

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇARPIMSAL HARMONİK s -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayça URUŞ

HAZİRAN – 2023

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇARPIMSAL HARMONİK s -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayça URUŞ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Serap ÖZCAN

Haziran – 2023

“ÇARPIMSAL HARMONİK s -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ” adlı tez çalışması **Ayça URUŞ** tarafından hazırlanmış olup aşağıdaki jüri tarafından **OY BİRLİĞİ** ile Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Serap ÖZCAN
Kırklareli Üniversitesi

.....

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN
Kırklareli Üniversitesi

.....

Prof. Dr. İmdat İŞCAN
Giresun Üniversitesi

.....

Tez Savunma Tarihi: 05/06/2023

.....

Doç. Dr. H. Hale KARAYER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Kırkırelı Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez ve Proje Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum bilgileri, verileri ve dokümanları, değişik sonuç verebilecek şekilde araştırma araç gereçleri kullanmadan, işlem veya kayıt sonuçlarını değiştirmeden akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ayça URUŞ

05/06/2023

ÖZET

ÇARPIMSAL HARMONİK s -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Ayça URUŞ

Yüksek Lisans Tezi

Kırklareli Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Doç. Dr. Serap ÖZCAN

Haziran 2023, 46 sayfa

Çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonların tarihsel süreçleri ve literatür çalışmalarına yer verilmiştir.

Genel bilgiler kısmında sonraki bölümler için gerekli olan bazı tanım, teorem, eşitsizlik ve ortalamalara yer verilmiş olup ayrıca çalışmanın temelini oluşturan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin, bazı konveks fonksiyon türleri için ifade ve ispatlarına yer verilmiştir.

Çalışmamıza fikir veren kısım materyal ve yöntem bölümüdür. Bu bölümde çarpımsal hesaplama ve çarpımsal integral kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca, çarpımsal konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiş ve iki çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonun çarpımı ve bölümü için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra harmonik konveks ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonların çarpım ve bölümleri için çarpımsal integral temelli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon sınıfı için belirli üst sınırlar elde edilmiştir. Verilen örnekler ile çalışmamız desteklenmiş ve elde edilen değerler ile bu örneklerle ait şekillere yer verilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde çalışmanın değerlendirmesi yapılarak sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyon, harmonik konveks fonksiyon, çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği, integral eşitsizlikleri.

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES OF HERMITE-HADAMARD TYPE FOR MULTIPLICATIVELY HARMONIC s -CONVEX FUNCTIONS

Ayça URUŞ

MSc Thesis

Kirklareli University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Supervisor: Serap ÖZCAN

June 2023, 46 pages

Our study consists of five sections.

The introduction section provides information on inequality theory and the historical process and literature studies of convex functions.

The general information section includes some definitions, theorems, inequalities, and means necessary for the following sections, and also includes the expressions and proofs of the Hermite-Hadamard inequality, which forms the basis of the study, for certain types of convex functions.

The section that inspired our study is the materials and methods section. In this section, the concepts of multiplicative calculus and multiplicative integral are introduced, and Hermite-Hadamard type integral inequalities are given for multiplicative convex functions.

In the fourth section, first, the Hermite-Hadamard inequality is given for multiplicatively harmonic s -convex functions, and Hermite-Hadamard type inequalities are obtained for the product and quotient of two multiplicatively harmonic s -convex functions. Then, new integral-based inequalities are obtained for the product and quotient of harmonic convex and multiplicatively harmonic s -convex functions. In addition, certain upper limits are obtained for the class of multiplicatively harmonic s -convex functions. The study is supported by examples, and the obtained values and figures of these examples are given.

Finally, in the fifth section, the evaluation of the study is made, and the results are presented.

Keywords: Convex function, harmonic convex function, multiplicative harmonic s -convex function, Hermite-Hadamard inequality, integral inequalities.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarıım süresince, çalışmamın planlanması ve yürütülmesinde bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, ayrıca manevi desteğiyle de her zaman yanımda olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Serap ÖZCAN'a, eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim başta annem olmak üzere aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	IV
ABSTRACT	V
TEŞEKKÜR.....	VI
İÇİNDEKİLER.....	VII
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR	IX
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	5
2.1. Ön Bilgiler	5
2.2. Bazı Özel Ortalamalar	9
2.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği.....	10
2.4. s -Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği	11
2.5. Harmonik Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği	12
2.6. Harmonik $\log$ -Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği.....	13
3. MATERYAL ve YÖNTEM	17
3.1. Çarpımsal Hesaplama.....	17
3.2. Çarpımsal İntegral.....	17
3.3. Çarpımsal Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri.....	18
4. ÇARPIMSAL HARMONİK s -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ.....	25
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil 2.1. Konveks küme.....	4
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	4
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon.....	5
Şekil 2.4. Konkav fonksiyon	5
Şekil 4.1. Örnek 4.1'deki 1. durum için grafik.....	25
Şekil 4.2. Örnek 4.1'deki 2. durum için grafik.....	26
Şekil 4.3. Örnek 4.2'nin grafiği	26
Şekil 4.4. Örnek 4.3'deki 1. durum için grafik.....	32
Şekil 4.5. Örnek 4.3'deki 2. durum için grafik.....	33
Şekil 4.6. Örnek 4.4'ün grafiği	33
Şekil 4.7. Örnek 4.5'deki 1. durum için grafik.....	36
Şekil 4.8. Örnek 4.5'deki 2. durum için grafik.....	36
Şekil 4.9. Örnek 4.6'nın grafiği	37
Şekil 4.10. Örnek 4.7'deki 1. durum için grafik.....	38
Şekil 4.11. Örnek 4.7'deki 2. durum için grafik.....	38

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
A°	A nın içi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
A	Reel sayılar kümesinde herhangi bir aralık
$\forall$	Her
$\subset$	Alt küme
$\subseteq$	Alt küme veya eşit
$\ln$	Doğal logaritmik fonksiyon
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
$A(r_1, r_2)$	Aritmetik ortalama
$G(r_1, r_2)$	Geometrik ortalama
$H(r_1, r_2)$	Harmonik ortalama
$L(r_1, r_2)$	Logaritmik ortalama
$I(r_1, r_2)$	İdentrik ortalama
$L_p(r_1, r_2)$	p -logaritmik ortalama

1. GİRİŞ

Matematikte eşitsizlik kavramı son derece önemli bir yere sahiptir ve bu kavram iki değerin birbirine göre durumlarını ifade etmektedir. Eşitsizlik kavramını bulan kişinin kim oluşu bilinmemekle birlikte Leonhard Euler tarafından 18. Yüzyılda kullanıldığı düşünülmektedir.

Eşitsizlik deyince ilk akla gelen kavramlar olan küçüktür ($<$) ve büyüktür ($>$) işaretlerini ise ilk kez İngiliz matematikçi olan Thomas Harriot 1631 yılında, “*Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas*” adlı eserinde kullanmıştır.

Matematiğin pek çok dalında önemli bir yere sahip olan eşitsizlik teorisinin temelleri K. F. Gauss, A. L. Cauchy, P. L. Chebyshev gibi ünlü matematikçiler tarafından atılmıştır. Eşitsizlik alanında verilen ilk yapıt 1934’te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan “*Inequalities*” adlı kitaptır. Bu yapıtın ardından E. F. Beckenbach ve R. Belmann [1] “*Inequalities*” adlı kitabı yazmıştır. Eşitsizliklerle ilgili yapılan diğer çalışmaların bir kısmı; “*Differential Inequalities*” [2], “*Analitic Inequalities*” [3], “*Inequalities Involving Functions and Their Derivatives*” [4], “*Classical and New Inequalities in Analysis*” [5] dir.

Matematik bilimi için eşitsizlik kavramı 19. yüzyıldan beri gelişmekle birlikte son yıllarda bu gelişim hız kazanmış ve birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Bunun ardından eşitsizlik konulu çalışmaların matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamasına katkısı artmıştır. Bunlardan bazıları; Hadamard, Ostrowski, Grüss, Chebyshev, Yamuk, Jensen, Hardy, Opial tipli eşitsizliklerdir. Bu eşitsizlik tipleri matematiğin pek çok farklı alanında kullanılmaktadır.

