümesinde sürekli olduğu ve tek türlü belirlendiği biliniyor. Şimdi $w^2 = [T\mathbf{1}_\Omega]^2 = T((\mathbf{1}_\Omega)^2) = T(\mathbf{1}_\Omega) = w$ elde etmek için T ' nin bir cebirsel homomorfizma olduğunu kullanırız. Bu Q ' nun bir tek hem açık hem kapalı V alt kümesi için $w = \mathcal{K}_V$ ' yi sağlar.

II. Durum: $T: C_\mathbb{C}(\Omega) \rightarrow C_\mathbb{C}(Q)$ operatörünün kompleks $C(K)$ -uzayları arasında tanımlı bir cebirsel homomorfizma olduğunu kabul edelim. Her $q \in Q$ için $(\delta_q \circ T)(f) = \delta_q(Tf) = [Tf](q)$ ' dur. T bir cebirsel homomorfizma olduğu için

$\delta \circ T : C_{\mathbb{C}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ lineer fonksiyoneli de aynı şekilde bir cebirsel homomorfizmadır. Böylece Yardımcı Teorem 3.4' ten her $f \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ için $[Tf](q) = (\delta_q \circ T)(f) = f(\tau(q))$ ' yu sağlayan bir $\tau(q) \in \Omega$ noktası vardır. $T(\mathbf{1}_{\Omega}) = T((\mathbf{1}_{\Omega})^2) = [T(\mathbf{1}_{\Omega})]^2$ olduğundan Q ' nun bir tek hem açık hem kapalı V alt kümesi için $T(\mathbf{1}_{\Omega}) = \mathcal{X}_V$ elde edilir. $Tf = T(\mathbf{1}_{\Omega}f) = T(\mathbf{1}_{\Omega})Tf = \mathcal{X}_V(f \circ \tau)$ olduğuna dikkat edilerek ispat bitirilir.

$C(\Omega)$ -uzayları arasında tanımlı Markov operatörleri için cebirsel homomorfizmanın, latiş homomorfizmasının ve bileşke operatörün durumları aynıdır.

3.8 Teorem

Bir $T : C(\Omega) \rightarrow C(Q)$ Markov operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) T bir cebirsel homomorfizmadır.
- (2) T bir latiş homomorfizmadır.
- (3) T bir bileşke operatörüdür.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) Bu Teorem 3.6' dır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Bu ifade Teorem 3.5' ten ve $T\mathbf{1}_{\Omega} = \mathbf{1}_Q$ eşitliğinden sağlanır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Bir sürekli $\tau : Q \rightarrow \Omega$ fonksiyonu için $Tf = f \circ \tau$ olduğunu farz edelim. O zaman her $f, g \in C(\Omega)$ ve her $q \in Q$ için

$$[T(fg)](q) = [(fg) \circ \tau](q) = (fg)(\tau(q)) = f(\tau(q)) \cdot g(\tau(q))$$

$= [(Tf)(q)][(Tg)(q)] = [T(f)T(g)](q)$ sağlanır. Yani, $T(fg) = T(f)T(g)$ ' dir. Buradan T bir cebirsel homomorfizmadır.

Şimdi latiş homomorfizmaların kompleks durumlarını karakterize eden teoreme bakalım.

3.9 Teorem

İki Banach latris arasında tanımlı bir pozitif $T : E \rightarrow F$ operatörünün bir latris homomorfizma olması için gerek ve yeter koşul her $z \in E_{\mathbb{C}}$ için $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow F_{\mathbb{C}}$ operatörünün $|T_{\mathbb{C}}z| = T|z|$ eşitliğini sağlamasıdır.

İspat:

$z = x + iy \in E_{\mathbb{C}}$ olsun ve $u = |x| + |y| \in E$, $v = T|x| + T|y| = T_u \in F$ alalım. $T(E_u) \subseteq F_v$ olduğu görülür ve böylece $T : E_u \rightarrow F_v$ bir Markov operatörüdür. $|T_{\mathbb{C}}z| = T|z|$ eşitliğinin sağlandığını görebilmek için E_u ’ dan F_v ’ ye bir operatör olarak T' yi düşünmemiz yeterlidir. Kakutani-Bohnenblust-Krein Temsil Teoreminden $T : C(\Omega) \rightarrow C(Q)$ olarak kabul edebiliriz. Teorem 3.8, T' nin bir bileşke operatör olduğunu garanti eder. Yani, her $f \in C(\Omega)$ ve her $q \in Q$ için $Tf(q) = f(\tau(q))$ ’ yu sağlayan sürekli bir $\tau : Q \rightarrow \Omega$ fonksiyonu vardır. Özellikle her $q \in Q$ için

$$\begin{aligned} |T_{\mathbb{C}}z|(q) &= |Tx + iTy|(q) = \sqrt{(Tx)^2 + (Ty)^2}(q) \\ &= \sqrt{[(Tx)(q)]^2 + [(Ty)(q)]^2} = \sqrt{[x(\tau(q))]^2 + [y(\tau(q))]^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}(\tau(q)) = |x + iy|(\tau(q)) \\ &= [T|z|](q) \text{ , dur.} \end{aligned}$$

Yani, istenildiği gibi $|T_{\mathbb{C}}z| = T|z|$ ’ dir.

Şimdi, Banach cebirlerindeki çarpım fonksiyonellerinin “otomatik sürekliliğine” değineceğiz. Yardımcı Teorem 3.3’ te ve Yardımcı Teorem 3.4’ te ϕ fonksiyonelinin sürekliliğini kabul etmemiştik. ϕ ’ nin sürekliliği latris ve cebirsel özelliklerin bir sonucu idi. Bir $\phi : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ reel cebirsel homomorfizmasında, ϕ ’ nin sürekliliği onun pozitifliğinin bir sonucu idi. Buna ek olarak şimdi, bu fonksiyonellerin sürekliliğinin Banach cebirlerindeki çarpım fonksiyonellerinin sürekliliğinin çok özel bir durumu olduğunu göreceğiz. $C(\Omega)$ ’ daki ya da diğer pek çok cebirler üzerinde tanımlı çarpım fonksiyonellerinin ve çarpım homomorfizmalarının otomatik sürekliliği konusu çok iyi bilinir ve çok önemlidir. Bu

konuyla ilgili ayrıntılar için (Sinclair, 1976; Dales, 1978; Laursen ve Neumann, 2000)' e başvurulabilir.

3.10 Teorem

Herhangi bir Banach cebiri üzerindeki bir lineer çarpım fonksiyoneli sürekli ve en fazla bir norma sahiptir.

İspat:

ϕ , bir $\mathcal{A}$ Banach cebirinde (değişmeli ya da değil) bir çarpım fonksiyoneli olsun. Bir anlık düşünce gösterir ki ϕ süreksiz veya normu birden büyük ise $\|a\| < 1$ ve $\phi(a) = 1$ olan bir $a \in \mathcal{A}$ mevcuttur. Eğer $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ alırsak $ab = b - a$ 'dır ve ϕ ' nin çarpımsallığından $\phi(a)\phi(b) = \phi(b) - \phi(a)$ yazabiliriz. Yani, $\phi(b) = \phi(b) - 1$ 'dir ki bu imkansızdır.

Âşık olmayan çarpım fonksiyonelleri ile onların otomatik sürekliliğinin varlığına ilişkin birkaç uyarıyı verelim. Banach latilerinin otomatik sürekliliğinin iki benzer örneği vardır. Birincisini daha önce vermiştik ve bu bir Banach latiste herhangi bir pozitif operatörün sürekliliğini iddia ediyordu (Teorem 2.39). H. Dales ve J. Esterle (1977) tarafından gösterildiği gibi, bir $C(\Omega)$ -uzayındaki keyfi bir çarpım homomorfizması için otomatik süreklilik başarısız olabileceğinden pozitif operatörlerin otomatik süreklilik durumu çarpım homomorfizmalarından farklıdır. Şaşırtıcıdır ki, Teorem 2.41' den Banach latistelerdeki band koruyan operatörler de otomatik süreklidir.

Banach cebirlerindeki âşık olmayan çarpım fonksiyonellerinin varlığı bir diğer ince problemdir. Yukarıda belirtildiği gibi her $C(\Omega)$ Banach cebiri çarpım fonksiyonellerinin bir yığınına taşır öyle ki, bu her $w \in \Omega$ noktası için sürekli bir δ_w çarpım fonksiyoneline karşılık gelir. X Banach uzayındaki bütün sınırlı operatörlerin Banach cebiri $\mathcal{L}(X)$ için bu problem özel bir dikkat ister. Eğer $1 < \dim X < \infty$ ise sıfır fonksiyoneli $\mathcal{L}(X)$ ' de sadece çarpım fonksiyonelidir. Buna ek olarak, eğer Y keyfi bir Banach uzayı ve $X = Y \oplus Y \oplus \dots \oplus Y$ ise, yani, X , Y ' nin $n > 1$ adet kopyasının direkt toplamı ise, yine $\mathcal{L}(X)$ ' te sadece âşık çarpım fonksiyoneli vardır. Gerçekten, bunu görmek için ϕ , $\mathcal{L}(X)$ üzerinde bir çarpımsal lineer fonksiyonel olsun. Her $T \in \mathcal{L}(X)$ için $T = TI$ sağlandığından, ϕ ' nin çarpımsal

özelliğinden $\phi(T) = \phi(T)\phi(I)$ elde edilir. Bu gösterir ki, $\phi = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\phi(I) = 0$ olmasıdır. Böylece $\phi(I) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $J: X \rightarrow X$ sınırlı operatörünü $J(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ ile tanımlayalım ve burada $J^n = I$ olduğuna dikkat edelim. $\phi(I) = [\phi(J)]^n$ dir. Böylece, $\phi(I) = 0$ olduğunu göstermek için $\phi(J) = 0$ olduğunu ispatlamamız yeterlidir.

Sonuca ulaşmak için, her $1 \leq i < n$ için $T \in \mathcal{L}(X)$ sınırlı operatörünü, burada x_i vektörü $(i+1)$ -durumda meşgul etmek üzere, $T_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$ ile tanımlayalım. Aynı zamanda, $T_n \in \mathcal{L}(X)$ ' i de $T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, 0, 0, \dots, 0)$ ile tanımlayalım. Açıkça, bütün $1 \leq i \leq n$ ' ler için $T_i^2 = 0$ ' dır ve böylece $[\phi(T_i)]^2 = \phi(T_i^2) = 0$ eşitliğinden her i için $\phi(T_i) = 0$ elde ederiz. Şimdi, $J = \sum_{i=1}^n T_i$ ' nin sağlandığına dikkat edelim. Bu da istenildiği gibi $\phi(J) = \sum_{i=1}^n \phi(T_i) = 0$ olmasını sağlar.

Bir X genel Banach uzayı için durum oldukça farklıdır. Bu konuda bizi en iyi şekilde bilgilendiren Mityagin ve Edelsteindir (1970) ki, $\mathcal{L}(X)$ Banach cebirindeki aşikar olmayan çarpım fonksiyonelleri ile X Banach uzaylarının iki tipini ilk defa gösterenlerdendir. Örneğin, böyle bir X için alınan, James (1950) tarafından oluşturulan meşhur Banach uzayı J ' yi göstermişlerdir. Bunun sonucu da Wilansky (1971) tarafından genelleştirilmiştir. Gowers ve Maurey' in (1993, 1997) derin sonuçları kullanıldığında $\mathcal{L}(X)$ gibi kolayca üretilme olasılığı olan bir X Banach uzayı âşikar olmayan çarpım fonksiyonellerine sahiptir (Laustsen, 2000). Bunu görmek için, $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ ile tanımlı $T: l_2 \rightarrow l_2$ kaydırma operatörünü göz önüne alalım. O zaman, T bir kompakt olmayan pozitif operatördür. Gerçekten, T bir latis izometrisidir. Bu nedenle her n için $\|T^n\| = 1$ ' dir ve böylece $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 1$ ' dir. Şimdi eğer $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$ ise her i için $x_i = 0$ olduğu kolayca görülür. Buradan, $x = (x_1, x_2, \dots) = 0$ ' dır ve bu $r(T) = 1$ ' in T ' nin bir öz değeri olamayacağını gösterir.

