



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL HARMONİK P-FONKSİYONLAR İÇİN
BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Volkan OLUCAK
172110005

2020

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇARPIMSAL HARMONİK P-FONKSİYONLAR İÇİN
BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : **Volkan OLUCAK**
ORCID : **0000-0002-2890-7179**
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : **Matemaik**

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. İmdat İŞCAN**
ORCID : **0000-0001-6749-0591**

**Haziran 2020
GİRESUN**

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇARPIMSAL HARMONİK P-FONKSİYONLAR İÇİN
BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Volkan OLUCAK

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 22/06/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Erhan SET
Jüri Başkanı**

**Doç. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Dr. Öğr. Üyesi
Sercan TURHAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Volkan OLUCAK
../06/2020

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tez çalışmalarım kapsamında, çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde tecrübelerini ve bilgilerini esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Sayın Doç.Dr. İmdat İŞCAN'a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım. Çalışmalarım sırasında her türlü desteği ve yardımı benden esirgemeyen, Sayın Dr. Öğr.Üy.Serdar SOYLU'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca katkılarından dolayı Matematik bölümü hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazma aşamamda her anlamda yanımda olan saygı değer meslektaşlarım Merve ŞİMŞEK ve Selin YAMAN sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	6
2.1. Ön Bilgiler	6
2.2. Çarpımsal P-Fonksiyonların Tanımı ve Bazı Özellikleri	18
2.3. Bazı Eşitsizlikler	19
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	21
3.1. Çarpımsal P-Fonksiyonlar	21
3.2. Çarpımsal P-Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri	21
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	25
4.1. Çarpımsal Harmonik P-Fonksiyonların Tanımı ve Bazı Özellikleri	25
4.2. Çarpımsal Harmonik P-Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği	29
4.3. Özel Ortalamalar İçin Bazı Uygulamalar	34
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	36
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	40

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

I^0	: I 'nin İçi
I	: $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\forall$	: Her
f'	: f fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Konveks Fonksiyon Grafiği	3
Şekil 2.1. Konveks Kümeler	6
Şekil 2.2. Konveks Olmayan Kümeler	6



ÇARPIMSAL HARMONİK P-FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

ÖZET

Bu tezde çarpımsal harmonik P-fonksiyonu adı verilen yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır. Bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Tezin birinci bölümde sırasıyla eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonların tarihçesi ve konvekslik hakkında giriş niteliğinde bilgiler yer almaktadır. İkinci bölümde tezin kuramsal temelleri için gerekli temel kavramlar, tanımlar, teoremler verilmiş ve ayrıca konveks fonksiyon sınıflarının birbiriyle olan ilişkisi literatür çalışmasıyla da desteklenerek aktarılmıştır. Üçüncü bölümde tez çalışmasında kullanılan klasik eşitsizlikleri içeren teoremler, ispatları ve bu çalışmaya kuramsal temel teşkil eden bazı eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise çarpımsal harmonik P-fonksiyon isminde yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanarak, fonksiyon sınıfının literatürle olan ilişkisi verilmiş, fonksiyonların bu sınıfının bazı cebirsel özellikleri incelenmiş ve daha sonra yine literatürde olan bir özdeşlik yardımı ile çarpımsal harmonik P-fonksiyonlar sınıfı için Hermite-Hadamard tipli bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyon, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, İntegral Eşitsizlikleri, Çarpımsal P-fonksiyonlar, Harmonik Konveks Fonksiyonlar, Çarpımsal Harmonik P-fonksiyonlar.

MULTIPLICATIVELY HARMONICALLY P-FUNCTIONS AND SOME RELATED INEQUALITIES

SUMMARY

In this thesis, a new function class called multiplicative harmonic P-function is defined. Some new Hermite-Hadamard type inequalities are given.

History of convex functions, place for input information about convexity. In the second part, basic concepts, definitions, theorems are given for the theoretical foundations of the thesis and also the relation between convex function classes is supported by the literature study. In the fourth chapter, with the definition of a new function class named multiplicative harmonic P-function, the relation of the function class with the literature is given, some algebraic properties of this class of functions are examined, and then Hermite-Hadamard type for the class of multiplicate harmonic P-functions with the help of identity in the literature. some new inequalities have been achieved.

Keywords: Convexity, Hermite-Hadamard Inequality, Integral Inequalities, Multiplicatively P-functions, Harmonic Convex Functions, Multiplicatively Harmonic P-functions

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematikte eşitsizliklerin önemi büyüktür. Kısaca söylemek gerekirse iki değerin birbirlerine göre durumlarını ifade eden ilişkidir. Eşitsizlik " $\neq$ " işaretini ilk bulan kişinin kim olduğu bilinmiyor; fakat ilk olarak 18. yüzyılda Leonhard Euler tarafından kullanıldığı düşünülüyor.

Büyüktür ($>$) ve küçüktür ($<$) işaretleri ise 1631 yılında, İngiliz matematikçi Thomas Harriot'un "Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas" başlıklı kitabında ilk olarak kullanılmıştır.

18. ve 19.'yy. da K.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Chebyshev gibi bilinen matematikçilerin eşitsizlik konusunda çalışmaları mevcut olsa da 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitap, bu alanda verilen ilk yapıttır. Bu çalışmayı takiben E.F. Beckenbach ve R. Belmann (Beckenbach, E.F. and Bellman,1961) tarafından yazılan adlı eserlerdir "Inequalities". Bu iki eser çoğu matematikçinin dikkatini çekmiş ve ilerleyen dönemlerde de bu anlamda fazlasıyla çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bir kısmı "Differential Inequalities"(Szarki j. 1965), "Analitic Inequalities" (Mitrinoviç D.S.,1970), "Inequalities Involving Functions and Their Derivates" (Mitrinoviç D.S.,1991), "Classical and New Inequalities in Analysis"(Mitrinoviç D.S.,1993) dır.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler?" sorusunu 1978 yılında Richard Bellman şu şekilde cevaplamıştır: "Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizliklerde bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir."

Son yıllarda eşitsizlik konulu çalışmaların matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalarına katkıları büyüktür. Bunlardan bazıları; Hadamard, Ostrowski, Grüss, Chebyshev, Yamuk ve Jensen tipli eşitsizlikler şeklinde sıralanabilir. Eşitsizliklerde önemli bir yeri olan kavramlardan birisi de konveks fonksiyonlar kavramıdır. Kavram olarak konvekslik eşitsizliklerle tanımlandığından konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizlikler önemli bir yer tutmaktadır. Gerçekte her zaman ve birçok yolla konvekslik kavramıyla karşılaşırız ve deneyimliyoruz. Çok basit bir örnek olarak dik pozisyonda durduğumuzda ağırlık merkezimizin dik izdüşümü ayağımızın kapladığı konveks alanın içinde kalır. Böylece dengemizi sağlayabilmekteyiz. Bununla beraber günlük hayatımızda konveksiliğin büyük etkileri vardır. Örneğin endüstri, iş, sağlık ve sanat alanlarında birçok uygulaması vardır.