Konvekslik kavramının tarihi, M.Ö. Arşimed’in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzansa da matematikte yer alması 19. yüzyılı bulmuştur. Konvekslik kavramı ilk defa 1883’te Charles Hermite tarafından ortaya atılmıştır [6]. 1881 yılında *Mathesis* 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta Hermite konvekslik kavramından ilk kez şu şekilde bahsetmiştir:

“Belirli bir integralin iki sınırıyla ilgili olarak $x = a$ ’dan $x = b$ ’ye kadar aynı yönde değişen $\tau(x)$ fonksiyonunu ele alalım:

Eğer $\tau(x)$ fonksiyonunun eğrisi x eksenine göre konveks ise,

$$(r_2 - r_1)\tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) < \int_{r_1}^{r_2} \tau(x)dx < (r_2 - r_1)\frac{\tau(r_1)+\tau(r_2)}{2} \quad (1.1)$$

Eğer $\tau(x)$ fonksiyonunun eğrisi x eksenine göre konkav ise,

$$(r_2 - r_1)\tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) > \int_{r_1}^{r_2} \tau(x)dx > (r_2 - r_1)\frac{\tau(r_1)+\tau(r_2)}{2} \quad (1.2)$$

şeklindedir.”

Hermite’in ardından Hadamard’ın çalışmasında konveksliğe rastlanmıştır [7]. Fakat konveks fonksiyonlarla ilgili sistematik çalışmalar 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından başlamıştır. Bunun ardından konveks fonksiyonlarla ilgili kapsamlı çalışmalar A.W. Roberts ve D.E. Varberg tarafından yapılmış “Convex Functions” adlı eserde yayınlanmıştır [8]. 20. yüzyıl boyunca teorik ve uygulamalı matematikte konvekslik kavramıyla ilgili yoğun araştırmalar yapılmıştır. Konvekslik kavramı eşitsizlik kullanılarak ifade edildiğinden dolayı konvekslik ve eşitsizlik arasında son derece önemli bir ilişki olduğunu söylemek mümkündür. Bu sebepten dolayı konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizlik kavramı son derece önemli bir yere sahiptir. Matematiğin birçok alanında konvekslik kavramından yararlanılır. Bunlardan bazıları; geometri, analiz, lineer cebir, sayılar teorisi, oyun teorisi, topolojidir. Günlük hayatımızda da konvekslik kavramını sanat, sağlık, ekonomi, endüstri gibi birçok alanda kullanırız.

Niculescu, konveksliğin bu kadar yaygın kullanım alanının olmasını iki temel nedene bağlamıştır. Bunlardan ilki “maksimum değer, sınır noktasında elde edilmesi” şeklindeyken, ikincisi “Her yerel minimum noktanın aslında mutlak minimum nokta olması ve buna ek olarak her konveks fonksiyonun en az bir minimum noktaya sahip olması” şeklindedir [9].

Konvekslik ile ilgili eşitsizlik deyince akla gelenlerin başında olup günümüzde de üzerinde çok fazla çalışılan eşitsizlik,

$$\tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \leq \frac{1}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \tau(x)dx \leq \frac{\tau(r_1)+\tau(r_2)}{2} \quad (1.3)$$

şeklindeki Hermite–Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik belirli koşullar altında konvekslik tanımı ile denk olmaktadır [10]. Bu sebeple son zamanlarda Hermite-Hadamard eşitsizliğine ilgi artmıştır. Bu alanda çalışmalar yapan araştırmacılardan bazıları, S. S. Dragomir, B. G. Pachpatte, G. Zabandan, C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric, L. E. Persson, M. A. Noor, M. A. Ali, M. Alomari, M. Darus, U. S. Kırmacı, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, İ. İşcan, E. Set, A. O. Akdemir, S. Özcan, M. A. Latif, S. Varosanec, B. Meftah, H. Budak, S. Fitzpatrick, H. Hudzik, L. Maligranda olarak yazılabilir.





2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümler için gerekli olan bazı tanım, teorem ve eşitsizliklere yer verilecektir.

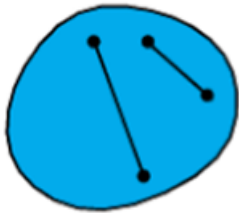
2.1. Ön Bilgiler

Tanım 2.1.1. $\tau: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in A$ ve $\varepsilon > 0$ şeklinde verilmek üzere eğer $|x - x_0| < \delta$ iken her $x \in A$ için $|\tau(x) - \tau(x_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı olduğu takdirde δ, x_0 noktasında süreklidir denir [11].

Tanım 2.1.2. τ, A aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $r_1, r_2 \in A$ olmak üzere,

- i. $r_2 > r_1$ olduğunda $\tau(r_2) > \tau(r_1)$ oluyorsa τ fonksiyonu A üzerinde artandır,
- ii. $r_2 > r_1$ olduğunda $\tau(r_2) < \tau(r_1)$ oluyorsa τ fonksiyonu A üzerinde azalandır,
- iii. $r_2 > r_1$ olduğunda $\tau(r_2) \geq \tau(r_1)$ oluyorsa τ fonksiyonu A üzerinde azalmayandır,
- iv. $r_2 > r_1$ olduğunda $\tau(r_2) \leq \tau(r_1)$ oluyorsa τ fonksiyonu A üzerinde artmayandır [12].

Tanım 2.1.3. S bir lineer uzay $A \subseteq S$ ve $r_1, r_2 \in A$ olmak şartı ile $\forall t \in [0,1]$ için, $tr_1 + (1 - t)r_2 \in S$ oluyorsa S kümesine konveks küme denir. Yani diğer bir deyişle bir kümenin rastgele iki noktasını birleştiren doğru parçası yine o kümeye aitse bu kümeye konveks küme denir [10].



Şekil 2.1. Konveks küme



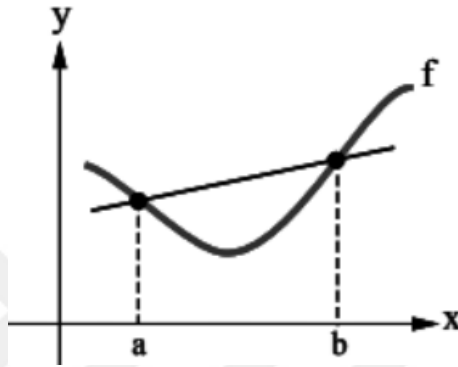
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.4. $A \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $r_1, r_2 \in A$ ve $t \in [0,1]$ için,

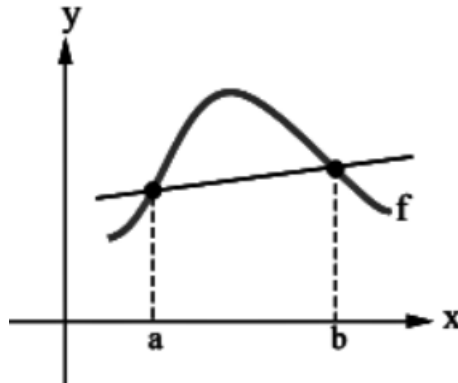
$$\tau(tr_1 + (1-t)r_2) \leq t\tau(r_1) + (1-t)\tau(r_2) \quad (2.1)$$

koşulunu sağlayan τ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [11].

Eğer (2.1) eşitsizliğinde “ $\leq$ ” yerine “ $\geq$ ” alınırsa, τ fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon



Şekil 2.4. Konkav fonksiyon

Aşağıda konveks fonksiyonların bazı özellikleri verilmiştir [13]:

- i. τ , kapalı aralıkta tanımlı konveks bir fonksiyon ise τ sınırlıdır.
- ii. $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise τ, A° (A nın içi) nde süreklidir.

- iii. $j = 1, 2, 3 \dots k$ için $\tau_j: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonların bir ailesi olsun. Bu takdirde $\alpha_j \geq 0$ için

$$\tau(u) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \tau_j(u)$$

fonksiyonu da konvektir.

- iv. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tau(u) = (\gamma \circ \theta)(u)$ bileşke fonksiyonu da konvektir.

Tanım 2.1.5. $A \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $r_1, r_2 \in A$, $t \in [0, 1]$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere,

$$\tau(tr_1 + (1-t)r_2) \leq t^s \tau(r_1) + (1-t)^s \tau(r_2) \quad (2.2)$$

koşulunu sağlayan τ fonksiyonuna s -konveks fonksiyon denir [14].

Sonuç 2.1.1. $s = 1$ için (2.2) eşitsizliği, (2.1) eşitsizliğine dönüşür.

Tanım 2.1.6. $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olmak üzere $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $r_1, r_2 \in A$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$\tau\left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2}\right) \leq t\tau(r_2) + (1-t)\tau(r_1) \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlayan τ fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir [15].

Eğer (2.3) eşitsizliğinde “ $\leq$ ” yerine “ $\geq$ ” alınırsa, τ fonksiyonuna harmonik konkav fonksiyon denir.

Örnek 2.1.1. $\tau: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = x$ fonksiyonu harmonik konveks fonksiyon, $\gamma: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(x) = x$ fonksiyonu harmonik konkav fonksiyondur [15].

Önerme 2.1.1. $\tau: A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyon olmak üzere,

- i. $A \subseteq (0, \infty)$, τ konveks ve azalmayan bir fonksiyon olması koşuluyla τ fonksiyonu harmonik konvektir.

