

**T.C.**  
**BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ve ÇARPIMSAL İNTEGRAL**  
**DENKLEMLERİN**  
**ÇARPIMSAL KONVOLÜSYON İLE ÇÖZÜLMESİ**

**Merve KARA**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Matematik Programı**

**TEMMUZ 2025**

**T.C.**  
**BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ve ÇARPIMSAL İNTEGRAL**  
**DENKLEMLERİN**  
**ÇARPIMSAL KONVOLÜSYON İLE ÇÖZÜLMESİ**

**Merve KARA**

**DANIŞMAN**

**Dr. Öğr. Üyesi Hatice YALMAN KOŞUNALP**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Matematik Programı**

**TEMMUZ 2025**

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Merve Kara tarafından hazırlanan “Çarpımsal Diferansiyel Denklemlerin ve Çarpımsal İntegral Denklemlerin Çarpımsal Konvolüsyon ile Çözülmesi” adlı tez çalışması 16/07/2025 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki danışman tarafından Bandırma Onyedli Eylül Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Hatice YALMAN KOŞUNALP

(Danışman)

Doç.Dr. Selçuk BAŞ

(Üye)

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

(Üye)

### İmza

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun ....../...../.....gün ve ...../..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ahmet AYDIN

Enstitü Müdürü

**BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**ETİK BEYANI**

Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum “**Çarpımsal Diferansiyel Denklemlerin ve Çarpımsal İntegral Denklemlerin Çarpımsal Konvolüsyon ile Çözülmesi**” adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 16/07/2025

**Merve KARA**  
**İmza**

## ÖNSÖZ

Tanıştığım ilk günden itibaren, hem ders döneminde hem tezin hazırlık aşamasından sonuçlandırılmasına kadar geçen süreçte ilgisini, desteğini ve emeğini hiçbir zaman esirgemeyen; her koşulda sabırla dinleyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım; akademik yolculuğum boyunca bana yalnızca bir danışman değil, aynı zamanda bir rehber, bir ilham kaynağı olan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hatice YALMAN KOŞUNALP' e en içten dileklerimle teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan; sevgi ve dualarıyla bana güç veren; her zaman beni destekleyen, bana güvenen, en zor anlarımda varlıklarıyla huzur bulduğum sevgili annem Ayşe KARA' ya, sevgili babam Halife KARA' ya teşekkür ederim.



# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ve ÇARPIMSAL İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇARPIMSAL KONVOLÜSYON İLE ÇÖZÜLMESİ

**Merve KARA**

**Bandırma Onyediy Eylül Üniversitesi**

**Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hatice YALMAN KOŞUNALP**

**Temmuz 2025, 90 sayfa**

Bu tezde çarpımsal diferansiyel denklemlerin ve çarpımsal integral denklemlerin çarpımsal konvolüsyon ile çözülmesi incelenmiştir. Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konuyla ilgili literatürden bahsedildi. İkinci bölümünde bu tezde kullanılacak olan çeşitli tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümünde ilk olarak çarpımsal diferansiyel denklem, çarpımsal integral denklem tanımları, özellikleri verildi. Bu denklemlere uygulanacak olan çarpımsal Laplace ve çarpımsal konvolüsyon tanımları, özellikleri verildi. Ek olarak çarpımsal Laplace dönüşümünü çarpımsal diferansiyel denklemlere uygulamasına da yer verildi. Dördüncü bölümde ilk olarak çarpımsal konvolüsyonu çarpımsal diferansiyel denklemlere uygulamasını ispatlayarak uygulamalar yapıldı. Ek olarak çarpımsal Laplace dönüşümünü ve çarpımsal konvolüsyonu çarpımsal integral denklemlere uygulamasını ispatlayarak uygulamalar yapıldı. Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirildi.

**Anahtar kelimeler:** Çarpımsal diferansiyel denklem, çarpımsal integral denklem, çarpımsal konvolüsyon, çarpımsal Laplace, çarpımsal türev.

# **ABSTRACT**

**MSc. THESIS**

## **THE MULTIPLICATIVE CONVOLUTION SOLUTIONS OF MULTIPLICATIVE DIFFERENTIAL AND MULTIPLICATIVE INTEGRAL EQUATIONS**

**Merve KARA**

**Bandırma Onyedi Eylül University  
Institute of Graduate Studies  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hatice YALMAN KOŞUNALP**

**July 2025, 90 pages**

In this thesis multiplicative differential and multiplicative integral equations are studied with multiplicative Laplace and multiplicative convolution theorem. Thesis is structured into five chapters; first chapter mentioned about literature. In the second chapter the necessary definitions and theorems are explained for thesis. In the third chapter multiplicative differential and multiplicative integral equations definitions and properties are explained and multiplicative Laplace and multiplicative convolution definitions are investigated. Furthermore the multiplicative Laplace transformation for multiplicative differential equations are explained. In the fourth chapter the multiplicative convolution method is applied to the multiplicative differential equations, in addition the multiplicative Laplace and multiplicative convolution method is developed for multiplicative integral equations and they are demonstrated with examples. In the fifth chapter the results are given.

**Keywords:** Multiplicative convolution, multiplicative derivative, multiplicative differential equations, multiplicative Laplace, multiplicative integral equations.

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                         | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖNSÖZ .....                                                                             | II    |
| ÖZET .....                                                                              | III   |
| ABSTRACT .....                                                                          | IV    |
| İÇİNDEKİLER.....                                                                        | V     |
| SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ .....                                                         | VII   |
| ŞEKİL LİSTESİ .....                                                                     | VIII  |
| TABLO LİSTESİ.....                                                                      | IX    |
| 1. GİRİŞ.....                                                                           | 1     |
| 2. KURAMSAL TEMELLER .....                                                              | 3     |
| 2.1 Laplace Dönüşümü .....                                                              | 4     |
| 2.2 Türevin ve İntegralin Laplace Dönüşümü.....                                         | 10    |
| 2.3 Ters Laplace Dönüşümü .....                                                         | 12    |
| 2.3.1 Kısmi Kesirler Yöntemi .....                                                      | 14    |
| 2.3.1.1 Lineer çarpanlar.....                                                           | 15    |
| 2.3.1.2 Katlı Lineer Çarpanlar .....                                                    | 17    |
| 2.3.1.3 Kuadratik çarpanlar .....                                                       | 18    |
| 2.4 Konvolüsyon İşlemi ve Teoremi .....                                                 | 20    |
| 2.5 Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü .....                                  | 25    |
| 2.6 Diferansiyel Denklemlerin Konvolüsyon ile Çözülmesi .....                           | 29    |
| 2.7 Volterra İntegral Denklemlerinin Konvolüsyon ve Laplace Dönüşümü ile Çözülmesi..... | 32    |
| 2.8 Çarpımsal Türev ve Çarpımsal İntegral .....                                         | 37    |
| 2.8.1 Çarpımsal Analiz Kavramları.....                                                  | 37    |
| 2.8.2 Çarpımsal Türevin Tanımı.....                                                     | 37    |
| 2.8.3 Çarpımsal İntegralin Tanımı.....                                                  | 45    |

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3. MATERYAL VE YÖNTEM .....</b>                                                   | <b>49</b> |
| <b>3.1 Çarpımsal Diferansiyel Denklem .....</b>                                      | <b>49</b> |
| <b>3.2 Çarpımsal Laplace Dönüşümü .....</b>                                          | <b>50</b> |
| <b>3.3 Çarpımsal Konvolüsyon .....</b>                                               | <b>59</b> |
| <b>3.4 Çarpımsal İntegral Denklem .....</b>                                          | <b>63</b> |
| <b>3.5 Çarpımsal İntegral Denklemlerin Çözüm Yöntemi .....</b>                       | <b>64</b> |
| <b>3.6 Çarpımsal Laplace Dönüşümünü Çarpımsal Diferansiyel Denklemlere Uygulama</b>  | <b>69</b> |
| <b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....</b>                                                  | <b>72</b> |
| <b>4.1 Çarpımsal Konvolüsyonu Çarpımsal Diferansiyel Denklemlere Uygulama .....</b>  | <b>72</b> |
| <b>4.2 Çarpımsal Laplace Dönüşümünü ve Çarpımsal Konvolüsyonu Çarpımsal İntegral</b> |           |
| <b>Denklemlere Uygulama .....</b>                                                    | <b>77</b> |
| <b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>                                                    | <b>87</b> |
| <b>6. KAYNAKLAR .....</b>                                                            | <b>88</b> |

## SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

| Simgeler            | Açıklama                                      |
|---------------------|-----------------------------------------------|
| $y'(t)$             | : $y(t)$ fonksiyonunun türevi                 |
| $L\{f(t)\}$         | : $f(t)$ nin Laplace dönüşümü                 |
| $L^{-1}\{f(t)\}$    | : $f(t)$ nin ters Laplace dönüşümü            |
| $L_m\{f(t)\}$       | : $f(t)$ nin çarpımsal Laplace dönüşümü       |
| $f^*(t)$            | : $f$ nin birinci mertebeden çarpımsal türevi |
| $* \int_a^b f(t)dt$ | : $f$ nin çarpımsal integrali                 |
| $K(x, t)$           | : Çekirdek fonksiyonu                         |
| $*$                 | : Konvolüsyon işlemi                          |
| $\mathbb{R}$        | : Reel sayılar kümesi                         |
| $\mathbb{R}^+$      | : Pozitif reel sayılar kümesi                 |

## ŞEKİL LİSTESİ

Sekil

Sayfa

Şekil 2-1: Klasik türev ile çarpımsal türev arasındaki bağıntıyı ortaya koyan şema .....41



## TABLO LİSTESİ

| <b><u>Tablo</u></b>                                                                           | <b><u>Sayfa</u></b> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| <b>Tablo 2-1: Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri .....</b>                               | <b>10</b>           |
| <b>Tablo 2-2: Bazı Fonksiyonların Ters Laplace Dönüşümleri .....</b>                          | <b>13</b>           |
| <b>Tablo 2-3: Sık kullanılan fonksiyonların klasik türevleri ve çarpımsal türevleri .....</b> | <b>45</b>           |
| <b>Tablo 2-4: Sık kullanılan fonksiyonların çarpımsal ters türev kuralları .....</b>          | <b>47</b>           |



# 1. GİRİŞ

Günümüzde geniş bir uygulama alanına sahip olan matematiksel teorilerden biri klasik analizdir. 17. yüzyılın sonlarına doğru Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz tarafından ortaya konan türev ve integral kavramları üzerinde şekillenmiştir. Cebir, trigonometri ve analitik geometri konuları üzerine inşa edilen klasik analiz; limit, türev, integral seriler gibi kavramları içermektedir. Bu kavramlar, toplama ve çıkarma işlemlerinin genelleştirilmiş biçimleriyle tanımlandığından, klasik analiz "*toplamsal analiz*" olarak da adlandırılmaktadır. Klasik analiz, matematiksel modelleme gerektiren ve analitik çözümlerin önem taşıdığı doğa bilimleri, mühendislik, bilgisayar bilimleri, istatistik, ekonomi, işletme ve tıp gibi alanlarda da kullanılmaktadır.

Klasik analize alternatif olarak farklı aritmetik işlemler yardımıyla oluşturulan analizler de vardır. Örnek verirsek; 1887 'de Vito Volterra tarafından Volterra tipi analizdir. (Volterra & Hostinsky, 1938) Bu analizde çarpma işlemi temel alındığından *çarpımsal analiz* olarak da adlandırılmaktadır. Volterra çarpımsal analize dayalı bazı çalışmalar ortaya konulmuştur. (Kasprzak, Lysik, & Rybaczuk, 2004) (Rybaczuk, Kedzia, & Zielinski, 2001) Volterra analizinin tanımlanmasından sonra Micheal Grossman ve Robert Katz tarafından 1967-1970 yıllarında yapılan araştırmalar neticesinde *geometrik analiz*, *bigeometrik analiz* ve *anageometrik analiz* olarak adlandırılan yeni analizler de ortaya konmuştur. *Non-Newtonian analiz* olarak da adlandırılan bu yeni analiz ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. (Grossman & Katz, 1972) Non-Newtonian analizlerinden bir diğer analiz ise geometrik analizdir. Dick Stanley, geometrik analizi ilk kez yeniden ele almış ve bu yöntemin çeşitli uygulamaları ile sağladığı faydaları ortaya koymuştur. (Stanley, 1999) Geometrik analizde, klasik analizde toplama ve çıkarmanın üstlendiği işlevi çarpma ve bölme işlemleri devralmıştır. Dolayısıyla geometrik analiz çarpımsal analiz olarak adlandırılmıştır. Sonrasında, çarpımsal analiz konusunda bazı araştırmalar Duff Campbell tarafından yürütülmüştür. (Campbel, 1999) 2008 yılında Agamirza E. Bashirov ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmalarda da çarpımsal analizin temel kavramları ayrıntılı bir şekilde ortaya konmuş ve bazı önemli uygulamaları gösterilmiştir. (Bashirov A. , Mısırlı, Özyapıcı, & Tandoğdu, 2011)

Çarpımsal analiz bilim ve mühendislik alanlarında yeni bakış açıları sunmaktadır. Aniszewska, çarpımsal diferansiyel denklemlerin çözümünde çarpımsal Runge-Kutta yöntemini kullanmıştır. (Aniszewska, 2007) Bashirov, Mısırlı ve Özyapıcı, analiz alanındaki araştırmacıların dikkatine çarpımsal analizin bazı uygulamalarını ve faydalarını sunmuştur. (Bashirov, Mısırlı, &

Özyapıcı, 2008) Rıza, Özyapıcı ve Mısırlı, çarpımsal diferansiyel denklemler ile Volterra integral denklemlerinin sayısal çözümleri için sonlu fark yöntemlerini incelemiştir. (M, Özyapıcı, & Mısırlı, 2009) Mısırlı ve Gürefe, çarpımsal diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü elde etmek amacıyla çarpımsal Adams-Bashforth-Moulton yöntemlerini geliştirmiştir. (Mısırlı & Gürefe, 2011) Bashirov, Rıza karmaşık değerli fonksiyonlar için çarpımsal türev konusunu tartışmış; (Bashirov & Rıza, 2011) Bashirov, Norozpour ise çarpımsal integrali karmaşık değerli fonksiyonlara genişletmiştir. (Bashirov & Norozpour, 2017)

Bashirov, çarpımsal analiz anlamında çift katlı integralleri incelemiştir. (Bashirov A. E., 2013) Bhat ve arkadaşları çarpımsal Fourier dönüşümünü tanımlamış ve çarpımsal diferansiyel denklemlerin çözümünü bu dönüşümü kullanarak elde etmiştir. (Bhat A. H., Majid, Wani, Jain, & Shah, 2019) Bhat ve arkadaşları çarpımsal Sumudu dönüşümünü tanımlamış ve bazı çarpımsal diferansiyel denklemleri bu dönüşümü kullanarak çözmüştür. (Bhat A. H., Majid, Wani, & Jain, 2019)

H. Durmaz çarpımsal integral denklemleri kullanmıştır. (Durmaz, 2019) N. Güngör ve H. Durmaz, çarpımsal Volterra integral denklemlerini tanımlamış ve bu denklemlerin çözümünün ardışık yaklaşım yöntemiyle bulmuşlardır. (Güngör & Durmaz, 2020) Buna ek olarak, çarpımsal diferansiyel denklemler ile çarpımsal integral denklemleri arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. N. Yalçın ve M. Dedetürk çarpımsal diferansiyel denklemlerin çözümlerini çarpımsal diferansiyel dönüşüm yöntemiyle ve çarpımsal kuvvet serisi yöntemiyle vermişlerdir. (Yalçın & Dedetürk, 2021) A. Bal, N. Yalçın, M. Dedetürk çarpımsal integral denklemlerin çarpımsal kuvvet serisi yöntemiyle çözümlerini yapmıştır. (Bal, Yalçın, & Dedetürk, 2023)

Bazı matematiksel problemler, klasik analiz kavramlarıyla açıklanmakta ve analitik olarak çözülmekte zorluk çıkarabilir. Bu problemlerin çözümünde çarpımsal analiz, klasik analize göre daha etkili ve uygulanması daha kolaydır.

Yapılan literatür taramalarında, çarpımsal analizde çarpımsal konvolüsyon teoreminin çarpımsal diferansiyel denklemlere ve çarpımsal integral denklemlere uygulamasına, çarpımsal Laplace yönteminin çarpımsal integral denklemlerine uygulanmasına rastlanmamıştır. Bu tez çalışmasında, çarpımsal analizdeki temel kavramlardan yararlanarak konvolüsyon ile ilgili kavramlar, özellikler ve uygulamalar çarpımsal analize aktarılmıştır. Ayrıca, çarpımsal Laplace yönteminin çarpımsal integral denklemlere uygulanması da gerçekleştirilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde sık kullanacağımız bazı temel ve kavramsal bilgilere yer verilecektir.

### ***n*. Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Temel Tanım ve Teoremler**

**Tanım 2.1:** *t* bir reel değişken olmak üzere

$$y^{(n)}(t) + q_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + q_1(t)y'(t) + q_0(t)y(t) = r(t) \quad (2.1)$$

şeklindeki denklemlere *n*. mertebeden lineer diferansiyel denklem denir. Bu denklemde, eşitliğin sağ tarafındaki  $r(t)$  ve sol tarafındaki  $q_0(t)$ ,  $q_1(t)$ , ...,  $q_{n-1}(t)$  katsayıları *t* değişkenine bağlıdır. İşlemleri basitleştirmek için (2.1) eşitliğinin sol tarafı

$$L\{y\} = y^{(n)}(t) + q_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + q_1(t)y'(t) + q_0(t)y(t)$$

biçiminde tanımlanırsa (2.1) denklemi

$$L\{y\} = r(t) \quad (2.2)$$

olarak yazılır.

**Teorem 2.1:** *t* bir reel değişken,  $q_0(t)$ ,  $q_1(t)$ , ...,  $q_{n-1}(t)$ ,  $r(t)$  fonksiyonları bir  $a < t < b$  aralığında tanımlı ve sürekli olmak üzere

$$y^{(n)}(t) + q_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + q_1(t)y'(t) + q_0(t)y(t) = r(t) \quad (2.3)$$

lineer diferansiyel denklemi

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \quad a < t_0 < b$$

şeklindeki başlangıç koşulları ile  $a < t < b$  aralığında tek bir çözüme sahiptir. (Finan, 2013)

**Teorem 2.2:**  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ ,  $L\{y\} = 0$  denkleminin çözümleri olsun. Bu takdirde,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (2.4)$$

ifadesi de denklemin çözümüdür. Burada,  $k = 1, 2, \dots, n$  için  $c_k$  bir keyfi sabittir. (Finan, 2013)

**Teorem 2.3:**  $t$  bir reel değişken,  $q_0(t), q_1(t), \dots, q_{n-1}(t)$  fonksiyonları bir  $a < t < b$  aralığında tanımlı ve sürekli olmak üzere,  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  kümesi

$$y^{(n)} + q_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + q_1(t)y' + q_0(t)y = 0 \quad (2.5)$$

diferansiyel denkleminin temel çözüm kümesidir ancak ve ancak  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  fonksiyonları lineer bağımsızdır. (Finan, 2013)

**Teorem 2.4:**  $\{y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_n(t)\}$  kümesi

$$y^{(n)} + q_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + q_1(t)y' + q_0(t)y = 0$$

denkleminin temel çözüm kümesi ve  $y_q(t)$  homojen olmayan

$$y^{(n)} + q_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + q_1(t)y' + q_0(t)y = r(t)$$

diferansiyel denkleminin özel çözüm kümesi olsun. Böylece, homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) + y_q(t) \quad (2.6)$$

şeklindedir. Burada,  $k = 1, 2, \dots, n$  için  $c_k$  lar keyfi sabittir. (Finan, 2013)

## 2.1 Laplace Dönüşümü

**Tanım 2.2:**  $f, [0, \infty)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  integrali mevcut (veya yakınsak) ise,  $s$  nin bir fonksiyonu olan

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt \quad (2.7)$$

ye  $f'$  nin Laplace dönüşümü denir.  $f$  fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

biçiminde gösterilir. (Çağlıyan, Çelik, & Doğan, 2013)

**Örnek 2.1:**  $f(t) = e^{-kt}$ ,  $k > 0$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= F(s) = L\{e^{-kt}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-kt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+k)t} dt \\ &= -\frac{1}{s+k} \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-(s+k)t} \Big|_{t=0}^A = -\frac{1}{s+k} (0 - 1) = \frac{1}{s+k} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Örnek 2.2:**  $f(t) = 1$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s) = L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

olarak elde edilir.

**Tanım 2.3:**  $\alpha$ ,  $M$  ve  $t_\alpha$  sabitleri olmak üzere  $\forall t > t_\alpha$  için  $e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M$  olursa  $f(t)$  fonksiyonuna  $\alpha$  -üstel basamaktan fonksiyon denir.