Konveks fonksiyon teorisi konveksliğin genel konularının bir parçasıdır. Çünkü konveks bir fonksiyonun görüntü kümesi konveks bir kümedir. Konveks fonksiyonlar teorisi matematiğin tüm alanlarına dokunan önemli bir teoridir. Konvekslik konusunu gerektiren matematiğin ilk konularından birisi çizgisel analizdir. İkinci türev testi konveksiliğin bulunmasında bize sonucu veren güçlü bir araçtır. Mucizevi şekilde Hessian test birkaç değişken durumu için doğal genişlemeye sahiptir. Optimizasyon ve kontrol teorisinde bazı karışık problemlerden hareketle konveks fonksiyonlar teorisi, sonsuz boyutlu Banach uzaylarının, çalışma alanlarına genişletilmektedir.

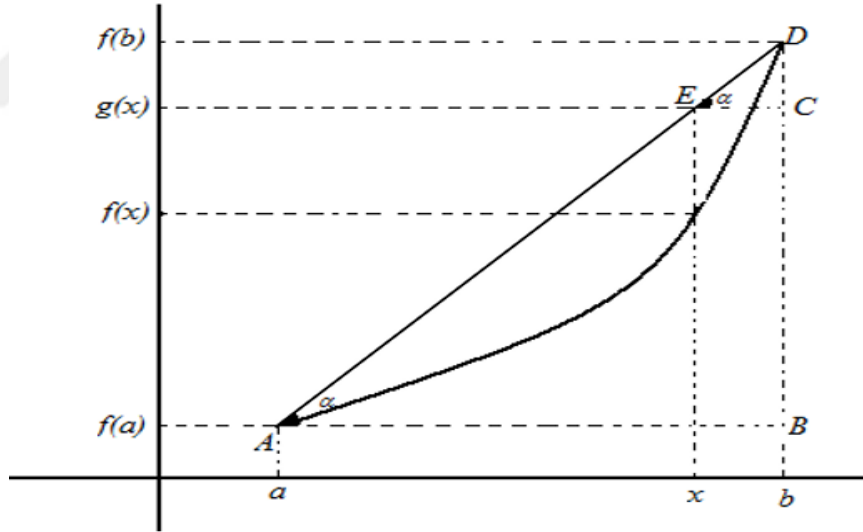
Bununla birlikte matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. “Konvekslik” kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881’de elde edilen bir sonucun yayınlanması ile ortaya çıkmıştır. Arşimed, konveks bir şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir konveks şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu fark etmiştir.

Niculescu (2018), konveksiliğin bu kadar yaygın kullanım alanının olmasını iki ana nedene bağlamaktadır. Bunlardan birincisi “maksimum değer, sınır noktasında elde edilmesidir”. İkincisi ise “Her yerel minimum noktanın aslında mutlak minimum nokta olması ve ek olarak her konveks fonksiyonun en az bir minimum noktaya sahip olmasıdır” (Mumcu İ.,2019).

Ayrıca konveks fonksiyonlar, eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonların uygulamasının bir sonucu olan birçok eşitsizlik ile bağlantısı vardır. Örneğin Hölder ve Minkowski gibi genel eşitsizlikler konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliğinin bir sonucudur. Bu bağlamda konveks fonksiyonun tanımında aslında bir eşitsizliktir. Dolayısıyla konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinde çok önemli bir role sahiptir. 1883 yılında Hermite tarafından elde edilen yeni bir eşitsizlik bundan on yıl sonra Hadamard tarafından yeniden ele alınarak bu çalışma şimdi günümüzde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği vermiştir. Buna ek olarak, bu ifadenin her iki tarafı sadece afin fonksiyonlar için birbirine eşittir (yani, $mx + n$,sekindeki fonksiyonlar için).



Şekil.1.1 Konveks fonksiyon grafiği

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveksliği her $u, v \in [a, b]$ için

$f \downarrow [u, v]$ fonksiyonunun grafiğinin $(u, f(u))$ ve $(v, f(v))$ noktalarını birleştiren kırı'ın altında kalmasıdır. Yukarıdaki şekilden,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

yazılır. Buradan da bu eşitsizliğin her iki tarafı üzerinde $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinden integral alınırsa ilk eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir.

f fonksiyonunun sürekli olduğu kabul edilirse f afin olmadığında

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir, ve afin olduğunda

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

olur. İfadenin sol tarafını elde etmekte oldukça kolaydır.

Konveks fonksiyonlar teorisi çekirdeğinde aritmetik ortalamaları (verilen bir fonksiyonlar belli bazı değişkenlerin bileşkesi) kıyaslayan bir teoridir. Buna benzer teoriler ortalama çiftlerini (tanım ve yardımcı tanım kümesinde) dikkate alarak geliştirilebilir (log konvekslik tanım gibi) ve burada Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ispatlanabilir (Karacalı N.,2010).

Konveks fonksiyonların sistematik başlangıcı, Johan Ludwig William Valdemar Jensen'e (1859-1925) dayanmaktadır. Jensen'den önce de çalışmalar olmuştur, bunlar arasında Ch. Hermite, Hadamard, O. Hölder ve O. Stolz vardır. İlerleyen yıllarda Fejer (1880-1959) Hermite'in (1881-Mathesis) sonuçlarının genelleştirilmiş halini sunmuştur. 20. yüzyıl boyunca geometrik fonksiyonel analizde, matematiksel ekonomide, konveks analizde ve lineer olmayan optimizasyonda önemli araştırmalar yapılmıştır. Öte yandan kanveksliğin farklı türleri de tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları, Godunova-Levin tipli fonksiyonlar (Mitrinoviç D.S.,1993), r-konveks fonksiyonlar (Gill P.M.,1997), P-fonksiyonlar (Pearce C.E.M ve Pubinow,1999), P-konveks fonksiyonlar (Zhang K.S. ve Wan S.,2007), Harmonik konveks fonksiyonlar (İşcan İ.,2014) şeklindedir.

Son yıllarda Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler ve integral eşitsizliklerine ilgi artmıştır. S.S. Dragomir, B.G. Pachpatte, G. Zabandan gibi araştırmacıların bu alanda yapmış çalışmaları mevcuttur. B.G. Pachpatte (Pachpatte, B.G.,2003) elemanter işlemler kullanarak konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler vermiştir. M. Tunç (Tunç, M.,2012) makalesinde, Pachpatte'nin sonuçlarına benzer eşitsizlikler vermiştir. S.S. Dragomir (Dragomir, S.S.,2011), konveks fonksiyonlar için var olan bir eşitsizliğin operatör konveks fonksiyonlar için de sağlandığı göstermiştir. G. Zabandan (Zabandan, G.,2019), Dragomir'in konveks fonksiyonlar için kullandığı eşitsizliğin bir genellemesini yapmıştır. Son yıllarda İşcan tarafından (İşcan İ.,2014) harmonik konveks fonksiyon tanımı verilmiştir ve bununla ilgili Hermite-Hadamard, Simpson, Ostrowski gibi pek çok yazar tarafından integral eşitsizlikleri çalışılmıştır. Daha sonra Kadakal tarafından (Kadakal H., 2018) çarpımsal P-fonksiyonlarının tanımı verilmiştir. Bu tezde de İşcan ve Kadakal'ın çalışmalarından yola çıkarak yeni bir fonksiyon sınıfı olan çarpımsal harmonik P-fonksiyon tanımlanmıştır. Fonksiyonların bu sınıfı ile daha önce elde edilen çarpımsal P-fonksiyonlar sınıfı arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Bu fonksiyon sınıfına ait fonksiyonlara örnekler verilmiştir. Daha sonra İşcan tarafından (İşcan İ.,2014) verilen bir özdeşlik yardımıyla çarpımsal harmonik P-fonksiyon sınıfı için bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde gerekli olan bazı temel kavramlar, tanımlar, teoremler ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

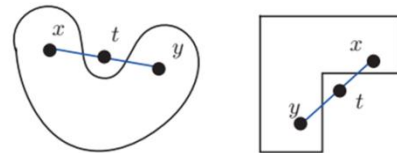
Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere;

$$B = \{z \in L : z = tx + (1 - t)y, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A.$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar, M., 2000).