- ii. $A \subseteq (0, \infty)$, τ harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon olması koşuluyla τ fonksiyonu konvektir.
- iii. $A \subseteq (-\infty, 0)$, τ harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon olması koşuluyla τ fonksiyonu konvektir.
- iv. $A \subseteq (-\infty, 0)$, τ konveks ve artmayan bir fonksiyon olması koşuluyla τ fonksiyonu konvektir [15].

Tanım 2.1.7. $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık ve $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $r_1, r_2 \in A$, $t \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere,

$$\tau\left(\frac{r_1 r_2}{t r_1 + (1-t) r_2}\right) \leq (1-t)^s \tau(r_1) + t^s \tau(r_2) \quad (2.4)$$

eşitsizliğini sağlayan τ fonksiyonuna harmonik s -konveks fonksiyon denir [16].

Sonuç 2.1.2. $s = 1$ için (2.4) eşitsizliği, (2.3) eşitsizliğine dönüşür.

Tanım 2.1.8. $\tau: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $r_1, r_2 \in A$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$\tau(t r_1 + (1-t) r_2) \leq \tau(r_1)^t \cdot \tau(r_2)^{(1-t)} \quad (2.5)$$

koşulunu sağlayan τ fonksiyonuna $\log$ -konveks ya da çarpımsal konveks fonksiyon denir [17].

Tanım 2.1.9. $\tau: A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $r_1, r_2 \in A$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$\tau\left(\frac{r_1 r_2}{t r_1 + (1-t) r_2}\right) \leq \tau(r_1)^t \cdot \tau(r_2)^{(1-t)} \quad (2.6)$$

koşulunu sağlayan τ fonksiyonuna harmonik $\log$ -konveks (çarpımsal harmonik konveks) fonksiyon denir [18].

Tanım 2.1.10. $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık ve $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $r_1, r_2 \in A$, $t \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere,

$$\tau\left(\frac{r_1 r_2}{t r_1 + (1-t) r_2}\right) \leq (\tau(r_1))^{(1-t)^s} (\tau(r_2))^{t^s} \quad (2.7)$$

koşulunu sağlayan τ fonksiyonuna harmonik $\log$ s -konveks (çarpımsal harmonik s -konveks) fonksiyon denir [19].

Sonuç 2.1.3. $s = 1$ için (2.7) eşitsizliği, (2.6) eşitsizliğine dönüşür.

2.2. Bazı Özel Ortalamalar

Burada r_1, r_2 gibi iki pozitif gerçel sayı için bazı özel ortalamalar verilecektir [20].

(1) Aritmetik ortalama:

$$A = A(r_1, r_2) = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (2.8)$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G = G(r_1, r_2) = \sqrt{r_1 r_2}, \quad (2.9)$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H = H(r_1, r_2) = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad (2.10)$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$L = L(r_1, r_2) = \begin{cases} r_1, & r_1 = r_2 \\ \frac{r_2 - r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}, & r_1 \neq r_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

(5) İdentrik ortalama:

$$I = I(r_1, r_2) = \begin{cases} r_1, & r_1 = r_2 \\ \frac{1}{e} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{1}{r_2 - r_1}}, & r_1 \neq r_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

(6) p -logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(r_1, r_2) = \begin{cases} r_1, & r_1 = r_2 \\ \left(\frac{r_2^{p+1} - r_1^{p+1}}{(p+1)(r_2 - r_1)} \right)^{\frac{1}{p}}, & r_1 \neq r_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Bu ortalamalar arasındaki bağıntı literatürde aşağıdaki gibi yer alır:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

2.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği

Teorem 2.3.1. $A, \mathbb{R}$ de bir aralık ve τ, A üzerinde tanımlı bir konveks fonksiyon $r_1, r_2 \in A$ ve $r_1 < r_2$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [6,7,13] :

$$\tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \leq \frac{1}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \tau(x) dx \leq \frac{\tau(r_1)+\tau(r_2)}{2}. \quad (2.14)$$

İspat. τ fonksiyonu konveks olduğundan $[r_1, r_2]$ aralığında sürekli ve sınırlıdır. Dolayısı ile τ fonksiyonu verilen $[r_1, r_2]$ aralığında integrallenebilir.

(2.14) eşitsizliğinin sağ tarafının ispatı için $x = tr_1 + (1-t)r_2$, $t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \tau(x) dx &= \int_0^1 \tau(x) dx \\ &= \int_0^1 \tau(tr_1 + (1-t)r_2) dt \\ &\leq \tau(r_1) \int_0^1 t dt + \tau(r_2) \int_0^1 (1-t) dt \\ &= \frac{\tau(r_1) + \tau(r_2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (2.14) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilmiş olur.

(2.14) eşitsizliğinin sol tarafını ispatlamak için,

$$\frac{1}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \tau(x) dx$$

integrali

$$\frac{1}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \tau(x) dx = \frac{1}{r_2-r_1} \left[\int_{r_1}^{\frac{r_1+r_2}{2}} \tau(x) dx + \int_{\frac{r_1+r_2}{2}}^{r_2} \tau(x) dx \right]$$

şeklinde yazılarak elde edilen ilk integralde $x = r_1 + \frac{t(r_2 - r_1)}{2}$ değişken değiştirme işlemi ve ikinci integralde $x = r_2 - \frac{t(r_2 - r_1)}{2}$ değişken değiştirme işlemi yapıldığı takdirde, sırasıyla

$$\int_{r_1}^{\frac{r_1+r_2}{2}} \tau(x) dx = \frac{(r_2 - r_1)}{2} \int_0^1 \tau\left(r_1 + \frac{t(r_2 - r_1)}{2}\right) dt$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{\frac{r_1+r_2}{2}}^{r_2} \tau(x) dx &= -\frac{(r_2 - r_1)}{2} \int_1^0 \tau\left(r_2 - \frac{t(r_2 - r_1)}{2}\right) dt \\ &= \frac{(r_2 - r_1)}{2} \int_0^1 \tau\left(r_2 - \frac{t(r_2 - r_1)}{2}\right) dt \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen integral toplamında τ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \tau(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \tau\left(r_2 + \frac{t(r_2 - r_1)}{2}\right) + \tau\left(r_2 - \frac{t(r_2 - r_1)}{2}\right) dt \right] \\ &\geq \int_0^1 \tau\left(\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2}\right) dt = \tau\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

2.4. s-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği

Teorem 2.4.1. $A, \mathbb{R}$ de bir aralık ve τ, A üzerinde tanımlı bir konveks fonksiyon $r_1, r_2 \in A, r_1 < r_2$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [21].

$$2^{s-1} \tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \leq \frac{1}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \tau(x) dx \leq \frac{\tau(r_1) + \tau(r_2)}{s+1}. \quad (2.15)$$

İspat. s -konveks fonksiyonun $\tau(tr_1 + (1-t)r_2) \leq t^s \tau(r_1) + (1-t)^s \tau(r_2)$ tanımı yardımıyla, $t \in [0,1]$ aralığında integral alındığı takdirde;

$$\int_0^1 \tau(tr_1 + (1-t)r_2) \leq \tau(r_1) \int_0^1 t^s dt + \tau(r_2) \int_0^1 (1-t)^s dt = \frac{\tau(r_1) + \tau(r_2)}{s+1}$$

(2.15) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilmiş olur.

(2.15) eşitsizliğinin sol tarafını kanıtlamak için $x, y \in A$ olmak üzere,

$$\tau\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\tau(x) + \tau(y)}{2^s} \text{ eşitsizliğinde}$$

$x := tr_1 + (1-t)r_2$ ve $y := tr_2 + (1-t)r_1$ şeklinde tanımlanırsa;

$$\tau\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \leq \frac{\tau(tr_1 + (1-t)r_2) + \tau(tr_2 + (1-t)r_1)}{2^s}$$

elde edilir ve (2.15) eşitsizliğinin sol tarafı kanıtlanmış olur .

Sonuç 2.4.1. $s = 1$ için (2.15) eşitsizliği, (2.14) eşitsizliğine dönüşür.

2.5. Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği

Teorem 2.5.1. $\tau: A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon $r_1, r_2 \in A$ ve $r_1 < r_2$ olmak üzere $\tau \in L[r_1, r_2]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [15]:

$$\tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right) \leq \frac{r_1r_2}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau(x)}{x^2} dx \leq \frac{\tau(r_1) + \tau(r_2)}{2}. \quad (2.16)$$

İspat. $\tau: A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon olduğundan dolayı, her $a, b \in A$ ve $t = \frac{1}{2}$ için harmonik konveksliğin $\tau\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) \leq t\tau(b) + (1-t)\tau(a)$

tanımını yardımı ile,

$$\tau\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{\tau(a) + \tau(b)}{2}$$

şeklinde olur.