**Teorem 2.5:**  $f(t)$  fonksiyonu her kapalı ve sonlu  $a \leq t \leq b$ ,  $b > 0$  aralığı üzerinde parçalı sürekli ve  $\alpha$  -üstel basamaktan bir fonksiyon ise,  $s > \alpha$  için  $f(t)$  'in Laplace dönüşümü vardır.

**İspat :** Herhangi bir pozitif  $A$  sayısı için

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^A e^{-st} f(t) dt + \int_A^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

yazılabilir. Her sonlu  $0 \leq t \leq A$  aralığında  $f(t)$  parçalı sürekli olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral mevcuttur.  $t > A$  için  $f(t)$   $\alpha$ -üstel basamaktan olduğundan dolayı

$$\left| \int_A^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_A^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{\alpha t} dt = \frac{M}{s - \alpha}$$

dır. Dolayısıyla  $s > \alpha$  için ikinci integral de mevcuttur. Sonuç olarak  $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  integralinin var olması için yeter şart  $f(t)$  parçalı sürekli fonksiyonunun  $\alpha$ -üstel basamaktan olmasıdır.

**Teorem 2.6:**  $L\{f(t)\} = F(s)$  olmak üzere Laplace dönüşümünün özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. Lineerlik Özelliği:  $c_1$  ve  $c_2$  iki sabit,  $F_1(s)$  ve  $F_2(s)$  sırasıyla  $f_1(t)$  ve  $f_2(t)$  fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri olmak üzere;

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \quad (2.8)$$

dır.

2. Birinci Öteleme Özelliği:  $L\{f(t)\} = F(s)$  ise

$$L\{e^{bt} f(t)\} = F(s - b) \quad (2.9)$$

dır.

3. İkinci Öteleme Özelliği:  $L\{f(t)\} = F(s)$  ve  $g(t)$  fonksiyonu

$$g(t) = \begin{cases} f(t - b) & , t \geq b \\ 0 & , t < b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$L\{g(t)\} = e^{-sb} \cdot F(s) \quad (2.10)$$

dır.

4. Ölçek Değişimi Özelliği:  $L\{f(t)\} = F(s)$  ise

$$L\{f(bt)\} = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right) \quad (2.11)$$

dır.

5. Görüntü Fonksiyonun Türetilmesi:  $L\{f(t)\} = F(s)$  biçiminde tanımlansın.  $f(t)$  ise  $[0, \infty)$  aralığında parçalı sürekli ve  $\alpha$  mertebeden üstel fonksiyon olsun. Bu durumda  $s > \alpha$  için

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (2.12)$$

dır.

6. Görüntü Fonksiyonun İntegre Edilmesi:  $L\{f(t)\} = F(s)$  ve  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$  mevcut ise, bu durumda

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{u=s}^{\infty} F(u) du \quad (2.13)$$

olur.

7. Laplace Dönüşümünün Limit Biçimi: Eğer  $L\{f(t)\} = F(s)$  ise  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ 'dır.

İspat:  $f(t)$  üstel mertebeden ise

$$|F(s)| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt$$

$$f(t) \leq M$$

olduğu için

$$|F(s)| \leq M \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \frac{M}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$$

yazılabilir. O halde

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |F(s)| = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

elde edilir.

### Bazı Elemanter Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

**Örnek 2.3 :**  $f(t) = t^n$  olsun.  $L\{f(t)\}$ 'yi hesaplayalım.

$$L\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

integralinde  $st = \tau$  dönüşümü yapılırsa integral  $\Gamma$  (gama) fonksiyonu ile ifade edilebilir.

$$L\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{s}\right)^n \frac{d\tau}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{(n)!}{s^{n+1}}, \quad n > -1, \quad s > 0$$

(Gama fonksiyonu  $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{t-1} du = (t-1)!$  olarak tanımlanır.) Gama fonksiyonunun

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau = \Gamma(n+1) = n!$$

özellliği kullanılarak

$$L\{t^n\} = F(s) = \frac{(n)!}{s^{n+1}}, \quad n > -1, \quad s > 0$$

olarak yazılır. O halde özel olarak bu fonksiyonda  $n = 0$  için  $n = 1$  ve  $n = 2$  için Laplace dönüşümleri

$$L\{1\} = \frac{1}{s}, \quad L\{t^1\} = \frac{1}{s^2}, \quad L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

olur.

Yine bu fonksiyonda  $n = -1/2$ ,  $n = 1/2$  için Laplace dönüşümleri de

$$L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}, \quad s > 0$$

ve

$$L\left\{t^{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{s^3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}, \quad s > 0$$

olarak bulunur. Ayrıca birinci öteleme teoremini kullanarak  $L\{e^{bt}t^n\}$  i de hesaplayabiliriz.  $f(t) = t^n$  ise

$$L\{e^{bt}f(t)\} = F(s - b)$$

$$L\{e^{bt}t^n\} = \frac{(n)!}{(s - b)^{n+1}}$$

şeklinde elde edilebilir.

**Tablo 2-1:** Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

| $f(t)$             | $F(s)$                                                            | $f(t)$                                   | $F(s)$                                                   |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1                  | $\frac{1}{s}, \quad s > 0$                                        | $t \cdot \cos at$                        | $\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}, \quad s > 0$ |
| $t$                | $\frac{1}{s^2}, \quad s > 0$                                      | $t \cdot \sin at$                        | $\frac{2\alpha s}{(s^2 + \alpha^2)^2}, \quad s > 0$      |
| $t^2$              | $\frac{2}{s^3}, \quad s > 0$                                      | $\frac{\cos at}{t}$                      | $-\frac{\ln(s^2 + \alpha^2)}{2}$                         |
| $t^{\frac{1}{2}}$  | $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}, \quad s > 0$                        | $\frac{\sin at}{t}$                      | $\arctan\left(\frac{\alpha}{s}\right), \quad s > 0$      |
| $t^{-\frac{1}{2}}$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}, \quad s > 0$                     | $e^{at} \cos bt$                         | $\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + b^2}, \quad s > a$   |
| $t^n$              | $\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{(n)!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$ | $e^{at} \sin bt$                         | $\frac{b}{(s - \alpha)^2 + b^2}, \quad s > a$            |
| $e^{at}$           | $\frac{1}{s - \alpha}, \quad s > \alpha$                          | $u(t - \alpha),$<br>$\alpha \geq 0$      | $\frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad s > 0$                   |
| $e^{at} t^n$       | $\frac{(n)!}{(s - \alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$               | $at - \sin at$                           | $\frac{\alpha^3}{s^2(s^2 + \alpha^2)}, \quad s > 0$      |
| $\cosh at$         | $\frac{s}{s^2 - \alpha^2}, \quad s >  a $                         | $\sin at - at \cos at$                   | $\frac{2\alpha^3}{(s^2 + \alpha^2)^2}$                   |
| $\sinh at$         | $\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}, \quad s >  a $                    | $\sin at + at \cos at$                   | $\frac{2s^2\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}$                  |
| $\cos t$           | $\frac{s}{s^2 + 1}, \quad s > 0$                                  | $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$              | $\ln \frac{s - \alpha}{s - b}$                           |
| $\sin t$           | $\frac{1}{s^2 + 1}, \quad s > 0$                                  | $J_v(bt),$<br>$v > -1$                   | $\frac{(\sqrt{s^2 + b^2} - s)^v}{b^v \sqrt{s^2 + b^2}}$  |
| $\cos at$          | $\frac{s}{s^2 + \alpha^2}, \quad s > 0$                           | $\prod_{a,b}(t),$<br>$0 < a < b$         | $\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}, \quad s > 0$               |
| $\sin at$          | $\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$                                | $\delta(t - \alpha),$<br>$\alpha \geq 0$ | $e^{-\alpha s}$                                          |

## 2.2 Türevin ve İntegralin Laplace Dönüşümü

### Türevin Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümünü diferansiyel denklemlere uygularken bir fonksiyonun türevlerinin Laplace dönüşümü bilinmesi gerekir. Bu yüzden aşağıdaki teoremden yararlanacağız.

**Teorem 2.7:**  $L\{f(t)\} = F(s)$  ise

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (2.14)$$

ve

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (2.15)$$

dır.

**Genelleştirme:**  $t \geq 0$  için  $f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(n-1)}$  sürekli ve  $t > 0$  için  $f^{(n)}$  sürekli,  $\alpha$  – üstel mertebeden ise

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (2.16)$$

dır.

**Örnek 2.4:**  $f(t) = \cos^2 t$  olsun. Laplace dönüşümünü hesaplayalım.

$f(0) = 1$  ve  $f'(t) = -2\sin 2t$ 'dir. Türevin Laplace dönüşümünden

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$L\{-\sin 2t\} = sL\{\cos^2 t\} - f(0)$$

$$-\frac{2}{s^2 + 4} = sL\{\cos^2 t\} - 1$$

$$L\{\cos^2 t\} = \left(1 - \frac{2}{s^2 + 4}\right) \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 4) \cdot s}$$

olur.

### İntegralin Laplace dönüşümü

**Teorem 2.8:**  $L\{f(t)\} = F(s)$  olmak üzere

$$L\left\{\int_{u=0}^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (2.17)$$

dir.

### 2.3 Ters Laplace Dönüşümü

**Tanım 2.4:** Bir  $f$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü tanımının

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=b-i\infty}^{b+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad b > 0 \quad (2.18)$$

denklemine  $F(s)$ ' nin Ters Laplace Dönüşümü denir.

**Teorem 2.9 (Learch Teoremi):** Her sonlu  $0 \leq t \leq N$  aralığında parçalı sürekli ve  $t > N$  için  $\alpha$ -üstel basamaktan olan  $f(t)$  fonksiyonları için  $F(s)$  tek türlü olarak belirlenebilir. Yani  $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$  tektir.

Laplace dönüşümü için verilen özelliklere ters Laplace dönüşümü uygulayacak olursa aşağıdaki özellikleri yazabiliriz.

1.  $L^{-1}\{\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)\} = \alpha_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + \alpha_2 L^{-1}\{F_2(s)\}, (\alpha_1, \alpha_2 \text{ sabit})$
2.  $L^{-1}\{F(s - \alpha)\} = e^{\alpha t} f(t)$
3.  $L^{-1}\{e^{-\alpha s} F(s)\} = \begin{cases} f(t - \alpha) & , t > \alpha \\ 0 & , t \leq \alpha \end{cases}$
4.  $L^{-1}\{F(\alpha s)\} = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$
5.  $L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds} F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t)$
6.  $L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u) du\right\} = \frac{f(t)}{t}$
7.  $L^{-1}\{sF(s)\} = f'(t)$
8.  $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_{u=0}^t f(u) du$

Verilen bir fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulmada ters Laplace dönüşüm özelliklerini ve ılabılır.

**Tablo 2-2'**yi kullanılabilir. Gerektiğinde tam kare yöntemi ve basit kesirlere ayırma yöntemini de kullanılabilir.

**Tablo 2-2:** Bazı Fonksiyonların Ters Laplace Dönüşümleri

| $F(s)$                                                            | $L^{-1}\{F(s)\}$   | $F(s)$                                                      | $L^{-1}\{F(s)\}$                         |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $\frac{1}{s}, \quad s > 0$                                        | 1                  | $\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}, \quad s > 0$    | $t \cdot \cos \alpha t$                  |
| $\frac{1}{s^2}, \quad s > 0$                                      | $t$                | $\frac{2\alpha s}{(s^2 + \alpha^2)^2}, \quad s > 0$         | $t \cdot \sin \alpha t$                  |
| $\frac{2}{s^3}, \quad s > 0$                                      | $t^2$              | $-\frac{\ln(s^2 + \alpha^2)}{2}$                            | $\frac{\cos \alpha t}{t}$                |
| $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}, \quad s > 0$                        | $t^{\frac{1}{2}}$  | $\arctan\left(\frac{\alpha}{s}\right), \quad s > 0$         | $\frac{\sin \alpha t}{t}$                |
| $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}, \quad s > 0$                     | $t^{-\frac{1}{2}}$ | $\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + b^2}, \quad s > \alpha$ | $e^{\alpha t} \cos bt$                   |
| $\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{(n)!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$ | $t^n$              | $\frac{b}{(s - \alpha)^2 + b^2}, \quad s > \alpha$          | $e^{\alpha t} \sin bt$                   |
| $\frac{1}{s - \alpha}, \quad s > \alpha$                          | $e^{\alpha t}$     | $\frac{e^{-\alpha s}}{s}, \quad s > 0$                      | $u(t - \alpha),$<br>$\alpha \geq 0$      |
| $\frac{(n)!}{(s - \alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$               | $e^{\alpha t} t^n$ | $\frac{\alpha^3}{s^2(s^2 + \alpha^2)}, \quad s > 0$         | $\alpha t - \sin \alpha t$               |
| $\frac{s}{s^2 - \alpha^2}, \quad s >  \alpha $                    | $\cosh \alpha t$   | $\frac{2\alpha^3}{(s^2 + \alpha^2)^2}$                      | $\sin \alpha t - \alpha t \cos \alpha t$ |
| $\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}, \quad s >  \alpha $               | $\sinh \alpha t$   | $\frac{2s^2 \alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}$                    | $\sin \alpha t + \alpha t \cos \alpha t$ |
| $\frac{s}{s^2 + 1}, \quad s > 0$                                  | $\cos t$           | $\ln \frac{s - \alpha}{s - b}$                              | $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$              |
| $\frac{1}{s^2 + 1}, \quad s > 0$                                  | $\sin t$           | $\frac{(\sqrt{s^2 + b^2} - s)^v}{b^v \sqrt{s^2 + b^2}}$     | $J_v(bt),$<br>$v > -1$                   |
| $\frac{s}{s^2 + \alpha^2}, \quad s > 0$                           | $\cos \alpha t$    | $\frac{e^{-\alpha s} - e^{-bs}}{s}, \quad s > 0$            | $\prod_{a,b}^{(t)},$<br>$0 < a < b$      |
| $\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, \quad s > 0$                      | $\sin \alpha t$    | $e^{-\alpha s}$                                             | $\delta(t - \alpha),$<br>$a \geq 0$      |

**Örnek 2.5:**  $F(s) = \frac{6}{(s-1)^4}$  fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulalım.

ılabilir.

**Tablo 2-2'**daki  $L^{-1} \left\{ \frac{(n)!}{(s-\alpha)^{n+1}} \right\} = e^{at} t^n$  formülüne bakılarak  $n = 3$ ,  $\alpha = 1$  olarak alınırsa;

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{6}{(s-1)^4} \right\} = e^t t^3$$

olur.

**Örnek 2.6:**  $F(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+10}$  fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Kesrin paydası tam kare yapılırsa

$$s^2 + 2s + 10 = s^2 + 2s + 1 + 9 = (s + 1)^2 + 3^2$$

olup buradan

$$\frac{s+1}{s^2+2s+10} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}$$

bulunur. ılabilir.

**Tablo 2-2'**daki  $L^{-1} \left\{ \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+b^2} \right\} = e^{at} \cos bt$  formülüne bakılarak  $\alpha = -1$ ,  $b = 3$  verilirse

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} \right\} = e^{-t} \cos 3t$$

olur.

### 2.3.1 Kısmi Kesirler Yöntemi

Basit rasyonel fonksiyonların toplamı olarak ifade edeceğiz. Bu da kısmi kesirler yöntemiyle gerçekleşir. Bu yöntem kalkülüste,  $P(s)/Q(s)$  biçimindeki bir rasyonel fonksiyonun,  $P$  polinomunun derecesinin  $Q$  polinomunun derecesinden daha küçük olduğu durumda,  $Q(s)$  'nin doğrusal ve ikinci dereceden çarpanlarına dayanan bir kısmi kesir açılımı şeklinde yer alır. (Polinom katsayılarının gerçek sayılar olduğunu varsayıyoruz.) Üç durum göz önünde bulundurulmalıdır. (Nagle, Saff, & Snider, 2018)

1. Lineer çarpanlar
2. Katlı lineer çarpanlar
3. Kuadratik çarpanlar

### 2.3.1.1 Lineer çarpanlar

Eğer  $Q(s)$  farklı doğrusal çarpanların bir çarpımı olarak çarpanlarına ayrılabilirse,

$$Q(s) = (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)$$

burada  $r_i$  'ler birbirinden farklı gerçekte sayılar ise, kısmi kesir açılımı şu formda olur:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \dots + \frac{A_n}{s - r_n}$$

burada  $A_i$ 'ler gerçekte sayılardır.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sabitlerini belirlemek için çeşitli yöntemler vardır. Bir sonraki örnekte bu yöntemlerden iki tanesini göstereyim.

**Örnek 2.7:**  $F(s) = \frac{3s+5}{s(s^2+s-6)}$  fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulalım.

$F(s)$  için kısmi kesir açılımını bularak başlayalım. Payda üç farklı doğrusal çarptandan oluştuğu için açılım şu formda olacaktır:

$$\frac{3s + 5}{s(s^2 + s - 6)} = \frac{3s + 5}{s(s + 3)(s - 2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 3} + \frac{A_3}{s - 2} \quad (2.19)$$

Tüm kısmi kesir açılımları için işe yarayan bir yöntem, açılım denkleminde, verilen rasyonel fonksiyonun paydası ile çarpmakla başlar. Bu işlem sonucunda iki özdeş polinom elde ederiz.  $s^k$ , ların katsayılarını eşitlemek, bilinmeyen sabitleri belirlemek için çözebileceğimiz bir doğrusal denklem sistemi oluşturur. Bu örnekte, (2.19) denklemini  $s(s + 3)(s - 2)$  ile çarpalım ve şu sonuç bulunur:

$$3s + 5 = A_1(s + 3)(s - 2) + A_2s(s - 2) + A_3s(s + 3) \quad (2.20)$$

$$3s + 5 = (A_1 + A_2 + A_3)s^2 + (-5A_1 - 2A_2 + 3A_3)s - 6A_1.$$

Buradan

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$-5A_1 - 2A_2 + 3A_3 = 3$$

$$-6A_1 = 5$$

denklem sistemini çözümünden  $A_1 = -\frac{5}{6}$ ,  $A_2 = -\frac{4}{15}$ ,  $A_3 = \frac{11}{10}$  değerlerini elde ederiz.

$A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  sabitlerini bulmak için diğer bir yöntem ise  $s$  için üç değer seçip bunları (2.20) denklemine yerleştirerek üç bilinmeyenli doğrusal denklemler elde etmektir. Bu durumda,  $s = 0$ ,  $s = -3$ ,  $s = 2$  seçildiğinde denklem sistemini çözmek kolaylaşır.

$s = 0$  yazılırsa;

$$5 = A_1(3)(-2) + A_2(0) + A_3(0) \Rightarrow A_1 = -\frac{5}{6}$$

$s = -3$  yazılırsa;

$$-4 = A_1(0) + A_2(-3)(-5) + A_3(0) \Rightarrow A_2 = -\frac{4}{15}$$

$s = 2$  yazılırsa;

$$11 = A_1(0) + A_2(0) + A_3(2)(5) \Rightarrow A_3 = \frac{11}{10}$$

elde edilir.

Şimdi (2.19) denklemi için bulunan  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  sabitlerini yerleştirilirse;

$$\frac{3s+5}{s(s+3)(s-2)} = -\frac{5}{6s} - \frac{4}{15(s+3)} + \frac{11}{10(s-2)}$$

verilen rasyonel fonksiyon için kısmi kesir açılımı elde edilir. Ters Laplace dönüşümünü de

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s(s+3)(s-2)}\right\} &= L^{-1}\left\{-\frac{5}{6s} - \frac{4}{15(s+3)} + \frac{11}{10(s-2)}\right\} \\ &= -\frac{5}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{4}{15}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{11}{10}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{5}{6} - \frac{4}{15}e^{-3t} + \frac{11}{10}e^{2t}$$

şeklinde belirlenebilir.

### 2.3.1.2 Katlı Lineer Çarpanlar

Eğer  $s - r$ ,  $Q(s)$ 'nin bir çarpanı ise ve  $(s - r)^k$ ,  $Q(s)$ 'yi bölen  $s - r$  'nin en yüksek kuvvetiyse, o zaman  $\frac{P(s)}{Q(s)}$  'nin kısmi kesir açılımındaki  $(s - r)^m$  terimine karşılık gelen kısmı şu şekildedir:

$$\frac{A_1}{s - r} + \frac{A_2}{(s - r)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - r)^k}$$

burada  $A_i$  'ler gerçekte sayılardır.