$\mathcal{L}(X)$ ' teki âşikar olmayan çarpım fonksiyonelleri ile bütün X Banach uzayları yukarıda

değildir. Mankiewicz (1989), $\mathcal{L}(X)$ ' teki sonsuz çoklukta çarpım fonksiyonelleri ile bir yansıyan (ya da süperrefleksif) X Banach uzayını kurmuştur. Benzer bir özellikle bir Banach uzayının diğer bir yapısını (Dales vd., 1994)' te de görürüz.

Teorem 2.60' ın bir uygulaması olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.11 Teorem (Kantorovich)

Y , bir X sıralı vektör uzayının bir majorize eden vektör alt uzayı olsun. O zaman, Y ' den bir Dedekind tam Riesz uzayına tanımlı her pozitif operatörün X ' in tamamına bir pozitif lineer genişlemesi vardır.

İspat:

Y ' yi bir sıralı vektör uzayı X ' in bir majorize eden vektör alt uzayı olarak kabul edelim ve Y ' den bir Dedekind tam Riesz uzayı F ' ye bir pozitif operatör $T:Y \rightarrow F$ olsun.

$p(x) = \inf \{Ty : y \in Y \text{ ve } y \geq x\}$ formülü yolu ile $p:X \rightarrow F$ dönüşümünü tanımlayalım.

Yukarıdaki infimumun F ' de varolduğunu görelim. Y majorize eden bir alt uzay olduğundan $z \geq -x$ veya $-z \leq x$ olacak şekilde bir $z \in Y$ vardır. Benzer şekilde, $y \geq x$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır ve herhangi bir y için T ' nin pozitifliği $-Tz = T(-z) \leq Ty$ olmasını gerektirir. Yani, F ' nin $\{Ty : y \in Y \text{ ve } y \geq x\}$ alt kümesi boş değildir ve F ' de alttan sınırlıdır. F ' nin Dedekind tamlığı bu alt kümenin infimumunun mevcudiyetini garanti eder.

Alışılmış hesaplama, p ' nin her $y \in Y$ için $Ty = p(y)$ ' yi sağlayan bir altlineer tasvir olduğu kolayca görülür. Teorem 2.60, T ' nin her $x \in X$ için $Sx \leq p(x)$ ' i sağlayan X ' in tamamına bir S genişlemesine sahip olduğunu gösterir. Eğer $x \in X^+$ ise $-x \leq 0$ ' dır ve buradan $-Sx = S(-x) \leq p(-x) \leq T(0) = 0$ ' dır. Böylece $Sx \geq 0$ ' dır ve buradan S, T ' nin bir pozitif lineer genişlemesidir.

Y , bir X sıralı vektör uzayının bir vektör alt uzayı ve F bir Riesz uzayı olmak üzere $T:Y \rightarrow F$ bir pozitif operatör ise T ' nin X ' in tamamına pozitif lineer genişlemesinin

ailesini $\mathcal{E}(T)$ ile (boş küme olabilir) gösterelim. $\mathcal{E}(T)$, $\mathcal{L}_r(X, F)$ vektör uzayının bir konveks alt kümesidir. F bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğu zaman, $\mathcal{E}(T)$ konveks kümesinin uç noktaları (Lipecki vd., 1979) tarafından karakterize edilmiştir.

3.12 Teorem (Lipecki-Plachky-Thomsen)

Y , bir E Riesz uzayının bir vektör alt uzayı, F bir Dedekind tam Riesz uzayı ve $T: Y \rightarrow F$ bir pozitif operatör olsun. O zaman, $S \in \mathcal{E}(T)$ operatörünün bir uç nokta olması için gerek ve yeter koşul her $x \in E$ için $\inf \{S|x-y|: y \in Y\} = 0$ olmasıdır.

İspat:

$S \in \mathcal{E}(T)$ alalım. Öncelikle S' nin $\mathcal{E}(T)'$ nin bir uç noktası olduğunu kabul edelim. $p: X \rightarrow F$ tasvirini $p(x) = \inf \{S|x-y|: y \in Y\}$ ile tanımlayalım. p , her $x \in E$ için $0 \leq p(x) = p(-x) \leq S|x|$ ' i ve her $z \in Y$ için $p(z) = 0$ ' ı sağlayan bir altlineer dönüşümdür.

Her $x \in E$ için $p(x) = 0$ olduğunu göstermek amacıyla bir $u \in E$ için $p(u) > 0$ olduğu çelişkisini kabul edelim. $Z = \{\lambda u: \lambda \in \mathbb{R}\}$ olsun ve $R: Z \rightarrow F$ operatörünü $R(\lambda u) = \lambda p(u)$ ile tanımlayalım. $R(u) = p(u) > 0$ olduğundan, R' nin sıfırdan farklı olduğunu gerektirir.

Aynı zamanda, her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $R(\lambda u) \leq p(\lambda u)$ olduğunu görüyoruz. Böylece Teorem 2.60' tan R' nin E' nin tamamına bir pozitif lineer genişlemesi vardır (yine bunu R ile göstereceğiz) öyle ki, her $x \in E$ için $Rx \leq p(x)$ ' tir. $z \in Y$ elemanı

$\pm R(z) = R(\pm z) \leq p(\pm z) = p(z)$ ' yi gerektirdiğinden dolayı $|Rz| \leq p(z) = 0$ ' dır ve buradan her $z \in Y$ için $Rz = 0$ ' dır. Şimdi, her $x \in X^+$ için $R(x) \leq p(x) \leq Sx$ ve $-R(x) = R(-x) \leq p(-x) \leq S|-x| = Sx$ olduğunu görürüz. Bu $S - R \geq 0$ ve $S + R \geq 0$ olmasını gerektirir. Her $y \in Y$ için $Ry = 0$ olduğundan $S - R, S + R \in \mathcal{E}(T)$ olduğunu

görürüz. Dikkat edersek, $S + R \neq S$, $S - R \neq S'$ dir ve $S = \frac{1}{2}(S + R) + \frac{1}{2}(S - R)$ ' dir ki bu

da S' nin $\mathcal{E}(T)'$ nin bir uç noktası olduğu gerçeği ile çelişir. O halde, her $x \in E$ için $p(x) = 0$ ' dır.

Tersi için, her $x \in E$ için S 'nin $\inf \{S|x-y| : y \in Y\} = 0$ 'ı sağladığını kabul edelim ve $A, B \in \mathcal{E}(T)$ operatörleri ve bir $0 < \alpha < 1$, $S = \alpha A + (1-\alpha)B$ 'yi sağlasın. Her $x, y \in E$ için $|Ax - Ay| \leq A|x-y| = \left(\frac{1}{\alpha}S - \frac{1-\alpha}{\alpha}B\right)|x-y| \leq \frac{1}{\alpha}S|x-y|$, dir. Özellikle, $y \in Y$ ise $Ay = Ty = Sy$ 'dir ve buradan her $x \in E$ için

$$|Sx - Ax| \leq |Sx - Sy| + |Ay - Ax| \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)S|x-y|, \text{ dir. } \inf \{S|x-y| : y \in Y\} = 0 \text{ olduğundan}$$

her $x \in E$ için $Ax = Sx$ elde edilir. Bu $A = B = S$ 'yi gerektirir ve böylece $S, \mathcal{E}(T)$ 'nin bir uç noktasıdır.

3.13 Sonuç

G , bir E Riesz uzayının bir Riesz alt uzayı, F bir Dedekind tam Riesz uzayı ve $T : G \rightarrow F$ bir latis homomorfizması olsun. O zaman, $\mathcal{E}(T)$ konveks kümesinin her uç noktası aynı zamanda bir latis homomorfizmasıdır.

İspat:

$S, \mathcal{E}(T)$ konveks kümesinin bir uç noktası olsun. Teorem 3.12' e göre her $x \in E$ için $\inf \{S|x-y| : y \in G\} = 0$ (3.1)

olur. T bir latis homomorfizma olduğundan, her $y \in G$ için $|Sy| = |Ty| = T|y| = S|y|$ 'dir.

Buradan her $x \in E$ ve her $y \in G$ için

$$\begin{aligned} \left| |Sx| - S|x| \right| &\leq \left| |Sx| - |Sy| \right| + \left| |Sy| - S|x| \right| \\ &\leq |Sx - Sy| + |S|y| - S|x|| \leq 2S|x-y|, \text{ dir.} \end{aligned}$$

(3.1)' i kullanarak her $x \in E$ için $|Sx| = S|x|$ olduğu sağlanır. Yani, S bir latis homomorfizmasıdır.

Lipecki (1980), $\mathcal{E}(T)$ 'de bir uç noktanın varlığını garanti eden bir koşul sunar.

3.14 Teorem (Lipecki)

Eğer Y bir E Riesz uzayının bir majorize eden vektör alt uzayı, F bir Dedekind tam Riesz

uzayı ve $T:Y \rightarrow F$ bir pozitif operatör ise, o zaman boştan farklı $\mathcal{E}(T)$ konveks kümesinin bir uç noktası vardır.

İspat:

İspat Zorn Yardımcı Teoremi 2.65' in bir uygulamasıdır. Öncelikle Teorem 3.11 ile $\mathcal{E}(T)$ konveks kümesinin boştan farklı olduğunu gözlemleyelim. Teorem 3.12' ye göre her $x \in E$ için $\inf \{S|x-y|: y \in Y\} = 0$ ' ı sağlayan bir $S \in \mathcal{E}(T)$ operatörünün varolduğunu kuralıyız. Z, E ' yi majorize eden bir vektör alt uzayı ve $A:Z \rightarrow F$ bir pozitif operatör olmak üzere (Z,A) çiftini göz önüne alarak başlayalım. Herhengi bir (Z,A) çifti için $p_{Z,A}:Z \rightarrow F$ dönüşümünü $p_{Z,A}(x) = \inf \{Az: z \in Z \text{ ve } z \geq x\}$ ile tanımlayalım. Doğrudan görülür ki, $p_{Z,A}$, her $z \in Z$ için $p_{Z,A}(z) = Az$ ' yi sağlayan bir altlineer dönüşümdür. Eğer (Z_1,A_1) ve (Z_2,A_2) çiftleri $Z_1 \subseteq Z_2$ ' yi ve Z_1 ' de $A_2 = A_1$ ' i sağlarsa her $x \in E$ için $p_{Z_2,A_2}(x) \leq p_{Z_1,A_1}(x)$ ' tir. Bütün (Z,A) çiftlerinin topluluğuna $\mathcal{C}$ dersek,

- (a) Z vektör alt uzayı Y ' yi kapsar.
- (b) $A:Z \rightarrow F$ pozitif operatörü Y üzerinde T ile eşittir.
- (c) Her $z \in Z$ için $\inf \{p_{Z,A}(|z-y|): y \in Y\} = 0$ ' dır.

$(Y,T) \in \mathcal{C}$ olduğundan, $\mathcal{C}$ kümesi boş değildir. Şimdi $\mathcal{C}$ ' de bir $\succeq$ sıralama bağıntısını şu şekilde tanımlayalım. $Z_2 \supseteq Z_1$ ve Z_1 ' de $A_2 = A_1$ ise $(Z_2,A_2) \succeq (Z_1,A_1)$ ' dir. $\succeq$, $\mathcal{C}$ ' de bir sıralama bağıntısıdır ve $\mathcal{C}$ ' deki her zincirin bir üst sınırı vardır. Bu nedenle Zorn Yardımcı Teoremi ile bir maksimal elemanı vardır diyebiliriz. Buna (V,S) diyelim. İspatı tamamlamak için $V = E$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer bunu kurabilirsek $S = p_{V,S}$ ' dir ve Teorem 3.12 ile S ' nin $\mathcal{E}(T)$ ' nin bir uç noktası olduğunu garanti eder.