Şekil 2.1. Konveks kümeler



Şekil 2.2. Konveks olmayan kümeler

Tanım 2.1.2. (Konveks Fonksiyon): $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I$ ve $\theta \in [0,1]$ için

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye bir konveks fonksiyon denir.

Yukarıdaki formüle eş değer olarak her $x, y, z \in I$ için aşağıdaki eşitsizlik verebilir.

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

Eğer eşitsizlik (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\theta \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić, J.,1992). Yani,

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

ise fonksiyona kesin konvekstir denir.

Konveks fonksiyon diyebilmek için bazı gereklilikler aşağıda sıralanmıştır.

1. f 'nin I aralığı üzerinde konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart seçilen herhangi bir $c \in I$ noktası için $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$,nin I aralığında artan bir fonksiyon olmasıdır.

2. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyon olmasıdır.

3. f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f 'nin konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.
4. f'' , (a, b) aralığında mevcut olsun. Bu durumda f 'nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.
5. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a, b)$ için f fonksiyonunun en az bir destek doğruya sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \quad \forall x \in (a, b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ , x_0 'a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman

$$\lambda = f'(x_0) \text{ ya da } f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \text{ ise } \lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)] \text{ dir.}$$

6. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Pečarić, J.,1992)

Teorem 2.1.1. (Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (2.2)$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Eğer bu eşitsizlikte f fonksiyonu konkav ise eşitsizlik tersine döner (Hadamard, J.,1893) (Hermite, Ch. 1883).

İspat: f fonksiyonu konveks olduğundan $[a, b]$ aralığında sürekli ve sınırlıdır. Bundan dolayı f , $[a, b]$ 'de integrallenebilir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı için

konveksliğin geometrik yorumunu kullanarak $x = ta + (1 - t)b, t \in [0,1]$ alalım.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \\ &\leq f(a) \int_0^1 t dt + f(b) \int_0^1 (1-t) dt \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2}\end{aligned}$$

olup, eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir. Şimdi sol tarafını ispatlayalım. Bunun için

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right]$$

biçiminde yazalım. Elde edilen birinci integralde $x = a + \frac{t(b-a)}{2}$ ve ikinci integralde

$x = b - \frac{t(b-a)}{2}$ değişken değiştirmeleri yapılırsa, buradan;

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

ve

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = -\frac{b-a}{2} \int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

yazılabilir. Elde edilen integral toplamında f 'in konveksliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) \right] dt \\ &\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genellemesi olan Fejér eşitsizliği aşağıdaki gibidir. (Fejér, L.,1906).

Teorem 2.1.2. (Fejér eşitsizliği): $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx \leq \int_a^b f(x) w(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx. \quad (2.3)$$

Tanım 2.1.3. (Harmonik Konvekslik): $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reel sayılarda bir aralık olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \quad (2.4)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlikte “ $\leq$ ” yerine “ $\geq$ ” kullanılırsa, bu durumda f 'ye harmonik konkav denir (İşcan, İ.,2014).

Önerme 2.1.1. $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gerçekte (reel) bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

- i) $I \subseteq (0, \infty)$, f konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu takdirde f fonksiyonu harmonik konvektir.
- ii) $I \subseteq (0, \infty)$, f harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu takdirde f fonksiyonu konvektir.
- iii) $I \subseteq (-\infty, 0)$, f harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu takdirde f fonksiyonu konvektir.
- iv) $I \subseteq (-\infty, 0)$, f konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu takdirde f fonksiyonu harmonik konvektir.

Harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.3. (Harmonik konveks Fonksiyonlarda H-H Eşitsizliği): $a, b \in I$ öyle ki $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (2.5)$$

İspat: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks olduğundan dolayı $\forall x, y \in I$ için ve $t = \frac{1}{2}$ için harmonik konveksliğin $f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$ şeklindeki tanımının yardımıyla

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq \frac{f(y) + f(x)}{2}$$

olur. Eğer bu eşitsizlikte $x = \frac{ab}{ta+(1-t)b}$, $y = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$ olarak alınırsa

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}$$

yazılabilir. Daha sonra eşitsizliğin t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında integralini alınırsa

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt + \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) dt \right]$$

elde edilir. Köşeli parantezin içindeki her bir integral $\frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx$ ifadesine eşit olduğundan, eşitsizliğin sol tarafı ispatlanır.

f, I da harmonik konveks olduğundan; $a < b$ olan $\forall a, b \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

yazılır. Buradan $t \in [0,1]$ için integral alınırsa

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) dt &= \frac{ab}{(b-a)} \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du \\ &= \frac{ab}{(b-a)} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

olur.

Şimdi $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 1$ biçiminde tanımlansın. Böylece her $x, y \in (0, \infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$1 = f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) = tf(y) + (1-t)f(x) = 1$$

olur. f fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında harmonik konveks olduğundan,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = 1, \quad \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx = 1 \text{ ve } \frac{f(a) + f(b)}{2} = 1$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.1.2.: $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ verilen bir fonksiyon olsun ve $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ olsun.

f, I da harmonik konvektir $\Leftrightarrow f \circ g^{-1}, g(I) \subset (0, \infty)$ alt kümesinde konvektir.

İspat : $\Rightarrow u, v \in g(I)$ ve $t \in [0,1]$ keyfi alınan noktalar olsun.

Gösterilmesi gereken :

$$(f \circ g)(tu + (1-t)v) \leq t(f \circ g)(u) + (1-t)(f \circ g)(v)$$

$$g(I) = \left\{ g(x) = \frac{1}{x}, x \in I \right\}$$

$u, v \in g(I)$ olduğunda $\exists a, b \in I: u = \frac{1}{a}, v = \frac{1}{b}$ dir.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f \circ g^{-1})(tu + (1-t)v) &= (f \circ g^{-1})\left(\frac{t}{a} + \frac{(1-t)}{b}\right) \\ &= (f \circ g^{-1})\left(\frac{tb + (1-t)a}{ab}\right) = f\left(g^{-1}\left(\frac{tb + (1-t)a}{ab}\right)\right) \\ &= f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \\ &= t(f \circ g^{-1})(u) + (1-t)(f \circ g^{-1})(v) \end{aligned}$$

olur.