**Örnek 2.8:**  $F(s) = \frac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2}$  fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

$F(s)$  için kısmi kesir açılımını bularak başlayalım. Paydadaki  $s + 1$  katlı lineer çarpan,  $s$  lineer çarpandan oluştuğu için açılım şu formda olacaktır:

$$\frac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s + 1)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 1} + \frac{A_3}{(s + 1)^2}. \quad (2.21)$$

Her iki tarafı  $s(s + 1)^2$  ile çarpılırsa;

$$-2s^2 - 3s - 2 = A_1(s + 1)^2 + A_2s(s + 1) + A_3s \quad (2.22)$$

elde edilir. (2.22) denkleminde sırayla  $s = 0$ ,  $s = -1$  ve herhangi bir değer verebiliriz. Kolaylık olması açısından  $s = 1$  de verilebilir.

$s = 0$  yazılırsa;

$$-2 = A_1(1) + A_2(0) + A_3(0) \Rightarrow A_1 = -2$$

$s = -1$  yazılırsa;

$$-2 + 3 - 2 = A_1(0) + A_2(0) + A_3(-1) \Rightarrow A_2 = 1$$

$s = 1$  yazılırsa;

$$-2 - 3 - 2 = A_1(4) + A_2(2) + A_3(1) \Rightarrow A_3 = 0$$

elde ederiz. (2.21) denklemi için bulunan sabitler ile;

$$\frac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

kısmi kesir açılımı elde edilmiş olur. Ters Laplace dönüşümü de:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2}\right\} &= L^{-1}\left\{-\frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= -2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= -2 + te^{-t} \end{aligned}$$

olacak şekilde bulunur.

### 2.3.1.3 Kuadratik çarpanlar

Eğer  $(s - a)^2 + b^2$ ,  $Q(s)$ 'nin bir ikinci dereceden çarpanıysa ve bu çarpan gerçek katsayılarla doğrusal çarpanlara indirgenemiyorsa, ayrıca  $m$ ,  $Q(s)$ 'yi bölen  $(s - a)^2 + b^2$ 'nin en yüksek kuvvetiyse, o zaman  $(s - a)^2 + b^2$ 'ye karşılık gelen kısmi kesir açılımı şu şekildedir:

$$\frac{C_1s + D_1}{(s - a)^2 + b^2} + \frac{C_2s + D_2}{((s - a)^2 + b^2)^2} + \dots + \frac{C_ms + D_m}{((s - a)^2 + b^2)^m}$$

Ancak Laplace dönüşümlerini daha kolay bulabilmek için  $C_is + D_i$ 'yi  $A_i(s - a) + bB_i$  biçiminde ifade etmek daha uygundur. Bu nedenle, bu kısmi kesir açılımı şu şekilde yazılır:

$$\frac{A_1(s-a)+bB_1}{(s-a)^2+b^2} + \frac{A_2(s-a)+bB_2}{((s-a)^2+b^2)^2} + \dots + \frac{A_m(s-a)+bB_m}{((s-a)^2+b^2)^m}.$$

**Örnek 2.9:**  $F(s) = \frac{-2s^2+8s-14}{(s+1)(s^2-2s+5)}$  fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Öncelikle,  $s^2 - 2s + 5$  'in indirgenemez bir ikinci dereceden çarpan olduğunu gözlemliyoruz. Daha sonra, bu ifadeyi  $(s - a)^2 + b^2$  formunda yazmak için tam kareye tamamlanırsa:

$$s^2 - 2s + 5 = (s - 1)^2 + 2^2$$

olur ve  $s^2 - 2s + 5$  ve  $s + 1$ , tekrarlanmayan çarpanlar olduğundan, kısmi kesir açılımı

$$\frac{-2s^2 + 8s - 14}{(s + 1)(s^2 - 2s + 5)} = \frac{A(s - 1) + 2B}{(s - 1)^2 + 2^2} + \frac{C}{s + 1} \quad (2.23)$$

şeklinde olur ve her iki taraf ortak paydayla  $(s + 1)(s^2 - 2s + 5)$  çarptığımızda şu ifadeyi elde edilir:

$$-2s^2 + 8s - 14 = (A(s - 1) + 2B)(s + 1) + C((s - 1)^2 + 2^2).$$

$s = -1$  yazılırsa;

$$-8 - 2 - 14 = C(8) \Rightarrow C = -3$$

olur,  $s = 1$  yazılırsa;

$$-2 + 8 - 14 = A(0) + B(4) + C(4) \Rightarrow B = 1$$

olur ve  $s = 0$  yazılırsa;

$$-0 + 0 - 14 = A(-1) + B(2) + C(5) \Rightarrow A = 1$$

elde edilir. (2.23) denklemi için bulduğumuz  $A, B, C$  sabitlerini yerleştirilirse:

$$\frac{-2s^2 + 8s - 14}{(s + 1)(s^2 - 2s + 5)} = \frac{(s - 1) + 2}{(s - 1)^2 + 2^2} - \frac{3}{s + 1}$$

verilen rasyonel fonksiyon için kısmi kesir açılımı elde edilir. O halde ters Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \left\{ \frac{-2s^2 + 8s - 14}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{(s-1) + 2}{(s-1)^2 + 2^2} - \frac{3}{s+1} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} \right\} - 3L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} \\
 &= e^{-t} \cos 2t + e^{-t} \sin 2t - 3e^{-t}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

## 2.4 Konvolüsyon İşlemi ve Teoremi

**Tanım 2.5:**  $f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonları  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere Laplace dönüşümü için konvolüsyon integrali

$$f(t) * g(t) = \int_{u=0}^t f(t-u)g(u)du \quad (2.24)$$

şeklinde verilir. (Güngör,2010)

**Teorem 2.10:**  $L\{f(t)\} = F(s)$  ve  $L\{g(t)\} = G(s)$  olmak üzere

$$L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s) \quad (2.25)$$

dir. (Güngör, 2010)

**İspat:** Laplace dönüşümü tanımı ve konvolüsyon tanımı kullanılırsa;

$$L\{f(t) * g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left\{ \int_0^t f(t-u)g(u)du \right\} dt$$

yazılabilir. İntegrallerin sırasını değiştirirsek ve içteki integralde  $\eta = t - u$  dönüşümü yapılırsa

$$= \int_0^{\infty} g(u) du \int_u^{\infty} e^{-st} f(t-u) dt$$

$$= \int_0^{\infty} g(u) e^{-su} du \int_0^{\infty} e^{-s\eta} f(\eta) d\eta$$

$$= L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\}$$

$$= F(s) \cdot G(s)$$

bulunur. Bu sonucu kullanarak

$$L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) * g(t)$$

ters dönüşüm formülü bulunur.

### Konvolüsyon İşlemi Özellikleri

**Teorem 2.11:** Denklem (2.24)'de verilen konvolüsyon işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. Yer değiştirme:  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

İspat: Konvolüsyon tanımından

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

olduğunu biliyoruz.  $u = t - \tau$  dönüşümü yapılırsa;

$$- \int_t^0 f(u) g(t-u) du = \int_0^t f(u) g(t-u) du = g(t) * f(t)$$

olur. Böylece

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

bulunur.

ii. Birleşme:  $(f(t) * g(t)) * h(t) = f(t) * (g(t) * h(t))$

İspat:  $(f(t) * g(t)) * h(t) = \int_0^t h(t - \tau) d\tau \int_0^\tau f(\theta) g(\tau - \theta) d\theta$

integrasyonların sırasını değiştirse;

$$= \int_0^t f(\theta) d\theta \int_\theta^\tau g(\tau - \theta) h(t - \tau) d\tau$$

olur.  $\eta = \tau - \theta$  dönüşümü yapılırsa;

$$= \int_0^t f(\theta) d\theta \left( \int_0^{t-\theta} g(\eta) h(t - \eta - \theta) d\eta \right)$$

$$= \int_0^t f(\theta) (g * h)(t - \theta) d\theta = f(t) * (g(t) * h(t))$$

elde edilir. Böylece

$$(f(t) * g(t)) * h(t) = f(t) * (g(t) * h(t))$$

olur.

iii.  $f(t) * (g(t) \pm h(t)) = f(t) * g(t) \pm f(t) * h(t)$ ' dir.

İspat:

$$f(t) * (g(t) \pm h(t)) = \int_0^t f(t - \tau) (g(t) \pm h(t)) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \pm \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
&= f(t) * g(t) \pm f(t) * h(t)
\end{aligned}$$

iv.  $kf(t) * g(t) = f(t) * kg(t) = k(f(t) * g(t))$  dir. ( $k \in \mathbb{R}$ )

İspat:

$$kf(t) * g(t) = \int_0^t k f(t-\tau)g(\tau)d\tau = k \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = k(f(t) * g(t))$$

v.  $(e^{at}f(t)) * (e^{at}g(t)) = e^{at}(f(t) * g(t))$  dir. ( $a \in \mathbb{R}$ )

İspat:

$$(e^{at}f(t)) * (e^{at}g(t)) = \int_0^t e^{at-a\tau} f(t-\tau) e^{a\tau}g(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t e^{at} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$= e^{at} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$= e^{at}(f(t) * g(t))$$

olur.

vi.  $F(s) = L\{f(t)\}$  ve  $G(s) = L\{g(t)\}$  ise

$$L\left\{\frac{d}{dt}(f * g)(t)\right\} = L\{(f * g)'\} = sF(s)G(s)$$

dir. Bu formül Duhamel İntegrali olarak bilinir.

İspat: Laplace türev dönüşüm formülünden ve  $(f * g)(0) = 0$  olduğundan

$$L\left\{\frac{d}{dt}(f * g)(t)\right\} = sL\{(f * g)(t)\} - (f * g)(0) = sL\{f(t)\}L\{g(t)\}$$

elde edilir.

**Örnek 2.10:**  $L^{-1}\left\{\frac{14}{(s-5)(s+2)}\right\}$  ters Laplace dönüşümünü hesaplayalım.

$$\frac{14}{(s-5)(s+2)} = \left(\frac{14}{s-5}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

olur.  $F(s) = \frac{14}{s-5}$  ve  $G(s) = \frac{1}{s+2}$  olarak yazılırsa ters Laplace dönüşümleri ılabilir.

**Tablo 2-2'** den yararlanılırsa

$$L^{-1}\left\{\frac{14}{s-5}\right\} = f(t) = 14 e^{5t}, \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = g(t) = e^{-2t}$$

olur ve

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{14}{(s-5)(s+2)}\right\} &= L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t 14 e^{5t-5\tau} e^{-2\tau} d\tau = -2e^{5t-7\tau} \Big|_0^t = 2e^{5t} - 2e^{-2t} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Örnek 2.11:**  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$  ters Laplace dönüşümünü hesaplayalım.

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

olur.  $F(s) = \frac{1}{s}$  ve  $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$  olarak yazılırsa ters Laplace dönüşümleri ılabilir.

Tablo 2-2'den

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = f(t) = 1, \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = g(t) = \sin t$$

olur ve

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right\} &= L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du \\ &= \int_0^t 1 \cdot \sin \tau d\tau = -\cos u \Big|_0^t = 1 - \cos t \end{aligned}$$

elde edilir.

## 2.5 Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü

Laplace dönüşümünün sabit katsayılı,  $n$ . basamaktan

$$a_0 \frac{d^n Y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)} Y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_{n-1} \frac{dY}{dt} + a_0 Y = B(t) \quad (2.26)$$

diferansiyel denklemi ve

$$Y(0) = c_0, Y'(0) = c_1, \dots, Y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

başlangıç koşullarından oluşan başlangıç değer probleminin çözümüne nasıl uygulanacağını göreceğiz.

Şimdi (2.26) denkleminin her iki yanının da Laplace dönüşümü ve Laplace dönüşümünün lineerlik özelliğini de kullanılırsa

$$a_0 L\left\{\frac{d^n Y}{dt^n}\right\} + a_1 L\left\{\frac{d^{(n-1)} Y}{dt^{(n-1)}}\right\} + \dots + a_{n-1} L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} + a_n L\{Y\} = L\{B(t)\}$$

elde edilir. Sol taraftaki ifadelere türevin Laplace dönüşüm teoremini uygulanır ve başlangıç koşullarını da kullanarak

$$L\left\{\frac{d^n Y}{dt^n}\right\} = s^n L\{Y(t)\} - s^{n-1}Y(0) - \dots - Y^{(n-1)}(0) = s^n L\{Y(t)\} - s^{n-1}c_0 - s^{n-2}c_1 \dots - c_{n-1}$$

$$L\left\{\frac{d^{n-1} Y}{dt^{n-1}}\right\} = s^{n-1} L\{Y(t)\} - s^{n-2}Y(0) - \dots - Y^{(n-2)}(0) = s^{n-1} L\{Y(t)\} - s^{n-2}c_0 - \dots - c_{n-2}$$

...

$$L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sL\{Y(t)\} - Y(0) = sL\{Y(t)\} - c_0$$

yazılır. Buradan  $L\{Y(t)\} = y(s)$  ve  $L\{B(t)\} = b(s)$  şeklinde yazarsak denklem

$$\begin{aligned} [a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n] y(s) - c_0 [a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1}] \\ - c_1 [a_0 s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \dots + a_{n-2}] - \dots - c_{n-2} [a_0 s + a_1] - c_{n-1} a_0 = b(s) \end{aligned}$$

olur.  $B$ ,  $t$ 'nin bilinen bir fonksiyonu olduğundan, Laplace dönüşümünün varlığını ve hesaplanabileceğini varsayarsak,  $b$  de  $s$  'nin bilinen bir fonksiyonu olur. Böylece denklem  $y(s)$  "bilinmeyi" cinsinden cebirsel denklem olur. Başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$$

olarak bulunur. (L.Ross, 1984)

**Örnek 2.12:**  $\frac{dY}{dt} - Y = e^{3t}$  ve  $Y(0) = 2$  olmak üzere başlangıç değer problemini çözelim.

Diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alınırsa

$$L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} - L\{Y\} = L\{e^{3t}\}$$

bulunur. Türevin Laplace dönüşümünü kullanırsa;

$$L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sY(s) - Y(0) = sy(s) - 2$$

olur. Tablo 2-1'den yararlanılırsa

$$sy(s) - 2 - y(s) = \frac{1}{s-3}$$

elde edilir. Buradan

$$y(s) = \frac{2s-5}{(s-3)(s-1)}$$

bulunur. Kısmi kesirlere ayırma yönteminden lineer çarpanlara ayırma metoduyla

$$y(s) = \frac{2s-5}{(s-3)(s-1)} = \frac{A_1}{s-3} + \frac{A_2}{s-1} \quad (2.27)$$

$$2s-5 = A_1(s-1) + A_2(s-3)$$

elde edilir.  $s = 1$  yazılırsa;

$$-3 = A_1(0) + A_2(-2) \Rightarrow A_2 = \frac{3}{2}$$

$s = 3$  yazılırsa;

$$1 = A_1(2) + A_2(0) \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

elde edilir. (2.27) denkleminin de

$$\frac{2s-5}{(s-3)(s-1)} = \frac{1}{2(s-3)} + \frac{3}{2(s-1)}$$

kısmi kesir açılımı elde edilir ve ters Laplace dönüşümünü yardımıyla

$$L^{-1}\{y(s)\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

bulunur. Buradan da

$$Y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^t$$

çözümü bulunmuş olur.

**Örnek 2.13:**  $\frac{d^2Y}{dt^2} - 7\frac{dY}{dt} + 10Y = 0$  ve  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = -3$  olmak üzere başlangıç değer problemini çözelim.

Diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alınırsa

$$L\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} - 7L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} + 10L\{Y\} = L\{0\}$$

bulunur. Buradan

$$L\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} = s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) = s^2y(s) + 3$$

$$L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} = sy(s) - Y(0) = sy(s)$$

olur. Buradan devam edilirse

$$y(s)(s^2 - 7s + 10) = -3$$

$$y(s) = \frac{-3}{(s-5)(s-2)}$$

bulunur. Lineer çarpanlara ayırma methoduyla

$$y(s) = \frac{-3}{(s-5)(s-2)} = \frac{A_1}{s-5} + \frac{A_2}{s-2} \quad (2.28)$$

$$-3 = A_1(s-2) + A_2(s-5)$$

elde edilir. (2.28) denklemini için bulunan sabitler yerine koyulursa;

$$\frac{-3}{(s-5)(s-2)} = -\frac{1}{s-5} + \frac{1}{s-2}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümünü yardımıyla çözüm

$$L^{-1}\{y(s)\} = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$Y(t) = -e^{5t} + e^{2t}$$

elde edilir.

## 2.6 Diferansiyel Denklemlerin Konvolüsyon ile Çözülmesi

Diferansiyel denklemlerin konvolüsyon ile çözülebilmesi için bir önceki bölümde yer alan diferansiyel denklemlerin Laplace ile çözülmesindeki adımlarından yararlanacağız. Sabit katsayılı,  $n$ . basamaktan

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_0 y = B(t) \quad (2.29)$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

başlangıç koşullarından oluşan probleme Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$$

geldiğini görmüştük. Konvolüsyon teoremi uygulamak için

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\{F(s).G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_{u=0}^t f(t-u)g(u)du$$

olacak şekilde  $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$  ve  $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$  bulunur. İntegralin çözümünden  $y(t)$ ' yi bulacağız.

**Örnek 2.14:**  $\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} + 10y = 0$  ve  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -3$  olmak üzere başlangıç değer problemini çözelim.

Bir önceki bölümde Laplace yöntemiyle çözdüğümüz bu örneği şimdi konvolüsyon ile çözelim. Diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü sayesinde

$$L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 7L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 10L\{y\} = L\{0\}$$

bulunur. Böylece

$$L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2y(s) + 3$$

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sy(s) - y(0) = sy(s)$$

olur. Bunları denkleme yazarsak

$$y(s)(s^2 - 7s + 10) = -3$$

$$y(s) = \frac{-3}{(s-5)(s-2)}$$

bulunur.

$$\frac{-3}{(s-5)(s+2)} = \left(\frac{-3}{s-5}\right) \left(\frac{1}{s-2}\right)$$

$F(s) = \frac{-3}{s-5}$  ve  $G(s) = \frac{1}{s-2}$  olarak yazarsak ters Laplace dönüşümleri kullanılırsa

$$L^{-1}\left\{\frac{-3}{s-5}\right\} = f(t) = -3 e^{5t}, \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = g(t) = e^{2t}$$

olduğundan konvolüsyon teoremi ile

$$Y(t) = L^{-1}\left\{\frac{-3}{(s-5)(s-2)}\right\} = L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$Y(t) = \int_0^t -3e^{5t-5\tau} e^{2\tau} d\tau = e^{5t-3\tau} \Big|_0^t = e^{2t} - e^{5t}$$

elde edilir.

**Örnek 2.15:**  $\frac{d^2Y}{dt^2} + Y = 1$  ve  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = 0$  olmak üzere başlangıç değer problemini çözelim.

Diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alırsak

$$L\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} + L\{Y\} = L\{1\}$$

bulunur.

$$L\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} = s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) = s^2y(s)$$

olur. Buradan

$$y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)$$

bulunur.

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)$$

olduğu bilindiğine göre ters Laplace dönüşümleri yardımıyla

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = f(t) = 1, \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = g(t) = \sin t$$

elde edilir ve konvolüsyon teoremi ile çözüm

$$Y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right\} = L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

$$Y(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin \tau d\tau = -\cos \tau \Big|_0^t = 1 - \cos t$$

olarak elde edilir.

## 2.7 Volterra İntegral Denklemlerinin Konvolüsyon ve Laplace Dönüşümü ile Çözülmesi

**Tanım 2.6:** İntegral denklemler integral sınırlarının değişken ya da sabit olmasına göre sınıflandırılırlar.

$t > x$  için  $K(x, t) = 0$  şartını sağlayan

$$f(x) = \int_a^x K(x, t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (2.30)$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (2.31)$$

denklemleri sırasıyla 1.tip , 2.tip Volterra integral denklemleridir. (Ekici, 2010)

Volterra integral denklemleri konvolüsyon ve Laplace ile çözülebilir. Öncelikle konvolüsyon teoremi ile çözümünü inceleyelim.

$f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonları  $t \geq 0$  için tanımlanmış sürekli iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun konvolüsyonu

$$\phi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad (2.32)$$

şeklinde olup  $\phi(t)$  fonksiyonu  $t \geq 0$  tanımlanmış ve sürekli bir fonksiyondur. Yukarıdaki eşitliğe (2.32)' e Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L\{\phi(t)\} = L\{f(t)\} L\{g(t)\}$$

ifadesi bulunur. Bir başka deyişle; iki fonksiyonun konvolüsyonuna Laplace dönüşümü uygulanırsa, bu iki fonksiyonun ayrı ayrı Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşittir.