Eğer $V \neq E$ ise bir $x \in E$ vardır öyle ki $x \notin V$ ' dir. $W = \{v + \lambda x: v \in V \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}\}$ vektör alt uzayını göz önüne alalım ve $B:W \rightarrow F$ operatörünü $B(v + \lambda x) = Sv + \lambda p_{V,S}(x)$ ile tanımlayalım. V, W ' nun bir öz alt uzayıdır ve V üzerinde $B = S$ ' dir. B ' nin bir pozitif operatör olduğunu ispatlayalım. Bunu görmek için, $0 \leq v + \lambda x \in W$ olsun. Eğer $\lambda > 0$ ise

$x \geq -\frac{v}{\lambda}$, dır ve bu $p_{V,S}(x) \geq -S\left(\frac{v}{\lambda}\right)$, yı sağlar, buradan $B(v + \lambda x) = Sv + \lambda p_{V,S}(x) \geq 0$ ' dır.

$\lambda < 0$ durumu da benzer şekildedir ve $\lambda = 0$ durumu açıktır. Buradan bir çelişki elde etmek için yukarıdaki (c) özelliğini sağlayan (W, B) ' yi kuralım. Son olarak, öncelikle $p_{W,B}$ ' nin alt lineerliği şunu sağlar ki $V_1 = \{z \in E : \inf \{p_{W,B}(|z - v|) : v \in V\} = 0\}$ kümesi $V \subseteq V_1$ olacak şekilde E ' nin bir vektör alt uzayıdır. $x \in V_1$ olduğunu ispatlayalım. Bunu görmek için öncelikle $v \in V$ ve $v \geq x$ olmak üzere $v - x \in W$ ' yu gerektirir ve buradan $p_{W,B}(v - x) = B(v - x) = Sv - p_{V,S}(x)$ ' dir. O halde $0 \leq \inf \{p_{W,B}(|x - v|) : v \in V\}$

$$\leq \inf \{p_{W,B}(v - x) : v \in V \text{ ve } v \geq x\}$$

$$= \inf \{Sv - p_{V,S}(x) : v \in V \text{ ve } v \geq x\}$$

$= \inf \{Sv : v \in V \text{ ve } v \geq x\} - p_{V,S}(x) = 0$ ' dır. Bu da $x \in V_1$ olduğunu gösterir ve sonuç olarak $W \subseteq V_1$ ' dir. Şimdi $w \in W$ ve $a = \inf \{p_{W,B}(|w - y|) : y \in Y\}$ alalım. Her $y \in Y$ ve her $v \in V$ için $0 \leq a \leq p_{W,B}(|w - y|) \leq p_{W,B}(|w - v|) + p_{W,B}(|v - y|)$

$$\leq p_{W,B}(|w - v|) + p_{V,S}(|v - y|) \quad \text{olmasına dikkat edelim. } (V, S) \in \mathcal{C}$$

olduğundan $\inf \{p_{V,S}(|v - y|) : y \in Y\} = 0$ ' dır ve böylece her $v \in V$ için $0 \leq a \leq p_{W,B}(|w - v|)$ ' dir. $w \in V_1$ olduğunu hesaba katarsak son eşitsizlikten her $w \in W$ için $a = \inf \{p_{W,B}(|w - v|) : v \in V\} = 0$ ' dır. Bu $(W, B) \in \mathcal{C}$ ' yi kurar. Bununla beraber, $(W, B) \succeq (V, S)$ ve $(W, B) \neq (V, S)$, (V, S) ' nin maksimalliği ile çelişir ve dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

(Lipecki, 1980) ile (Luxemburg ve Schep, 1979)' e göre, latis homomorfizmaların genişlemeleri üzerine vereceğimiz son sonuç önde gelen tartışmaların basit bir sonucudur.

3.15 Sonuç (Lipecki-Luxemburg-Schep)

Eğer G , bir E Riesz uzayını majorize eden bir Riesz alt uzayı ise G ' den bir Dedekind tam Riesz uzayına tanımlı her latis homomorfizması E ' nin tamamına bir latis homomorfik genişlemesine sahiptir.

İspat:

Teorem 3.11' den $\mathcal{E}(T)$ kümesi boş değildir ve Teorem 3.14' ten $\mathcal{E}(T)$ bir S uç noktasına sahiptir. T bir latis homomorfizması olduğundan Sonuç 3.13 S' nin, T' nin bir latis homomorfik genişlemesi olduğunu kanıtlar.

Latis homomorfizmaların genişlemeleri üzerine daha fazla bilgi için (Buskes, 1985, 1987, 1988)' e başvurulabilir.

4. ÇARPIM OPERATÖRLERİ

Bu bölümde $C(\Omega)$ -uzayı üzerindeki çarpım operatörlerinden bahsedeceğiz. Aşağıdaki sonuçla başlayalım.

4.1 Yardımcı Teorem

Bir E Banach latisindeki bir pozitif $u > 0$ elemanı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) u tarafından üretilen esas ideal E_u , E' de norm topolojiye göre yoğundur. Yani,

$$\overline{E_u} = E' \text{ dir.}$$

(2) Her $x \in E^+$ için $\|x \wedge nu - x\| \rightarrow 0$ 'dır.

(3) Eğer $0 < x' \in E'$ ise $x'(u) > 0$ 'dır. Yani, u vektörü E' üzerinde kesin pozitif lineer fonksiyonel olarak etki eder.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) $x \in E^+$ olsun ve $\varepsilon > 0$ alalım. E_u , E içinde yoğun olduğundan $\|y - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in E_u$ vardır. O zaman, $z = y^+ \wedge x \in E_u$ elemanı $\|x - z\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$ ve $0 \leq z \leq x$ 'i sağlar. Şimdi, $0 \leq z \leq ku$ olacak şekilde bir k sabiti alalım. Buradan $z \leq x \wedge ku$ elde ederiz. Böylece eğer $n \geq k$ ise $0 \leq x - x \wedge nu \leq x - x \wedge ku \leq x - z$ 'dir. Bu eşitsizlikten $\|x - x \wedge nu\| < \varepsilon$ olduğunu görürüz. O halde $\|x - x \wedge nu\| \rightarrow 0$ 'dır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $0 < x' \in E'$ olsun. Eğer $x'(u) = 0$ ise her $x \in E^+$ için $0 \leq x \wedge nu \leq nu$ olduğundan; her n ve her $x \geq 0$ için $x'(x \wedge nu) = 0$ 'dır. Buradan her $x \in E^+$ için $x'(x) = 0$ olur. Bu $x' = 0$ 'ı gerektirir. Bu da $0 < x' \in E'$ kabulü ile çelişir. Dolayısıyla $x'(u) > 0$ 'dır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Çelişki yoluyla $\overline{E_u} \neq E$ olduğunu kabul edelim. Hahn-Banach Ayırıştırma Teoreminden E_u üzerinde sıfır olan, sıfırdan farklı bir $x' \in E'$ vardır. Bu $0 < |x'| (u) = \sup \{ |x'(y)| : |y| \leq u \} = 0$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $\overline{E_u} = E'$ 'dir.

Bir E Banach latisindeki $\overline{E_u} = E'$ yi sağlayan herhangi bir pozitif u vektörüne bir yarı iç nokta veya bir kesin pozitif vektör denir. “Yarı iç nokta” ismi bir Banach latisin sıralı biriminin pozitif koninin bir iç noktası olduğu gerçeğinden gelir. “Kesin pozitif vektör” ismi de Yardımcı Teorem 4.1’ in 3. ifadesi ile sağlanır. Aşağıdaki gerektirmeler doğrudur.

Sıralı birim $\Rightarrow$ Yarı iç nokta $\Rightarrow$ Zayıf sıralı birim

E bir Banach latis ve $u > 0$ olsun. Öncelikle, u ’ nun bir sıralı birim olduğunu farz edelim. O zaman, $E_u = E'$ dir ve buradan $\overline{E_u} = E_u = E$ olur. Yani, u bir yarı iç noktadır. Şimdi u ’ nun E' nin bir yarı içnoktası olduğunu farz edelim. O zaman, Yardımcı Teorem 4.1 (2), her $x \in E$ için $\| |x| \wedge nu - |x| \| \rightarrow 0$ olmasını gerektirir. $|x| \wedge nu \uparrow$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.63 (c), her $x \in E$ için $|x| \wedge nu \uparrow |x|$ olmasını garanti eder. Bu ifade ile Teorem 2.62’ den $B_u = E'$ dir ve u , E' nin bir zayıf birimidir.

Genelde bu gerektirmelerin tersi doğru değildir. Bunu görebilmek için $[0,1]$ ’ deki sabit 1 fonksiyonunun $L_1[0,1]$ ’ de bir yarı iç nokta olduğuna fakat bir sıralı birim olmadığına dikkat edelim. Son olarak $u(t) = t$ fonksiyonu $C[0,1]$ ’ de bir zayıf birimdir fakat bir yarı iç nokta değildir. Bununla beraber sıralı sürekli bir Banach latiste bir pozitif vektörün yarı iç nokta olması için gerek ve yeter koşul onun zayıf sıralı birim olmasıdır. Bunu görmek için, E' yi bir sıralı sürekli normlu Banach latis kabul edelim ve $e > 0$ bir zayıf birim olsun. Bu, her $x \in E^+$ için E' de $x \wedge ne \uparrow x$ ’ in sağlandığı anlamına gelir ve buradan (normun sıralı sürekliliği ile) her $x \in E^+$ için $\|x \wedge ne - x\| \rightarrow 0$ yazabiliriz. Böylece, Yardımcı Teorem 4.1, e ’ nin bir yarı iç nokta olduğunu garanti eder. Tersini için, bir yarı iç noktanın bir zayıf sıralı birim olduğu yukarıda gösterilmiştir.

Bir E Banach latisinin yarı iç noktası varsa onun kompleksleştirilmesi olan $E_{\mathbb{C}} = E \oplus iE$ kompleks Banach latisinin de yarı iç noktası vardır. Şu soruyu sorabiliriz.

Bir Banach latis kaç tane yarı iç noktaya sahiptir? Hiç sahip olmayabilir! Örneğin, $[0,1]$ üzerinde sınırlı değişimin bütün Borel ölçümlerinin $\mu[0,1]$ Banach latisi yarı iç noktaya sahip değildir. Bunu görmek için, Sonuç 2.30’ dan $\mu[0,1]$ ’ in Soyut-L uzayı olarak sıralı sürekli norma sahip olduğuna dikkat edelim. Sıralı sürekli normlu bir Banach latiste pozitif bir vektörün bir yarı iç nokta olması için gerek ve yeter koşulun onun bir zayıf birim olmasından;

zayıf birim ve yarı iç nokta durumları uyuyor. Şimdi çelişki yoluyla $\mu[0,1]$ Banach latisinin bir $0 < \mu \in \mu[0,1]$ zayıf birimine sahip olduğunu kabul edelim. Buradan $\mu \wedge \nu = 0$, $\nu = 0$ olmasını garanti eder. Bu her $x \in [0,1]$ için $\mu(\{x\}) > 0$ olmasını gerektirir. Bunu görmek için, bir $x \in [0,1]$ için $\mu(\{x\}) = 0$ kabul edelim. O zaman δ_x , x tarafından desteklenen bir Dirac ölçüm olmak üzere $\mu \wedge \delta_x = 0$ 'dır ve böylece $\delta_x = 0$ olur ki bu da mümkün değildir. Eğer $E_n = \left\{ x \in [0,1] : \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n} \right\}$ kümesini alırsak, görülür ki her E_n sonlu bir kümedir. Fakat, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ sayılabilir bir küme olmalıdır ki bu da bir çelişkidir. Bu çelişkidir $\mu[0,1]$ Soyut-L uzayı ne bir yarı iç noktaya ne de bir zayıf birime sahiptir.

Diğer yandan, eğer bir E Banach latisi bir yarı iç noktaya sahipse, buna u diyelim, o zaman E daha fazlasına da sahiptir: Her $\lambda > 0$ için λu ve bir $\lambda > 0$ için $w \geq \lambda u$ 'yu sağlayan bir w pozitif vektörü yarı iç noktalarıdır. Bir Banach latisin bütün yarı iç noktalarının kümesi ya boştur ya da E^+ içinde yoğundur. $A \subseteq E^+$, E Banach latisinin bütün yarı iç noktalarının topluluğu olsun. $A \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim ve $x \in E^+$ alalım. Bir $e \in A$ sabit alalım ve $\alpha e + x$ 'in her $\alpha \geq 0$ için bir yarı iç nokta olduğuna dikkat edelim yani, $\alpha e + x \in A$ 'dır. Şimdi, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha e + x) = x$ olduğuna dikkat edelim. Bu $x \in \bar{A}$ olduğunu gösterir ve sonuç olarak $\bar{A} = E^+$ 'dır.