Eğer bu eşitsizlikte $a = \frac{r_1r_2}{tr_1+(1-t)r_2}$, $b = \frac{r_1r_2}{tr_2+(1-t)r_1}$ alınırsa,

$$\tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right) \leq \frac{\tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_2+(1-t)r_1}\right) + \tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_1+(1-t)r_2}\right)}{2}$$

yazılır. Ardından bu eşitsizliğin t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında integrali alındığı takdirde,

$$\tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right) \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_2+(1-t)r_1}\right) dt + \int_0^1 \tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_1+(1-t)r_2}\right) dt \right]$$

olur. Köşeli parantezin içinde bulunan integraller ayrı ayrı $\frac{r_1r_2}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau(x)}{x^2} dx$ ifadesine eşit olduğundan dolayı (2.12) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.

$\tau: A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon olduğundan dolayı, $r_1 < r_2$ olan her $r_1, r_2 \in A$ için $[0,1]$ aralığında integral alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_1+(1-t)r_2}\right) dt &= \frac{r_1r_2}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau(u)}{u^2} du \\ &= \frac{r_1r_2}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau(x)}{x^2} dx \\ &\leq \frac{\tau(r_1) + \tau(r_2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.6. Harmonik $\log$ -Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği

Teorem 2.6.1. $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik $\log$ -konveks fonksiyon olsun. $r_1 < r_2$ koşulunu sağlayan her $r_1, r_2 \in A$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [18]:

$$\tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right) \leq \exp\left[\frac{r_1r_2}{r_2-r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log\left(\frac{\tau(x)}{x^2}\right) dx\right] \leq \sqrt{\tau(r_1)\tau(r_2)}. \quad (2.17)$$

İspat. τ fonksiyonu pozitif tanımlı ve harmonik $\log$ -konveks fonksiyon olduğundan, harmonik $\log$ -konveks fonksiyonun tanımında $t = \frac{1}{2}$ alındığı takdirde,

$$\tau\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq (\tau(a).\tau(b))^{\frac{1}{2}} \text{ yazılır.}$$

Eğer bu eşitsizlikte $a = \frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2}$, $b = \frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1}$ alınırsa,

$$\tau\left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) \leq \left[\left\{ \tau\left(\frac{r_1 r_2}{(1-t)r_1 + tr_2}\right) \right\} \left\{ \tau\left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2}\right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının logaritması alındığında,

$$\log \tau\left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) \leq \frac{1}{2} \left[\log \tau\left(\frac{r_1 r_2}{(1-t)r_1 + tr_2}\right) + \log \tau\left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2}\right) \right]$$

bulunur. Bu son eşitsizliğin t 'ye göre $[0,1]$ aralığında integrali alındığı takdirde,

$$\begin{aligned} \log \tau\left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) &\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \log \tau\left(\frac{r_1 r_2}{(1-t)r_1 + tr_2}\right) dt + \int_0^1 \log \tau\left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2}\right) dt \right] \\ &\leq \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(\frac{\tau(x)}{x^2} \right) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\log \tau\left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) \leq \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(\frac{\tau(x)}{x^2} \right) dx$$

olup, bu eşitsizliğin her iki tarafının eksponansiyeli alındığı takdirde,

$$\tau\left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) \leq \exp \left[\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(\frac{\tau(x)}{x^2} \right) dx \right]$$

bulunur ve böylece (2.17) eşitsizliğinin sol tarafı gösterilmiş olur.

Şimdi (2.17) eşitsizliğinin sağ tarafını gösterelim. Harmonik $\log$ -konveks fonksiyon tanımından

$$\tau\left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2}\right) \leq (\tau(r_1))^{1-t} (\tau(r_2))^t$$

yazılır ve bu eşitsizliğin her iki tarafının logaritması alınırsa,

$$\log \tau \left(\frac{r_1 r_2}{t r_1 + (1-t) r_2} \right) \leq (1-t) \log (\tau(r_1)) + t \log (\tau(r_2))$$

elde edilir. $t = \frac{1}{2}$ için bu son eşitsizlik aşağıdaki biçime dönüşür.

$$\begin{aligned} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(\frac{\tau(x)}{x^2} \right) dx &\leq \frac{\log (\tau(r_1)) + \log (\tau(r_2))}{2} \\ &= \log (\tau(r_1) \tau(r_2))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Elde edilen bu son eşitsizliğin her iki tarafının eksponansiyeli alındığında,

$$\exp \left[\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \log \left(\frac{\tau(x)}{x^2} \right) dx \right] \leq \sqrt{(\tau(r_1) \tau(r_2))}$$

sonucuna ulaşılır ki bu da (2.17) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, çarpımsal hesaplama konusuna kısaca değinilerek çarpımsal integraller tanıtılacaktır. Ayrıca, çarpımsal konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizliklerine yer verilecektir.

3.1. Çarpımsal Hesaplama

1972 yılında, Grossman ve Katz [22], toplama ve çıkarmayı çarpma ve bölme ile değiştiren yeni bir hesaplama biçimi olan çarpımsal hesaplamayı, diğer bir deyişle non-Newtonian hesaplamayı tanımladılar.

Çarpımsal hesaplama, tüm hesaplama problemlerini ele almasına rağmen, Newton ve Leibnitz'in hesaplamasına kıyasla daha kısıtlı bir uygulama alanına sahiptir. Bunun sebebi, sadece pozitif fonksiyonları kapsıyor olmasıdır. Bu nedenle, akla gelen ilk soru “Daha geniş kapsamlı iyi geliştirilmiş bir araç zaten oluşturulmuşken kısıtlı bir amaç için yeni bir araç geliştirmek mantıklı mıdır?” sorusudur. Bu sorunun cevabı, matematikçilerin düzlemdeki noktaları tanımlamak için dik koordinat sistemi yerine kutupsal koordinat sistemini kullanmalarının nedeni ile benzerdir. Gerçekten, bazı durumlarda kutupsal koordinatların kullanımı daha uygundur. Örneğin, simetrik şekillerin tanımlanması veya dairesel hareketlerin açısal hızının hesaplanması gibi durumlarda kutupsal koordinat sistemini kullanmak daha uygun olabilir. Benzer şekilde, çarpımsal hesaplamaların kullanım alanı sınırlı olsa da, bazı durumlarda geleneksel hesaplama yöntemlerinden daha uygun ve etkilidir. Örneğin, üstel fonksiyonlarla uğraşmak için daha kullanışlıdır.

3.2. Çarpımsal İntegral

Çarpımsal hesaplamanın tam matematiksel açıklaması [23]'te aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Klasik integral olarak bilinen Riemann integrali $\int_{r_1}^{r_2}(\tau(x)) dx$ şeklinde gösterilirken, çarpımsal integral $\int_{r_1}^{r_2}(\tau(x))^{dx}$ şeklinde gösterilir. Bunun nedeni, τ fonksiyonunun

$[r_1, r_2]$ aralığındaki Riemann integralinin terimlerinin toplamının yerine, belirli kuvvetlere yükseltilmiş terimlerin çarpımının kullanılmasıdır.

Riemann integrali ve çarpımsal integral arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir [23].

Önerme 3.2.1. Eğer τ fonksiyonu $[r_1, r_2]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilir ise, o halde τ fonksiyonu $[r_1, r_2]$ aralığında çarpımsal integrallenebilirdir ve

$$\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} = e^{\int_{r_1}^{r_2} \ln(\tau(x)) dx}. \quad (3.1)$$

Çarpımsal integral aşağıda verilen özelliklere sahiptir [23].