Çekirdeği  $t - \tau$  (ya da  $x - \tau$ ) nun fonksiyonu olan aşağıdaki ikinci tip Volterra denklemi ele alırsak,

$$\phi(t) = f(t) + \int_a^x K(x-\tau) \cdot \phi(\tau) \cdot d\tau \quad (2.33)$$

integral denklemi *konvolüsyon tipi integral denklem* olarak ifade edilir. O halde

$$L\{\phi(t)\} = \Phi(s), \quad L\{f(t)\} = F(s), \quad L\{K(t)\} = \bar{K}(s)$$

olsun. (2.33) integral denkleminin her iki yanını Laplace dönüşümü alınıp konvolüsyon teoremi uygulanırsa

$$\Phi(s) = F(s) + \bar{K}(s)\Phi(s) \Rightarrow \Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - \bar{K}(s)}, \quad (\bar{K}(s) \neq 1)$$

bulunur.  $\Phi(s)$ 'nin ters dönüşümü olan  $\phi(x)$  fonksiyonu (2.33)'deki integral denkleminin çözümüdür.

Şimdi ikinci tip Volterra integral denklemlerini Laplace yöntemiyle çözmeyi inceleyelim.  $f(t)$  ve  $g(t)$  bilinen fonksiyonlar olmak üzere Volterra integral denklemleri

$$\phi(t) = f(t) + \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad (2.34)$$

şeklindedir. (2.34) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulayıp  $\Phi(s)$  değeri yalnız bırakılır. Ardından  $\Phi(s)$  fonksiyonuna ters Laplace dönüşümü uygulanırsa (2.34) denkleminin çözümü elde edilir. (Ekici, 2010)

**Örnek 2.16:**  $y(t) + 3 \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = t$  olarak verilen integral denklemini Laplace ile çözelim.

Verilen denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü yapılırsa

$$L\{y(t)\} + 3L\{y(t)\}L\{\sin t\} = L\{t\}$$

olur. Buradan  $L\{y(t)\}$  ifadesini yalnız bırakıp kısmi kesirlere ayıralım.

$$L\{y(t)\} \cdot \left(1 + 3 \frac{1}{s^2 + 1}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{s^2 + 1}{s^2 \cdot (s^2 + 4)}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{1}{4s^2} + \frac{3}{4(s^2 + 4)}$$

elde ederiz.  $y(t)$  fonksiyonunu bulabilmek için ters Laplace dönüşümü uygulayalım. Böylece

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3}{4(s^2 + 4)}\right\}$$

$$y(t) = \frac{t}{4} + \frac{3}{8} \sin 2t$$

bulunur.

**Örnek 2.17:**  $y(t) = 1 + \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau) d\tau$  olarak verilen integral denklemini Laplace ile çözelim.

Verilen denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü yapılırsa

$$L\{y(t)\} = L\{1\} + L\{y(t)\}L\{\cos t\}$$

olur. Buradan  $L\{y(t)\}$  ifadesi

$$L\{y(t)\} = \frac{1}{s} + L\{y(t)\} \cdot \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$L\{y(t)\} \left(1 - \frac{s}{s^2 + 1}\right) = \frac{1}{s}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{s^2 + 1}{s \cdot (s^2 - s + 1)}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{1}{s} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

olacak şekilde elde edilir. Böylece

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{\sqrt{3}} L^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right\}$$

ve

$$y(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

olarak bulunur.

**Örnek 2.18:**  $y(t) + \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = \sin t$  olarak verilen integral denklemini konvolüsyon ile çözelim.

Verilen denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü yapılırsa

$$L\{y(t)\} + L\{y(t)\}L\{e^t\} = L\{\sin t\}$$

olur.  $L\{y(t)\}$  ifadesi yalnız bırakıp kısmi kesirlere ayrılırsa

$$L\{y(t)\} \cdot \left(1 + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{s-1}{s \cdot (s^2+1)}$$

bulunur. Konvolüsyon teoremini kullanmak için

$$L\{y(t)\} = \left(\frac{1}{s}\right) \cdot \left(\frac{s-1}{s^2+1}\right)$$

şeklinde yazılır ve her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü yardımıyla

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \cdot L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

olur.  $F(s) = \frac{1}{s}$  ve  $G(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$  şeklinde tanımlayalım. Ters Laplace dönüşümlerini ılabilir.

**Tablo 2-2'**den bulabiliriz.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = f(t) = 1, \quad L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right\} = g(t) = \cos t - \sin t$$

olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s \cdot (s^2+1)}\right\} = L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t 1 \cdot (\cos \tau - \sin \tau) d\tau = (\sin \tau + \cos \tau)|_0^t = \sin t + \cos t - 1$$

elde edilir. O halde  $y(t)$ 'yi aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$y(t) = \sin t + \cos t - 1$$

## 2.8 Çarpımsal Türev ve Çarpımsal İntegral

Bu bölümde çarpımsal analizde önemli yere sahip olan üstel aritmetik kavramları, çarpımsal türev ve çarpımsal integral tanımları verilmiş, bazı önemli teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca örnekleri, uygulamaları da yer almaktadır.

### 2.8.1 Çarpımsal Analiz Kavramları

**Tanım 2.7 :** Sayıların üstel biçimde gösterimleri

$$\mathbb{R}_{exp}: e^m, m \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Z}_{exp}: e^m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N}_{exp}: e^m, m \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\mathbb{R}_{exp}$  üstel reel sayıları,  $\mathbb{Z}_{exp}$  üstel tam sayıları,  $\mathbb{N}_{exp}$  üstel doğal sayıların kümesi ile ifade edilir.  $\mathbb{R}_{exp}$  iki alt kümeye ayrılabilir;  $\mathbb{R}_{exp}^+$  pozitif üstel reel sayıları,  $\mathbb{R}_{exp}^-$  negatif üstel reel sayıları temsil eder. (Kosunalp,2024)

**Tanım 2.8 :** Çarpımsal analizde  $\mathbb{R}_{exp}$  kümesindeki aritmetik işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;

$$\text{Üstel toplama : } m \oplus k = e^{(\ln m + \ln k)} = e^{\ln(m \cdot k)} = m \cdot k$$

$$\text{Üstel çıkarma : } m \ominus k = e^{(\ln m - \ln k)} = e^{\ln\left(\frac{m}{k}\right)} = m/k$$

$$\text{Üstel çarpma : } m \odot k = e^{(\ln m \cdot \ln k)} = m^{\ln(k)} = k^{\ln m}$$

$$\text{Üstel bölme : } m \div k = e^{(\ln m \div \ln k)} = m^{1/\ln k}. \text{ (Kosunalp, 2024)}$$

### 2.8.2 Çarpımsal Türevin Tanımı

Çarpımsal türevin tanımını yapmadan önce klasik türevin tanımını gözden geçirelim. Böylece klasik türev ile çarpımsal türev arasındaki farklılık veya benzerlikleri kolayca anlayabiliriz.  $t$  değişkeni için tanımlanan  $f$  fonksiyonunun limite bağlı klasik türevi

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (2.35)$$

olarak yazılabilir. (2.35) denkleminde türev formülündeki çıkarma yerine  $\frac{f(t+h)}{f(t)}$  yazılıp paydadaki  $h$  değerinin çarpma işlemine göre tersi  $1/h$  ifadesi de kuvvet olarak yerine yazılırsa türev formülü

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(t+h)}{f(t)} \right)^{\frac{1}{h}} \quad (2.36)$$

olarak elde edilir. (Özyapıcı, 2009)

**Tanım 2.9 :** (2.36) denklemini  $f$  fonksiyonunun  $t$  değişkenine göre çarpımsal türevini tanımlar ve  $f^*(t)$  biçiminde gösterilir.  $f$ 'nin pozitif olduğu varsayılarak, klasik türevin özellikleri kullanılarak çarpımsal türev

$$f^*(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(t+h)}{f(t)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\ln f(t+h) - \ln f(t)}{h}}$$

şeklinde ifade edilir. Böylelikle çarpımsal türev klasik türeve bağlı olarak

$$\begin{aligned} f^*(t) &= e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(t+h) - \ln f(t)}{h}} \\ &= e^{(\ln \circ f)'(t)} = \left( e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki  $\ln \circ f$  fonksiyonu,  $f$  fonksiyonu ile logaritmik fonksiyonun bileşkesi olarak tanımlanmıştır.  $[(\ln \circ f)(t) = \ln(f(t))]$  (Özyapıcı, 2009)

Bu ifade, çarpımsal türevin logaritmik türev üzerinden tanımlandığını ve oransal değişimin üstel yapı ile ilişkilendirildiğini ortaya koyar. Çarpımsal türev, özellikle oransal büyümenin veya çarpan etkilerinin önemli olduğu sistemlerin analizinde tercih edilir.

**Örnek 2.19:**  $f(t) = \cos t$  fonksiyonunun çarpımsal türevini bulalım. Tanım (2.9) kullanılırsa

$$f^*(t) = e^{\frac{(\cos t)'}{\cos t}} = e^{-\frac{\sin t}{\cos t}} = e^{-\tan t}$$

bulunur.

**Teorem 2.12:** Pozitif bir fonksiyon olan  $f$  fonksiyonu ancak ve ancak  $t$  noktasında klasik anlamda türevlenebilirse bu noktada çarpımsal türevi de mevcuttur. (Özyapıcı, 2009)

**İspat:**  $t$  noktasında çarpımsal anlamda türevlenebilen bir  $f$  fonksiyonu ele alalım. Böylelikle

$$f^*(t) = e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} = e^{(\ln f)'(t)}$$

yazılabilir. Böylece,  $\ln f$  bileşke fonksiyonu  $t$  noktasında klasik anlamda türevlenebilirdir. Yani,  $f$  fonksiyonu da  $t$  noktasında klasik anlamda türevlenebilirdir. Diğer taraftan eğer  $f(t)$  fonksiyonu  $t$  noktasında türevlenebilir ise,  $\ln f'$  'de  $t$  noktasında klasik anlamda türevlenebilirdir. Bu durumda,  $e^{(\ln f)'(t)}$  vardır ve yukarıdaki eşitlikten  $f$  çarpımsal türevlenebilen bir fonksiyondur.

**Önerme 2.1:**  $f$  fonksiyonu,  $t$  noktasında çarpımsal anlamda türevlenebilirse, yine bu noktada süreklidir. (Özyapıcı, 2009)

**İspat:**  $f$  fonksiyonunun  $t$  noktasında çarpımsal anlamda türevlenebildiğini varsayalım. Böylece, teorem (2.12) den  $f$  fonksiyonunun pozitif ve  $t$  noktasında klasik anlamda türevlenebilir bir fonksiyon olduğu görülür. Bir fonksiyon klasik anlamda  $t$  noktasında türevlenebiliyorsa o noktada aynı zamanda süreklidir. Bu nedenle  $f$  fonksiyonu  $t$  noktasında sürekli olduğunun ispatıdır.

**Tanım 2.10:**  $f(t)$  fonksiyonunun çarpımsal türevinin varlığı durumunda, bu türev  $f$  fonksiyonunun ikinci mertebeden çarpımsal türevi denir ve  $f^{**}$  şeklinde ifade edilir. Genelleyecek

olursak  $f^{*(n)}$  gösterimi  $f$  fonksiyonunun  $n$ . mertebeden çarpımsal türevi olarak tanımlanabilir. O halde

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= e^{(\ln \circ f')'(t)} = e^{(\ln \circ f)''(t)} \\ f^{*(n)}(t) &= e^{(\ln \circ f)^{(n)}(t)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

olarak yazılabilir. (Özyapıcı, 2009)

**Teorem 2.13:**  $f$  pozitif tanımlı bir fonksiyon olan  $f$  için  $f'$  in herhangi bir  $t$  noktasında çarpımsal anlamda türevlenebilir olması ile  $f'$  nin bu  $t$  noktasında klasik anlamda da türevlenebilir olması arasında doğrudan bir eşdeğerlik vardır. Aralarındaki ilişki

$$f'(t) = f(t) \cdot \ln f^*(t)$$

şeklinde yazılabilir. (Gürefe, 2009)

**İspat:** Çarpımsal diferansiyellenebilir bir  $f$  fonksiyonu ve  $f'(t) \neq 0$  ise (2.36) denkleminde

$$f^*(t) = e^{(\ln \circ f')'(t)}$$

dir. Her iki tarafın  $\ln$  fonksiyonu alınır

$$\ln f^*(t) = (\ln \circ f')'(t)$$

elde edilir. Buradan

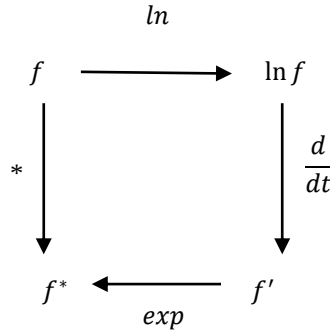
$$\frac{d}{dt}(\ln \circ f')(t) = \ln f^*(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

olduğu için

$$f'(t) = f(t) \ln f^*(t)$$

bağıntısı elde edilir.

Ayrıca, klasik türev ile çarpımsal türev arasındaki bağıntı Şekil 2-1 yardımıyla da gösterilebilir. (Stanley, 1999)



Şekil 2-1: Klasik türev ile çarpımsal türev arasındaki bağıntıyı ortaya koyan şema

**Teorem 2.14:** Çarpımsal diferansiyellenebilir  $g$  ve  $f$  fonksiyonları ile sabit  $k$  için,  $k \cdot f$ ,  $f \cdot g$ ,  $f + g$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $f^g$  fonksiyonları da çarpımsal diferansiyellenebilir olup, çarpımsal türevleri

1.  $(k \cdot f)^*(t) = f^*(t)$
2.  $(f \cdot g)^*(t) = f^*(t)g^*(t)$
3.  $(f + g)^*(t) = f^*(t)\frac{f(t)}{f(t)+g(t)}g^*(t)\frac{g(t)}{f(t)+g(t)}$
4.  $\left(\frac{f}{g}\right)^*(t) = \frac{f^*(t)}{g^*(t)}$
5.  $(f^g)^*(t) = f^*(t)g^{(t)}f(t)g'(t)$

şeklindeki formüller kullanılarak hesaplanır. (Bashirov, Mısırlı, & Özyapıcı, 2008)

**Önerme 2.2:**  $f^*(t)$ 'nin  $(a, b)$  aralığında tüm  $t$  değerleri için 1 olması, ancak ve ancak  $f$  fonksiyonunun  $(a, b)$  aralığında sabit ve pozitif bir fonksiyon olmasına bağlıdır. (Gürefe, 2009)

**İspat:**  $(a, b)$  aralığında sabit ve pozitif bir  $f(t)$  fonksiyonunu ele alalım.  $f(t) = k$ ,  $k > 0$  olsun. Buradan,  $(a, b)$  için

$$f^*(t) = e^{(\ln k)'} = e^0 = 1$$

eşitliği bulunur. Öte yandan her  $t \in (a, b)$  için  $f^*(t) = 1$  ise

$$f^*(t) = e^{(\ln \circ f)'(t)} = 1$$

eşitliği yazılabilir. Buradan  $t \in (a, b)$  için  $f(t) = k$ ,  $k > 0$  bulunur.

**Teorem 2.15:**  $h$  fonksiyonu klasik olarak,  $g$  fonksiyonu da çarpımsal olarak türevlenebilir iki fonksiyon olursa,

$$f(t) = (goh)(t)$$

ise bu takdirde  $f$  nin çarpımsal türevi

$$f^*(t) = [g^*(h(t))]^{h'(t)}$$

şeklinde yazılır. (Bashirov, Mısırlı, & Özyapıcı, 2008)

**İspat:**  $g$  fonksiyonu çarpımsal anlamda türevlenebilir,  $h$  fonksiyonu da klasik anlamda türevlenebilir ve  $f(t) = (goh)(t)$  olduğundan

$$f^*(t) = e^{(\ln \circ f)'(t)} = e^{\frac{f'(t)}{f(t)}}$$

$$= e^{\frac{g'(h(t))h'(t)}{(goh)(t)}} = \left[ e^{\frac{g'(h(t))}{g(h(t))}} \right]^{h'(t)}$$

$$= [g^*(h(t))]^{h'(t)}$$

elde edilir.

**Önerme 2.3:**  $g$  çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer  $f(t) = g(t)^n$  ise bu durumda

$$f^*(t) = [g^*(t)]^n$$

olur. (Özyapıcı, 2009)

**Önerme 2.4:**  $k$  bir sabit ise  $f(t) = k \cdot g(t)$  ise bu fonksiyonların çarpımsal türevleri aynıdır.

**İspat:** Çarpımsal türevin tanımından

$$f^*(t) = e^{\frac{f'}{f}} = e^{\frac{kg'}{kg}} = e^{\frac{g'}{g}} = g^*(t)$$

şeklinde yazılır. (Yalçın, 2016)

**Önerme 2.5:**  $f(t)$  pozitif bir fonksiyon olduğunda  $f^*(t) = 1$  olur ancak ve ancak  $f'(t) = 0$  olmalıdır. (Özyapıcı, 2009)

**İspat:** Eğer  $f'(t) = 0$  ise denklemden

$$f^*(t) = e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} = e^0 = 1$$

yazılabilir.

Tersine olarak, eğer  $f^*(t) = 1$  ise  $f'(t) = 0$ 'ı veren

$$e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} = e^0$$

eşitliği bulunur.

**Teorem 2.16 (Çarpımsal Türev için Rolle Teoremi):**  $(a, b)$  aralığında çarpımsal anlamda türevlenebilen,  $[a, b]$  aralığında sürekli pozitif bir  $f$  fonksiyonu,  $f(a) = f(b)$  koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise,  $(a, b)$  aralığında

$$f^*(c) = 1$$

olacak şekilde bir  $c$  noktası mevcuttur. (Özyapıcı, 2009)

**İspat:** Pozitif ve  $[a, b]$  aralığında sürekli bir  $f$  fonksiyonu verilsin. Rolle teoreminden,  $(a, b)$  aralığında klasik anlamda türevlenebilen  $f$  fonksiyonu  $f(a) = f(b)$  koşulunu sağladığından bir  $c \in (a, b)$  için  $f'(c) = 0$  olacaktır. O halde, önerme (2.5)'den

$$f^*(c) = 1$$

olarak bulunur.

**Teorem 2.17 (Çarpımsal Türev için Ortalama Değer Teoremi):**  $(a, b)$  aralığında çarpımsal anlamda türevlenebilen,  $[a, b]$  kapalı aralığında çarpımsal anlamda sürekli ve pozitif bir  $f$  fonksiyonu olsun.  $(a, b)$  aralığında öyle bir  $c$  sayısı vardır ki

$$f^*(c) = \left[ \frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{b-a}}$$

eşitliği sağlanır. (Özyapıcı, 2009)

**İspat:** Eğer  $F$  fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$F(t) = f(a) \left[ \frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{t-a}{b-a}}$$

$F(a) = f(a)$  ve  $F(b) = f(b)$  olur. Eğer  $G(t) = \frac{F(t)}{f(t)}$  şeklinde tanımlarsak  $G(a) = G(b) = 1$  olur.

Çarpımsal rolle teoremine göre,  $(a, b)$  aralığında  $G^*(c) = 1$  eşitliğini sağlayan en az bir  $c$  sabiti vardır. Bunun sonucunda, türev alma özellikleri teoreminden

$$G^*(c) = \frac{F^*(c)}{f^*(c)} = 1$$

elde edilir. Buradan  $f^*(c) = F^*(c)$  bulunur. Böylece

$$f^*(c) = F^*(c) = e^{\left( \ln \left( \left[ \frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{t-a}{b-a}} \right) \right)} = 1 \cdot e^{\frac{1}{b-a} \left( \ln \frac{f(b)}{f(a)} \right)} = e^{\left( \ln \frac{f(b)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{b-a}}} = \left[ \frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{b-a}}$$

gösterilmiş olur.