Bununla beraber, yukarıdaki uyarıya göre, bir Banach latiste bir yarı iç nokta varsa aslında u ve ν iki yarı iç nokta olmak üzere E_u ve E_ν esas ideallerinin izometrik latisler olması anlamında tektir. Bu Teorem 2.43' ten geliyor. Bu ilişkiyi biraz inceleyelim.

$u > 0$, E Banach latisinde pozitif bir vektör olsun. O halde, Teorem 2.44' ten u tarafından üretilen E_u esas ideali $\|x\|_\infty = \inf \{ \lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda u \}$ normu altında bir Soyut M-uzayı 'dır. E_u , Ω kompakt Hausdorff uzayı tek olarak yukarı homeomorfizmayı belirtmek üzere, somut bir $C(\Omega)$ -uzayına latis izometriktir. Şimdi, u ve ν 'nin E Banach latisinde iki yarı iç nokta olduğunu farz edelim. E_u ve E_ν sırasıyla $C(\Omega)$ ve $C(\Theta)$ temsillerine sahip olsun. O zaman, Teorem 2.43' ten $C(\Omega)$ ve $C(\Theta)$ latis izometriktir, Ω ve Θ homeomorftir. Tek (yukarı homeomorfizm) kompakt Hausdorff uzayı Ω , E 'nin 'yapı uzayı' olarak adlandırılır ve Banach latisin temsil teorisinde önemli bir rolü vardır. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgi için

Schaefer' e (1974) başvurulabilir. Dikkat edilmesi gerekirse Banach latisin yapı uzayının onun Stone uzayı ile uyuşması gerekmez. Örneğin, $E = C[0,1]$ olarak alırsak E ' nin Stone uzayı Q uçsal bağlantısız iken E ' nin yapı uzayı $[0,1]$ ' den farklıdır.

Bir E_u esas idealini bir $C(\Omega)$ -uzayı olarak temsil edersek, bu $C(\Omega)$ ' nin 'operatör yapıları' kullanılır. Örneğin, E_u üzerinde operatör olarak düşünülebilen $C(\Omega)$ üzerindeki çarpım ve bileşke operatörlerinin çokluğuna sahibiz. Bu önemli özelliğin Banach uzaylarının genel teorisi ile paralelligi yoktur. Diğer bir ifadeyle, latis izometrisi yolu ile $C(\Omega)$ ' nin çarpımını E_u ' ya taşıyabiliriz. Özellikle, her $v \in E_u$ elemanı $M_v(x) = vx$, $x \in E_u$ formülü vasıtasıyla bir $M_v : E_u \rightarrow E_u$ çarpım operatörünü doğurur. Buna ek olarak, E_u ' ya kısıtlanmış başta tanımladığımız $\|\cdot\|$ norma göre (nitekim $\|M_v\| = \|v\|_\infty$ ' dir) M_v süreklidir. u bir yarı iç nokta olduğu zaman çarpım operatörlerini E ' nin tamamı üzerindeki sürekli operatörlere (aynı biçimdeki sürekliliklerin etkisiyle) genişletebiliriz.

Değişmez alt uzay problemini çalışmak için kullanılacak olan bundan sonraki iki netice, yarı iç noktaların önemliliğini belirtir.

4.2 Yardımcı Teorem

Bir $u > 0$ yarı iç noktasına sahip E Banach latisi (reel ya da kompleks) için aşağıdakiler doğrudur.

(1) Sıfırdan farklı her $y \in E_u$ vektörü için $M(y) > 0$ ' ı sağlayan birim operatörle kısıtlı bir M operatörü vardır. Buradaki M bir merkez operatördür.

(2) $0 \leq v \leq u$ ' yu sağlayan her v elemanı için birim operatörle kısıtlı bir $T : E \rightarrow E$ operatörü vardır ve öyle ki $Tu = v$ ' dir.

İspat:

$u > 0$ bir E Banach latisinde (reel ya da kompleks) bir yarı iç nokta olsun. İlk olarak u vektörü Ω 'daki sabit **1** fonksiyonuna karşılık gelmek üzere E_u 'yu bir $C(\Omega)$ -uzayı ile özdeş alabiliriz.

(1) $y \neq 0$ olmak üzere $y \in E_u$ alalım ve y 'yi Ω 'da sürekli bir fonksiyon olarak düşünelim.

$\|y\|_\infty = \max \{|y(w)| : w \in \Omega\} = 1$ normunu kabul edebiliriz. Şimdi, $\bar{y} \in C(\Omega)$ (y 'nin kompleks eşleniği) fonksiyonunu göz önüne alalım ve $C(\Omega)$ 'daki (dolayısıyla E_u 'daki) $\bar{y}$ fonksiyonu tarafından tanımlanan çarpım operatörünü M ile ifade edelim. Yani, her $x \in C(\Omega)$ için $M(x) = \bar{y}x$ 'tir. Açıkça, $M(y) = |y|^2 > 0$ ve her $x \in E_u$ için $|Mx| \leq |x|$ 'tir. $\overline{E_u} = E$ olduğundan M 'nin E 'ye (tek) sürekli genişlemesi istenilen özellikleri sağlar.

(2) Yine yukarıdaki gibi v 'yi Ω 'da sürekli bir fonksiyon olarak düşünelim ve v ile $C(\Omega)$ 'da (dolayısıyla E_u 'da) tanımlı T çarpım operatörünü ele alalım. Yani, her $x \in C(\Omega)$ için $T(x) = vx$ 'tir. Ayrıca, her $x \in E$ için E 'nin tümüne T 'nin sürekli genişlemesi $|Tx| \leq |x|$ 'i sağlar.

Şimdi de Pagter' e (1986) ait bir Yardımcı Teoremi sunalım.

4.3 Yardımcı Teorem (de Pagter)

E yarı iç noktalı bir Banach latis (reel ya da kompleks) ve $|x| \leq |y|$ olsun. Bu durumda, E 'de operatörlerin bir $\{M_n\}$ dizisi vardır öyle ki $\|M_n y - x\| \rightarrow 0$ 'dır ve her M_n birim operatör tarafından kısıtlanır.

İspat:

$u > 0$, E 'nin bir yarı iç noktası olsun. u yerine $u + |y|$ yazıp $|y| \leq u$ olduğunu kabul

edebiliriz. Şimdi u , Ω 'daki sürekli fonksiyon 1 ' e karşılık gelmek üzere E_u ' yu bir $C(\Omega)$ uzayı olarak alalım. Böylece, $x, y \in C(\Omega)$ ' dır.

Her n için $u_n = \frac{\overline{xy}}{\left(|y| + \frac{1}{n}\right)^2}$ fonksiyonu ile üretilen $M_n : E_u \rightarrow E_u$ çarpım operatörünü

düşünelim. Yani, her $z \in E_u$ için $M_n z = u_n z$ ' dir. M_n ' nin bütün E ' ye tek sürekli lineer genişlemesini yine M_n ile gösterelim. $C(\Omega)$ ' da $|u_n| \leq 1$ olduğundan her $z \in E$ için $|M_n z| \leq |z|$ olduğu görülür. Yani, her M_n birim operatör tarafından kısıtlanır. Basit bir hespla $C(\Omega)$ ' da $|M_n y - x| \leq \frac{2}{n} 1$ olduğu görülür. Bu, $\|M_n y - x\| \leq \frac{2}{n} \|u\|$ ' yu sağlar ve buradan $\|M_n y - x\| \rightarrow 0$ ' dır.

$C(\Omega)$ uzayında çarpım operatörlerinin değişme özelliği ile geliştirilen durumlara değinelim. Dolayısıyla, bunun için Ω bir kompakt Hausdorff uzayını gösterebiliriz. Genel olarak, her $\phi \in C(\Omega)$, $M_\phi(f) = \phi f$ ile tanımlı $M_\phi : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ çarpım operatörünü üretir. Zayıf kompakt çarpım operatörlerinin kullanışlı bir özelliği ile başlayalım.

4.4 Yardımcı Teorem

Eğer M_ϕ çarpım operatörü zayıf kompakt ise ϕ fonksiyonu Ω 'nın her yığılma noktasında sıfırlanır. Özellikle, eğer Ω ayrık noktalara sahip değilse, $C(\Omega)$ ' da sadece zayıf kompakt (ve buradan yalnız kompakt) çarpım operatörü sıfır operatörüdür.

İspat:

M_ϕ 'nin zayıf kompakt olduğunu kabul edelim. Bir $w_0 \in \Omega$ yığılma noktası için $\phi(w_0) \neq 0$ olduğunu çelişki yolu ile kabul edelim. O halde, w_0 ' ın açık bir V komşuluğu ve bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki her $v \in V$ için $|\phi(v)| \geq \varepsilon$ sağlanır. Urysohn-Tietze Genişleme Teoreminden her $w \in \overline{V}$ (V 'nin kapanışı) için $\psi(w) = \frac{1}{\phi(w)}$ ' yu sağlayan bir $\psi \in C(\Omega)$ fonksiyonu vardır.

$M_\psi M_\phi = M_{\psi\phi}$ eşitliğinden $M_{\psi\phi}$ 'nin $C(\Omega)$ ' da bir zayıf kompakt operatör olduğu görülür.

$\psi\phi$ fonksiyonu $\bar{V}$ 'daki her noktada $\mathbf{1}$ ' e eşit olduğundan (yine Urysohn-Tietze Genişleme Teoreminden) $C(\bar{V})$ 'daki I birim opartörü zayıf kompakttır. Bu $C(\bar{V})$ 'nın yansıyan olmasını sağlar ve böylece (Teorem 2.38 ile) $C(\bar{V})$ 'nın normu sıralı sürekli olmalıdır. Fakat $\bar{V}$ sonlu bir küme olmalıdır. Gerçekten, bir $\bar{V}$ kompakt Hausdorff uzayı için $C(\bar{V})$ Banach latisinin sıralı sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul $\bar{V}$ 'nın sonlu bir küme olmasıdır. Bunu görmek için; $\bar{V}$ sonlu bir küme ise, $\bar{V} = \{w_1, \dots, w_n\}$ diyelim, o zaman $C(\bar{V}) = \mathbb{R}^n$ 'dır ve buradan $C(\bar{V})$ sıralı sürekli norma sahiptir. Tersini için, $C(\bar{V})$ 'nın sıralı sürekli norma sahip olduğunu kabul edelim. İspatı tamamlamak için $\bar{V}$ 'daki her noktanın bir ayrık nokta olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için bir $w \in \bar{V}$ elemanını alalım ve çelişki yoluyla w bir yığılma noktası olsun.

$D_w = \{f \in C(\Omega) : 0 \leq f \leq \mathbf{1}, f(w) = 1 \text{ ve } f, w \text{ nun bir açık komşuluğunun dışında sıfırdır}\}$ ile fonksiyonların boş olmayan topluluğunu göz önüne alalım. $D_w \downarrow$ 'dır ve her $w' \neq w$ için $\inf_{f \in D_w} f(w') = 0$ 'dır. w bir yığılma noktası olduğundan $D_w \downarrow 0$ 'dır. Fakat o zaman, her $f \in D_w$ için $\|f\|_\infty = 1$ olur ki bu da $\|\cdot\|_\infty$ normunun sıralı sürekliliği ile çelişir. Bu çelişki her $w \in \bar{V}$ noktasının bir ayrık nokta olduğunu gösterir ve burada $\bar{V}$ bir sonlu kümedir.

Böylece w_0 ayrık noktadır. Bu da bir çelişkidir.

$T : X \rightarrow X$ Banach uzayında bir operatörse, T 'nin komutantı $\{T\}'$ X 'teki bütün T ile değişmeli olan sınırlı operatörlerden oluşur, yani, $\{T\}' = \{S \in \mathcal{L}(X) : ST = TS\} = \{T\}^c$ 'dır.