" $\Leftarrow$ " $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ keyfi alınsın.

Gösterilmesi gereken: $f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ olduğudur.

$a, b \in I \Rightarrow g(a) = \frac{1}{a}$ ve $g(b) = \frac{1}{b} \in g(I)$ ve $f \circ g^{-1}, g(I)$ 'da konveks olduğundan; $t \in [0,1]$ keyfi sayısı için

$$(f \circ g^{-1})\left(t\frac{1}{a} + (1-t)\frac{1}{b}\right) \leq t(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{a}\right) + (1-t)(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{b}\right) \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow f\left(g^{-1}\left(\frac{tb + (1-t)a}{ab}\right)\right) \leq tf\left(g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\right) + (1-t)f\left(g^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

olur.

Uyarı 2.1.1: Yukarıdaki önermeyi kullanarak harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi kolayca ispatlanabilir.

$f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks bir fonksiyon ise $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ olmak üzere yukarıdaki önermeye göre $f \circ g^{-1}, g(I)$ 'da konveks bir fonksiyondur. $u > v$ olan $\forall u, v \in g(I)$ için,

$$(f \circ g^{-1})\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{u-v} \int_v^u (f \circ g^{-1})(x) dx \leq \frac{(f \circ g^{-1})(u) + (f \circ g^{-1})(v)}{2}$$

$u, v \in g(I)$ olduğu $\exists a, b \in I: u = g(a) = \frac{1}{a}$, $v = g(b) = \frac{1}{b}$ dir.

$$\left[u > v \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b \right]$$

$$\Rightarrow (f \circ g^{-1})\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right) \leq \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(g^{-1}(x)) dx \leq \frac{(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{a}\right) + (f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{b}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{(b-a)} \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(g^{-1}(x)) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$u = g(x) = \frac{1}{x}, du = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{u^2}$$

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(g^{-1}(x)) dx = \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du$$

olur.

F. Chen ve S. Wu tarafından harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği aşağıdaki gibi sunulmuştur (Chen, F. and Wu S.,2014).

Teorem 2.1.4. (Harmonik Konveks Fonksiyonlarda Hermite-Hadamard-Fejér):

$a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ve $w: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{2ab}{a+b}$ 'ye göre harmonik simetrik ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx. \quad (2.6)$$

Önerme 2.1.3: $a, b \in \mathcal{R}^+$ olsun.

Harmonik ortalama: $H = H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$

Geometrik ortalama: $G = G(a, b) = \sqrt{ab}$

Aritmetik ortalama: $A = A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ olmak üzere $H \leq G \leq A$ dir.

Önerme 2.1.4: $a, b \in \mathcal{R}^+$ ve $t \in [0, 1]$ keyfi olsun .

Ağırlıklı (genelleştirilmiş) Harmonik Ortalama: $H_t = H_t(a, b) = \frac{ab}{tb + (1-t)a}$

Ağırlıklı Geometrik ortalama: $G_t = G_t(a, b) = a^t b^{1-t}$

Ağırlıklı Aritmetik ortalama: $A_t = A_t(a, b) = ta + (1-t)b$ ise $H_t \leq G_t \leq A_t$ dir.

İspat: (1) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\ln x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da konvektir (Çünkü $f(x) = -\ln x$ fonsiyonunun ikinci türevi pozitiftir). Yani $\forall a, b \in \mathcal{R}^+$ ve $\forall t \in [0, 1]$ alınırsa,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (2.7)$$

$$-\ln(ta + (1-t)b) \leq t \ln a - (1-t) \ln b = -\ln(a^t b^{1-t})$$

$$\ln A_t \geq \ln G_t \geq e^{\ln A_t} \geq e^{\ln G_t}$$

$$G_t \leq A_t \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ \boxed{} & \boxed{} \end{array}$$

$$H_t \leq G_t \leq A_t$$

$$\begin{array}{c} \boxed{} \\ 2 \end{array}$$

(2) için ; $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ konveks olup $\forall (a, b) \in [0, \infty)$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7)'den

$$\frac{1}{ta + (1-t)b} = \frac{1}{A_t} \leq \frac{t}{a} + \frac{1-t}{b} = \frac{tb + (1-t)a}{ab} = \frac{1}{H_t}$$

$$\Rightarrow H_t \leq A_t$$

(3) için; kabul edelim ki $\exists (a, b) \in \mathcal{R}^+$ ve $\exists t \in [0, 1]$ için öyle ki $H_t > G_t$ olsun.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ln H_t > \ln G_t \\ &\Rightarrow \ln(ab) - \ln(tb + (1-t)a) > \ln(a^t b^{1-t}) = t \ln a + (1-t) \ln b \\ &\Rightarrow -\ln(tb + (1-t)a) > t \ln a + (1-t) \ln b - \ln ab \\ &= -(1-t) \ln a - t \ln b \\ &= -\ln(a^{1-t} b^t) \\ &\Rightarrow -\ln(A_{1-t}) > -\ln G_{1-t} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_{1-t} < G_{1-t}$ olur ki bu çelişkidir. O halde varsayım yapılmıştır. Yani $\forall a, b \in \mathcal{R}^+$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için $H_t \leq G_t$ dir.

Sonuç olarak $H_t \leq G_t \leq A_t$ ispatlanmış olur.

Önerme 2.1.5: $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, verilen bir fonksiyon olsun.

- i) f azalmayan ve konveks ise f harmonik konvektir.
- ii) f artmayan ve harmonik konveks ise f konvektir.

İspat: Bilindiği üzere; $\forall a, b \in I$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için

$$H_t = \frac{ab}{tb + (1-t)a} \leq A_t \leq ta + (1-t)b$$

dir.

i) f azalmayan bir fonksiyon ise yukarıdaki eşitsizlikten

$$f(H_t) \leq f(A_t) = f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

olur.

ii) f artmayan bir fonksiyon ise yukarıdaki eşitsizlikten

$$f(A_t) \leq f(H_t) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

olur.

Tanım 2.1.4. (P-fonksiyonu): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon olsun. Eğer tüm $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y). \quad (2.8)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonunun P-fonksiyonu olduğu söylenir.

Bir I aralığı üzerinde tanımlı olan tüm P-fonksiyonlarının kümesini $P(I)$ dizisi ile ifade elde edilir. $P(I)$ tüm negatif olmayan ve yarı konveks fonksiyonları içermektedir.

(Dragomir SS and Pearce C.E.M.,2000) de, P-fonksiyonlar sınıfı için Hadamard tipli aşağıdaki eşitsizlik ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.5. $f \in P(I)$, $a, b \in I$ 'yı $a < b$ de $f \in L[a, b]$ olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq 2[f(a) + f(b)]$$

eşitsizlikleri sağlanır. Her iki eşitsizlikte mümkün olanın en iyisidir.

İspat: $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$ ve $\lambda = 1/2$ alınır (2.8) den

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(at + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)$$

elde edilir. Buradan t ye göre integral alınır

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 (f(at + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)) dt = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

bulunur. Böylece ilk eşitsizlik ispatlanmış olur. İkinci eşitsizliğin ispatı, $x = a$ ve $y = b$ ile (2.8) kullanılarak ve $[0,1]$ üzerinden t 'ye göre integral alınarak integral kolayca görülür.