**Önerme 2.6:**  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise; her  $t \in (a, b)$  aralığında

- a)  $f^*(t) > 1$  ise  $f(t)$  artan,
- b)  $f^*(t) \geq 1$  ise  $f(t)$  monoton artan,
- c)  $f^*(t) < 1$  ise  $f(t)$  azalan,
- d)  $f^*(t) \leq 1$  ise  $f(t)$  monoton azalan bir fonksiyondur. (Özyapıcı, 2009)

Aşağıda sık kullanılan fonksiyonların klasik türevleri ve çarpımsal türevleri **Tablo 2-3** 'te yer almaktadır. (Stanley, 1999)

**Tablo 2-3:** Sık kullanılan fonksiyonların klasik türevleri ve çarpımsal türevleri

| $f(t)$            | $f'(t)$                               | $f^*(t)$                         |
|-------------------|---------------------------------------|----------------------------------|
| $a$               | $0$                                   | $1$                              |
| $ae^{kt}$         | $ake^{kt}$                            | $e^k$                            |
| $ab^t$            | $a[\ln b]b^t$                         | $b$                              |
| $at$              | $a$                                   | $e^{\frac{1}{t}}$                |
| $a \ln t$         | $a \frac{1}{t}$                       | $e^{\frac{1}{t \ln t}}$          |
| $a f(t)$          | $a f'(t)$                             | $f^*(t)$                         |
| $a t + b$         | $a$                                   | $e^{\frac{a}{at+b}}$             |
| $f(t) \cdot g(t)$ | $f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t)$ | $f^*(t) \cdot g^*(t)$            |
| $\frac{1}{f(t)}$  | $-\frac{f'(t)}{(f(t))^2}$             | $\frac{1}{f^*(t)}$               |
| $a \ln(f(t))$     | $a \frac{f'(t)}{f(t)}$                | $[f^*(t)]^{\frac{1}{\ln(f(t))}}$ |
| $a t^n$           | $a n t^{n-1}$                         | $e^{\frac{n}{t}}$                |
| $a \sin t$        | $a \cos t$                            | $e^{\cot t}$                     |
| $a \cos t$        | $-a \sin t$                           | $e^{-\tan t}$                    |
| $a e^{\sin t}$    | $a \cos t e^{\sin t}$                 | $e^{\cos t}$                     |

### 2.8.3 Çarpımsal İntegralin Tanımı

Bu bölümde çarpımsal ters türev ve klasik integral kavramları arasındaki bağlantı incelendikten sonra, çarpımsal integralin önemli özellikleri ve teoremleri ele alınacaktır.

**Tanım 2.11 :**  $[a, b]$  aralığında sürekli ve pozitif,  $(a, b)$  aralığında çarpımsal anlamda integrallenebilir bir  $f$  fonksiyonu olsun. Çarpımsal integral

$$* \int_a^b f(t) dt = e^{\int_a^b \ln f(t) dt}$$

şeklinde tanımlanır. (Yalçın, 2016)

**Örnek 2.20:**  $f(t) = e^{kt}$  fonksiyonunun çarpımsal ters türevini bulalım.

Çarpımsal integral tanımını kullanarak yazılırsa,

$$* \int [e^{kt}] dt = e^{\int \ln e^{kt} dt} = e^{\int kt dt} = e^{\frac{kt^2}{2} + c} = e^c e^{\frac{kt^2}{2}} = C e^{\frac{kt^2}{2}}$$

elde edilir.

**Teorem 2.18:**  $[a, b]$  aralığında sürekli ve pozitif,  $(a, b)$  aralığında çarpımsal anlamda integrallenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları olsun. Böylece  $a \leq c \leq b$  ve  $k \in \mathbb{R}$  ise  $f^c, f \cdot g, \frac{f}{g}$  fonksiyonları çarpımsal anlamda türevlenebilirdir. Çarpımsal integral tanımları aşağıdaki gibidir:

1.  $* \int_a^b (f(t)^c) dt = \left( * \int_a^b (f(t)) dt \right)^c$
2.  $* \int_a^b (f(t)g(t)) dt = * \int_a^b (f(t)) dt \cdot * \int_a^b (g(t)) dt$
3.  $* \int_a^b \left( \frac{f(t)}{g(t)} \right) dt = \frac{* \int_a^b (f(t)) dt}{* \int_a^b (g(t)) dt}$
4.  $* \int_a^b (f(t)) dt = * \int_a^c (f(t)) dt \cdot * \int_c^b (f(t)) dt$ . (Bashirov, Mısırlı, & Özyapıcı, 2008)

**Önerme 2.7:**  $[a, b]$  kapalı aralığında çarpımsal anlamda tersi alınabilen bir  $f(t)$  fonksiyonu için

- a.  $* \int_a^b f(t) dt = \left( * \int_b^a f(t) dt \right)^{-1}$
- b.  $* \int_a^a f(t) dt = 1$

koşulları sağlanır. (Özyapıcı, 2009)

**Teorem 2.19 (Çarpımsal İntegral için Ortalama Değer Teoremi):**  $f, [a, b]$  aralığında sürekli ve pozitif bir fonksiyon olsun.

$$* \int_a^b f(t) dt = f(c)^{b-a}$$

denklemini sağlayacak şekilde bir  $c \in [a, b]$  vardır. (Özyapıcı, 2009)

Sık kullanılan fonksiyonların çarpımsal ters türevleri **Tablo 2-4** 'de aşağıdaki gibi verilmiştir. (Stanley, 1999)

**Tablo 2-4:** Sık kullanılan fonksiyonların çarpımsal ters türev kuralları

|                                                     |
|-----------------------------------------------------|
| $* \int 1 dt = c$                                   |
| $* \int k dt = ck^t, k > 0$                         |
| $* \int [e^{kt}] dt = ce^{\frac{kt^2}{2}}, k > 0$   |
| $* \int [e^{kt^n}] dt = c e^{\frac{kt^{n+1}}{n+1}}$ |
| $* \int \left[ e^{\frac{k}{t}} \right] dt = c t^k$  |
| $* \int [e^{\cos t}] dt = ce^{\sin t}$              |
| $* \int [e^{-\sin t}] dt = ce^{\cos t}$             |
| $* \int [e^{-\tan t}] dt = c \cos t$                |

**Teorem 2.20 (Çarpımsal Analizin Birinci Temel Teoremi):**  $[a, b]$  aralığında pozitif tanımlı bir  $f$  fonksiyonu aynı aralıkta sürekli olsun.  $[a, b]$  aralığındaki  $\forall t \in [a, b]$  için

$$F(t) = * \int_a^t f(t) dt$$

olarak tanımlanırsa  $[a, b]$  aralığında

$$F^*(t) = f(t)$$

olur. (Grossman & Katz, 1972)

**İspat:** Çarpımsal türev tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}
F^*(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{F(t+h)}{F(t)} \right]^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{\int_a^{t+h} \ln f(u) du}}{e^{\int_a^t \ln f(u) du}} \right]^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ e^{\int_a^{t+h} \ln f(u) du - \int_a^t \ln f(u) du} \right]^{\frac{1}{h}} \\
&= e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+h} \ln f(u) du - \int_a^t \ln f(u) du}{h}} = e^{\frac{d}{dt} \left( \int_a^t \ln f(u) du \right)} = e^{\ln f(t)} = f(t)
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde  $F$ ,  $f$ 'nin çarpımsal ters türevi olur.

**Teorem 2.21 (Çarpımsal Analizin İkinci Temel Teoremi):**  $[a, b]$  kapalı aralığında sürekli bir  $f^*$  fonksiyonu olsun.  $f(a) \neq 0$  olmak üzere

$$* \int_a^b f^*(t) dt = \frac{f(b)}{f(a)}$$

şeklinde yazılır. (Grossman & Katz, 1972)

**İspat:** Çarpımsal integral ve çarpımsal türev formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned}
* \int_a^b f^*(t) dt &= * \int_a^b \left[ e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} \right] dt = e^{\int_a^b \ln \left( e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} \right) dt} = e^{\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt} \\
&= e^{\left[ \ln f(t) \right]_a^b} = e^{\ln f(b) - \ln f(a)} = e^{\ln \left[ \frac{f(b)}{f(a)} \right]} = \frac{f(b)}{f(a)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1 Çarpımsal Diferansiyel Denklem

Mühendislik ve bilim problemlerinin matematiksel olarak ifade edilmesinde genellikle klasik türevlere dayanan diferansiyel denklemlerden yararlanılmaktadır. Ancak bazı özel durumlarda, bu klasik diferansiyel denklemler, problemleri ifade etmekte yetersiz kalabilmektedir. (Ekonomi, finans, biyoloji, nüfusu artışı) Bu tür problemlere çözüm getirebilmek amacıyla alternatif bir yaklaşım olarak çarpımsal diferansiyel denklemler geliştirilmiştir. Bu bölümde, çarpımsal diferansiyel denklemlerin temel tanımı yapılmış ve bunların çeşitli uygulama alanlarına dair örnekler sunulmuştur. Öte yandan, çarpımsal analiz yöntemleri kullanılarak bazı klasik doğrusal diferansiyel denklemler için yeni ve özgün çözüm formülleri ortaya konmuştur.

**Tanım 3.1:** Bağımlı değişkenin, bağımsız değişkenlere göre çarpımsal türevi alınarak tanımlanan diferansiyel denklemler, literatürde çarpımsal diferansiyel denklemler olarak adlandırılmaktadır. (Özyapıcı, 2009)

**Tanım 3.2:**  $y$ 'nin çarpımsal türevlerini içeren  $y^*(t) = f(t, y(t))$  şeklindeki diferansiyel denklem, *birinci mertebeden çarpımsal diferansiyel denklem* denir ve

$$y'(t) = y(t) \cdot \ln f(t, y(t)) \quad (3.1)$$

denklemine eşittir. (Bashirov A. , Mısırlı, Özyapıcı, & Tandoğdu, 2011)

**Örnek 3.1:** Çarpımsal diferansiyel denklemlere

$$y^{**}(t) = 2y(t)$$

$$y^{***}(t) = 1$$

$$y^{**}(t) = (y^*(t))^4$$

şeklindeki denklemler örnek verilebilir.

**Tanım 3.3:** Bir çarpımsal diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden türev içeren fonksiyonun mertebesi *çarpımsal diferansiyel denklemin mertebesi* olarak tanımlanır. (Gürefe, 2009)

**Tanım 3.4:** Pozitif bir  $F$  fonksiyonu ile mertebesi  $n$  olan bir çarpımsal diferansiyel denklem

$$F(t, y, y^*, y^{**}, \dots, y^{*(n)}) = 1, \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. (Gürefe, 2009)

**Tanım 3.5:**  $f(t)$  pozitif tanımlı fonksiyonu için

$$(y^{*(n)})^{a_n(t)} (y^{*(n-1)})^{a_{n-1}(t)} \dots (y^{**})^{a_2(t)} (y^*)^{a_1(t)} y^{a_0(t)} = f(t) \quad (3.3)$$

şeklindeki diferansiyel denklemler *çarpımsal lineer diferansiyel denklem* olarak tanımlanır. Eğer tüm  $a_n(t)$  üsleri sabit ise (3.3) denklemine *sabit üslü çarpımsal lineer diferansiyel denklem* denir. Aksi takdirde, (3.3) denklemine *değişken üslü çarpımsal lineer diferansiyel denklem* denir. Öte yandan  $f(t) = 1$  ise denkleme *çarpımsal homojen lineer diferansiyel denklem*,  $f(t) \neq 1$  durumunda *çarpımsal homojen olmayan lineer diferansiyel denklem* denir. (Yalçın & Çelik, 2019)

### 3.2 Çarpımsal Laplace Dönüşümü

**Tanım 3.6:**  $f(t)$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında pozitif tanımlı,  $\ln f(t)$  ise  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı olmak üzere  $f(t)$  fonksiyonunun çarpımsal Laplace dönüşümü:

$$L_m\{f(t)\} = F_m(s) = * \int_0^\infty (f(t)e^{-st})^{dt} = e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) dt} = e^{L\{\ln f(t)\}} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada çarpımsal integral  $* \int_0^\infty f(t) dt = e^{\int_0^\infty \ln f(t) dt}$  olduğu biliniyor. (Yalçın, 2016)

**Örnek 3.2:** Bazı  $f$  fonksiyonları için çarpımsal Laplace dönüşümleri aşağıdaki gibidir.

$$L_m\{1\} = F_m(s) = e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln 1 dt} = 1$$

$$L_m\{e^t\} = e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln e^t dt} = e^{\int_0^\infty t e^{-st} dt} = e^{L\{t\}} = e^{\frac{1}{s^2}}$$

$$L_m\{e^{t^n}\} = e^{L\{\ln e^{t^n}\}} = e^{L\{t^n\}} = e^{\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

$$L_m\{e^{e^{at}}\} = e^{L\{e^{at}\}} = e^{\frac{1}{s-a}}$$

$$L_m\{e^{\sin at}\} = e^{L\{\sin at\}} = e^{\frac{a}{s^2+a^2}}$$

$$L_m\{e^{\cos at}\} = e^{L\{\cos at\}} = e^{\frac{s}{s^2+a^2}}$$

$$L_m\{e^{\sinh at}\} = e^{L\{\sinh at\}} = e^{\frac{a}{s^2-a^2}}$$

$$L_m\{e^{\cosh at}\} = e^{L\{\cosh at\}} = e^{\frac{s}{s^2-a^2}}$$

### Çarpımsal Laplace dönüşümünün temel özellikleri

**Teorem 3.1 (Lineerlik Özelliği):** Çarpımsal Laplace dönüşümü çarpımsal lineerdir. Yani  $c_1, c_2$  keyfi üstler ve  $f_1, f_2$  de çarpımsal Laplace dönüşümü olan iki fonksiyon ise

$$L_m\{f_1^{c_1} \cdot f_2^{c_2}\} = L_m\{f_1\}^{c_1} \cdot L_m\{f_2\}^{c_2} \quad (3.5)$$

şeklindedir. (Yalçın, 2016)

**İspat:** Çarpımsal Laplace dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} L_m\{f_1^{c_1}, f_2^{c_2}\} &= e^{\int_0^\infty \ln(f_1^{c_1} \cdot f_2^{c_2}) e^{-st} dt} \\ &= e^{\int_0^\infty (c_1 \ln(f_1) + c_2 \ln(f_2)) e^{-st} dt} \\ &= \left( e^{\int_0^\infty \ln(f_1) e^{-st} dt} \right)^{c_1} \left( e^{\int_0^\infty \ln(f_2) e^{-st} dt} \right)^{c_2} \\ &= L_m\{f_1\}^{c_1} \cdot L_m\{f_2\}^{c_2} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 3.2 (Birinci Öteleme Özelliği):** Eğer  $f(t)$  fonksiyonunun çarpımsal Laplace dönüşümü  $L_m\{f(t)\} = F_m(s)$  ise

$$L_m\{f(t)e^{\alpha t}\} = F_m(s - \alpha) \quad (3.6)$$

olur. (Yalçın, 2016)

**İspat :** Çarpımsal Laplace dönüşümü tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned} L_m\{f(t)e^{\alpha t}\} &= e^{\int_0^\infty \ln f(t)e^{\alpha t} e^{-st} dt} \\ &= e^{\int_0^\infty \ln f(t)e^{-(s-\alpha)t} dt} \\ &= F_m(s - \alpha) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.3 (İkinci Öteleme Özelliği):**

$$L_m\{f(t)\} = F_m(s) \text{ ve } G(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < \alpha \\ f(t - \alpha) & , t > \alpha \end{cases} \text{ ise}$$

$$L_m\{G(t)\} = F_m(s)e^{-\alpha s} \quad (3.7)$$

olur. (Yalçın, 2016)

**İspat :** Çarpımsal Laplace dönüşümü tanımından

$$L_m\{G(t)\} = e^{\int_0^\infty \ln(G(t))e^{-st} dt} = e^{\int_0^\alpha \ln 1 e^{-st} dt + \int_\alpha^\infty \ln f(t-\alpha)e^{-st} dt}$$

yazılabilir. Birinci integral sıfır olur ve ikinci integralde  $t - \alpha = u$  dönüşümü yapılırsa,

$$L_m\{G(t)\} = e^{\int_0^\infty \ln f(u) e^{-s(u+\alpha)} dt} = \left( e^{\int_0^\infty \ln f(u) e^{-s(u+\alpha)} du} \right)^{e^{-\alpha s}} = F_m(s)e^{-\alpha s}$$

elde edilir.

**Teorem 3.4 (Ölçek Değişimi Özelliği):**  $L_m\{f(t)\} = F_m(s)$  ise

$$L_m\{f(\alpha t)\} = F_m\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.8)$$

şeklindedir. (Yalçın, 2016)

**İspat:** Çarpımsal Laplace dönüşümü tanımından

$$L_m\{f(\alpha t)\} = e^{\int_0^\infty \ln f(\alpha t) e^{-st} dt}$$

yazılabilir. İntegralde  $\alpha t = u$  dönüşümü yapılırsa

$$L_m\{f(\alpha t)\} = e^{\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \ln f(u) e^{-\frac{su}{\alpha}} du} = \left( e^{\int_0^\infty \ln f(u) e^{-\frac{su}{\alpha}} du} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = F_m\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

olarak bulunur.

**Teorem 3.5:**  $L_m\{f(t)\} = F_m(s)$  ise

$$L_m\{f(t)t^n\} = \left(F_m^{*(n)}(s)\right)^{(-1)^n} \quad (3.9)$$

şeklindedir.

**İspat:** Çarpımsal Laplace dönüşümünün tanımı,

$$L_m\{f(t)\} = F_m(s) = * \int_0^\infty (f(t)e^{-st}) dt = e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) dt}$$

şeklindedir. Bu ifadenin  $t'$  ye göre çarpımsal türevi alınır;

$$F_m^*(s) = \frac{d^*}{ds^*} \left( e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) dt} \right) = e^{\frac{d}{ds} \left( e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) dt} \right)} = e^{\frac{d^*}{dt^*} (e^{u(t)})}$$

şeklinde olur. Çarpımsal türev tanımından

$$e^{\frac{(e^{u(t)})'}{e^{u(t)}}} = e^{\frac{d}{dt}(u(t))} = e^{u'(t)}$$

yazılabilir. Bu takdirde,

$$F_m^*(s) = e^{-\int_0^\infty e^{-st} t \ln f(t) dt} = \left( e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) t dt} \right)^{-1} = L_m\{f(t)t\}^{-1}$$

olur. Böylece

$$L_m\{f(t)t\} = F_m^*(s)^{-1}$$

bulunur. Şimdi  $t$  'ye göre ikinci mertebeden çarpımsal türev alınırsa;

$$\begin{aligned} F_m^{**}(s) &= \frac{d^{**}}{ds^{**}} \left( e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) t dt} \right) = e^{\frac{d^*}{ds^*} \left( e^{-\int_0^\infty e^{-st} t \ln f(t) dt} \right)} \\ &= e^{\frac{d^{**}}{dt^{**}}(e^{u(t)})} = e^{\frac{d^2}{dt^2}(u(t))} = e^{\int_0^\infty t^2 e^{-st} \ln f(t) dt} \\ &= e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) t^2 dt} = L_m\{f(t)t^2\} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$L_m\{f(t)t^2\} = F_m^{**}(s)$$

bulunur. Bu şekilde devam ederek  $t^n$  'ye göre  $n$ .mertebeden çarpımsal türev alınırsa;

$$F_m^{*(n)}(s) = e^{(-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n \ln f(t) dt} = \left( e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) t^n dt} \right)^{(-1)^n} = L_m\{f(t)t^n\}^{(-1)^n}$$

şeklinde yazılır. O halde bu ifade

$$L_m\{f(t)t^n\} = F_m^{*(n)}(s)^{(-1)^n} = \begin{cases} 1/F_m^*(s) & , n \text{ tek ise} \\ F_m^*(s) & , n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

**Tanım 3.7:**  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında pozitif tanımlı,  $\ln f(t)$  ise bu aralıkta tanımlı olsun. Eğer,  $t > t_0$  için

$$|f(t)| \leq K e^{at}$$

olacak şekilde  $t_0$ ,  $K$  ve  $a$  pozitif sabitleri varsa  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$ - çift üstel mertebededir denir. (Yalçın, 2016)

**Teorem 3.6 (Çarpımsal Laplace Dönüşümü için Varlık Teoremi):**  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında pozitif tanımlı,  $t > t_0$  için  $\alpha$ - çift üstel mertebeden bir fonksiyon  $\ln f(t)$  ise parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde  $s > \alpha$  için  $L_m\{f(t)\}$  mevcuttur. (Yalçın, 2016)

**İspat:**  $\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) dt$  integralinin  $s > \alpha$  için yakınsak olduğunu göstermek için bu integral

$$\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} \ln f(t) dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} \ln f(t) dt \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir.  $\ln f(t)$  ve dolayısıyla  $e^{-st} \ln f(t) dt$ , herhangi bir  $s$  için  $[0, t_0]$  aralığında parçalı sürekli olduğundan (3.10) ifadesindeki birinci integral yakınsaktır. Öte yandan,  $\alpha$ -çift üstel mertebeden olduğundan  $t > t_0$  için

$$|f(t)| \leq K e^{at}$$

olur. Dolayısıyla tüm  $t > t_0$ 'lar için

$$|e^{-st} \ln f(t)| = e^{-st} |\ln f(t)| \leq (\ln K + e^{at}) e^{-st}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) dt \leq \int_0^{t_0} e^{-st} \ln K dt + \int_{t_0}^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \ln K \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt + \frac{e^{-(s-\alpha)t_0}}{s-\alpha} < \infty$$

$$= \ln K \left( \frac{e^{-st_0}}{s} \right) + \left( \frac{e^{-(s-\alpha)t_0}}{s-\alpha} \right) < \infty$$

olup  $s > \alpha$  için ikinci integralde yakınsaktır. Böylece ispatın başındaki (3.10) denkleminde her iki integral mevcut olduğundan  $s > \alpha$  için  $L_m\{f(t)\}$  mevcuttur.