Bir doğrudan sağlama gösteriyor ki, bir T operatörünün komutantı $\mathcal{L}(X)$ 'in birimli bir alt cebiridir. Genelde verilen bir operatörün komutantını betimlemek zordur. Bizim amacımız verilen bir çarpım operatörü ile değişmeli olan operatörlerin bir sınıfını betimlemektir. Bunun için (Abramovich vd., 1997)'yi kaynak olarak verebiliriz.

Bir $\phi \in C(\Omega)$ fonksiyonu için $C(\Omega)$ 'da ϕ tarafından üretilen kapalı birimli (yani $\mathbf{1}$ 'i içeriyor) cebiri $\mathcal{A}_\phi$ ile gösterelim. Burada $C(\Omega)$ 'daki fonksiyonların çarpımı her zaman

noktasal çarpım olarak anlaşılacaktır. Bu $\mathcal{A}_\phi$ cebiri $\{p(\phi): p \text{ bir polinom}\}$ alt uzayının düzgün kapanışıdır. Yani, $\mathcal{A}_\phi = \{p(\phi): p \text{ bir polinom}\}^-$ dir. $\mathcal{A}_\phi$ bir cebir olmaktan başka aynı zamanda $C(\Omega)$ 'nin bir Riesz alt uzayıdır.

4.5 Yardımcı Teorem

Bir $\phi \in C(\Omega)$ fonksiyonu ve M_ϕ ile değişmeli olan keyfi bir lineer sınırlı $T: C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ operatörü için aşağıdakiler doğrudur.

(1) Kapalı birimsel $\mathcal{A}_\phi$ cebirindeki her x için $Tx = hx$ 'i sağlayan bir $h \in C(\Omega)$ fonksiyonu vardır.

(2) Her $f \in \mathcal{A}_\phi$ için $TM_f = M_fT$ 'dir.

(3) ϕ bire-bir ise, T bir çarpım operatörüdür. Yani, ϕ bire-bir ise M_ϕ 'nin komutantı çarpım operatörlerinden oluşur, yani, $\{M_\phi\}' = \{M_f: f \in C(\Omega)\}$ 'dir.

İspat:

(1) $TM_\phi = M_\phi T$ eşitliği her $x \in C(\Omega)$ için $T(\phi x) = \phi Tx$ anlamına gelir. Tümevarımdan her $n \geq 0$ ve her $x \in C(\Omega)$ için $T(\phi^n x) = \phi^n Tx$ 'i elde ederiz. Buradan bir reel değişkenli her $p(t)$ polinomu için ve her $x \in C(\Omega)$ için

$$T(p(\phi)x) = p(\phi)Tx \quad (4.1)$$

dir.

$x = \mathbf{1}$ ve $h = T\mathbf{1}$ aldığımızda (4.1)'den her p polinomu için $T(p(\phi)) = hp(\phi)$ 'dir. Diğer bir deyişle, ϕ ile üretilen birimli cebirdeki her x için $Tx = hx$ 'tir. Netice olarak, süreklilikle ϕ

ile üretilen kapalı birimsel $\mathcal{A}_\phi$ cebirindeki her x için $Tx = hx$ ' tir.

(2) $f \in \mathcal{A}_\phi$ olsun. $x \in C(\Omega)$ ise (4.1)' den $TM_f(x) = T(fx) = fT(x) = M_fT(x)$ ' dir öyle ki $TM_f = M_fT$ ' dir.

(3) ϕ bire-bir ise Stone-Weierstrass Yaklaşım Teoremi $\mathcal{A}_\phi = C(\Omega)$ olduğunu gösterir. Böylece (1) kısmından $T = M_h$ ' dir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

ϕ bire-bir değilse M_ϕ ' nin komutantı çarpım operatörlerinden başka operatörleri de içerir. Örnek olarak, $\Omega = [-1, 1]$ ve $\phi(w) = w^2$ alalım. $\mathcal{A}_\phi$ ' nin bütün çift fonksiyonlardan oluştuğu görülebilir. $Tx(w) = x(-w)$ ile tanımlı $T : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ operatörünü göz önüne alırsak T bir çarpım operatörü değildir. Açıkça, $TM_\phi = M_\phi T$ ' dir.

Bundan sonra vereceğimiz netice, şunu iddia eder; sürekli bir fonksiyonun açık bir küme üzerinde sabit olması için gerek ve yeter koşul onun çarpım operatörünün sıfırdan farklı sonlu-rank operatörüyle değişmeli olmasıdır.

4.6 Teorem

Bir $\phi \in C(\Omega)$ fonksiyonu tarafından üretilen bir M_ϕ çarpım operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) ϕ fonksiyonu Ω ' nın boş olmayan bir açık alt kümesi üzerinde sabittir.
- (2) M_ϕ bir pozitif rank-bir operatörle değişmelidir.
- (3) M_ϕ bir rank-bir operatörle değişmelidir.
- (4) M_ϕ sıfırdan farklı bir sonlu-rank operatörü ile değişmelidir.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) Her $w \in V$ için $\phi(w) = c$ olmak üzere V , Ω 'nın boş olmayan bir açık alt kümesidir. Sıfırdan farklı pozitif bir $\psi \in C(\Omega)$ fonksiyonunu seçelim öyle ki her $w \in V$ için $\psi(w) = 0$ olsun ve bir $w_0 \in V$ sabit alalım. Şimdi, $Kx = x(w_0)\psi$ formülü vasıtasıyla $K : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ rank-bir operatörünü tanımlayalım.

M_ϕ ve K 'nin değişmeli olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten, $x \in C(\Omega)$ ve $w \in \Omega$ için $(KM_\phi x)(w) = (K\phi x)(w) = \phi(w_0)x(w_0)\psi(w) = cx(w_0)\psi(w)$ olur. Diğer yandan, ψ , V 'nin dışında sıfıra gittiğinden ve V üzerinde $\phi = c$ olduğundan; $(M_\phi Kx)(w) = (M_\phi x(w_0)\psi)(w) = x(w_0)\psi(w)\phi(w) = cx(w_0)\psi(w)$, dur. Böylece, $KM_\phi = M_\phi K$ dir. Açıkça görüldüğü gibi aynı zamanda K bir pozitif operatördür.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) Açık.

(4) $\Rightarrow$ (1) M_ϕ çarpım operatörünün sıfırdan farklı sonlu ranklı bir $T = \sum_{i=1}^k x'_i \otimes \psi_i$ (burada $\psi_i \in C(\Omega)$ ve her i için $x'_i \in C'(\Omega)$ 'dir) operatörü ile değişmeli olduğunu kabul edelim. $\psi_1, \dots, \psi_k$ 'leri lineer bağımsız ve her i için $x'_i \neq 0$ farz edebiliriz. Yardımcı Teorem 4.5.(2)'den $C(\Omega)$ 'daki ϕ ile üretilen kapalı $\mathcal{A}_\phi$ birimli cebirindeki her f fonksiyonu için $M_f T = T M_f$ olduğunu biliyoruz. Yani, her $f \in \mathcal{A}_\phi$ ve her $w \in \Omega$ için

$$\sum_{i=1}^k x'_i(x) f(w) \psi_i(w) = \sum_{i=1}^k x'_i(fx) \psi_i(w) = \sum_{i=1}^k M'_f x'_i(x) \psi_i(w) \quad (4.2)$$

sağlanır ki burada $M'_f : C'(\Omega) \rightarrow C'(\Omega)$, M_f 'nin eşlenik operatörüdür.

Her i ve her $f \in \mathcal{A}_\phi$ fonksiyonu için $\bigcap_{n=1}^k \zeta e k x'_n \subseteq \zeta e k M'_f x'_i$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu görmek için, $f \in \mathcal{A}_\phi$ alalım ve $x \in \bigcap_{n=1}^k \zeta e k x'_n$ olsun. O zaman (4.2), $\sum_{i=1}^k M'_f x'_i(x) \psi_i = 0$ 1 sağlar ve $\psi_1, \dots, \psi_k$ lineer bağımsızlığından her i için $M'_f x'_i(x) = 0$ olmasını gerektirir.

Böylece, $\bigcap_{n=1}^k \zeta e k x'_n \subseteq \zeta e k M'_f x'_i$ dir. Burada, Yardımcı Teorem 2.64'ü kullandık. Sonuç

olarak, her $M'_f x'_i$ lineer fonksiyoneli $x'_1, \dots, x'_k$ tarafından üretilen vektör alt uzayına aittir.

Özellikle, her i için $M'_{\phi} x'_i, M'_{\phi^2} x'_i, \dots, M'_{\phi^{k+1}} x'_i$ lineer bağımlı olmalıdır. Yani, her i için hepsi

sıfır olmayan $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,k+1}$ sabitleri vardır öyle ki $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{i,j} M'_{\phi^j} x'_i = M'_{p_i(\phi)} x'_i = 0$ ' dır, burada, p_i ,

$$p_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{i,j} \lambda^j \text{ ile tanımlı sıfırdan farklı polinomdur.}$$

$p = p_1 p_2 \dots p_k$ sıfırdan farklı polinomunu düşünelim ve dikkat edelim ki her i için

$$M'_{p(\phi)} x'_i = \left[\prod_{j \neq i} M'_{p_j(\phi)} \right] M'_{p_i(\phi)} x'_i = 0 \text{ ' dır. (4.2) de } f = p(\phi) \text{ alarak, her } x \in C(\Omega) \text{ ve her } w \in \Omega$$

için $\sum_{i=1}^k x'_i(x) p(\phi)(w) \psi_i(w) = 0$ veya

$$p(\phi)(w) \cdot \left[\sum_{i=1}^k x'_i(x) \psi_i(w) \right] = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir.

Şimdi, $x'_1(x) \neq 0$ olan $x \in C(\Omega)$ ' yı seçersek, $\psi_1, \dots, \psi_k$ lineer bağımsızlığından bir $w_0 \in \Omega$

için $\sum_{i=1}^k x'_i(x) \psi_i(w_0) \neq 0$ olur. O halde, w_0 ' ın bir açık V komşuluğundaki her w için

$\sum_{i=1}^k x'_i(x) \psi_i(w) \neq 0$ ' dır. Diğer taraftan, (4.3) ' ten her $w \in V$ için

$$p(\phi(w)) = p(\phi)(w) = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir. $\lambda_0 = \phi(w_0)$, p polinomunun bir kökü olduğundan ve p sonlu sayıda köke sahip

olduğundan p ' nin diğer köklerini kapsamayan λ_0 ' ın bir açık N komşuluğu vardır. Sonuç

olarak, w_0 ' ın açık $W = V \cap (p \circ \phi)^{-1}(N)$ komşuluğunu düşünersek (4.4) ' ten her $w \in W$ için

$\phi(w) = \lambda_0$ elde edilir ve ispat tamamlanmıştır.

5. YEREL YAKLAŞIM

Bu bölümde çarpım operatörlerinin bir uygulaması olarak bunun yerel yaklaşım teorisine katkısını vereceğiz.

E , e birimli bir Soyut M -uzayı (AM – uzayı) olsun. Teorem 2.51’ den E , e çarpımsal birimine sahip bir f – cebiri altında bir çarpım içerir. Diğer yandan, Teorem 2.44’ ten tek bir Ω Hausdorff kompakt topolojik uzayı vardır ve üzerinde $\pi(e) = 1$ ile tanımlı $\pi : E \rightarrow C(\Omega)$ latis izometrisi vardır. $C(\Omega)$, 1 çarpımsal birimli bir f – cebiri olduğundan aynı zamanda E de e çarpımsal birimine sahip bir f – cebiridir. Açıkça E deki çarpım $xy = \pi^{-1}(\pi(x)\pi(y))$ ile tanımlıdır. Her $x, y \in E$ için $|xy| = |x||y|$ sağlanır. Böylece E , e çarpımsal birimine sahip f – cebiri altında bir tek çarpım içerir. Özel olarak, her $x \in E$ elemanı $M(y) = xy$, $y \in E$ formülü ile tanımlı bir $M : E \rightarrow E$ çarpım operatörünü verir. Eğer M pozitif operatör ise pozitif çarpım operatörü adını alır. Teorem 2.52’ den birimli bir Soyut M -uzayı üzerinde tanımlı çarpım operatörleri ortomorfizmadır. Özet olarak:

e birimli her E Soyut M -uzayı e çarpımsal birime sahip bir f – cebiridir ve her $x \in E$, $M(y) = xy$ formülü ile E ’ de bir çarpım operatörü tanımlar.