Teorem 3.2.1. τ fonksiyonu pozitif ve $[r_1, r_2]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilir olsun. Buna göre, τ fonksiyonu $[r_1, r_2]$ aralığında çarpımsal integrallenebilirdir ve

- i. $\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^p)^{dx} = \int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{dx})^p,$
- ii. $\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x)\gamma(x))^{dx} = \int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \cdot \int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx},$
- iii. $\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\tau(x)}{\gamma(x)} \right)^{dx} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx}}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx}},$
- iv. $\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} = \int_{r_1}^c (\tau(x))^{dx} \cdot \int_c^{r_2} (\tau(x))^{dx} \quad r_1 \leq c \leq r_2,$
- v. $\int_{r_1}^{r_1} (\tau(x))^{dx} = 1$ ve $\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} = \left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \right)^{-1}.$

3.3. Çarpımsal Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 3.3.1. $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ çarpımsal konveks fonksiyon olsun. $r_1 < r_2$ koşulunu sağlayan her $r_1, r_2 \in A$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [24]:

$$\tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \leq \left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx}\right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \leq G(\tau(r_1), \tau(r_2)). \quad (3.2)$$

İspat. τ çarpımsal konveks bir fonksiyon olduğundan,

$$\ln \tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) = \ln \left(\tau \left(\frac{(1-t)r_1 + tr_2 + tr_1 + (1-t)r_2}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left(\tau \left(\frac{(1-t)r_1 + tr_2}{2} + \frac{tr_1 + (1-t)r_2}{2} \right) \right) \\
&\leq \ln \left(\tau \left(\frac{(1-t)r_1 + tr_2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau \left(\frac{tr_1 + (1-t)r_2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\tau \left(\frac{(1-t)r_1 + tr_2}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\tau \left(\frac{tr_1 + (1-t)r_2}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$t \in [0,1]$ aralığında integral alındığı takdirde,

$$\begin{aligned}
\ln \tau \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{(1-t)r_1 + tr_2}{2} \right) \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{tr_1 + (1-t)r_2}{2} \right) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \ln (\tau(x)) dx + \frac{1}{r_1 - r_2} \int_{r_2}^{r_1} \ln (\tau(x)) dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \ln (\tau(x)) dx + \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \ln (\tau(x)) dx \right] \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \ln (\tau(x)) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\tau \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) &\leq e^{\left(\frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \ln (\tau(x)) dx \right)} \\
&= \left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \right)^{\frac{1}{r_2 - r_1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\tau \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \leq \left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \right)^{\frac{1}{r_2 - r_1}}$$

elde edilmiş olur ve (3.2) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.

Şimdi, (3.2) eşitsizliğinin sağ tarafını ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} &= \left(e^{\left(\int_{r_1}^{r_2} \ln(\tau(x)) dx \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}}} \right) \\
&= e^{\frac{1}{r_2-r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \ln(\tau(x)) dx \right)} \\
&= e^{\left(\int_0^1 \ln(\tau(r_1) + t(r_2-r_1)) dt \right)} \\
&\leq e^{\left(\int_0^1 \ln(\tau(r_1))^{1-t} (\tau(r_2))^t dt \right)} \\
&= e^{\left(\int_0^1 (1-t) \ln \tau(r_1) + t \ln \tau(r_2) dt \right)} \\
&= e^{\left((\ln(\tau(r_1)) \tau(r_2))^{\frac{1}{2}} \right)} \\
&= \sqrt{\tau(r_1) \tau(r_2)} \\
&= G((\tau(r_1), \tau(r_2)))
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.3.1. $\tau(x) = e^{x^2}$ çarpımsal konveks fonksiyonu verilsin. Buna göre, $r_1 = 1$ ve $r_2 = 3$ için

$$\tau\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = e^{\left(\frac{1+3}{2}\right)^2} = 54,5982,$$

$$\left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} = \left(\int_1^3 (e^{x^2})^{dx} \right)^{\frac{1}{2}} = 76,1979,$$

$$G((\tau(r_1), \tau(r_2))) = 148,4132.$$

olup, (3.2) eşitsizliği sağlanır [24].

Sonuç 3.3.1. τ ve γ , $[r_1, r_2]$ aralığı üzerinde pozitif tanımlı ve çarpımsal konveks birer fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [24]:

$$\tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)\gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) \leq \left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx}\right)^{\frac{1}{r_2-r_1}}$$

$$\leq G((\tau(r_1), \tau(r_2)), G(\gamma(r_1), \gamma(r_2))).$$

Sonuç 3.3.2. τ ve γ , $[r_1, r_2]$ aralığı üzerinde pozitif tanımlı ve çarpımsal konveks birer fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [24]:

$$\frac{\tau\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)}{\gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)} \leq \left(\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx}}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx}}\right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \leq \frac{G((\tau(r_1), \tau(r_2)))}{G((\gamma(r_1), \gamma(r_2)))}.$$

Teorem 3.3.2. τ ve γ , sırasıyla konveks ve çarpımsal konveks fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [24]:

$$\left(\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx}}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx}}\right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \leq \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}}\right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}}}{G((\gamma(r_1), \gamma(r_2))) \cdot e}. \quad (3.3)$$

İspat. τ ve γ , sırasıyla konveks ve çarpımsal konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$\left(\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx}}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx}}\right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} = \left(\frac{e^{\int_{r_1}^{r_2} \ln(\tau(x)) dx}}{e^{\int_{r_1}^{r_2} \ln(\gamma(x)) dx}}\right)^{\frac{1}{r_2-r_1}}$$

$$= \left(e^{\int_{r_1}^{r_2} \ln(\tau(x)) dx - \int_{r_1}^{r_2} \ln(\gamma(x)) dx}\right)^{\frac{1}{r_2-r_1}}$$

$$= e^{\int_0^1 \ln(\tau(r_1)+t(r_2-r_1)) dt - \int_0^1 \ln(\gamma(r_1)+t(r_2-r_1)) dt}$$

$$\leq e^{\int_0^1 \ln(\tau(r_1)+t(\tau(r_2)-\tau(r_1))) dt - \int_0^1 \ln((\gamma(r_1))^{1-t} (\gamma(r_2))^t) dt}$$

$$= \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}}\right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}}}{G((\gamma(r_1), \gamma(r_2))) \cdot e}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.3. τ ve γ , sırasıyla çarpımsal konveks ve konveks fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [24]:

$$\left(\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x)) dx}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x)) dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \leq \frac{G(\tau(r_1), \tau(r_2)) \cdot e}{\left(\frac{(\gamma(r_2))^{\gamma(r_2)}}{(\gamma(r_1))^{\gamma(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma(r_2)-\gamma(r_1)}}}. \quad (3.4)$$

İspat. τ ve γ , sırasıyla çarpımsal konveks ve konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x)) dx}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x)) dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} &= \left(\frac{e^{\int_{r_1}^{r_2} \ln(\tau(x)) dx}}{e^{\int_{r_1}^{r_2} \ln(\gamma(x)) dx}} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \\ &= \left(e^{\int_{r_1}^{r_2} \ln(\tau(x)) dx - \int_{r_1}^{r_2} \ln(\gamma(x)) dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \\ &= e^{\int_0^1 \ln(\tau(r_1+t(r_2-r_1))) dt - \int_0^1 \ln(\gamma(r_1+t(r_2-r_1))) dt} \\ &\leq e^{\int_0^1 \ln((\tau(r_1))^{1-t} (\tau(r_2))^t) dt - \int_0^1 \ln(\gamma(r_1) + t(\gamma(r_2) - \gamma(r_1))) dt} \\ &= e^{\ln(G(\tau(r_1), \tau(r_2))) - \ln\left(\frac{(\gamma(r_2))^{\gamma(r_2)}}{(\gamma(r_1))^{\gamma(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma(r_2)-\gamma(r_1)}} + 1} \\ &= \frac{G(\tau(r_1), \tau(r_2)) \cdot e}{\left(\frac{(\gamma(r_2))^{\gamma(r_2)}}{(\gamma(r_1))^{\gamma(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma(r_2)-\gamma(r_1)}}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\left(\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x)) dx}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x)) dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \leq \frac{G(\tau(r_1), \tau(r_2)) \cdot e}{\left(\frac{(\gamma(r_2))^{\gamma(r_2)}}{(\gamma(r_1))^{\gamma(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma(r_2)-\gamma(r_1)}}}$$

sonucuna ulaşılır ve böylece ispat kanıtlanmış olur.

Teorem 3.3.4. τ ve γ , sırasıyla konveks ve çarpımsal konveks fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [24]:

$$\left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \leq \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}} \cdot G(\gamma(r_1), \gamma(r_2))}{e}. \quad (3.5)$$

İspat. τ ve γ , sırasıyla konveks ve çarpımsal konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \\ &= \left(e^{\int_{r_1}^{r_2} \ln(\tau(x)) dx + \int_{r_1}^{r_2} \ln(\gamma(x)) dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \\ &= \left(e^{(r_2-r_1) \left\{ \int_0^1 \ln(\tau(r_1+t(r_2-r_1))) dt + \int_{r_1}^{r_2} \ln(\gamma(r_1+t(r_2-r_1))) dt \right\}} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \\ &= e^{\int_0^1 \ln(\tau(r_1+t(r_2-r_1))) dt + \int_{r_1}^{r_2} \ln(\gamma(r_1+t(r_2-r_1))) dt} \\ &\leq e^{\int_0^1 \ln(\tau(r_1)+t(\tau(r_2)-\tau(r_1))) dt + \int_0^1 \ln((\gamma(r_1))^{1-t} (\gamma(r_2))^t) dt} \\ &= e^{\ln \left(\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}} - 1 + \ln(G(\gamma(r_1), \gamma(r_2))) \right)} \\ &= \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}} \cdot G(\gamma(r_1), \gamma(r_2))}{e} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\left(\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{dx} \int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{dx} \right)^{\frac{1}{r_2-r_1}} \leq \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}} \cdot G(\gamma(r_1), \gamma(r_2))}{e}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.