**Teorem 3.7:** Eğer  $f$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında pozitif tanımlı ve  $\alpha$ -çift üstel mertebeden olup  $\ln f(t)$   $[0, \infty)$  aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L_m\{f(t)\} = 1$$

olur.

### Çarpımsal Türevin Laplace Dönüşümü

Bu çalışmada, belirli türdeki çarpımsal lineer diferansiyel denklemleri çarpımsal Laplace dönüşümü kullanarak çözmeyi amaçlıyoruz. Bunu gerçekleştirebilmek için çarpımsal türevlerin çarpımsal Laplace dönüşümlerini belirlememiz gerekmektedir.

**Teorem 3.8:**  $f$ ,  $[0, A]$  aralığında sürekli ve  $\alpha$ -çift üstel mertebeden olup,  $f^*$  fonksiyonu da,  $[0, A]$  aralığında parçalı sürekli olsun. Bu takdirde  $s > \alpha$  için çarpımsal türevin Laplace dönüşümü;

$$L_m\{f^*(t)\} = \frac{1}{f(0)} F(s)^s \quad (3.11)$$

şeklindedir.

**İspat:** Tanımdaki

$$L_m\{f^*(t)\} = L_m\left\{e^{\frac{f'(t)}{f(t)}}\right\} = e^{\int_0^{\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} e^{-st} dt} = e^{\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{f'(t)}{f(t)} e^{-st} dt}$$

integralinin  $[0, A]$  aralığında  $f^*$  fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları  $t_0, t_1, \dots, t_n$  ile gösterilsin. Bu noktalar üzerinden integral alınırsa;

$$\int_0^A \frac{f'(t)}{f(t)} e^{-st} dt = \int_0^{t_1} \frac{f'(t)}{f(t)} e^{-st} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{f'(t)}{f(t)} e^{-st} dt + \dots + \int_{t_n}^A \frac{f'(t)}{f(t)} e^{-st} dt$$

şeklinde yazılır. Sağ tarafındaki her terime kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{f'(t)}{f(t)} e^{-st} dt &= e^{-st} \ln f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-st} \ln f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \dots + e^{-st} \ln f(t) \Big|_{t_n}^A \\ &+ s \left( \int_0^{t_1} \ln f(t) e^{-st} dt + \int_{t_1}^{t_2} \ln f(t) e^{-st} dt + \dots + \int_{t_n}^A \ln f(t) e^{-st} dt \right) \end{aligned}$$

yazılır.  $f(t)$  sürekli olduğundan yukarıdaki ifadenin intergal aralıkları tek bir aralıkta birleştirilebilir. Böylece,

$$e^{\int_0^A \frac{f'(t)}{f(t)} e^{-st} dt} = e^{e^{-sA} \ln f(A) - \ln f(0) + s \left( \int_0^A \ln f(t) e^{-st} dt \right)}$$

yazılır.  $s > \alpha$  olduğunda  $A \rightarrow \infty$  için  $e^{-sA} \ln f(A) \rightarrow 0$  olup  $e^{e^{-sA} \ln f(A)} \rightarrow 1$  olur. Buradan  $s > \alpha$  için

$$L_m\{f^*(t)\} = e^{-\ln f(0)} \left( e^{\int_0^\infty \ln f(t) e^{-st} dt} \right)^s = \frac{1}{f(0)} F(s)^s$$

şeklinde gelir.

Eğer bu teoremde  $f$  ve  $f^*$  üzerinde koşullar sırasıyla  $f^*$  ve  $f^{**}$  üzerine konulursa  $s > \alpha$  için  $f^{**}$  fonksiyonunun çarpımsal Laplace dönüşümünün

$$L_m\{f^{**}(t)\} = \frac{1}{f(0)^s f^*(0)} F(s)^{s^2}$$

olduğu görülür.

Bu teorem  $f^{*(n)}$  çarpımsal türevi için ardışık olarak genelleştirilse  $f^{*(n)}$  fonksiyonunun çarpımsal Laplace dönüşümü aşağıdaki sonuç ile verilir.

**Sonuç 3.1:**  $0 \leq t \leq A$  aralığında  $f, f^*, f^{**}, \dots, f^{*(n-1)}$  fonksiyonlarının sürekli olduğunu kabul edelim ve  $f^{*(n)}$  de parçalı sürekli olsun. Ayrıca  $t \geq t_0$  için

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, |f^*(t)| \leq Ke^{at}, \dots, |f^{*(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$$

olacak şekilde  $K, \alpha$  ve  $t_0$  sayıları var olsun. Böylece  $s > \alpha$  için  $L_m\{f^{*(n)}(t)\}$  çarpımsal Laplace dönüşümü vardır ve

$$L_m\{f^{*(n)}(t)\} = \frac{1}{f(0)s^{n-1} f^*(0)s^{n-2} f^{**}(0)s^{n-3} \dots f^{*(n-1)}(0)} F(s)s^n \quad (3.12)$$

ile hesaplanır. (Yalçın, 2016)

**Teorem 3.9:**  $f_1$  ve  $f_2$  pozitif tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olsun. Bu takdirde,  $f_1 = f_2$  ise  $L_m\{f_1\} = L_m\{f_2\}$  olur. Aksine  $L_m\{f_1\} = L_m\{f_2\}$  ve  $f_1$  ve  $f_2$  sürekli ise  $f_1 = f_2$  olur.

**Tanım 3.8:** Eğer  $F_m(s), f$  sürekli fonksiyonunun çarpımsal Laplace dönüşümü ise, yani

$$L_m\{f\} = F$$

ise  $L_m^{-1}\{F\}$  ye  $F$  nin *ters çarpımsal Laplace dönüşümü* denir. (Yalçın, 2016)

**Teorem 3.10:** Ters çarpımsal Laplace dönüşümü de çarpımsal lineerdir. Yani,  $c_1, c_2$  keyfi üstler ve, de  $f_1$  ve  $f_2$  de  $L_m\{f_1\} = F_1$  ve  $L_m\{f_2\} = F_2$  olacak şekilde çarpımsal Laplace dönüşümü olan iki sürekli fonksiyon ise

$$L_m^{-1}\{F_1^{c_1} F_2^{c_2}\} = L_m^{-1}\{F_1^{c_1}\} L_m^{-1}\{F_2^{c_2}\}$$

dir.

**İspat:** Çarpımsal Laplace dönüşümünün çarpımsal lineerliğinden

$$L_m\{f_1^{c_1} \cdot f_2^{c_2}\} = L_m\{f_1\}^{c_1} \cdot L_m\{f_2\}^{c_2} = F_1^{c_1} \cdot F_2^{c_2}$$

yazabiliriz. Ters çarpımsal Laplace tanımından

$$L_m^{-1}\{F_1^{c_1} F_2^{c_2}\} = f_1^{c_1} \cdot f_2^{c_2} = L_m^{-1}\{F_1^{c_1}\} L_m^{-1}\{F_2^{c_2}\}$$

şeklinde ispatlanır.

### 3.3 Çarpımsal Konvolüsyon

**Tanım 3.9:**  $f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonları  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere Laplace dönüşümü için çarpımsal konvolüsyon integrali

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx \quad (3.13)$$

şeklinde verilir. (Yalçın, 2016)

**Teorem 3.11 (Çarpımsal Konvolüsyon Teoremi):**

Eğer  $L_m^{-1}\{F(s)\} = f(t)$  ve  $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$  ise

$$L_m^{-1}\{F_m(s) G(s)\} = \int_0^t f(u) g(t-u) du$$

dir. (Yalçın, Çelik, & Gökdoğan, 2016)

**İspat :**  $\int_0^t f(u) g(t-u) du$  integraline çarpımsal Laplace dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} L_m \left\{ \int_0^t f(u) g(t-u) du \right\} &= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \ln f(u) du} \right\} \\ &= e^{L \left\{ \ln \left( e^{\int_0^t g(t-u) \ln f(u) du} \right) \right\}} = e^{L \left\{ \int_0^t g(t-u) \ln f(u) du \right\}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Klasik analizdeki konvolüsyon özelliğinden

$$\begin{aligned}
L_m \left\{ * \int_0^t f(u) g(t-u) du \right\} &= e^{L\{\ln f(u)\} L\{g(u)\}} \\
&= (e^{L\{\ln f(u)\}})^{L\{g(u)\}} \\
&= (L_m\{f(u)\})^{L\{g(u)\}} \\
&= F_m(s)^{G(s)}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

### Çarpımsal Konvolüsyon Özellikleri

Bu kısımda çarpımsal konvolüsyonun bazı özelliklerini vereceğiz.

1.  $F_m(s)^{G(s)+H(s)} = F_m(s)^{G(s)} \cdot F_m(s)^{H(s)}$ , dir.

$$\begin{aligned}
F_m(s)^{G(s)+H(s)} &= L_m \left\{ * \int_0^t f(u) g(t-u) + h(t-u) du \right\} \\
&= L_m \left\{ e^{\int_0^t [g(t-u) + h(t-u)] \cdot \ln f(u) du} \right\} \\
&= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot \ln f(u) du + \int_0^t h(t-u) \cdot \ln f(u) du} \right\}
\end{aligned}$$

Çarpımsal Laplace lineerlik özelliğini kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
&= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot \ln f(u) du} \right\} \cdot L_m \left\{ e^{\int_0^t h(t-u) \cdot \ln f(u) du} \right\} \\
&= e^{L\left\{\ln\left(e^{\int_0^t g(t-u) \ln f(u) du}\right)\right\}} \cdot e^{L\left\{\ln\left(e^{\int_0^t h(t-u) \ln f(u) du}\right)\right\}} \\
&= e^{L\left\{\int_0^t g(t-u) \ln f(u) du\right\}} \cdot e^{L\left\{\int_0^t h(t-u) \ln f(u) du\right\}}
\end{aligned}$$

$$= e^{L\{\ln f(u)\}L\{g(u)\}} \cdot e^{L\{\ln f(u)\}L\{h(u)\}}$$

$$= (L_m\{f(u)\})^{L\{g(u)\}} \cdot (L_m\{f(u)\})^{L\{h(u)\}}$$

$$= F_m(s)^{G(s)} \cdot F_m(s)^{H(s)}$$

şeklinde bulunur.

2.  $(k \cdot F_m(s))^{G(s)} = k^{G(s)} \cdot F_m(s)^{G(s)}$  şeklinde yazılabilir. İlk olarak

$$\begin{aligned} (k \cdot F_m(s))^{G(s)} &= L_m \left\{ * \int_0^t (k \cdot f(u))^{g(t-u)} du \right\} \\ &= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot \ln(k \cdot f(u)) du} \right\} \\ &= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot (\ln k + \ln f(u)) du} \right\} \\ &= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot (\ln k) du} \cdot e^{\int_0^t g(t-u) \cdot (\ln f(u)) du} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Çarpımsal Laplace lineerlik özelliğinden;

$$\begin{aligned} &= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot (\ln k) du} \right\} \cdot L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot (\ln f(u)) du} \right\} \\ &= e^{L\{\ln k\}L\{g(u)\}} \cdot e^{L\{\ln f(u)\}L\{g(u)\}} \\ &= k^{G(s)} \cdot F_m(s)^{G(s)} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.  $F_m(s)^{k \cdot G(s)} = (F_m(s)^{G(s)})^k$  dir. Bu özellik için sırasıyla

$$(F_m(s))^{k \cdot G(s)} = L_m \left\{ * \int_0^t (f(u))^{k \cdot g(t-u)} du \right\}$$

$$= L_m \left\{ e^{\int_0^t k \cdot g(t-u) \cdot \ln(f(u)) du} \right\}$$

$$= L_m \left\{ \left( e^{\int_0^t g(t-u) \cdot \ln f(u) du} \right)^k \right\}$$

$$= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot \ln f(u) du} \right\}^k$$

yazılırsa

$$= (F_m(s)^{G(s)})^k$$

olarak bulunur.

4.  $F_m(s)^{G(s)} = L_m \left\{ * \int_0^t f(u)^{g(t-u)} du \right\} = L_m \left\{ * \int_0^t f(t-u)^{g(u)} du \right\}$  şeklinde de yazılabilir.

$$F_m(s)^{G(s)} = L_m \left\{ * \int_0^t f(u)^{g(t-u)} du \right\}$$

$$= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(t-u) \cdot \ln f(u) du} \right\}$$

şeklindedir.  $t - u = x$  dönüşümü yapılırsa ;

$$= L_m \left\{ e^{-\int_t^0 g(x) \cdot \ln f(t-x) dx} \right\}$$

$$= L_m \left\{ e^{\int_0^t g(x) \cdot \ln f(t-x) dx} \right\}$$

$$= e^{L \left\{ \ln \left( e^{\int_0^t g(x) \ln f(t-x) dx} \right) \right\}}$$

$$= e^{L \left\{ \int_0^t g(x) \ln f(t-x) dx \right\}}$$

elde edilir. Konvolüsyon özelliğinden

$$= e^{L\{f(x)\}L\{g(x)\}}$$

$$= \left(e^{L\{f(x)\}}\right)^{L\{g(x)\}}$$

$$= F_m(s)^{G(s)}$$

olarak bulunur. Bu durumda eşitlik sağlanmış olur.

### 3.4 Çarpımsal İntegral Denklem

Bilinmeyen fonksiyonun bir ya da birden fazla integral ifadesi içinde bulunduğu denklemler, integral denklemleri olarak tanımlanır. Bu bölümde, klasik analizdeki integral denklemlere ait temel tanımlar ve sınıflandırmalar çarpımsal analiz çerçevesine uyarlanacak; ardından çarpımsal integral denklemlerin çözümlerine ilişkin örneklerle yer verilecektir.

**Tanım 3.10:** Bilinmeyen bir fonksiyonun, çarpımsal integralin içinde yer aldığı denklemlere *çarpımsal integral denklem* denir.

**Tanım 3.11:** Bilinmeyen bir  $y(x)$  fonksiyonu için

$$y(x) = f(x) \cdot * \int_a^b [y(t)]^{K(x,t)} dt \quad (3.14)$$

şeklinde çarpımsal integral denklem yazılabiliyorsa ve  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyonu lineer oluyorsa denkleme *lineer çarpımsal integral denklem* denir. (Durmaz, 2019)

**Tanım 3.12:**

$$y(x) = f(x) \cdot * \int_a^b [y(t)]^{K(x,t)} dt$$

şeklindeki çarpımsal integral denklem *homojen olmayan çarpımsal integral denklem* olarak adlandırılır. Diğer yandan  $f(x) = 1$  ise denkleme *homojen çarpımsal integral denklem* adı verilir. (Durmaz, 2019)

**Tanım 3.13:** İntegral sınırlarından biri  $x$  gibi bir değişken ise bu integral denklem tipine *Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi* adı verilir. Bilinmeyen bir  $y(x)$  fonksiyonu için

$$y(x) = * \int_a^x [y(t)]^{K(x,t)} dt$$

formundaki denkleme *Birinci Tip Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi* denir. (Durmaz, 2019)  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyon,  $f(x)$  ve  $K(x, t)$  bilinen fonksiyonlar ise

$$y(x) = f(x) \cdot * \int_a^x [y(t)]^{K(x,t)} dt$$

formundaki ifadeye *İkinci Tip Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi* denir. Çekirdeği  $x - t$  fonksiyonu olan aşağıdaki *İkinci Tip Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi*ni ele alırsak,

$$y(x) = f(x) \cdot * \int_a^x [y(t)]^{K(x-t)} dt \quad (3.15)$$

integral denklemi *çarpımsal konvolüsyon tipi integral denklem* olarak ifade edilir.

### 3.5 Çarpımsal İntegral Denklemlerin Çözüm Yöntemi

Bu bölümde çarpımsal integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliğini ispatlayacağız. Bunun için gerekli tanımlar ve teoremler aşağıda verildikten sonra çözüm yöntemi gösterilecektir.

**Tanım 3.14:**  $[a, b]$  aralığında tanımlı bir  $f$  fonksiyonu  $f: [a, b] \rightarrow R$  olacak şekilde verilsin.  $\forall x \in [a, b]$  için bir gerçektek sayı  $M > 0$  bulunur öyle ki

$$f(x) \leq M \quad (3.16)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $f(x)$  sınırlı bir fonksiyondur. (Rudin, 1976)

**Teorem 3.12:** Tanım kümesi  $[a, b] \rightarrow R$  üzerinde tanımlı  $f(x)$  bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa

- 1)  $f(x) \geq \varepsilon > 0$  oluyorsa  $\forall x \in [a, b]$  için, (pozitif alt sınır)
  - 2)  $f(x) \leq M < \infty$  oluyorsa  $\forall x \in [a, b]$  için, (üstten sınırlı)
- o halde  $\ln f(x)$  hem tanımlıdır hem sınırlıdır. (Bartle, Sherbert, 2011)

**Teorem 3.13:** Varsayalım ki  $\{f_n(x)\}$ ,  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlardan oluşan bir dizidir ve aşağıdaki koşullar sağlanmaktadır:

- 1)  $f_n(x)$  ,  $f(x)$ ’ e düzgün yakınsar.
- 2)  $\forall n \in [a, b]$  için ve  $x \in [a, b]$  için  $f_n(x) > 0$ ,
- 3) Pozitif bir alt sınır vardır; şöyle ki  $\exists \varepsilon > 0$  öyle ki  $f_n(x) \geq \varepsilon$  vardır öyle ki  $\forall n, \forall x \in [a, b]$  için

$$\ln f_n(x) \rightarrow \ln f(x)$$

olacaktır. Yani  $\ln f_n(x)$  ,  $\ln f(x)$ ’ e düzgün yakınsar. (Rudin, 1976)

**Tanım 3.15 (Çarpımsal Analizde Weierstrass M Testi):**  $\{f_n(x)\}$ ,  $[a, b]$  üzerinde sürekli fonksiyon dizisi olsun.  $f$  ve  $K$  sürekli fonksiyonlar ve  $f(x) \leq M$  sınırlı fonksiyon ve  $f(x) \geq \delta > 0$  şartı sağlansın. O halde  $\forall n \in \mathbb{N}$  için öyle bir  $M_n$  vardır öyle ki

$$|\ln f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in [a, b] \quad (3.17)$$

dir ve  $\sum M_n$  yakınsaksa ise  $\sum \ln f_n(x)$  düzgün yakınsaktır. (Nagle, Saff, Snider, 1999)

**Teorem 3.14 (Çarpımsal Analizde Picard Varlık ve Teklik Teoremi):**  $\mathbb{R}$  bölgesinde sürekli fonksiyonlar  $f(x, y)$  ve  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ ,  $K, \frac{\partial K(x)}{\partial x}$ ,  $R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  olmak üzere  $R$ ,  $\{x_0, y_0\}$  içersin. Başlangıç değer problemi ise

$$y^*(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.18)$$

olarak tanımlansın. Böylece bu başlangıç değer probleminin  $I = [x_0 - h, y_0 - h]$  bölgesinde tek bir çözümü vardır ve Picard iterasyonu (Collins, 2006) yardımıyla çarpımsal integral denklem için

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) * \int_a^x y(t)^{K(x,t)} dt \quad (3.19)$$

şeklindedir ve  $y_{n+1}(x)$ ' ler  $y_n(x)$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olur. Bu da çözümün varlığını garantiler.