E bir Banach latis olsun ve E_x , E nin sıfırdan farklı bir x elemanı ile üretilen ideal olsun. Teorem 2.42’ den $\|y\|_\infty = \inf \{ \lambda > 0 : |y| \leq \lambda|x| \}$, $y \in E_x$ normu altında E_x ideali $|x|$ birimli bir Soyut M -uzayıdır. Buradan E_x , çarpım operatörlerinin çokluğuna sahiptir. Diğer bir deyişle her Banach latis aşağıdaki ilginç yerel davranışı gösterir:

Her esas ideal üzerinde çarpım operatörlerinin bir çokluğu vardır.

Bu çarpım operatörleri tüm uzaya genişlemeye sahiptir. Bu, Banach latislerdeki operatörlerin çalışmasında çok faydalı olacaktır.

5.1 Yardımcı Teorem

Bir E Banach latisindeki bir $u > 0$ elemanı ve bir $T : E_u \rightarrow E_u$ lineer çarpım operatörü için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (1) T , E ’ deki normu E_u ’ ya indirgediğimiz norma göre süreklidir.
- (2) E σ – Dedekind tam ise T , E üzerinde bir ortomorfizmaya genişler (T pozitif ise genişleme de pozitiftir).

İspat:

Her $y \in E_u$ için $T(y) = xy$ ’ yi sağlayan tek $x \in E_u$ elemanını seçelim. O zaman, $|x| \leq \lambda u$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ alalım. Her $y \in E_u$ için

$$|T(y)| = |xy| = |x||y| \leq \lambda u |y| = \lambda |y| \quad (5.1)$$

olur.

(1) (5.1)’ den her $y \in E_u$ için $\|Ty\| \leq \lambda \|y\|$ ’ dir. Yani, T , E ’ deki norma göre E_u üzerinde sürekli bir operatördür.

(2) $I : E \rightarrow E$ birim operatör olsun. $T^+(y) = x^+y$ ve $T^-(y) = x^-y$ ile tanımlı $T^+, T^- : E_u \rightarrow E_u$ çarpım operatörlerini düşünelim. (5.1)’ den her $0 \leq y \in E_u$ için $0 \leq T^+(y) \leq \lambda I(y)$ ve $0 \leq T^-(y) \leq \lambda I(y)$ sağlanır.

Böylece her $0 \leq y \in E_u$ için $0 \leq T(y) \leq \lambda(y)$ olduğunu kabul edebiliriz. $S(y) = \sup\{T(y \wedge nu) : n = 1, 2, \dots\}$ ile $S : E^+ \rightarrow E^+$ operatörünü tanımlayalım.

$T(y \wedge nu)$ dizisi E ’ de Ty tarafından üstten sınırlı olduğundan supremum vardır. Her $y \in E_u$ için $S(y) = T(y)$ ’ dir. Aynı zamanda, her $y \in E^+$ için $0 \leq S(y) \leq \lambda y$ ’ dir. Diğer yandan S , E^+ ’ de bir toplamsal operatördür. Bunu görmek için; $y, z \in E^+$ olsun. $(y+z) \wedge nx \leq y \wedge nx + z \wedge nx$ olduğundan sup alındığında,

$T((y+z) \wedge nx) \leq T(y \wedge nx) + T(z \wedge nx) \leq S(y) + S(z)$ ’ dir. Buradan $S(y+z) \leq S(y) + S(z)$ olur. Diğer yandan her m ve n için $y \wedge nx + z \wedge mx \leq (y+z) \wedge (n+m)x$ ’ tir. Böylece her m ve n için $T(y \wedge nx) + T(z \wedge mx) \leq T((y+z) \wedge (n+m)x) \leq S(y+z)$ ’ dir. Dolayısıyla S toplamsaldır ve bu E ’ de pozitif bir ortomorfizma tanımlar. Buradan S , T ’ nin bir genişlemesidir.

Bir E Banach latisinin ikinci duali E'' içine doğal gömmesi E ’ nin cebirsel, norm ve latis yapılarını korur. E birimli bir Soyut M-uzayı olduğu zaman E nin E'' ’ ne doğal gömmesi aynı zamanda E ’ nin halka yapısını da korur.

E birimli bir Soyut M-uzayı olsun. O zaman, önceki teoremin doğrudan bir sonucu şöyledir:

E üzerindeki her çarpım operatörü E'' üzerinde önceki anlamdaki gibi bir çarpım operatörü tanımlar. Buradan biraz daha ilerlersek, E' deki her çarpım operatörünü E'' deki bir çarpım operatörü olarak göz önüne alabiliriz. E aşık olmaya sıralı bir izdüşümlere sahip olmayabilir; buna rağmen E'' nin Dedekind tamlığı, E'' deki sıralı izdüşümlerin çok sayıda olduğunu garantiler. E'' deki sıralı izdüşümler E' nin çarpım operatörleri ile yerel olarak yaklaştırılabilir. Bu özelliği ilgilendiren bir Yardımcı Teorem verelim.

5.2 Yardımcı Teorem

E, e birimli bir Soyut M-uzayı ve P, E'' üzerinde bir sıralı izdüşüm olsun. O zaman, her $0 \leq x' \in E'$ ve her $\varepsilon > 0$ için E üzerinde bir pozitif M çarpım operatörü vardır öyle ki

a) $0 \leq M \leq I$ ve

b) E'' içinde $P - M$ 'nin modülü $\langle x', |P - M|e \rangle < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlar.

İspat:

P, E'' de bir sıralı izdüşüm olsun. $0 \leq x' \in E'$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $0 \leq y'' \in E''$ için $0 \leq Py'' \leq y''$ ifadesinin ışığında Teorem 2.52' den dolayı her $y'' \in E''$ için $0 \leq x'' \leq e$ olacak şekilde $P(y'') = x'' \cdot y''$ sağlayan bir tek $x'' \in E''$ vardır.

Bir Soyut L-uzayı olan E' sıralı sürekli norma sahip olduğundan $E'' = (E')_n^\sim$ sağlanır. Böylece Teorem 2.56' dan E, E'' de $|\sigma|(E'', E')$ -yoğundur ve o halde $\langle x', |x'' - x| \rangle < \varepsilon$ u sağlayan bir $x \in E^+$ vardır. x' i $x \wedge e$ ile değiştirirsek, $0 \leq x \leq e$ 'nin sağlandığını kabul edebiliriz. E' de $M(y) = xy$ ile tanımlı M çarpım operatörünü göz önüne alalım (ve tabii ki $M, M(y'') = xy''$ formülü ile E'' de de bir çarpım operatörü tanımlar). E' de $0 \leq M \leq I$ sağlanır. Diğer yandan, Teorem 2.49' dan $|P - M|e = |(P - M)e| = |(x'' - x)e| = |x'' - x|$ elde edilir. Böylece istenildiği gibi $\langle x', |P - M|e \rangle = \langle x', |x'' - x| \rangle < \varepsilon$ elde edilir.

Şimdi, Soyut M-uzayında tanımlanmış pozitif operatörlerin önemli bir yaklaşım özelliğini verelim.

5.3 Teorem

E , e birimli bir Soyut M-uzayı, F bir Dedekind tam Banach latis ve $S, T: E \rightarrow F$, $0 \leq S \leq T$ 'yi sağlayan iki pozitif operatör olsun. O zaman, her $0 \leq x' \in F_n^-$ ve her $\varepsilon > 0$ için $0 \leq \sum_{i=1}^k P_i T M_i \leq T$ ve $\left\langle x', \left| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right| e \right\rangle < \varepsilon$ u sağlayan E üzerinde pozitif $M_1, \dots, M_k$ çarpım operatörleri ve F üzerinde $P_1, \dots, P_k$ sıralı izdüşümleri vardır.

İspat:

$\varepsilon > 0$ ve $0 \leq x' \in F_n^-$ alalım. S 'yi T 'nin bileşeni olarak göz önüne alalım yani $\mathcal{L}_b(E, F)$ 'de $S \wedge (T - S) = 0$ olsun. O zaman, Teorem 2.45' ten $\left\{ \sum_{i=1}^n S x_i \wedge (T - S) x_i : x_1, \dots, x_n \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_n = e \right\} \downarrow 0$ 'dır. Böylece $x_1 + \dots + x_n = e$ ve

$$\left\langle x', \sum_{i=1}^n S x_i \wedge (T - S) x_i \right\rangle < \varepsilon \quad (5.2)$$

olacak şekilde $x_1, \dots, x_n \in E^+$ vardır.

Şimdi, M_i , x_i ile tanımlanmış E 'de pozitif bir çarpım operatörü olsun (yani her $y \in E$ için $M_i(y) = x_i y$ olsun). Buradan her $y \in E$ için $(M_1 + \dots + M_n)y = y$ sağlanır. P_i , F 'de $(2Sx_i - Tx_i)^+$ tarafından üretilen band üzerinde tanımlı sıralı izdüşüm olsun. Açıkça,

$P_i(2Sx_i - Tx_i) = (2Sx_i - Tx_i)^+$ 'dır ve dahası $0 \leq \sum_{i=1}^n P_i T M_i \leq \sum_{i=1}^n T M_i = T$ sağlanır. Diğer

$$\begin{aligned} \text{yandan, } S - \sum_{i=1}^n P_i T M_i \text{ 'nin modülü } & \left| S - \sum_{i=1}^n P_i T M_i \right| e \leq \left| S - \sum_{i=1}^n P_i S M_i \right| e + \left| \sum_{i=1}^n P_i (T - S) M_i \right| e \\ & = \sum_{i=1}^n (S - P_i S) M_i e + \sum_{i=1}^n P_i (T - S) M_i e = \sum_{i=1}^n (S - P_i S) x_i + \sum_{i=1}^n P_i (T - S) x_i \\ & = \sum_{i=1}^n [S x_i - P_i (2S x_i - T x_i)] = \sum_{i=1}^n [S x_i - (2S x_i - T x_i)^+] = \sum_{i=1}^n S x_i \wedge (T - S) x_i \text{ 'yi sağlar. } \end{aligned} \quad (5.2)$$

eşitsizliğini göz önünde bulundurursak, $\left\langle x', \left| S - \sum_{i=1}^n P_i T M_i \right| e \right\rangle < \varepsilon$ olduğunu görürüz.

Şimdi genel durumu göz önüne alalım. $[0, T]$, $\mathcal{L}_b(E, F)$ Banach latisinde sıralı bir aralık

olduğundan Teorem 2.57' den $\left\| \left| S - \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i \right| \right\| = \left\| S - \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i \right\|_r < \frac{\varepsilon}{2\|x'\|}$ olacak şekilde T' nin

bileşenlerinin bir $\sum_{i=1}^m \alpha_i S_i$ konveks kombinasyonu vardır. Önceki durumdan, her $1 \leq i \leq m$ için

$$0 \leq \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T M_j^i \leq T \text{ ve } \left\langle x', \left| S_i - \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T M_j^i \right| e \right\rangle < \frac{\varepsilon}{2} \text{ eşitsizliklerini sağlayan } E' \text{ de } M_1^i, \dots, M_{m_i}^i$$

pozitif çarpım operatörleri ve F' de $P_1^i, \dots, P_{m_i}^i$ sıralı izdüşümleri vardır. Şimdi,

$$R = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T (\alpha_i M_j^i) \quad \text{olsun.} \quad \text{Açıkça,} \quad 0 \leq R \leq T \quad \text{sağlanır} \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} \left\langle x', |S - R| e \right\rangle &\leq \left\langle x', \left| S - \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i \right| e \right\rangle + \left\langle x', \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(S_i - \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T M_j^i \right) \right| e \right\rangle \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \left\langle x', \left| S_i - \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T M_j^i \right| e \right\rangle < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{dur.} \quad \text{Böylece} \quad \text{ispat} \end{aligned}$$

tamamlanmıştır.