Tanım 2.1.5: (İşcan İ. ve ark., 2014) $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de bir fonksiyon olsun. Eğer tüm $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq f(x) + f(y).$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f 'ye I 'da harmonik P-fonksiyonu denir ve fonksiyonların bu sınıfı $HP(I)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.5. (İ. İşcan İ. ve ark., 2014) $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye azalmayan bir P-fonksiyonu ise bu durumda $f \in HP(I)$ olur.

Önerme 2.1.6. (İ. İşcan ve ark., 2014) $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye olsun. Eğer $f \in HP(I)$ azalmayan bir fonksiyon ise f, I 'da P-fonksiyonudur.

Harmonik P-fonksiyonları için Hermite-Hadamard'ın eşitsizlikleri aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 2.1.6: (İ. İşcan ve ark., 2014) $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 'yi bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer f $[a, b]$ 'de bir harmonik P-fonksiyonu ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{2ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du \leq 2[f(a) + f(b)]. \quad (2.9)$$

2.2. ÇARPIMSAL P-FONKSİYONLARIN TANIMI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, H. Kadakal tarafından 2018'de (Kadakal H., 2018) tanımlanan çarpımsal P-fonksiyonlarının bazı cebirsel özelliklerini vereceğiz.

Tanım 2.2.1: $I \neq \emptyset, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x)f(y).$$

eşitsizliği sağlanır ise f 'ye I üzerinde bir çarpımsal P-fonksiyonu denir.

Uyarı 2.2.1. Çarpımsal P-fonksiyonlarının değer kümesi 1'den büyük veya eşittir.

İspat: Her $x, y \in I$ için Tanım 2.2.1'de $t = 1$ alınırsa, her $x, y \in I$ çarpımsal P-fonksiyonlarının değer kümesi 1'den büyük veya eşittir.

$$f(x) \leq f(x)f(y) \Rightarrow f(x)[1 - f(y)] \leq 0.$$

Burada, $f(x) \geq 0$ olduğunda $f(y) \geq 1$ elde edilir. Benzer şekilde Tanım 2.2.1'de $t = 0$ alınırsa her $x, y \in I$ için

$$f(y) \leq f(x)f(y) \Rightarrow f(y)[1 - f(x)] \leq 0.$$

$f(y) \geq 0$ olduğunda $f(x) \geq 1$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.2.1. $f: I \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = x$ fonksiyonu, çarpımsal P-fonksiyonudur. Gerçekten $x \leq y$ olan her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için $tx + (1 - t)y \leq y \leq xy$, olduğundan $f(x) = x$ 'in çarpımsal bir P-fonksiyonu olduğu kolayca görülür.

Örnek 2.2.2. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $t \in [0, 1]$ kapalı aralığı için $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = |x| + 1$ fonksiyonu, çarpımsal P-fonksiyonudur. Gerçektende

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &= |tx + (1 - t)y| + 1 \\ &\leq t|x| + (1 - t)|y| + 1 \\ &= t|x| + (1 - t)|y| + t + 1 - t \\ &= t(1 + |x|) + (1 - t)(1 + |y|) \\ &\leq t(1 + |x|)(1 + |y|) + (1 - t)(1 + |y|)(1 + |x|) \\ &= (1 + |x|)(1 + |y|) \\ &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

dir.

Uyarı 2.2.2. $f: I \rightarrow [1, \infty)$ bir fonksiyonu verilsin. Eğer f konveks bir fonksiyon ise aynı zamanda f çarpımsal bir P-fonksiyonudur. Her $x, y \in I$, $t \in [0, 1]$ için $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \leq f(x)f(y)$ olduğundan, $[1, \infty)$ aralığı her konveks fonksiyon çarpımsal olarak P-fonksiyonudur.

2.3. Bazı Eşitsizlikler

Tanım 2.3.1 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerli olur.

Tanım 2.3.2. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun, f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise Hölder eşitsizliğine göre;

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)| dx &= \int_a^b |f(x)|^{1/p} \left[|f(x)|^{1/q} |g(x)| \right] dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{1/q} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ yazılırsa $q = 1$ için de bu eşitsizlik sağlanır ve böylece istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde çalışmamıza yön verecek olan H. Kadakal tarafından 2018'de (Kadakal H.,2018) tanımlanan çarpımsal P-fonksiyonları için elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

3.1. ÇARPIMSAL P-FONKSİYONLAR

Teorem 3.1.1. $f, g: I \rightarrow [1, \infty)$ olsun. f ve g çarpımsal P-fonksiyon ise fg de çarpımsal P-fonksiyondur.

İspat. $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(fg)(tx + (1-t)y) &= f(tx + (1-t)y)g(tx + (1-t)y) \\ &\leq [f(x)f(y)][g(x)g(y)] \\ &= [f(x)g(x)][f(y)g(y)] \\ &= [(fg)(x)][(fg)(y)].\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2. $f, g: I \rightarrow [1, \infty)$ olsun. f çarpımsal P-fonksiyon ve azalan g konveks fonksiyon ise fog çarpımsal P-fonksiyondur.

İspat. $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(fog)(tx + (1-t)y) &= f(g(tx + (1-t)y)) \\ &\leq f(tg(x) + (1-t)g(y)) \\ &\leq f(g(x))f(g(y)) \\ &= (fog)(x)(fog)(y)\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. ÇARPIMSAL P-FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLERİ

Aşağıda (Kadalkal H., 2018), H. Kadalkal tarafından çarpımsal P-fonksiyon için aşağıdaki Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerini verilmiştir.

Lemma 3.2.1. $f: I^\circ \rightarrow \mathbb{R}$, I° de türevlenebilir bir fonksiyon $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ ise aşağıda özdeşlik sağlanır. (Dragomir S.S. ve Agarwal R.P., 1998).

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) |f'(ta + (1-t)b)| dt. \quad (3.1)$$

Teorem 3.2.1. $f: I \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu, bir çarpımsal P-fonksiyon olsun. $f \in L[a, b]$ ise, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} i) \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) f(a+b-x) dx \leq [f(a)f(b)]^2 \\ ii) \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq f(a)f(b) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq [f(a)f(b)]^2. \end{aligned}$$

Uyarı 3.2.1. Yukarıdaki teorem (i) ve (ii) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) f(a+b-x) dx \\ &\leq f(a)f(b) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq [f(a)f(b)]^2. \end{aligned}$$

İspat. $A_t = ta + (1-t)b$ olsun. f çarpımsal P-fonksiyonu olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{A_t + A_{1-t}}{2}\right) \leq f(A_t + A_{1-t}) \leq f(a)f(b)f(A_t) \leq [f(a)f(b)]^2$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliklerde t 'ye göre (0,1) üzerinden integral alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.2. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $|f'|$ çarpımsal P-fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{4}$$

eşitsizlik geçerlidir.