**İspat:** (3.14) eşitliği

$$y_{n+1}(x) = f(x) * \int_a^x y(t)^{K(x,t)} dt \quad (3.20)$$

başlangıç değer problemi şeklinde de yazılabilir. (3.19) eşitliği de

$$\ln y_{n+1}(x) = \ln y_n(x) + \ln \int_a^x y(t)^{K(x,t)} dt \quad (3.21)$$

şeklinde yazılıp  $* \int_a^x y(t)^{K(x,t)} dt = e^{\ln \int_a^x y(t)^{K(x,t)} dt} = e^{\int_a^x \ln(y(t)) K(x,t) dt}$  kullanılarak ispata devam edilirse

$$\ln y_{n+1}(x) = \ln y_n(x) + \int_a^x \ln y(t) K(x,t) dt$$

olarak yazılabilir.  $u_n = \ln y_{n+1} - \ln y_n$  şeklinde bir dizi tanımlanıp Weierstrass M test tanımına göre  $\sum u_n$  yakınsak bulunacak ve  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $u(x)$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olarak bulunacaktır. (3.21) eşitliğinde tümevarım yöntemiyle  $\ln y_0(x) = \ln f(x)$  olsun.  $\ln f(x)$  sürekli olduğundan  $\ln y_0(x)$  da süreklidir.  $y_k$ ,  $1 < k < n - 1$  aralığında sürekli olsunlar. Tümevarımdan

$$\ln y_k(x) = \ln f(x) + \int_a^x \ln y_{k-1}(t) K(x,t) dt$$

olacaktır.  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\ln y(t) K(x,t)$ 'de sürekli olacağından  $[a, x]$  aralığında integrallenebilir olacaktır ve

$$\ln y_n(x) = \ln f(x) + \int_a^x \ln y_{n-1}(t) K(x,t) dt \quad (3.22)$$

şeklinde de yazılabilecektir. (3.22) denklemi türevlenebilir olduğundan ve böylece sürekli olduğundan tümevarımla elde edilen denklemler tamdır. Bir diğer taraftan çekirdek fonksiyonu

$K(x, t) \leq L$  ve  $\ln f(x) \leq M_n, \forall x, t \in [a, b]$  için olacak şekilde sınırlıdır. (  $L$  ve  $M_n$  pozitif sabitlerdir). Tümevarımın 1. Aşamasını (3.22) denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 |\ln y_1(x) - \ln y_0(x)| &= \int_a^x \ln y_0(t) K(x, t) dt \\
 &\leq \int_a^x |\ln y_0(t)| |K(x, t)| dt \\
 &\leq L \cdot M_n \cdot (x - a)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

ve tümevarımla devam edilirse

$$\begin{aligned}
 |\ln y_k(x) - \ln y_{k-1}(x)| &= \int_a^x \ln y_{k-1}(t) K(x, t) dt \\
 &\leq \int_a^x |\ln y_{k-1}(t)| |K(x, t)| dt \\
 &\leq L^{n-1} \cdot M_n \cdot \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
 |\ln y_n(x) - \ln y_{n-1}(x)| &= \int_a^x \{\ln y_{n-1} - \ln y_{n-2}\}(t) K(x, t) dt \\
 &\leq \int_a^x |\ln y_{n-1}(t) - \ln y_{n-2}(t)| |K(x, t)| dt \\
 &\leq L^n \cdot M_n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

olarak yazılır. Böylelikle

$$|\ln y_n - \ln y_{n-1}| \leq L^n \cdot M_n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \leq L^n \cdot M_n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} \tag{3.26}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\sum_{n=1}^N |\ln y_n - \ln y_{n-1}| = \sum L^n \cdot M_n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} = M_n \sum_{n=1}^{\infty} L^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} = M_n \cdot (e^{L(b-a)} - 1)$$

yazılır.Burada

$$\sum_{n=1}^N |\ln y_n - \ln y_{n-1}| \leq M_n \cdot (e^{L(b-a)} - 1) \quad (3.27)$$

$e^x$  serisi normalde yakınsak olduğundan  $\sum |\ln y_n - \ln y_{n-1}|$  yakınsaktır. Böylelikle Weierstrass M testini sağlamaktadır. Böylece  $\sum (y_n - y_{n-1})$ ,  $[a, b]$  üzerinde  $u(x)$  fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Böylelikle  $\ln y_n(x)$  in  $\ln y(x)$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığı ispatlanmış olur. Buradan da verilen bir  $\varepsilon \geq 0$  için öyle bir  $N$  sayısı vardır ki

$$|\ln y_n - \ln y| \leq \varepsilon \quad (3.28)$$

tüm  $n \geq N$  ve tüm  $x, t \in [a, b]$  olacak şekilde düzgün yakınsaklığın tanımından yazılabilecektir. İntegral denkleme geri dönülürse

$$|\int_a^x \ln y_n K(x, t) dt - \int_a^x \ln y K(x, t) dt| \leq L \varepsilon$$

tüm  $n \geq N$  ve tüm  $x, t \in [a, b]$  için sağlanır. Buradan da  $\int_a^x \ln y_n K(x, t) dt$  integrali  $\int_a^x \ln y K(x, t) dt$  integraline düzgün yakınsaktır denir. Böylece  $n \rightarrow \infty$  için (3.19) denkleminin çözümü vardır.

Tekliğini ispatlamak için  $y = Y(x)$  gibi başka bir çözümü olduğunu kabul edelim.  $y - Y(x)$  sürekli fonksiyonu da  $[a, b]$  aralığında sınırlıdır.

$$|\ln y - \ln Y(x)| \leq A \quad (3.29)$$

olacak şekilde bir  $A$  sayısı vardır denilebilir. Fonksiyonların her ikisi de çözümü sağladığı için

$$\begin{aligned} |\ln y - \ln Y(x)| &\leq |\int_a^x K(x, t)(\ln y(t) - \ln Y(t)) dt| \\ &\leq |\int_a^x K(x, t)| |(\ln y(t) - \ln Y(t))| dt \\ &\leq LA(x - a) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$\forall x \in [a, b]$  için elde edilir. Burada tümevarım yöntemi uygulanırsa

$$|\ln y - \ln Y(x)| \leq L^{n-1} A \frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} \quad (3.31)$$

ve

$$|\ln y - \ln Y(x)| \leq L^n A \frac{(x-a)^n}{(n)!} \quad (3.32)$$

olacaktır.  $n \rightarrow \infty$  için  $L^n A \frac{(x-a)^n}{(n)!}$ , 0'a yaklaşacağı için

$$\ln y = \ln Y(x) \quad (3.33)$$

olacak şekilde tek birbirine eşit bulunur ve bu da tek bir çözüm olduğu gösterir.

### 3.6 Çarpımsal Laplace Dönüşümünü Çarpımsal Diferansiyel Denklemlere Uygulama

Çarpımsal türevlerin Çarpımsal Laplace dönüşümü için verilen

$$L_m\{f^{*(n)}(t)\} = \frac{1}{f(0)s^{n-1} f^*(0)s^{n-2} f^{**}(0)s^{n-3} \dots f^{*(n-1)}(0)} F(s)s^n$$

formülü  $f$  nin çarpımsal Laplace dönüşümüne ve  $f^{*(n-1)}, \dots, f^{**}, f^*, f$  fonksiyonlarının  $t = 0$  daki değerlerine bağlıdır. Bu nedenle, çarpımsal Laplace dönüşümleri özellikle sabit üslü çarpımsal lineer diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümlerini elde etmede kullanılabilir. Böyle bir denklemi çözmek için, denklemin her iki tarafına çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanır ve bu sayede çözüm bulunur.

Örneğin, ikinci mertebeden

$$(y^{**})^{a_0} (y^*)^{a_1} y^{a_2} = 1 \quad (3.34)$$

$$y(0) = b_0, \quad y^*(0) = b_1 \quad (3.35)$$

başlangıç değer problemini için inceleyelim. Burada verilen  $a_0, a_1, a_2$  ve  $b_0, b_1$  sabit üslerdir. Denklemin her iki tarafına çarpımsal Laplace dönüşümünü uygulanır. Lineerlik özelliği kullanılarak

$$L_m\{y^{**}\}^{a_0} L_m\{y^*\}^{a_1} L_m\{y\}^{a_2} = L_m\{1\}$$

yazılabilir. (3.34) denklemi ve (3.35) başlangıç koşulları ile

$$\left\{ \frac{Y(s)s^2}{y(0)^s y^*(0)} \right\}^{a_0} \left\{ \frac{Y(s)s}{y(0)} \right\}^{a_1} \{Y(s)\}^{a_2} = 1$$

yazılabilir. Denklem düzenlenirse

$$\frac{Y(s)^{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}}{\{b_0^s b_1\}^{a_0} \{b_0\}^{a_1}} = 1$$

$$Y(s)^{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = b_0^{a_0 s + a_1} b_1^{a_0}$$

$$Y(s) = (b_0^{a_0 s + a_1} b_1^{a_0})^{\frac{1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}}$$

$$Y(s) = (b_0)^{\frac{a_0 s + a_1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}} (b_1)^{\frac{a_0}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}}$$

elde edilir. Bu denklemin ters çarpımsal Laplace dönüşümü alınır

$$y(t) = L_m^{-1}\{Y(s)\}$$

elde edilir. Böylelikle (3.34), (3.35) başlangıç değer probleminin çözümü bulunur. Bu yöntem her mertebeden sabit üslü çarpımsal lineer diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

**Örnek 3.3:**  $y^{**} \cdot (y^*)^{-2} \cdot y^{-8} = 1, y(0) = e^3, y^*(0) = e^6$  başlangıç değer problemini çözelim.

Deklemin her iki tarafına çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları kullanırsa;

$$L_m\{y^{**}\}L_m\{y^*\}^{-2}L_m\{y\}^{-8} = L_m\{1\}$$

$$\left\{\frac{Y(s)s^2}{y(0)^s y^*(0)}\right\} \cdot \left\{\frac{Y(s)s}{y(0)}\right\}^{-2} \cdot \{Y(s)\}^{-8} = 1$$

olur. Denklem düzenlenir ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$\frac{Y(s)^{s^2-2s-8}}{e^{3s+6-6}} = 1$$

$$Y(s) = e^{\frac{3s}{s^2-2s-8}}$$

elde edilir. Denklem ters çarpımsal Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\begin{aligned} L_m^{-1}\{Y(s)\} &= L_m^{-1}\left\{e^{\frac{3s}{s^2-2s-8}}\right\} = L_m^{-1}\left\{e^{\frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}}\right\} \\ &= L_m^{-1}\left\{e^{\frac{2s}{s-4}}\right\} \cdot L_m^{-1}\left\{e^{\frac{1}{s+2}}\right\} = e^{2e^{4t}} \cdot e^{e^{-2t}} = e^{2e^{4t}+e^{-2t}} \end{aligned}$$

Buradan  $y(t)$

$$y(t) = e^{2e^{4t}+e^{-2t}}$$

olarak bulunur.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### 4.1 Çarpımsal Konvolüsyonu Çarpımsal Diferansiyel Denklemlere Uygulama

Çarpımsal diferansiyel denklemlere çarpımsal konvolüsyon uygulayabilmek için bir önceki bölümde yer alan çarpımsal Laplace dönüşümünü çarpımsal diferansiyel denklemlere uygulamasındaki adımlarından yararlanacağız. Yani ele aldığımız çarpımsal diferansiyel denklemin her iki tarafına da çarpımsal Laplace dönüşümü uygulayacağız.  $Y(s)$ 'yi yalnız bırakıp çarpımsal ters Laplace dönüşümünü alırken çarpımsal konvolüsyon teoreminden yararlanacağız. Böylelikle denklemimizin çözümü olan  $y(t)$ 'yi bulmuş olacağız.

**Örnek 4.1:**  $y^{**} \cdot y = e^{e^{-2t} \sin t}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y^*(0) = e$  başlangıç değer problemini çözelim.

Denklemin her iki tarafına çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$L_m\{y^{**}\}L_m\{y\} = L_m\{e^{e^{-2t} \sin t}\}$$

$$\left\{ \frac{Y(s)^{s^2}}{y(0)^s y^*(0)} \right\} \cdot \{Y(s)\} = e^{\frac{1}{(s+2)^2+1}}$$

olur. Denklem düzenlenir ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$Y(s)^{s^2+1} = e^{\frac{1}{(s+2)^2+1}}$$

$$Y(s) = \left( e^{\frac{1}{(s+2)^2+1}} \right)^{\frac{1}{s^2+1}}$$

elde edilir. Denkleme ters çarpımsal Laplace dönüşümü uygulayalım ve çarpımsal konvolüsyon teoremini kullanılırsa

$$Y(s) = \left( e^{\frac{1}{(s+2)^2+1}} \right)^{\frac{1}{s^2+1}} = F_m(s)^{G(s)}$$

$$F_m(s) = e^{\frac{1}{(s+2)^2+1}} \quad ve \quad G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

olarak tanımlanır. O halde

$$L_m^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{e^{-2t} \cdot \sin t} \quad ve \quad L^{-1}\{G(s)\} = g(t) = \sin t$$

olur. Çarpımsal konvolüsyon teoremi ve çarpımsal integral tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_m^{-1}\{F_m(s)^{G(s)}\} &= * \int_0^t f(x)^{g(t-x)} dx = e^{\int_0^t g(t-x) \ln f(x) dx} \\ &= e^{\int_0^t \sin(t-x) \cdot \ln e^{e^{-2x} \cdot \sin x} dx} = e^{\int_0^t e^{-2x} \cdot \sin x \cdot \sin(t-x) dx} = e^{\frac{1}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-2t}}{8}(\sin t + \cos t)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylelikle çözüm

$$y(t) = e^{\frac{1}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-2t}}{8}(\sin t + \cos t)}$$

şeklinde elde edilir.

**Örnek 4.2:**  $y^{**} \cdot y^{-1} = 1, y(0) = 1, y^*(0) = e$  başlangıç değer problemini çözelim.

Denklemin her iki tarafına çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$L_m\{y^{**}\}L_m\{y\}^{-1} = L_m\{1\}$$

$$\left\{ \frac{Y(s)^{s^2}}{y(0)^s y^*(0)} \right\} \cdot \{Y(s)\}^{-1} = 1$$

olur. Denklem düzenlenir ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$Y(s) = e^{\frac{1}{s^2-1}} = \left( e^{\frac{1}{s-1}} \right)^{\frac{1}{s+1}}$$

elde edilir. Denkleme ters çarpımsal Laplace dönüşümü uygulayalım ve çarpımsal konvolüsyon teoremini kullanalım.

$$Y(s) = \left( e^{\frac{1}{s-1}} \right)^{\frac{1}{s+1}} = F_m(s)^{G(s)}$$

$$F_m(s) = e^{\frac{1}{s-1}} \quad ve \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$L_m^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{e^t} \quad ve \quad L^{-1}\{G(s)\} = g(t) = e^{-t}$$

olur. Çarpımsal konvolüsyon teoremi ve çarpımsal integral tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_m^{-1}\{F_m(s)^{G(s)}\} &= * \int_0^t f(x) g(t-x) dx = e^{\int_0^t g(t-x) \cdot \ln f(x) dx} \\ &= e^{\int_0^t e^{-t+x} \cdot \ln e^{e^x} dx} = e^{\int_0^t e^{2x-t} dx} = e^{\frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$y(t) = e^{\frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2}}$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.3:**  $y^{**} \cdot y^* = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y^*(0) = e$  başlangıç değer problemini çözelim.

Denklemin her iki tarafına çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$L_m\{y^{**}\}L_m\{y^*\} = L_m\{1\}$$

$$\left\{ \frac{Y(s)^{s^2}}{y(0)^s y^*(0)} \right\} \cdot \left\{ \frac{Y(s)^s}{y(0)} \right\} = 1$$

olur. Denklem düzenlenir ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$Y(s) = e^{\frac{1}{s^2+s}} = \left(e^{\frac{1}{s}}\right)^{\frac{1}{s+1}}$$

elde edilir. Denkleme ters çarpımsal Laplace dönüşümü uygulayalım ve çarpımsal konvolüsyon teoremini kullanalım.

$$Y(s) = \left(e^{\frac{1}{s}}\right)^{\frac{1}{s+1}} = F_m(s)^{G(s)}$$

$$F_m(s) = e^{\frac{1}{s}} \quad \text{ve} \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$L_m^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^1 \quad \text{ve} \quad L^{-1}\{G(s)\} = g(t) = e^{-t}$$

olur. Çarpımsal konvolüsyon teoremi ve çarpımsal integral tanımı kullanılırsa

$$L_m^{-1}\{F_m(s)^{G(s)}\} = * \int_0^t f(x)^{g(t-x)} dx = e^{\int_0^t g(t-x) \ln f(x) dx}$$

$$= e^{\int_0^t e^{-t+x} \cdot \ln e \cdot dx} = e^{\int_0^t e^{-t+x} dx} = e^{1-e^{-t}}$$

elde edilir. Böylece

$$y(t) = e^{1-e^{-t}}$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.4:**  $y^{***} \cdot (y^{**})^{-1} = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y^*(0) = 1$ ,  $y^{**}(0) = e$  başlangıç değer problemini çözelim.

Denklemin her iki tarafına çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$L_m\{y^{***}\}L_m\{y^{**}\}^{-1} = L_m\{1\}$$

$$\left\{ \frac{Y(s)^{s^3}}{y(0)^{s^2} y^*(0)^s y^{**}(0)} \right\} \cdot \left\{ \frac{Y(s)^{s^2}}{y(0)^s y^*(0)} \right\}^{-1} = 1$$

olur. Denklem düzenlenir ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$Y(s) = e^{\frac{1}{s^3-s^2}} = \left( e^{\frac{1}{s^2}} \right)^{\frac{1}{s-1}}$$

elde edilir. Denkleme ters çarpımsal Laplace dönüşümü uygulayalım ve çarpımsal konvolüsyon teoremini ile

$$Y(s) = \left( e^{\frac{1}{s^2}} \right)^{\frac{1}{s-1}} = F_m(s)^{G(s)}$$

$$F_m(s) = e^{\frac{1}{s^2}} \quad ve \quad G(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$L_m^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^t \quad ve \quad L^{-1}\{G(s)\} = g(t) = e^t$$

olur. Çarpımsal konvolüsyon teoremi ve çarpımsal integral tanımı kullanılırsa;

$$L_m^{-1}\{F_m(s)^{G(s)}\} = * \int_0^t f(x)^{g(t-x)} dx = e^{\int_0^t g(t-x) \ln f(x) dx}$$

$$= e^{\int_0^t e^{t-x} \cdot \ln e^x dx} = e^{\int_0^t x \cdot e^{t-x} \cdot dx} = e^{-t-1+e^t}$$

olur. Böylelikle

$$y(t) = e^{-t-1+e^t}$$

olarak bulunur.

#### 4.2 Çarpımsal Laplace Dönüşümünü ve Çarpımsal Konvolüsyonu Çarpımsal İntegral Denklemlere Uygulama

$\phi(x)$  bilinmeyen,  $f(x)$  ve  $K(x, t)$  bilinen fonksiyon olması durumunda

$$\phi(x) = f(x) \cdot * \int_a^x [\phi(t)]^{K(x,t)} dt$$

formundaki ifadenin *ikinci tip çarpımsal Volterra integral denklemi* olduğunu biliyoruz. Ayrıca çekirdeği  $x - t$  fonksiyonu olduğunda,

$$\phi(x) = f(x) \cdot * \int_a^x [\phi(t)]^{K(x-t)} dt \quad (4.1)$$

*çarpımsal konvolüsyon tipi integral denklem* olduğu verilmişti.

Şimdi (4.1) çarpımsal integral denklemindeki  $\phi(x)$  bilinmeyen fonksiyonunu bulmak için çarpımsal Laplace veya çarpımsal konvolüsyon teoremi uygulayalım. (4.1) denkleminde  $a = 0$  kabul edelim.

$$L_m[\phi(x)] = \phi_m(s), \quad L_m[f(x)] = F_m(s), \quad L[K(x, t)] = L[K(x - t)] = K(s) \text{ olsun.}$$

$$\phi(x) = f(x) \cdot * \int_0^x [\phi(t)]^{K(x-t)} dt$$

Çarpımsal Volterra integral denkleminin her iki tarafını çarpımsal Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$L_m[\phi(x)] = L_m[f(x)] \cdot L_m \left[ * \int_0^x [\phi(t)]^{K(x-t)} dt \right]$$

Çarpımsal konvolüsyon teoremini ile

$$= L_m[f(x)] \cdot L_m \left[ e^{\int_0^x \ln \phi(t) \cdot K(x-t) dt} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= L_m[f(x)] \cdot e^{L\left[\ln\left(e^{\int_0^x \ln \phi(t) \cdot K(x-t) dt}\right)\right]} \\
&= L_m[f(x)] \cdot e^{L\left[\int_0^x \ln \phi(t) \cdot K(x-t) dt\right]} \\
&= L_m[f(x)] \cdot \left(e^{L[\ln \phi(t)]}\right)^{L[K(x,t)]}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\phi_m(s) = F_m(s) \cdot \phi_m(s)^{K(s)}$$

olarak bulunur. İşlemlere devam edilirse

$$\phi_m(s)^{1-K(s)} = F_m(s)$$

$$\phi_m(s) = F_m(s)^{\frac{1}{1-K(s)}}$$

$\phi_m(s)$ 'in ters çarpımsal Laplace dönüşümü olan  $\phi(x)$  fonksiyonu çarpımsal integral denkleminin çözümüdür.

**Örnek 4.5:**  $y(t) \cdot \int_0^t y(\tau)^3 \sin(t-\tau) d\tau = e^t$  çarpımsal integral denklemin çözümünü çarpımsal Laplace yöntemi ile bulalım.

Her iki tarafın çarpımsal Laplace dönüşümünü alalım.