$S, T: E \rightarrow F$ Banach latisleri arasında tanımlı $0 \leq S \leq T'$ yi sağlayan iki pozitif operatör olsun. Eğer F Dedekind tam ise Teorem 2.48' den S operatörü T' nin bileşenlerinin (T -adım fonksiyonları) lineer kombinasyonları ile düzgün yaklaşılabılır. Fakat F bir Dedekind tam değilse T âşikar olmayan bir bileşene sahip olmayabilir ve böylece S' nin bir yaklaşımı mümkün olmayabilir. Diğer yandan, eğer F' yi F'' ' nin bir Banach alt latisi olarak göz önüne alırsak ve T' yi de E' den F'' ' ne tanımlı bir operatör olarak düşünersek; T , $\mathcal{L}_b(E, F'')$ ' de çok bileşene sahiptir. Buradan T tarafından kısıtlanan her pozitif operatör T' nin $\mathcal{L}_b(E, F'')$ -adım fonksiyonu ile düzgün yaklaşılabılır.

E' nin birimli Soyut M-uzayı olması durumunda aşağıdaki sonuç $\mathcal{L}(E, F)$ ' nin bir pozitif operatörü ile sınırlanan $\mathcal{L}_b(E, F'')$ ' deki pozitif operatörlerin önemli bir yaklaşım özelliğini gösterir.

5.4 Teorem

E , e birimli bir Soyut M -uzayı, F bir Banach latis ve $T: E \rightarrow F$ pozitif bir operatör olsun.

Eğer $S: E \rightarrow F''$, $(\mathcal{L}_b(E, F''))$ içinde $0 \leq S \leq T$ ' yi sağlayan bir pozitif operatör ise

$0 \leq x' \in F'$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde $0 \leq \sum_{i=1}^k P_i T M_i \leq T$ ve $\left\langle x', \left| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right| e \right\rangle < \varepsilon$ ' u sağlayan

E' de $M_1, \dots, M_k$ pozitif çarpım operatörleri ve F'' ' de $P_1, \dots, P_k$ sıralı izdüşümleri vardır.

E ve F ikisi de birimli Soyut M -uzayı olduğu zaman aşağıdaki teorem sağlanır.

5.5 Teorem

$S, T: E \rightarrow F$ birimli Soyut M -uzayları arasında tanımlı $0 \leq S \leq T$ ' yi sağlayan iki pozitif operatör olsun. $\varepsilon > 0$ ve $0 \leq x' \in F'$ verildiğinde $\|x\| \leq 1$ olan her $x \in E$ için

$\left\langle x', \left| \left(S - \sum_{i=1}^k L_i T M_i \right) x \right| \right\rangle < \varepsilon$ ' u sağlayacak şekilde E' de tanımlı $M_1, \dots, M_k$ pozitif çarpım

operatörleri ve F' de tanımlı $L_1, \dots, L_k$ pozitif çarpım operatörleri vardır.

İspat:

$0 \leq x' \in F'$ ve $\varepsilon > 0$ alalım ve e , E' nin birimini göstereyim. E' den F'' ' ne tanımlı S ve T operatörlerini göz önüne alalım ve buradan $0 \leq x' \in (F'')_n^-$ ' dır. O zaman, Teorem 5.3' ten

$\left\langle x', \left| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right| e \right\rangle < \frac{\varepsilon}{2}$ ' yi sağlayan E' de tanımlı pozitif $M_1, \dots, M_k$ çarpım operatörleri

ve F'' ' de tanımlı $P_1, \dots, P_k$ sıralı izdüşümleri vardır.

Yardımcı Teorem 5.2' den her $1 \leq i \leq k$ için $\left\langle x', |P_i - L_i| T M_i e \right\rangle < \frac{\varepsilon}{2k}$ olacak şekilde F' de bir

L_i pozitif çarpım operatörü vardır. Böylece, $\|x\| \leq 1$ olan her $x \in E$ için

$$\left\langle x', \left| \left(S - \sum_{i=1}^k L_i T M_i \right) x \right| \right\rangle \leq \left\langle x', \left| \left(S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right) x \right| \right\rangle + \left\langle x', \left| \sum_{i=1}^k (P_i - L_i) T M_i x \right| \right\rangle$$

$$\leq \left\langle x', \left| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right| e \right\rangle + \sum_{i=1}^k \left\langle x', |P_i - L_i| T M_i e \right\rangle$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ elde edilir.}$$

Dedekind tam Banach latisleri için önceki sonucun rehberliğinde aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

5.6 Teorem

E ve F iki Dedekind tam Banach latis ve $S, T : E \rightarrow F$, $0 \leq S \leq T$ 'yi sağlayan iki pozitif operatör olsun. O zaman, her $x \in E^+$, $0 \leq x' \in F'$ ve $\varepsilon > 0$ için E' de pozitif $M_1, \dots, M_k$ ortomorfizmaları ve F' de pozitif $L_1, \dots, L_k$ ortomorfizmaları vardır öyle ki $|y| \leq x$ olan her $y \in E$ için $\left\langle x', \left| \left(S - \sum_{i=1}^k L_i T M_i \right) y \right| \right\rangle < \varepsilon$ 'dur.

İspat:

$x \in E^+$, $0 \leq x' \in F'$ olsun ve $\varepsilon > 0$ seçelim. $u = Tx$ alalım, x ve u tarafından üretilen E_x ve F_u ideallerini düşünelim. Açıkça, S ve T , E_x 'i F_u 'ya taşır. Böylece Teorem 5.5' ten, E_x 'de pozitif $M_1, \dots, M_k$ çarpım operatörleri ve F_u 'da pozitif $L_1, \dots, L_k$ çarpım operatörleri vardır öyle ki $|y| \leq x$ ifadesi

$$\left\langle x', \left| \left(S - \sum_{i=1}^k L_i T M_i \right) y \right| \right\rangle < \varepsilon \quad (5.3)$$

eşitsizliğini sağlar. Yardımcı Teorem 5.1 (2)' den her M_i , E 'deki bir pozitif ortomorfizmaya ve her L_i , F 'deki bir pozitif ortomorfizmaya genişletilir ve (5.3)' ten sonuca varırız.

Yarı iç noktalı Banach latisler için Teorem 5.6' nın aşağıda ifade edilen eşi de Haid (1982) tarafından verilmiştir.

5.7 Teorem (Haid)

E ve F yarı iç noktalı Banach latisler ve $S, T : E \rightarrow F$, $0 \leq S \leq T$ 'yi sağlayan iki pozitif operatör olsun. O zaman, her $x \in E^+$, $0 \leq x' \in F'$ ve $\varepsilon > 0$ için E' de tanımlı pozitif $M_1, \dots, M_k$ ortomorfizmaları ve F' de tanımlı pozitif $L_1, \dots, L_k$ ortomorfizmaları vardır öyle ki $|y| \leq x$ olan her $y \in E$ için $\left\langle x', \left(S - \sum_{i=1}^k L_i T M_i \right) y \right\rangle < \varepsilon$ 'dur.

İspat:

$x \in E^+$, $0 \leq x' \in F'$, $\varepsilon > 0$ alalım ve $u \in E^+$, E' nin bir yarı iç noktası olsun. $u + x$ de bir yarı iç nokta olduğu için u yerine $u + x$ yazarsak $0 \leq x \leq u$ kabul edebiliriz. Benzer şekilde v , F' nin bir yarı iç noktası ise v yerine $v + T(u)$ yazarsak, $0 \leq T(u) \leq v$ kabul edebiliriz. E_u ve F_v ile E ve F' de sırasıyla u ve v tarafından üretilen idealleri gösterelim. O zaman, E_u ve F_v sup normları ile sırasıyla u ve v birimli Soyut M-uzaylarıdır.

Açıkça, S ve T , E_u 'yu F_v 'ye götürür ve dahası eğer S ve T 'yi E_u 'ya kısıtlarsak, $0 \leq S \leq T$ olur. Buna ek olarak, F_v 'ye kısıtlanan x' pozitif ve sürekli. Böylece Teorem 5.5' ten E_u 'da tanımlı pozitif $M_1, \dots, M_k$ çarpım operatörleri ve F_v 'de tanımlı pozitif $L_1, \dots, L_k$ çarpım operatörleri vardır öyle ki $|y| \leq u$ olan her $y \in E$ için $\left\langle x', \left(S - \sum_{i=1}^k L_i T M_i \right) y \right\rangle < \varepsilon$ 'dur.

E_u , E' de yoğun olduğundan Yardımcı Teorem 5.1 (2)' den her M_i , E' deki bir pozitif ortomorfizmaya genişler (Bu genişlemeyi de yine M_i ile göstereceğiz). Benzer şekilde her L_i , F' deki bir pozitif ortomorfizmaya genişler, böylece ispat biter.

Son olarak, bu bölümü bir tane daha yaklaşım sonucu ile bitireceğiz.

5.8 Teorem

$T : E \rightarrow F$ operatörü bir σ -Dedekind tam ya da yarı iç noktalı E Banach latisinden sıralı sürekli normlu bir F Banach latisine tanımlı bir pozitif operatör olsun. Eğer bir $S : E \rightarrow F$ pozitif operatörü $0 \leq S \leq T$ 'yi sağlıyorsa, $x \in E^+$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde E' de pozitif $M_1, \dots, M_k$ operatörleri ve F' de $P_1, \dots, P_k$ sıralı izdüşümleri vardır öyle ki

$$\left\| \left| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right| x \right\| < \varepsilon \text{ ve } 0 \leq \sum_{i=1}^k P_i T M_i \leq T \text{ ' dir.}$$

İspat:

$0 < x \in E$ olsun ve $\varepsilon > 0$ seçilsin. Teorem 2.58' den $\|x'\| \leq 1$ olan her $x' \in F'$ için $(|x'| - y')^+(Tx) < \varepsilon$ ' u sağlayan bir $0 < y' \in F'$ vardır.

(a) E' nin σ -Dedekind tam olduğunu farz edelim. $C: E \rightarrow F$, T' nin bir bileşeni ve $\delta > 0$ olsun. O zaman, Teorem 2.46' dan E' de çift ayrık sıralı izdüşümleri $M_1, \dots, M_k$ ve F' de

$P_1, \dots, P_k$ sıralı izdüşümleri vardır öyle ki $y' \left(\left| C - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right| x \right) < \delta$ ' dir. $i \neq j$ için $M_i M_j = 0$

sağlandığından, $i \neq j$ için $(P_i T M_i) \wedge (P_j T M_j) = (P_i P_j) T (M_i M_j) = 0$ olduğunu görürüz.

Buradan, $0 \leq \sum_{i=1}^k P_i T M_i = \bigvee_{i=1}^k P_i T M_i \leq T$ sağlanır.

Teorem 2.57' den T' nin bileşenlerinin bir $\sum_{i=1}^m \alpha_i C_i$ konveks kombinasyonu vardır öyle ki

$$\left\| \left| S - \sum_{i=1}^m \alpha_i C_i \right| \right\| < \frac{\varepsilon}{2\|x\| \cdot \|y'\|}, \text{ dir. Bir önceki durumdan, her } 1 \leq i \leq m \text{ için}$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T M_j^i \leq T \text{ ve } y' \left(\left| C_i - \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T M_j^i \right| x \right) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ yi sağlayan } E' \text{ de } M_1^i, \dots, M_{m_i}^i \text{ sıralı}$$

izdüşümleri ve F' de $P_1^i, \dots, P_{m_i}^i$ sıralı izdüşümleri vardır. $R = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T (\alpha_i M_j^i)$ olsun ve

burada $0 \leq R \leq T$ eşitsizliğini sağlar.

$$\text{Buna ek olarak, } y'(|S - R|x) \leq y' \left(\left| S - \sum_{i=1}^m \alpha_i C_i \right| x \right) + y' \left(\left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(C_i - \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T M_j^i \right) \right| x \right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^m \alpha_i y' \left(\left| C_i - \sum_{j=1}^{m_i} P_j^i T M_j^i \right| x \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ dur.}$$

(b) E' nin yarı iç noktalara sahip olduğunu kabul edelim. Bir $0 < e \in E$ yarı iç noktasını alalım, buradan $0 \leq x \leq e$ ' nin sağlandığını varsayabiliriz. O zaman E_e , e birimli bir

Soyut M-uzayı ve $\overline{A_e} = E$ dir. Teorem 5.3' ten $y' \left(\left\| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right\| x \right) < \varepsilon$ ve $0 \leq \sum_{i=1}^k P_i T M_i \leq T$ olan E_e de tanımlı pozitif $M_1, \dots, M_k$ çarpım operatörleri ve F de $P_1, \dots, P_k$ sıralı izdüşümleri vardır. Yardımcı Teorem 5.1' den her M_i , E tarafından E_e de tanımlanan norma kısıtlanması ile sürekli ve buradan her M_i , $\overline{E_e} = E$ ye bir tek sürekli genişlemesine sahiptir (bunu da yine M_i ile gösterelim). Bu, her M_i ' nin E nin tamamı üzerinde tanımlandığının kabul edilebildiğini gerektirir.