İspat. Lemma 3.2.1 ve $|f'|$ nin çarpımsal P-fonksiyon olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \\ &\leq \frac{b-a}{2} |f'(a)||f'(b)| \int_0^1 |1-2t| dt \\ &= \frac{(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{4} \end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I° de türevlenebilir bir fonksiyon olsun $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ için $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu çarpımsal P-fonksiyon ise $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} |f'(a)||f'(b)|. \quad (3.2)$$

İspat. Lemma 3.2.1, Hölder eşitsizliği, üçgen eşitsizliği ve $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonunun çarpımsal P-fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) |f'(ta + (1-t)b)| dt \\ &\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\ &= \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{1/q} \\
&= \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{1/p} |f'(a)| |f'(b)|
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4. $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ de türevlenebilir bir fonksiyon, $q \in \mathbb{R}, q > 1$, $|f'|^q$ çarpımsal P-fonksiyon ise, $a, b \in I, a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} |f'(a)| |f'(b)|. \quad (3.3)$$

İspat. Lemma 3.2.1, Power Mean eşitsizliği ve $|f'|^q$ 'nin çarpımsal P-fonksiyon olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \\
&\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1-1/q} \left(\int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
&\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1-1/q} \left(\int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{1/q} \\
&= \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1-1/q} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1/q} |f'(a)| |f'(b)| \\
&= \frac{b-a}{4} |f'(a)| |f'(b)|
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. ÇARPIMSAL HARMONİK P-FONKSİYONLARIN TANIMI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde öncelikle yeni bir tanım olan çarpımsal Harmonik P-fonksiyon tanımı verilir ve daha sonra fonksiyonların bu sınıfının bazı cebirsel özellikler verilir.

Tanım 4.1.1. $I \neq \emptyset, \mathbb{R} \setminus \{0\}$ da bir aralık olsun. Eğer tüm $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq f(x)f(y) \quad (4.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa $f: I \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna çarpımsal harmonik P-fonksiyon denir.

I aralığında tüm çarpımsal harmonik P-fonksiyonlarının sınıfını MHP(I) ile gösterilir.

Uyarı 4.1.1. $f \in MHP(I)$ ise, f 'nin değer kümesi $[1, \infty)$ aralığındır. Gerçekten (4.1) eşitsizliğinde $t = 1$ alınırsa;

$$f(x) \leq f(x)f(y) \Rightarrow f(x)[1 - f(y)] \leq 0$$

olur.

Her $x \in I$ için $f(x) \geq 0$ olduğu için her $y \in I$ için $f(y) \geq 1$ 'i elde edilir. Aynı şekilde (4.1) eşitsizliğinde $t = 0$ alınırsa

$$f(y) \leq f(x)f(y) \Rightarrow f(y)[1 - f(x)] \leq 0$$

olup $f(y) \geq 0$ olduğundan, her $x \in I$ için $f(x) \geq 1$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.1. $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ve $f(x) = x$ fonksiyonları bir çarpımsal harmonik P-fonksiyondur. Gerçekten $x < y$ olmak üzere $x, y \in [1, \infty)$ için

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) = \frac{xy}{ty + (1-t)x} \leq y \leq xy = f(x)f(y)$$

olduğundan f 'nin çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu kolayca görülür.

Örnek 4.1.2. i) $f: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ ve $f(x) = e^x$ çarpımları bir çarpımsal harmonik P-fonksiyondur. $x < y$ ve her $x, y \in (0, \infty)$ için

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) = e^{\frac{xy}{ty + (1-t)x}} \leq e^y \leq e^x e^y = f(x)f(y)$$

eşitsizliği görülür.

ii) $f: (-\infty, 0) \rightarrow (1, \infty)$ ve $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonları bir çarpımsal harmonik P-fonksiyondur.

Örnek 4.1.3. $f: [e, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ve $f(x) = \ln x$ fonksiyonları bir çarpımsal harmonik P-fonksiyondur. $x < y$ ve her $x, y \in (0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) &= \ln\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) = \ln y + \ln\left(\frac{x}{ty + (1-t)x}\right) \\ &\leq \ln y \leq \ln y \ln x = f(x)f(y) \end{aligned}$$

olup P-nin çarpımsal harmonik P-fonksiyonu olduğu görülür.

Önerme 4.1.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ bir fonksiyon ve $g: \left\{\frac{1}{x}, x \in I\right\} \rightarrow I$ 'ya $g(x) = 1/x$ olsun. $g^{-1}(I) = \left\{\frac{1}{x}, x \in I\right\}$ aralığı üzerinde f çarpımsal harmonik P-fonksiyon olması için gerek ve yeterli şart $g^{-1}(I) = \left\{\frac{1}{x}, x \in I\right\}$ aralığı üzerinde $f \circ g$ 'nin çarpımsal P-fonksiyon olmasıdır.

İspat. f, I aralığı üzerinde çarpımsal harmonik P-fonksiyon olsun. $x, y \in g^{-1}(I)$ aralığı keyfi alınsın bu takdirde $x = 1/u$ ve $y = 1/v$ $u, v \in I$ noktaları mevcuttur. O halde;

$$(f \circ g)(tx + (1-t)y) = f\left(\frac{uv}{tv + (1-t)u}\right) \leq f(u)f(v) = (f \circ g)(x)(f \circ g)(y)$$

olduğundan gerek ve yeteri koşulun bir tarafı ispatlanmış olur.

Tersine şayet $f \circ g, g^{-1}(I)$ aralığı üzerinde çarpımsal P-fonksiyon ise f 'nin I aralığı üzerinde çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu benzer yöntemlerle kolayca görülür.

Önerme 4.1.2. $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow [1, \infty)$ de f bir fonksiyon olsun. Bu takdirde;

- i.) f harmonik konveks ise aynı zamanda f harmonik çarpımsal P-fonksiyondur.
- ii.) $I \subseteq (0, \infty)$, f çarpımsal harmonik P-fonksiyon ve artmayan ise, f harmonik çarpımsal P-fonksiyondur.
- iii.) $I \subseteq (0, \infty)$, f harmonik P-fonksiyon ve artmayan ise, f çarpımsal P-fonksiyondur.
- iv.) $I \subseteq (-\infty, 0)$, f çarpımsal P-fonksiyon ve azalmayan ise, f çarpımsal harmonik P-fonksiyondur.
- v.) $I \subseteq (-\infty, 0)$, f çarpımsal harmonik P-fonksiyon ve azalmayan ise, f bir çarpımsal harmonik P-fonksiyondur.

İspat. i.) f, I da harmonik konveks fonksiyon, her $x, y \in I$ ve her $t \in [0, 1]$ aralığı için,

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq f(x)f(y)$$

olduğundan, f aynı zamanda çarpımsal P-fonksiyondur.

ii.) Her $x, y \in I \subseteq (0, \infty)$ ve her $t \in [0, 1]$ aralığı için,

$$\frac{xy}{ty + (1-t)x} \leq tx + (1-t)y \quad (4.2)$$

eşitsizliği sağlandığından ve f azalmayan ve çarpımsal P-fonksiyon olduğundan;

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq f(x)f(y)$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece f 'nin çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu görülür.

iii.) (4.2) eşitsizliği ve f 'nin de artmayan ve harmonik çarpımsal P-fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa, her $x, y \in I \subseteq (0, \infty)$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq f(x)f(y)$$

eşitsizliğinden f 'nin çarpımsal P-fonksiyon olduğu görülür.

iv.) Her $x, y \in (-\infty, 0)$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$\frac{xy}{ty + (1-t)x} \geq tx + (1-t)y$$

eşitsizliği yardımıyla f 'nin azalmayan ve çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$f(tx + (1-t)y) \leq f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq f(x)f(y). \quad (4.3)$$

Bu da f 'nin çarpımsal P-fonksiyon olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

v.) (4.3) eşitsizliği, f 'nin azalmayan ve harmonik çarpımsal P-fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa, her $x, y \in I \subseteq (-\infty, 0)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq f(tx + (1-t)y) \leq f(x)f(y)$$

yazılır ve böylece f 'nin çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.1.1. $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ olsun. Eğer f ve g çarpımsal harmonik P-fonksiyon ise, fg 'de aynı zamanda çarpımsal harmonik P-fonksiyondur.