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\left\{\int_0^t y(\tau)^3 \sin(t-\tau) d\tau\right\} = L_m\{e^t\}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot \left(e^{L[\ln y(\tau)]}\right)^{3L[\sin \tau]} = e^{L[t]}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\{y(t)\}^{\frac{3}{s^2+1}} = e^{\frac{1}{s^2}}$$

$$L_m\{y(t)\}^{1+\frac{3}{s^2+1}} = e^{\frac{1}{s^2}}$$

Burada  $L_m\{y(t)\}$  yalnız bırakılırsa;

$$L_m\{y(t)\} = e^{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{s^2+1}{s^2+4}} = e^{\frac{1}{4s^2} + \frac{3}{4(s^2+4)}}$$

elde edilir. Ters çarpımsal Laplace dönüşümü alınır

$$y(t) = L_m^{-1} \left\{ e^{\frac{1}{4s^2} + \frac{3}{4(s^2+4)}} \right\} = e^{L^{-1} \left[ \frac{1}{4s^2} + \frac{3}{4(s^2+4)} \right]} = e^{\frac{t}{4} + \frac{3}{8} \sin 2t}$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.6:**  $y(t) \cdot * \int_0^t y(\tau)^{(t-\tau)} d\tau = e$  çarpımsal integral denklemin çözümünü çarpımsal Laplace yöntemiyle bulalım.

Her iki tarafın çarpımsal Laplace dönüşümü ile

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m \left\{ * \int_0^t y(\tau)^{(t-\tau)} d\tau \right\} = L_m\{e\}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot \left( e^{L[\ln y(\tau)]} \right)^{L[\tau]} = e^{L[1]}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\{y(t)\}^{\frac{1}{s^2}} = e^{\frac{1}{s}}$$

$$L_m\{y(t)\}^{1+\frac{1}{s^2}} = e^{\frac{1}{s}}$$

şeklinde gelir. Burada  $L_m\{y(t)\}$  için

$$L_m\{y(t)\} = e^{\frac{1}{s} \cdot \frac{s^2}{s^2+1}} = e^{\frac{s}{s^2+1}}$$

formülü elde edilir. Ters çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$y(t) = L_m^{-1} \left\{ e^{\frac{s}{s^2+1}} \right\} = e^{L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+1} \right]} = e^{\cos t}$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.7:**  $y(t) = e * \int_0^t y(\tau) \cos(t-\tau) d\tau$  çarpımsal integral denklemin çözümünü çarpımsal Laplace yöntemiyle bulalım.

Her iki tarafın çarpımsal Laplace dönüşümünü alalım.

$$L_m\{y(t)\} = L_m\{e\} \cdot L_m\left\{ * \int_0^t y(\tau) \cos(t-\tau) d\tau \right\}$$

$$L_m\{y(t)\} = e^{L[1]} \cdot \left( e^{L[\ln y(\tau)]} \right)^{L[\cos \tau]}$$

$$L_m\{y(t)\} = e^{\frac{1}{s}} \cdot L_m\{y(t)\}^{\frac{s}{s^2+1}}$$

$$L_m\{y(t)\}^{1-\frac{s}{s^2+1}} = e^{\frac{1}{s}}$$

Buradan

$$L_m\{y(t)\} = e^{\frac{s^2+1}{s(s^2-s+1)}} = e^{\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2-s+1}} = e^{\frac{1}{s} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left((s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. Ters çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$y(t) = L_m^{-1} \left\{ e^{\frac{1}{s} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left((s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}} \right\} = e^{L^{-1} \left[ \frac{1}{s} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left((s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \right]} = e^{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cdot e^{t/2}}$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.8:**  $y(t) = e^{\sin t} * \int_0^t y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau$  çarpımsal integral denklemin çözümünü çarpımsal konvolüsyon teoremiyle bulalım.

Her iki tarafın çarpımsal Laplace dönüşümü ile

$$L_m\{y(t)\} = L_m\{e^{\sin t}\} \cdot L_m\left\{* \int_0^t y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau\right\}$$

$$L_m\{y(t)\} = e^{L[\sin t]} \cdot (e^{L[\ln y(\tau)]})^{L[e^{\tau}]}$$

$$L_m\{y(t)\} = e^{\frac{1}{s^2+1}} \cdot L_m\{y(t)\}^{\frac{1}{s-1}}$$

$$L_m\{y(t)\}^{1-\frac{1}{s-1}} = e^{\frac{1}{s^2+1}}$$

olur. Buradan

$$L_m\{y(t)\} = \left(e^{\frac{1}{s-2}}\right)^{\frac{s-1}{s^2+1}}$$

elde ederiz.  $y(t)$ 'yi bulmak için çarpımsal konvolüsyon teoremini kullanabiliriz. Bunun için öncelikle

$$F_m(s) = e^{\frac{1}{s-2}} \text{ ve } G(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$$

olarak tanımlanır ve

$$L_m^{-1}\{F_m(s)\} = e^{L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]} = e^{e^{2t}} = f(t) \text{ ve } L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+1}\right\} = \cos t - \sin t = g(t)$$

bulunur. İşlemlere devam edilirse

$$y(t) = L_m^{-1}\{F_m(s)G(s)\} = * \int_0^t f(x)g(t-x)dx = e^{\int_0^t \ln f(x) \cdot g(t-x) \cdot dx}$$

$$= e^{\int_0^t e^{2x} \cdot (\cos(t-x) - \sin(t-x)) dx} = e^{\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t}$$

bulunur.

**Örnek 4.9:**  $y(t) \cdot \int_0^t y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau = e^{\sin t}$  çarpımsal integral denklemin çözümünü çarpımsal konvolüsyon teoremiyle bulalım.

Her iki tarafın çarpımsal Laplace dönüşümü ile

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\left\{\int_0^t y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau\right\} = L_m\{e^{\sin t}\}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot (e^{L[\ln y(\tau)]})^{L[e^\tau]} = e^{L[\sin t]}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\{y(t)\}^{\frac{1}{s-1}} = e^{\frac{1}{s^2+1}}$$

$$L_m\{y(t)\}^{1+\frac{1}{s-1}} = e^{\frac{1}{s^2+1}}$$

olur. Buradan

$$L_m\{y(t)\} = \left(e^{\frac{1}{s}}\right)^{\frac{s-1}{s^2+1}}$$

olarak elde edilir. Çarpımsal konvolüsyon teoremi ile

$$F_m(s) = e^{\frac{1}{s}} \text{ ve } G(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$$

olarak tanımlanır. O halde

$$L_m^{-1}\{F_m(s)\} = e^{L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]} = e = f(t) \text{ ve } L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+1}\right\} = \cos t - \sin t = g(t)$$

bulunur. Buradan çözüm fonksiyonu

$$y(t) = L_m^{-1}\{F_m(s)^{G(s)}\} = \int_0^t f(x) g(t-x) dx = e^{\int_0^t \ln f(x) \cdot g(t-x) \cdot dx}$$

$$= e^{\int_0^t (\cos(t-x) - \sin(t-x)) dx} = e^{\cos t + \sin t - 1}$$

olarak bulunur. Böylece

$$y(t) = e^{\cos t + \sin t - 1}$$

olarak bulunmuş olur.

**Örnek 4.10:**  $y(t) \cdot * \int_0^t y(\tau)^{(t-\tau)^{d\tau}} = e^{t^2}$  çarpımsal integral denklemin çözümünü çarpımsal konvolüsyon teoremiyle bulalım.

Her iki tarafın çarpımsal Laplace dönüşümü ile

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\left\{* \int_0^t y(\tau)^{(t-\tau)^{d\tau}}\right\} = L_m\{e^{t^2}\}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot (e^{L[\ln y(\tau)]})^{L[\tau]} = e^{L[t^2]}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\{y(t)\}^{\frac{1}{s^2}} = e^{\frac{2}{s^3}}$$

$$L_m\{y(t)\}^{1+\frac{1}{s^2}} = e^{\frac{2}{s^3}}$$

elde edilir. Buradan

$$L_m\{y(t)\} = \left(e^{\frac{2}{s}}\right)^{\frac{1}{s^2+1}}$$

elde edilir. Çarpımsal konvolüsyon teoremi ile

$$F_m(s) = e^{\frac{2}{s}} \text{ ve } G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

olarak tanımlanırsa

$$L_m^{-1}\{F_m(s)\} = e^{L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right]} = e^2 = f(t) \text{ ve } L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t = g(t)$$

olarak bulunur. Teorem uygulanırsa

$$y(t) = L_m^{-1}\{F_m(s)^{G(s)}\} = * \int_0^t f(x)g(t-x)dx = e^{\int_0^t \ln f(x) \cdot g(t-x) \cdot dx}$$

$$= e^{\int_0^t 2 \cdot \sin(t-x)dx} = e^{2-2 \cos t}$$

bulunur. Böylece çözüm

$$y(t) = e^{2-2 \cos t}$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.11:**  $y(t) \cdot * \int_0^t y(\tau)^{(t-\tau)} d\tau = e^{t^3}$  çarpımsal integral denklemin çözümünü çarpımsal konvolüsyon teoremiyle bulalım.

Her iki tarafın çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\left\{* \int_0^t y(\tau)^{(t-\tau)} d\tau\right\} = L_m\{e^{t^3}\}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot (e^{L[\ln y(\tau)]})^{L[\tau]} = e^{L[t^3]}$$

$$L_m\{y(t)\} \cdot L_m\{y(t)\}^{\frac{1}{s^2}} = e^{\frac{6}{s^4}}$$

$$L_m\{y(t)\}^{1+\frac{1}{s^2}} = e^{\frac{6}{s^4}}$$

elde edilir. Buradan

$$L_m\{y(t)\} = \left(e^{\frac{6}{s^2}}\right)^{\frac{1}{s^2+1}}$$

olarak elde edilir. Çarpımsal konvolüsyon teoremi ile

$$F_m(s) = e^{\frac{6}{s^2}} \text{ ve } G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

olarak tanımlanırsa

$$L_m^{-1}\{F_m(s)\} = e^{L^{-1}\left[\frac{6}{s^2}\right]} = e^{6t} = f(t) \text{ ve } L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t = g(t)$$

bulunur. Teorem uygulanırsa

$$\begin{aligned} y(t) &= L_m^{-1}\{F_m(s)G(s)\} = * \int_0^t f(x)g(t-x)dx = e^{\int_0^t \ln f(x) \cdot g(t-x) \cdot dx} \\ &= e^{\int_0^t 6x \cdot \sin(t-x)dx} = e^{6t-6 \sin t} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan çözüm

$$y(t) = e^{6t-6 \sin t}$$

olacak şekilde bulunur.

**Örnek 4.12:**  $\frac{y(t)}{* \int_0^t y(\tau)(t-\tau)^{d\tau}} = e^t$  çarpımsal integral denklemin çözümünü çarpımsal konvolüsyon teoremiyle bulalım.

Her iki tarafın çarpımsal Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{L_m\{y(t)\}}{L_m\left\{* \int_0^t y(\tau)(t-\tau)^{d\tau}\right\}} = L_m\{e^t\}$$

$$\frac{L_m\{y(t)\}}{(e^{L[\ln y(\tau)]})L[\tau]} = e^{L[t]}$$

$$\frac{L_m\{y(t)\}}{L_m\{y(t)\}^{\frac{1}{s^2}}} = e^{\frac{1}{s^2}}$$

$$L_m\{y(t)\}^{1-\frac{1}{s^2}} = e^{\frac{1}{s^2}}$$

olur. Buradan

$$L_m\{y(t)\} = \left(e^{\frac{1}{s-1}}\right)^{\frac{1}{s+1}}$$

elde edilir. Çarpımsal konvolüsyon teoremine göre

$$F_m(s) = e^{\frac{1}{s-1}} \quad ve \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

olarak tanımlansın. O halde

$$L_m^{-1}\{F_m(s)\} = e^{L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]} = e^{e^t} = f(t) \quad ve \quad L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t} = g(t)$$

bulunur. Teoremi uygulanırsa

$$y(t) = L_m^{-1}\{F_m(s)^{G(s)}\} = * \int_0^t f(x)^{g(t-x)} dx = e^{\int_0^t \ln f(x) \cdot g(t-x) \cdot dx}$$

$$= e^{\int_0^t e^x \cdot e^{-t+x} dx} = e^{\frac{e^t - e^{-t}}{2}}$$

bulunur. Çözüm fonksiyonu ise

$$y(t) = e^{\frac{e^t - e^{-t}}{2}}$$

olarak bulunur.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, hem klasik hem de çarpımsal analiz kapsamında yer alan farklı türden denklemlere konvolüsyon yöntemi uygulanarak çözümler üretilmiştir. Uygulamalar üç temel başlık altında incelenmiştir: klasik diferansiyel denklemler, çarpımsal diferansiyel denklemler ve çarpımsal integral denklemler. Her bir denklem türü için Laplace dönüşümü ile çözüm alanına geçilmiş, ardından ters Laplace dönüşümü ve konvolüsyon teoremi kullanılarak zamana bağlı çözüm fonksiyonları elde edilmiştir.

Klasik diferansiyel denklemlere uygulanan konvolüsyon çözümünde, sistemlerin doğrusal ve zamanla değişmeyen yapılarında Laplace dönüşümünün çözüme kolay ve doğrudan bir yol sunduğu görülmüştür. Özellikle başlangıç koşulları bilinen sistemlerde, çözümler hem analitik hem de sayısal olarak başarıyla elde edilmiştir. Konvolüsyon teoremi, çarpım biçiminde verilen Laplace dönüşümlü ifadelerin ters dönüşümünün yapılandırılmasında etkili olmuştur.

Çarpımsal diferansiyel denklemlerde ise klasik türev yerine çarpımsal türev kullanılmış; bu türev türüne uygun olarak geliştirilen Laplace dönüşüm operatörü ile çözüm süreci gerçekleştirilmiştir. Bu tür denklemler, klasik denklemlere göre daha karmaşık yapılar sergilemekte olup, çözüm sürecinde konvolüsyonun yapısal katkısı belirgin olmuştur. Elde edilen sonuçlar, çarpımsal analizde konvolüsyonun yalnızca dönüşüm sonrası işlemlerle sınırlı kalmayıp, çözüm uzayının inşasında temel bir araç olabileceğini göstermiştir.

Son olarak çarpımsal integral ifadelerinde, çözüm süreci sırasında çekirdek fonksiyonların çarpımsal çerçevede ifade edilmesi ve dönüşüm operatörlerinin dikkatli kullanılması gerekmiştir. Bu bağlamda, konvolüsyon yalnızca matematiksel bir işlem değil, aynı zamanda çarpımsal integral sistemlerin çözüm algoritmasının merkezinde yer almıştır.

Genel olarak, bu çalışma konvolüsyon yönteminin hem klasik hem de çarpımsal analiz bağlamında güçlü ve esnek bir çözüm yaklaşımı sunduğunu ortaya koymuştur. Özellikle Laplace dönüşüm yöntemine entegre edilerek uygulanan konvolüsyon işlemleri, diferansiyel ve integral sistemlerin çözümünü kolaylaştırmış; aynı zamanda çarpımsal yapıların analitik olarak çözülenebilirliğine katkı sağlamıştır. Gelecek çalışmalarda, bu yaklaşımın fraksiyonel analiz, zaman ölçekleri teorisi ve sistem modelleme uygulamalarıyla genişletilmesi önerilmektedir.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] Aniszewska, D., 2007. Multiplicative Runge-Kutta method. *Nonlinear Dynamics*, 50:265-272.
- [2] Bal, A., Yalçın, N., & Dedetürk, M. (2023). Solutions of Multiplicative Integral Equations via The Multiplicative Power Series Method, *Politeknik Dergisi*, 26(1): 311-320.
- [3] Bartle, R. G., Sherbert, D. S., 2011, *Introduction to Real Analysis*, Wiley& Sons, Incorporated, John, 4:78.
- [4] Bashirov, A. E. (2013). On Line and Double Multiplicative Integrals, *TWMS J. App. Eng. Math.*, 3(1), 103-107.
- [5] Bashirov, A., & Norozpour, S. (2017). On Complex Multiplicative Integration, *TWMS J. App. Eng. Math.*, 7(1), 82-93.
- [6] Bashirov, A., & Rıza, M. (2011). On Complex Multiplicative Differentition, *TWMS J. App. Eng. Math.*, 1(1), 75-85.
- [7] Bashirov, A., Mısırlı, E., & Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 337: 36–48.
- [8] Bashirov, A., Mısırlı, E., Özyapıcı, A., & Tandoğdu, Y. (2011). On Modeling With Multiplicative Differential Equations. *Appl. Math. J. Chinese Univ.*, 26(4):425-438.
- [9] Bhat, A. H., Majid, J., Wani, I. A., Jain, R., & Shah, T. R. (2019). Multiplicative Fourier Transform and Its Applications to Multiplicative Differential Equations, *Journal Of Computer and Mathematical Sciences*, 10(2), 375-383.
- [10] Bhat, A. H., Majid, J., Wani, I., & Jain, R. (2019). Multiplicative Sumudu Transform and Its Applications, *JETIR*, 6(1), 579-589.
- [11] Campbel, D. (1999). *Multiplicative calculus and student projects*.
- [12] Collins, P. J., 2006, *Integral Equation and Picard's Method*, Oxford University Press.
- [13] Çağlıyan, M., Çelik, N., & Doğan, S. (2013). *Adi Diferansiyel Denklemler*. Bursa, Türkiye: Dora Yayıncılık.
- [14] Durmaz, H. (2019). *Çarpımsal İntegral Denklemler Ve Çarpımsal İntegral Denklemlerin Çarpımsal Diferansiyel Denklemler İle Arasındaki İlişkisi*” , MS thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü, Gümüşhane Üniversitesi.
- [15] Ekici, M. (2010, Haziran). *Lineer Singüler Ve Singüler Olmayan İntegral Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma : Fracture Mekanik*, Yüksek Lisans Tezi. Ankara, Türkiye: Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

- [16] Finan, M. (2013). A Second Course in Elementary Ordinary Differential Equations. Arkansas Tech University.
- [17] Grossman, M., & Katz, R. (1972). Non-Newtonian Calculus. Lee Press: Pigeon Cove, Mass.
- [18] Güngör, F., 2010, Diferansiyel Denklemler, İtü Vakfı Yayınları.
- [19] Güngör, N., & Durmaz, H. (2020). Multiplicative Volterra integral equations and the relationship between multiplicative differential equations. Ikonian Journal of Mathematics, 2(2): 9-25.
- [20] Gürefe, Y. (2009, Temmuz). Çarpımsal Analiz Ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi. Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, Türkiye.
- [21] Kasprzak, W., Lysik, B., & Rybaczuk, M. (2004). Dimensions, Invariants Models and Fractals. Wroclaw-Lviv, Poland: Ukrainian Society on Fracture Mechanics, SPOLOM.
- [22] Kosunalp, H.Y.; Bas, S.; Kosunalp, S. An Efficient Solution of Multiplicative Differential Equations through Laguerre Polynomials. Symmetry 2024, 16, 748
- [23] Nagle, R. N., Saff, E. B., Snider, D. A., 1999, Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems, Addison Wesley.
- [24] L.Ross, S. (1984). Differential equations. Inc. New York: John Wiley & Sons.
- [25] M, R., Özyapıcı, A., & Mısırlı, E. (2009). Multiplicative Finite Difference Methods, Quarterly of Applied Mathematics, LXVII (4), 745-754.
- [26] Mısırlı, E., & Gürefe, Y. (2011). Multiplicative Adams Bashforth-Moulton Methods, Numer Algor, 57, 425-439.
- [27] Nagle, R., Saff, E., & Snider, A. (2018). Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems. Boston: Pearson.
- [28] Özyapıcı, A. (2009, Şubat). Çarpımsal Analiz Ve Uygulamaları, Doktora Tezi. İzmir, Türkiye: Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [29] Rudin, W., 1976, Principle of Mathematical Analysis, McGraw Hill,
- [30] Rybaczuk, M., Kedzia, A., & Zielinski, W. (2001). The concepts of physical and fractional dimensions II. The differential calculus in dimensional spaces. Chaos Solutions Fractals 12, 2537-2552.
- [31] Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus, Primus IX, No. 4: 310-326.
- [32] Volterra, V., & Hostinsky, B. (1938). Operations Infinitesimales Lineares. Paris: Herman.

- [33] Yalçın, N. (2016). Çarpımsal (Multiplikatif) Türev Ve Çarpımsal Lineer Diferansiyel Denklemler, Doktora Tezi. Erzurum, Türkiye: Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [34] Yalçın, N., & Çelik, E. (2019). Çarpımsal Cauchy-Euler ve Legendre Diferansiyel Denklemleri. Gümüşhane Üniversitesi, 9 (3): 373-382.
- [35] Yalçın, N., & Dedetürk, M. (2021). Solutions of multiplicative ordinary differential equations via the multiplicative differential transform method.
- [36] Yalçın, N., Çelik, E., & Gökdoğan, A. (2016). Multiplicative Laplace transform and its applications. Gümüşhane Üniversitesi, 9984-9995.