Böylece, eğer E bir σ -Dedekind tam veya bir yarı iç noktaya sahip ise o zaman E de tanımlı pozitif $M_1, \dots, M_k$ operatörleri ve F de tanımlı $P_1, \dots, P_k$ sıralı izdüşümleri vardır öyle

$$\text{ki } y' \left(\left\| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right\| x \right) < \varepsilon \text{ ve}$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^k P_i T M_i \leq T \quad (5.4)$$

' dir. Aynı zamanda, (5.4)' ten $\left\| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right\| \leq S + \sum_{i=1}^k P_i T M_i \leq 2T$ olduğu görülür.

Son olarak, $\|x'\| \leq 1$ olan $x' \in F'$ için

$$\left\| x' \left(\left\| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right\| x \right) \right\| \leq (|x'| - y')^+ \left(\left\| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right\| x \right) + y' \left(\left\| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right\| x \right)$$

$$< (|x'| - y')^+ (2Tx) + \varepsilon < 3\varepsilon \text{ , dur. Böylece, } \left\| \left\| S - \sum_{i=1}^k P_i T M_i \right\| x \right\| \leq 3\varepsilon$$

sağlanır ve ispat tamamlanır.

6. SONUÇLAR

Banach latislerdeki pek çok lineer operatörler gerçekte pozitif operatörlerdir. Tezde de operatörlerin bazı özel sınıflarını incelerken Banach latisler ve Riesz uzaylarında kurulan pozitif operatörler üzerinde çalıştık. Buradan yola çıkarak; $C(\Omega)$ -uzayından Reel sayılara, $C_c(\Omega)$ -uzayından kompleks sayılara ve $C(\Omega)$ -uzayından $C(\Omega)$ -uzayına tanımlı latis homomorfizmalar karakterize edildikten sonra latis ve cebirsel homomorfizmalar arasındaki ilişki incelenip latis homomorfizmaların genişleme özellikleri verildi. Çarpım operatörlerinin özelliklerine ayrıntılı bir şekilde değinildi ve son olarak Banach latislerdeki operatörlerin bazı kullanışlı yaklaşım özellikleri elde edildi.

KAYNAKLAR

- Abramovich, Y. A., Aliprantis, C. D. ve Burkinshaw, O., (1997), "Multiplication and Compact-Friendly Operators", *Positivity*, 1:171-180.
- Abramovich, Y. A. ve Aliprantis, C. D., (2002), *An Invitation Operator Theory*, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island.
- Abramovich, Y. A. ve Aliprantis, C. D., (2002), *Problems in Operator Theory*, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island.
- Abramovich, Y. A., Arenson, E. L. ve Kitover, A. K., (1992), *Banach $C(K)$ -Modules and Operators Preserving Disjointness*, Pitman Research Notes in Mathematical Series, #277, Longman Scientific & Technical, New York.
- Abramovich, Y. A. ve Kitover, A. K., (2000), *Inverses of Disjointness Preserving Operators*, Mem. Amer. Math. Soc., 679, Providence, RI.
- Abramovich, Y. A., Veksler, A. I. ve Koldunov, A. V., (1979), "On Operators Preserving Disjointness", *Soviet Math. Dokl.* 20:1089-1093.
- Aliprantis, C. D. ve Burkinshaw, O., (1978), *Locally Solid Riesz Spaces*, Academic Press, New York and London.
- Aliprantis, C. D. ve Burkinshaw, O., (1985), *Positive Operators*, Academic Press, New York and London.
- Arendt, W., Grabosch, A., Greiner, G., Groh, U., Lotz, H. P., Moustakas, U., Nagel, R., Neubrander, F. ve Schlotterbeck, U., (1986), *One-Parameter Semigroups of Positive Operators*, Lecture Notes in Mathematics, 1184, Springer-Verlag, Berlin and New York.
- Banach, S., (1932), *Théorie Des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw.
- Bukhvalov, A. V., Korotkov, V. B., Kusraev, A. G., Kutateladze, S. S. ve Makarov, B. M., (1992), *Vector Lattices and Integral Operators*, Nauka, Novosibirsk.
- Buskes, G., (1985), "Extension of Riesz Homomorphisms. I", *J. Austral. Math. Soc. Ser., A* 39:107-120.
- Buskes, G., (1988), "Extension of Riesz Homomorphisms. II", *J. Miss. Acad. Sci.*, 33:29-47.
- Buskes, G., (1987), "Extension of Riesz Homomorphisms. III", *J. Austral. Math. Soc. Ser., A* 43:35-46.
- Dales, H. G., (1978), "Automatic Continuity: a Survey", *Bull. London Math Soc.*, 10:129-183.
- Dales, H. G. ve Esterle, J., (1977), "Discontinuous Homomorphisms from $C(X)$ ", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83:257-259.
- Dales, H. G., Loy, R. J. ve Willis, G. A., (1994), "Homomorphisms and Derivaties from $\mathcal{B}(E)$ ", *J. Funct. Anal.*, 120:201-219.
- Dodds, P. G. ve Fremlin, D. H., (1979), "Compact Operators in Banach Lattices", *Israel J. Math.*, 34:287-320.

- Fremlin, D. H., (1974), *Topological Riesz Spaces and Measure Theory*, Cambridge University Press, London and New York.
- Freudenthal, H., (1936), "Teilweise Geordnete Moduln", *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser., A* 39:641-651.
- Gelfand, I. M., (1941), "Normierte Ringe", *Mat. Sb. (N.S.)*, 9(51):3-24.
- Gowers, W. T. ve Maurey, B., (1993), "The Unconditional Sequence Problem", *J. Amer. Math. Soc.*, 6:851-874.
- Gowers, W. T. ve Maurey, B., (1997), "Banach Spaces with Small Spaces of Operators", *Math. Ann.*, 307:541-568.
- Gök, Ö., (1997), *Reel Analiz*, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi Matbaası, İstanbul.
- Haid, W., (1982), *Sätze vom Radon-Nikodym-typ für Operatoren auf Banachverbänden*, Ph. D. Dissertation, University of Tübingen.
- James, R. C., (1950), "Bases and Reflexivity in Banach Spaces", *Ann. of Math.*, 52:518-527.
- Jameson, G., (1970), *Ordered Linear Spaces*, *Lecture Notes in Mathematics*, 141, Springer-Verlag, Berlin and New York.
- Kantorovich, L. V., (1935), "On Partially Ordered Linear Spaces and Their Applications in the Theory of Linear Operators", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 4:13-16.
- Kantorovich, L. V., (1936), "Sur Les Propriétés Des Espaces Semi-Ordonnés Linéaires", *C. R. Acad. Sci. Paris Ser., A-B* 202:813-816.
- Kantorovich, L. V., Vulikh, B. Z. ve Pinsker, A. G., (1950), *Functional Analysis in Partially Ordered Spaces*, Gostekhizdat, Moscow and Leningrad.
- Kaplan, S., (1985), *The Bidual of $C(K)$* , I, North-Holland, Amsterdam and New York.
- Krasnoselsky, M. A., Zabreiko, P. P., Pustilnik, E.I. ve Sobolevsky, P.E., (1966), *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*, Nauka, Moscow.
- Krieger, H. J., (1969), *Beiträge zur Theorie Positiver Operatoren*, *Schriftenreihe der Institute für Math. Reihe A*, Heft 6, Akad.-Verlag, Berlin.
- Kusraev, A. G., (2000), *Dominated Operators, Mathematics and Its Applications*, 519, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht & London.
- Lacey, H. E., (1974), *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York.
- Laursen, K. B. ve Neumann, M. M., (2000), *An Introduction to Local Spectral Theory*, Clarendon Press, Oxford.
- Laustsen, N. J., (2000), *Maximal Ideals in the Algebra of Certain Banach Spaces*, *University of Leeds Preprint Series*, no. 1.
- Lindenstrauss, J. ve Tzafriri, L., (1977), *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin and New York.

- Lindenstrauss, J. ve Tzafriri, L., (1979), Classical Banach Spaces II, Springer-Verlag, Berlin and New York.
- Lipecki, Z., (1980), "Extension of Vector-Lattice Homomorphisms", Proc. Amer. Math. Soc., 79:247-248.
- Lipecki, Z., Plachky, D. ve Thomsen, W., (1979), "Extension of Positive Operators and Extreme Points I", Colloq. Math., 42:279-284.
- Luxemburg, W. A. J. ve Schep, A. R., (1979), "An Extension Theorem for Riesz Homomorphisms", Indag. Math., 41:145-154.
- Luxemburg, W. A. J. ve Zaanen, A.C., (1971), Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam.
- Mankiewicz, P., (1989), "A Superreflexive Banach Space X with $L(X)$ Admitting a Homomorphism onto the Banach Algebra $C(\beta\mathbb{N})$ ", Israel J. Math., 65:1-16.
- Meyer-Nieberg, P., (1991), Banach Lattices, Springer-Verlag, Berlin ve New York.
- Mityagin, B. S. ve Edelstein, I. C., (1970), "Homotopy of Linear Groups for Two Classes of Banach Spaces", Funkt. Analiz Priloz., (3), Russian, 4:61-72.
- Nakano, H., (1950), Modern Spectral Theory, Maruzen Co., Tokyo.
- Nakano, H., (1950), Modulared Semi-Ordered Linear Spaces, Maruzen Co., Tokyo.
- Pagter, B., (1986), "Irreducible Compact Operators", Math. Z., 192:149-153.
- Peressini, A. L., (1967), Ordered Topological Vector Spaces, Harper and Row, New York and London.
- Riesz, F., (1930), "Sur la Décomposition Des Opérations Linéaires", Atti. Congr. Internaz. Mat. Bologna, 3:143-148.
- Riesz, F., (1940), "Sur Quelques Notions Fondamentals Dans la Theorie Générale Des Opérations Linéaires", Ann. of Math., 41:174-206.
- Schaefer, H. H., (1974), Banach Lattices and Positive Operators, Springer-Verlag, Berlin ve New York.
- Schaefer, H. H., (1974), Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, Berlin ve New York.
- Schwarz, H. -U., (1984), Banach Lattices and Operators, Teüber Texte, 71, Leipzig.
- Sinclair, A. M., (1976), Automatic Continuity of Linear Operators, Cambridge University Press, Cambridge.
- Stone, M. H., (1937), "Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology", Trans. Amer. Math. Soc., 41:375-481.
- Vulikh, B. Z., (1967), Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces, Wolter-Hoordhoff, Groningen, Netherlands.
- Wilansky, A., (1971), "Subalgebras of $B(X)$ ", Proc. Amer. Math. Soc., 29:355-360.
- Wnuk, W., (1999), Banach Lattices With Order Continuous Norms, Polish Scientific Publishers, Warsaw.

Zaanen, A. C., (1975), “Examples of Orthomorphisms”, J. Approximation Theory, 13:192-204.

Zaanen, A. C., (1983), Riesz Spaces II, North-Holland, Amsterdam.

Zaanen, A. C., (1997), Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer-Verlag, New York and Heidelberg.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	05.02.1983	
Doğum yeri	Sivas	
Lise	1997-2000	Fatih Kız Lisesi
Lisans	2000-2005	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2005-2006	Sınav Dergisi Dershanesi
2006-2007	Vasıf Çınar İlköğretim Okulu