4. ÇARPIMSAL HARMONİK s -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde ilk olarak çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri verilecektir. Daha sonra, çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonların çarpımı ve bölümü için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilecektir. Ardından, harmonik konveks ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonların çarpım ve bölümleri için çarpımsal integral temelli yeni eşitsizlikler elde edilecektir. Son olarak, çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon sınıfı için yeni üst sınırlar belirlenecektir.

Teorem 4.1. $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $[r_1, r_2]$ aralığında pozitif tanımlı ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left[\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \right]^{2^{s-1}} \leq \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq [\tau(r_1) \tau(r_2)]^{1/(s+1)} \quad (4.1)$$

(4.1) eşitsizliği, çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard integral eşitsizliği olarak adlandırılır.

İspat. τ fonksiyonu pozitif tanımlı ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon olduğundan, çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon tanımında $t = \frac{1}{2}$ alındığı takdirde,

$$\tau \left(\frac{2ab}{a+b} \right) \leq (\tau(a) \cdot \tau(b))^{\frac{1}{2^s}}$$

olur. Eğer bu eşitsizlikte $a = \frac{r_1 r_2}{t r_1 + (1-t) r_2}$, $b = \frac{r_1 r_2}{t r_2 + (1-t) r_1}$ alınırsa,

$$\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \leq \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{t r_2 + (1-t) r_1} \right) \tau \left(\frac{r_1 r_2}{t r_1 + (1-t) r_2} \right) \right)^{\frac{1}{2^s}}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \ln \left(\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \right) &\leq \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right)^{\frac{1}{2^s}} \\ &= \frac{1}{2^s} \left(\ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) + \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Bu son eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t 'ye göre integrali alındığı takdirde,

$$\begin{aligned} &\ln \left(\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2^s} \left[\int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt + \int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) dt \right] \end{aligned}$$

bulunur. Köşeli parantezin içinde bulunan integraller ayrı ayrı $\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx$ ifadesine eşit olduğundan,

$$\begin{aligned} &\ln \left(\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2^s} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx + \frac{1}{2^s} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2^{s-1}} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\left[\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \right]^{2^{s-1}} \leq \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}}$$

elde edilir ve böylece ilk eşitsizlik kanıtlanmış olur.

Eşitsizliğin sağ tarafı kanıtlanacak olursa,

$$\left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} = \left(e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx} \right)^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx\right)} \\
&= e^{\left(\int_0^1 \ln\left(\tau\left(\frac{r_1 r_2}{t r_2 + (1-t)r_1}\right)\right) dt\right)} \\
&\leq e^{\left(\int_0^1 \ln\left((\tau(r_2))^{(1-t)^s} (\tau(r_1))^{t^s}\right) dt\right)} \\
&= e^{\left(\int_0^1 ((1-t)^s \ln \tau(r_2) + t^s \ln \tau(r_1)) dt\right)} \\
&= e^{\left(\ln(\tau(r_1) \tau(r_2)) \int_0^1 t^s dt\right)} \\
&= [\tau(r_1) \tau(r_2)]^{1/(s+1)}
\end{aligned}$$

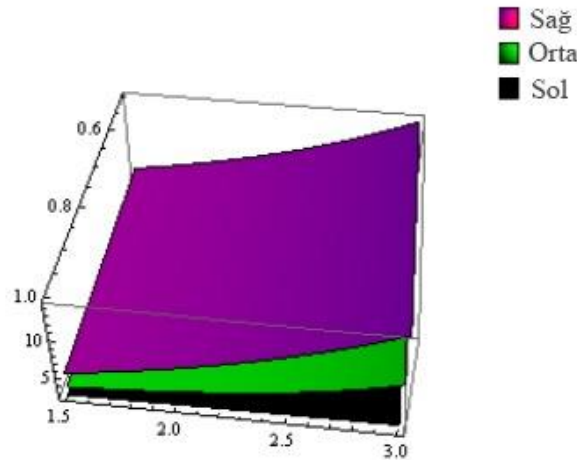
elde edilir ve dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1. (4.1) eşitsizliğinde $s = 1$ alındığı takdirde çarpımsal harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\tau\left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) \leq \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx}\right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq G(\tau(r_1), \tau(r_2)). \quad (4.2)$$

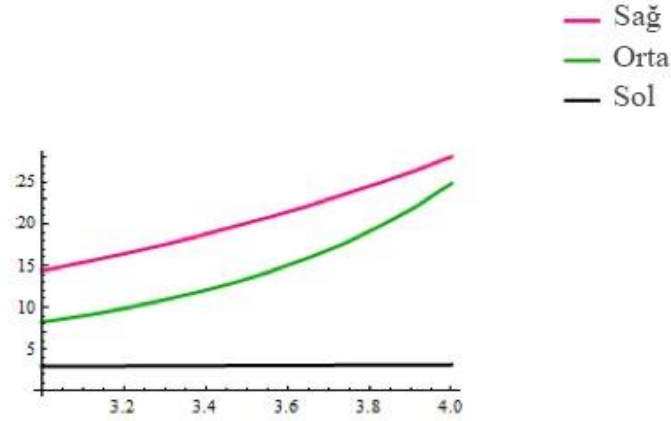
Örnek 4.1. Teorem 4.1’de $s = \frac{1}{2}$ alalım. $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = e^x$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre τ fonksiyonu $[r_1, r_2]$ aralığında çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyondur. Dolayısıyla (4.1) eşitsizliği sağlanır.

1. Durum: $r_1 = [0.5, 1]$ ve $r_2 = [1.5, 3]$ olması durumunda Teorem 4.1’deki (4.1) eşitsizliğinin grafiği aşağıdaki şekildedir:



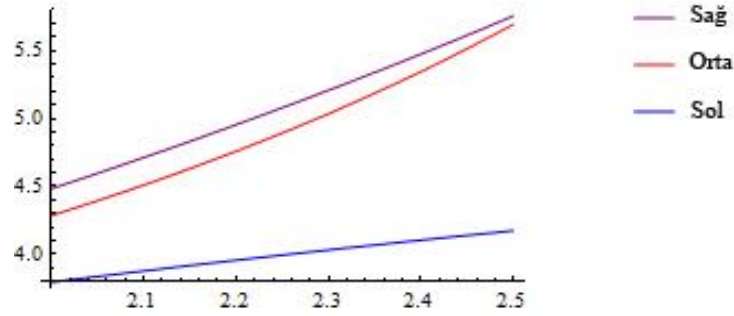
Şekil 4.1. Örnek 4.1’deki 1. durum için grafik

2. Durum: $r_1 = 1$ ve $r_2 = [3,4]$ olması durumunda Teorem 4.1'deki (4.1) eşitsizliğinin grafiği aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.2. Örnek 4.1'deki 2. durum için grafik

Örnek 4.2. Teorem 4.1'de $s = 1$ alalım. $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = e^x$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre τ fonksiyonu $r_1 = 1$ ve $r_2 = [2, 2.5]$ için $[r_1, r_2]$ aralığında çarpımsal harmonik konvektir. Dolayısıyla (4.2) eşitsizliği sağlanır:



Şekil 4.3. Örnek 4.2'nin grafiği

Teorem 4.2. τ ve γ , $[r_1, r_2]$ aralığında tanımlanmış pozitif tanımlı ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır:

$$\left[\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \gamma \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \right]^{2^{s-1}} \leq \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}}$$

$$\leq [\tau(r_1)\tau(r_2) \cdot \gamma(r_1)\gamma(r_2)]^{1/(s+1)} \quad (4.3)$$

İspat. τ ve γ fonksiyonları çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$\begin{aligned} & \ln \left(\tau \left(\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \right) \gamma \left(\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \right) \right) \\ &= \ln \left(\tau \left(\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \right) \right) + \ln \left(\gamma \left(\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \right) \right) \\ &\leq \ln \left(\tau \left(\frac{r_1r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \tau \left(\frac{r_1r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right)^{\frac{1}{2^s}} \\ &\quad + \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \gamma \left(\frac{r_1r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right)^{\frac{1}{2^s}} \\ &= \frac{1}{2^s} \left(\ln \left(\tau \left(\frac{r_1r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) + \ln \left(\tau \left(\frac{r_1r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2^s} \left(\ln \left(\gamma \left(\frac{r_1r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) + \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

$[0,1]$ aralığında t ye göre yukarıdaki eşitsizliğin integrali alındığı takdirde,

$$\begin{aligned} & \ln \left(\tau \left(\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \right) \gamma \left(\frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2^s} \int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt + \frac{1}{2^s} \int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2^s} \int_0^1 \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt + \frac{1}{2^s} \int_0^1 \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2^s} \left(\frac{r_1r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \right) + \left(\frac{r_1r_2}{r_2 - r_1} \right) \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2^s} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right) + \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right) \right) \\
& = \frac{1}{2^{s-1}} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \right) + \frac{1}{2^{s-1}} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right)
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\left[\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \gamma \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \right]^{2^{s-1}} \leq \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^s dx \int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^s dx \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}}$$

elde edilir ve (4.3) eşitsizliğinin sol tarafı kanıtlanmış olur.