İspat. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} (fg)\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) &= f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right)g\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \\ &\leq [f(x)f(y)][g(x)g(y)] \\ &= [f(x)g(x)][f(y)g(y)] \\ &= [(fg)(x)][(fg)(y)] \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ olsun. Eğer f çarpımsal P-fonksiyon ve azalmayan, g harmonik konveks fonksiyon ise fog çarpımsal harmonik P-fonksiyondur.

İspat. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} (fog)\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) &= f\left(g\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right)\right) \\ &\leq f(tg(x) + (1-t)g(y)) \\ &\leq f(g(x))f(g(y)) \\ &= (fog)(x)(fog)(y) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden ispat kolayca görülür.

4.2. ÇARPIMSAL HARMONİK P-FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde çarpımsal harmonik P-fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli bazı eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 4.2.1. $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ f çarpımsal harmonik P-fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$, $f \in L[a, b]$ olmak üzere,

$$i) f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)f([a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}]^{-1})}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

$$ii) f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq f(a)f(b) \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. $i)$ f çarpımsal harmonik bir P-fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &= f\left(\frac{2\left[\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right]\left[\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right]}{\left[\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right]\left[\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right]}\right) \\ &\leq f\left(\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right) f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) \end{aligned}$$

yazılır. t 'ye göre $[0,1]$ aralığında integral alınır ve $x = \frac{ab}{ta + (1-t)b}$ değişken değişikliği yapılırsa

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)f([a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}]^{-1})}{x^2} dx \quad (4.4)$$

olur. Aynı zamanda basit bir hesaplama ile

$$\int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right) f\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) dt \leq [f(a)f(b)]^2 \quad (4.5)$$

olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

$ii)$ Benzer şekilde f bir çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \leq f(a)f(b)f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right).$$

eşitsizliği yazılır. $[0,1]$ üzerinden t ye göre integral alınır ve $x = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$ değişken değişimi yapılırsa,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq f(a)f(b) \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx$$

$$\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt \leq f(a)f(b)$$

elde edilir. Böylece;

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq f(a)f(b) \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

olup ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.1. Yukarıdaki (i) ve (ii) teoremleri birleştirilirse aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)f([a^{-1}+b^{-1}-x^{-1}]^{-1})}{x^2} dx$$

$$\leq f(a)f(b) \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2. \quad (4.6)$$

Uyarı 4.2.2. Teorem 3.2.1 ve Önerme 4.1.1'in yardımıyla Teorem 4.2.1'in ispatı aynı zamanda aşağıdaki gibi verilebilir:

$f, g: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ bir çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu için, $f \circ g$, $a < b$ ile $a, b \in I$ için $[1/b, 1/a]$ aralığında bir çarpımsal P-fonksiyondur. Böylece, Teorem 3.2.1'deki i) ve ii) deki eşitsizlikler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$i) (f \circ g)\left(\frac{1/a + 1/b}{2}\right) \leq \frac{1}{1/b - 1/a} \int_{1/a}^{1/b} (f \circ g)(u)(f \circ g)(1/a + b - u) du$$

$$\leq [(f \circ g)(1/a)(f \circ g)(1/b)]^2.$$

$$ii) (f \circ g)\left(\frac{1/a + 1/b}{2}\right) \leq (f \circ g)(1/a)(f \circ g)(1/b) \frac{1}{1/b - 1/a} \int_{1/a}^{1/b} (f \circ g)(u) du$$

$$\leq \left[(f \circ g)(1/a)(f \circ g)(1/b) \right]^2.$$

(İşcan İ.,2014)'da, İşcan tarafından verilen aşağıdaki Lemma aşağıdaki gibidir.

Lemma 4.2.1: $f: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 de türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &= \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) dt \end{aligned}$$

olur.

İspat. I^* ile aşağıdaki ifadeyi gösterelim

$$I^* = \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) dt.$$

Buradaki integralde kısmi integrasyon metodu kullanılırsa

$$I^* = \frac{2t-1}{2} f \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) I_0^1 - \int_0^1 f \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) dt$$

yazılır ve $x = \frac{ab}{tb + (1-t)a}$, $dx = \frac{-ab(b-a)}{(tb + (1-t)a)^2} dt = \frac{-x^2(b-a)}{ab} dt$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$I^* = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2: $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ çarpımsal harmonik fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $f \in L[a, b]$ olmak üzere

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \exp\left\{\frac{2ab}{b-a} \int_a^b \frac{\ln f(u)}{u^2} du\right\} \leq [f(a)f(b)]^2 \quad (4.7)$$

dir.

İspat, Teorem 4.2.1 ve Uyarı 4.2.2 yardımlarıyla kolayca görülebilir.

Teorem 4.2.3: $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 içinde türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $q \geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde çarpımsal harmonik P-fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\ & \leq \frac{ab(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{2} \left[\frac{1}{ab} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{(b-a)^2} \ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right) \right] \quad (4.8) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 4.2.1 ve power mean integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\ & \leq \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} \right| \left| f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \right| dt \\ & \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} \right| \left| f'\left(\frac{a \cdot b}{(tb+(1-t)a)}\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılır.

Burada, $|f'|^q$ 'nin $[a, b]$ üzerinde çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \leq \frac{ab(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{2} \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} \right| dt \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int_0^1 \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} dt = \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right)$$

olduğu göz önüne alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.4: $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye I^0 içinde türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$ 'nin $[a, b]$ 'de çarpımsal harmonik P-fonksiyon ise

$$\begin{aligned} L_p(a, b) &= \left(\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| &\leq \frac{ab(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L_{-2q}^{-2}(a, b) \end{aligned} \quad (4.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $L_p(a, b)$ logaritmik ortalamadır.

İspat: Lemma 4.2.1, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ 'nin $[a, b]$ 'de çarpımsal harmonik P-fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(tb + (1-t)a)^{2q}} \left| f' \left(\frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{ab(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \frac{1}{(tb + (1-t)a)^{2q}} dt \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^1 \frac{1}{(tb + (1-t)a)^{2q}} dt = \frac{b^{-2q+1} - a^{-2q+1}}{(-2q+1)(b-a)}$$

olduğu kullanılarak ispat tamamlanır.