Şimdi, (4.3) eşitsizliğinin sağ tarafını ispat edelim.

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^s dx \int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^s dx \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\
& = \left(e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx} \right)^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\
& = e^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right)} \\
& = e^{\left(\int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{t r_2 + (1-t) r_1} \right) \right) dt + \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1 r_2}{t r_2 + (1-t) r_1} \right) \right) dt \right)} \\
& \leq e^{\left(\int_0^1 \ln \left((\tau(r_2))^{(1-t)^s} (\tau(r_1))^{t^s} \right) dt + \int_0^1 \ln \left((\gamma(r_2))^{(1-t)^s} (\gamma(r_1))^{t^s} \right) dt \right)} \\
& = e^{\left(\int_0^1 ((1-t)^s \ln \tau(r_2) + t^s \ln \tau(r_1)) dt \right) + \left(\int_0^1 ((1-t)^s \ln \gamma(r_2) + t^s \ln \gamma(r_1)) dt \right)} \\
& = e^{\left(\ln(\tau(r_1) \tau(r_2)) \int_0^1 t^s dt + \ln(\gamma(r_1) \gamma(r_2)) \int_0^1 t^s dt \right)} \\
& = [\tau(r_1) \tau(r_2) \cdot (\gamma(r_1) \gamma(r_2))]^{1/(s+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2. (4.3) eşitsizliğinde $s = 1$ alındığı takdirde çarpımsal konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)\gamma\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right) &\leq \left[\int_{r_1}^{r_2}((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \int_{r_1}^{r_2}((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx}\right]^{\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}} \\ &\leq G(\tau(r_1), \tau(r_2))G(\gamma(r_1), \gamma(r_2)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Teorem 4.3. τ ve γ $[r_1, r_2]$ aralığında tanımlanmış pozitif tanımlı ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır:

$$\left[\frac{\tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)}{\gamma\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)}\right]^{2^{s-1}} \leq \left[\frac{\int_{r_1}^{r_2}((\tau(x))^{1/x^2})^{dx}}{\int_{r_1}^{r_2}((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx}}\right]^{\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}} \leq \left[\frac{\tau(r_1)\tau(r_2)}{\gamma(r_1)\gamma(r_2)}\right]^{1/(s+1)} \quad (4.5)$$

İspat. τ ve γ fonksiyonları pozitif tanımlı ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)}{\gamma\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)}\right) &= \ln\left(\tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)\right) - \ln\left(\gamma\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)\right) \\ &\leq \ln\left(\tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_2+(1-t)r_1}\right)\tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_1+(1-t)r_2}\right)\right)^{\frac{1}{2^s}} \\ &\quad - \ln\left(\gamma\left(\frac{r_1r_2}{tr_2+(1-t)r_1}\right)\gamma\left(\frac{r_1r_2}{tr_1+(1-t)r_2}\right)\right)^{\frac{1}{2^s}} \\ &= \frac{1}{2^s}\left(\ln\left(\tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_2+(1-t)r_1}\right)\right) + \ln\left(\tau\left(\frac{r_1r_2}{tr_1+(1-t)r_2}\right)\right)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2^s}\left(\ln\left(\gamma\left(\frac{r_1r_2}{tr_2+(1-t)r_1}\right)\right) + \ln\left(\gamma\left(\frac{r_1r_2}{tr_1+(1-t)r_2}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

$[0,1]$ aralığında t ye göre yukarıdaki eşitsizliğin integrali alındığı takdirde,

$$\ln\left(\frac{\tau\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)}{\gamma\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\right)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2^s} \int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt + \frac{1}{2^s} \int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) dt \\
&\quad - \frac{1}{2^s} \int_0^1 \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt - \frac{1}{2^s} \int_0^1 \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) dt \\
&= \frac{1}{2^s} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \right) + \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2^s} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right) + \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right) \right) \\
&= \frac{1}{2^{s-1}} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \right) - \frac{1}{2^{s-1}} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right)
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\left[\frac{\tau \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)}{\gamma \left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)} \right]^{2^{s-1}} \leq \left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} dx}{\int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} dx} \right]$$

elde edilir ve (4.5) eşitsizliğinin sol tarafı kanıtlanmış olur.

Şimdi, (4.5) eşitsizliğinin sağ tarafını ispat edelim.

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} dx}{\int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} dx} \right] = \left(e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx} \right)^{\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)} \\
&= e^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right)} \\
&= e^{\left(\int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt - \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt \right)} \\
&\leq e^{\left(\int_0^1 \ln \left((\tau(r_2))^{(1-t)^s} (\tau(r_1))^{t^s} \right) dt - \int_0^1 \ln \left((\gamma(r_2))^{(1-t)^s} (\gamma(r_1))^{t^s} \right) dt \right)} \\
&= e^{\left(\int_0^1 ((1-t)^s \ln \tau(r_2) + t^s \ln \tau(r_1)) dt \right) - \left(\int_0^1 ((1-t)^s \ln \gamma(r_2) + t^s \ln \gamma(r_1)) dt \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\left(\ln(\tau(r_1)\tau(r_2))^{\int_0^1 t^s dt} - \ln(\gamma(r_1)\gamma(r_2))^{\int_0^1 t^s dt} \right)} \\
&= \left[\frac{\tau(r_1)\tau(r_2)}{\gamma(r_1)\gamma(r_2)} \right]^{1/(s+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3. (4.5) eşitsizliğinde $s = 1$ alındığı takdirde çarpımsal harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{\tau\left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right)}{\gamma\left(\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right)} \leq \left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{1/x^2} dx}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{1/x^2} dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq \frac{G(\tau(r_1), \tau(r_2))}{G(\gamma(r_1), \gamma(r_2))}. \quad (4.6)$$

Teorem 4.4. τ ve $\gamma, [r_1, r_2]$ aralığında tanımlanmış sırasıyla pozitif tanımlı harmonik konveks ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır:

$$\left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{1/x^2} dx}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{1/x^2} dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2) - \tau(r_1)}}}{(\gamma(r_1)\gamma(r_2))^{1/(s+1)} \cdot e} \quad (4.7)$$

İspat. τ ve γ fonksiyonları sırasıyla pozitif tanımlı harmonik konveks ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} (\tau(x))^{1/x^2} dx}{\int_{r_1}^{r_2} (\gamma(x))^{1/x^2} dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} &= \left[\frac{e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx}}{e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx}} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\
&= \left[e^{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right)} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\
&= e^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right)} \\
&= e^{\left(\int_0^1 \ln\left(\tau\left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) dt - \int_0^1 \ln\left(\gamma\left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{\int_0^1 \ln(\tau(r_1) + t(\tau(r_2) - \tau(r_1))) dt - \int_0^1 \ln((\gamma(r_2))^{(1-t)^s} (\gamma(r_1))^{t^s}) dt} \\
&= e^{\ln\left(\left(\frac{\tau(r_2)^{\tau(r_2)}}{\tau(r_1)^{\tau(r_1)}}\right)^{\frac{1}{\tau(r_2) - \tau(r_1)}}\right) - 1 - \ln(\gamma(r_1)\gamma(r_2)) \int_0^1 t^s dt} \\
&= \frac{\left(\frac{\tau(r_2)^{\tau(r_2)}}{\tau(r_1)^{\tau(r_1)}}\right)^{\frac{1}{\tau(r_2) - \tau(r_1)}}}{(\gamma(r_1)\gamma(r_2))^{1/(s+1)}} \cdot e
\end{aligned}$$

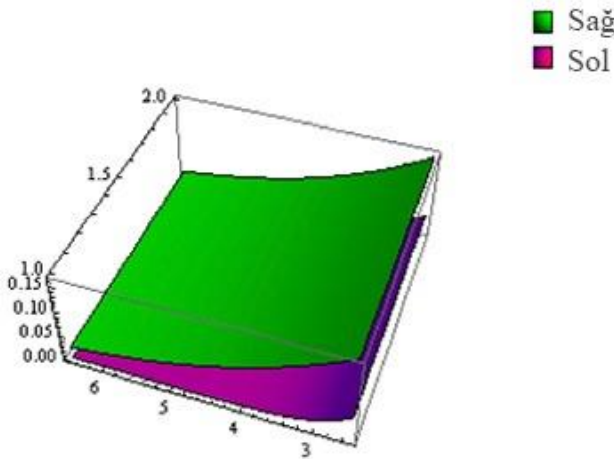
elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4. (4.7) eşitsizliğinde $s = 1$ alındığı takdirde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2}) dx}{\int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2}) dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq \frac{\left(\frac{\tau(r_2)^{\tau(r_2)}}{\tau(r_1)^{\tau(r_1)}}\right)^{\frac{1}{\tau(r_2) - \tau(r_1)}}}{G(\gamma(r_1), \gamma(r_2))e}. \quad (4.8)$$