4.3. ÖZEL ORTALAMALAR İÇİN BAZI UYGULAMALAR

$a < b$ ile negatif olmayan iki a, b sayısının aşağıdaki özel ortalamalarını ele alalım.

- 1- Aritmetik Ortalama: $A = A(a, b) := \frac{a+b}{2}$
- 2- Geometrik Ortalama: $G = G(a, b) := \sqrt{ab}$
- 3- Harmonik Ortalama: $H = H(a, b) := \frac{2ab}{a+b}$
- 4- Logaritmik Ortalama: $L = L(a, b) := \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$
- 5- P-Logaritmik Ortalama: $L_p = L_p(a, b) := \left(\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$
- 6- İdentik Ortalama: $I = I(a, b) := \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}}$

Bu ortalamalar, sayısal yaklaşımlar ve diğer alanlarda sık sık kullanılır. Diğer yandan, $H \leq G \leq L \leq I \leq A$ literatürde basit ilişkiler olarak bilinir.

L_p 'nin monotonik şekilde $p \in \mathbb{R}$ 'de arttığı ve $L_0 = 1$ ve $L_{-1} = L$ 'y ifade ettiği de bilinir.

Önerme 4.3.1: $1 \leq a < b$ olsun. Bu taktirde

$$A^{-1} \leq H.L^{-1} \leq G^2.L^{-1} \leq G^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: (4.6) eşitsizliğinde $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ fonksiyonu kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.3.2: $1 \leq a < b$ ve $q > 1$ olsun. Bu taktirde eşitsizlik aşağıdaki gibidir.

$$\left| A \left(a^{1+1/q}, b^{1+1/q} \right) - G^2 L_{1/q-1}^{1/q-1} \right| \leq \frac{(q+1)(b-a)G^{2(1+1/q)}}{2q} \left[G^{-2} - \frac{4}{(b-a)^2} \ln \frac{A}{G} \right]$$

İspat (4.8) eşitsizliğinde $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{q}{q+1} x^{1+1/q}$ fonksiyonu kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.3.3: $0 < a < b$ ve $q > 1$ olsun. Bu durumda

$$\left| A \left(a^{1+1/q}, b^{1+1/q} \right) - G^2 L_{1/q-1}^{1/q-1} \right| \leq \frac{(q+1)(b-a)G^{2(1+1/q)}}{2q} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L_{-2q}^{-2}(a, b)$$

olur.

İspat: (4.9) eşitsizliğinde $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = f(x) = \frac{q}{q+1} x^{1+1/q}$ fonksiyonu kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.3.4: $0 < a < b$ olsun. Bu durumda $H.L \leq 2G^2 \leq 2AL$ eşitsizliği elde edilir.

İspat: (4.7) eşitsizliğinde $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ fonksiyonu kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

BÖLÜM 5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının araştırma bulgular bölümünde çarpımsal harmonik P-fonksiyon olarak adlandırılan yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlanmış, bu fonksiyon sınıfına bazı örnekler verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra çarpımsal harmonik P-fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği elde edilip, daha önce literatürde mevcut olan bir özdeşlik yardımı ile çarpımsal harmonik P-fonksiyonlar için bazı yeni Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarakta elde edilen bu yeni eşitsizliklerde bazı özel çarpımsal harmonik fonksiyonlar kullanılarak özel ortalamalar için bazı uygulamalar verilmiştir.

Böylece literatüre yeni bir fonksiyon sınıfı ve yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kazandırılmıştır, fonksiyonların bu sınıfı için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca fonksiyonların bu sınıfı için Midpoint, Yamuksal (trapezoid), Simpson, Ostrowsk tipli eşitsizlikler elde edilebileceği gibi kesirli integraller yardımıyla da yeni eşitsizlikler ilgili araştırmacılar tarafından elde edilebilir. Bu anlamda da bu alanda çalışan araştırmacılar için yeni bir kaynak oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

Szarski, J. (1965). Differential Inequalities. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii, Warszawa.

Mitrinović, D.S., (1970). Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., (1991). Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587, Dordrecht/Boston/London.

Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., & Fink, A.M. (1993). Classical and new inequalities in analysis (Vol. 61). Springer Science & Business Media. Dordrecht/Boston/London.

Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pecaric, J.E., (1997). Hadamard's Inequalities for rconvex Functions, Journal Mathematical Analysis and Applications, 215, 461-470.

Pearce, C.E.M. and Rubinov, A.M., (1999). P-functions, quasiconvex functions and Hadamard-type inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 240, 92-104.

Zhang, K.S., Wan, S., (2007). P-convex functions and their properties, Pure Applied. Math. 23 (1), 130-133.

İşcan, İ., (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex funtions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43 (6), 935-942,

Bayraktar, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, (1992) Y.L. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc., Boston,

İşcan, İ., Numan S. And Bakar K., (2014). Hermite-Hadamard and Simpson type inequalities for differentiable harmonically P-functions, British Journal of Mathematics and Computer Science, 4(14),1908-1920,.

Hadamard, J., (1893). Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en paticular d' une fonction considereee par Riemann, J.math. Pures Appl., 171-215.

Hermite, Ch. Sur deux limites d' une integrale, Mathesis, 3, 82-83,1883.

Chen, F. and Wu S., (2014). Fejér and Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex funtions, Jurnal of Applied Mathematics, 1-6,.

Zhang, K.S., Wan, S., (2007). P-convex functions and their properties, Pure Application Mathematical, 23 (1) ,130-133.

S., Wu, B. R. Ali, I.A. Baloch, A.U. Haq, (2017). Inequalities related to symmetrized harmonic convex functions,1711.08051.

Pachpatte, B.G., (2003). On some inequalities for convex functions, Research Repeat Collection, 6(E),

Tunç, M., (2012). On some new inequalities for convex functions, Turkish Journalat Mathematics, 36, 245-251,

Zabandan, G., (2019). A new refinement of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions,Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 1(2), 1-7,

Niculescu, C. P., (2003). Convexity according to means, *Mathematical Inequalities and Applications* 6 (4), 571–579.

Mumcu. İ. Uyumlu Kesirli ve Kutagampola Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler, Ordu Üniversitesi, Doktora Tezi, 2019.

Dragomir, S. S., Pearce, C. E. M., (2000). Selected topics on Hermite-Hadamard type inequalities and applications. RGMIA Monographs. Available: http://rgmia.vu.edu.au/monographs/hermite_hadamard.html.

Dragomir, S. S., Fitzpatrick, S., (1999). The Hadamards inequality for s-convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*. 32 (4), 687–696

Dragomir SS, Agarwal RP., (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Appl. Math. Lett* , 11: 91–95.

Kadalkal H., (2018). Multiplicatively P-function and some new inequalities, *New Trends in Mathematical Sciences*, 6(4), 111-118.

ÖZGEÇMİŞ

Volkan OLUCAK 1988 yılında Zonguldak'ta doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Zonguldak'ta tamamladı. 2006 yılında Zonguldak Ferner YDA Lisesi'nden mezun oldu. 2011 yılında başladığı Giresun Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2015 yılında bitirdi. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Pedagojik Formasyon Eğitimini iki dönemde başarıyla tamamladı. 2017 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Giresun Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde lisans öğrencisi olarak devam etmektedir.