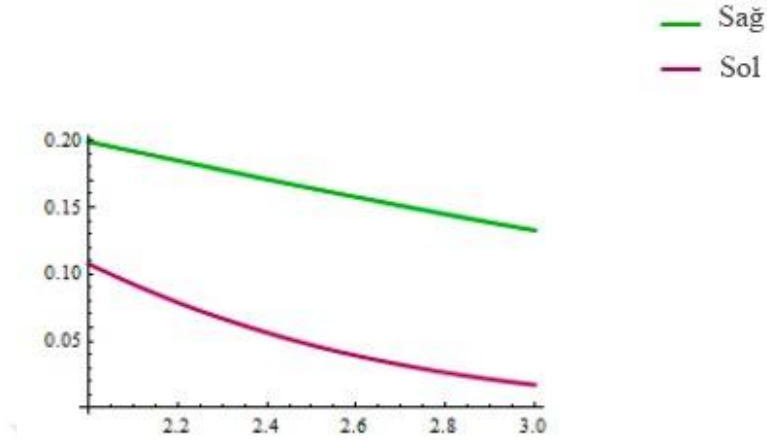
Örnek 4.3. Teorem 4.4’de $s = \frac{1}{2}$ alalım. $\tau, \gamma: A \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = x$ ve $\gamma(x) = e^x$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Buna göre τ ve γ fonksiyonları $[r_1, r_2]$ aralığında sırasıyla harmonik konveks ve çarpımsal harmonik s -konvektir. Dolayısıyla (4.7) eşitsizliği sağlanır.

1. Durum: $r_1 = [1, 2]$ ve $r_2 = [2.5, 6.5]$ olması durumunda (4.7) eşitsizliğinin grafiği aşağıdaki şekildedir:



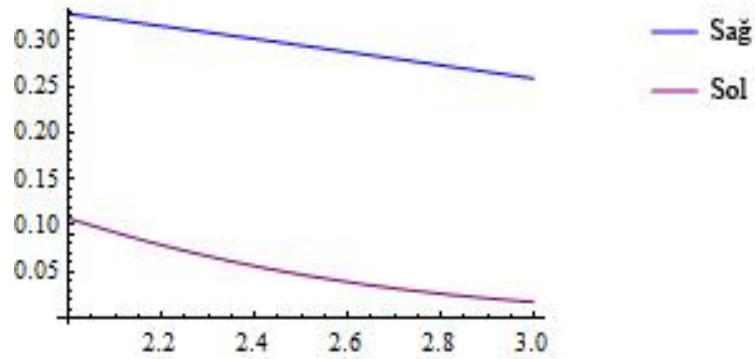
Şekil 4.4. Örnek 4.3’deki 1. durum için grafik

2. Durum: $r_1 = 1$ ve $r_2 = [2,3]$ olması durumunda (4.7) eşitsizliğinin grafiği aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.5. Örnek 4.3'deki 2. durum için grafik

Örnek 4.4. Teorem 4.4'de $s = 1$ alalım. $\tau, \gamma: A \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = x$ ve $\gamma(x) = e^x$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Buna göre τ ve γ fonksiyonları $r_1 = 1$ ve $r_2 = [2, 3]$ için $[r_1, r_2]$ aralığında sırasıyla harmonik konveks ve çarpımsal harmonik konvektir. Buna göre (4.8) eşitsizliği sağlanır.



Şekil 4.6. Örnek 4.4'ün grafiği

Teorem 4.5. τ ve $\gamma, [r_1, r_2]$ aralığında tanımlanmış sırasıyla pozitif tanımlı çarpımsal harmonik s -konveks ve harmonik konveks fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır:

$$\left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx}}{\int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx}} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq \frac{(\tau(r_1)\tau(r_2))^{1/(s+1)} \cdot e}{\left(\frac{(\gamma(r_2))^{\gamma(r_2)}}{(\gamma(r_1))^{\gamma(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma(r_2) - \gamma(r_1)}}} \quad (4.9)$$

İspat. τ fonksiyonu çarpımsal harmonik s -konveks ve γ fonksiyonu harmonik konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx}}{\int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx}} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} &= \left(\frac{e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx}}{e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx}} \right)^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\ &= \left[e^{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right)} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\ &= e^{\left(\int_0^1 \ln\left(\tau\left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt - \int_0^1 \ln\left(\gamma\left(\frac{r_1 r_2}{tr_1 + (1-t)r_2} \right) \right) dt \right)} \\ &\leq e^{\int_0^1 \ln((\tau(r_2))^{(1-t)^s} (\tau(r_1))^t) dt - \int_0^1 \ln(\gamma(r_1) + t(\gamma(r_2) - \gamma(r_1))) dt} \\ &= e^{\ln(\tau(r_1)\tau(r_2)) \int_0^1 t^s dt - \ln\left(\left(\frac{(\gamma(r_2))^{\gamma(r_2)}}{(\gamma(r_1))^{\gamma(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma(r_2) - \gamma(r_1)}} \right) + 1} \\ &= \frac{(\tau(r_1)\tau(r_2))^{1/(s+1)} \cdot e}{\left(\frac{(\gamma(r_2))^{\gamma(r_2)}}{(\gamma(r_1))^{\gamma(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma(r_2) - \gamma(r_1)}}} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5. (4.9) eşitsizliğinde $s = 1$ alındığı takdirde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left[\frac{\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx}}{\int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx}} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq \frac{G(\tau(r_1), \tau(r_2))e}{\left(\frac{(\gamma(r_2))^{\gamma(r_2)}}{(\gamma(r_1))^{\gamma(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma(r_2) - \gamma(r_1)}}}. \quad (4.10)$$

Teorem 4.6. τ ve $\gamma, [r_1, r_2]$ aralığında tanımlanmış sırasıyla pozitif tanımlı harmonik konveks ve çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanmaktadır:

$$\left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx} \right]_{r_2-r_1}^{\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}} \leq \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}} (\gamma(r_1)\gamma(r_2))^{1/(s+1)}}{e} \quad (4.11)$$

İspat. τ fonksiyonu harmonik konveks ve γ fonksiyonu çarpımsal harmonik s -konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} & \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx} \right]_{r_2-r_1}^{\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}} \\ &= \left[e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx} e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx} \right]_{r_2-r_1}^{\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}} \\ &= \left(e^{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\gamma(x))}{x^2} dx \right)} \right)^{\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}} \\ &= e^{\left(\int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{t r_1 + (1-t) r_2} \right) \right) dt + \int_0^1 \ln \left(\gamma \left(\frac{r_1 r_2}{t r_2 + (1-t) r_1} \right) \right) dt \right)} \\ &\leq e^{\int_0^1 \ln(\tau(r_1) + t(\tau(r_2) - \tau(r_1))) dt + \int_0^1 \ln((\gamma(r_2))^{(1-t)^s} (\gamma(r_1))^{t^s}) dt} \\ &= e^{\ln \left(\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}} \right) - 1 + \ln(\gamma(r_1)\gamma(r_2)) \int_0^1 t^s dt} \\ &= \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}} (\gamma(r_1)\gamma(r_2))^{1/(s+1)}}{e} \end{aligned}$$

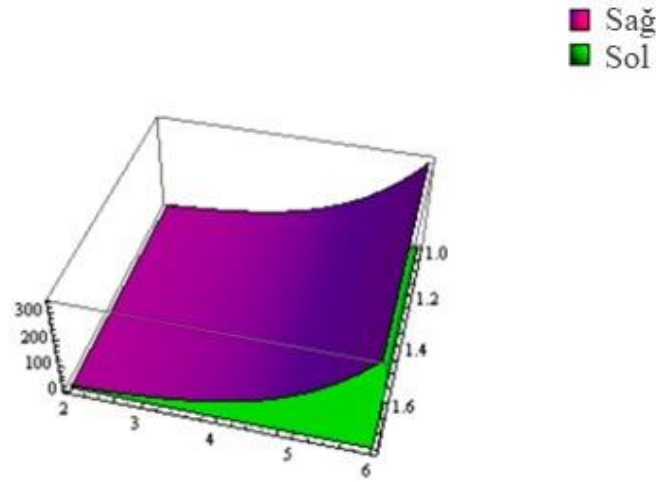
elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.6. (4.11) eşitsizliğinde $s = 1$ alındığı takdirde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \int_{r_1}^{r_2} ((\gamma(x))^{1/x^2})^{dx} \right]_{r_2-r_1}^{\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}} \leq \frac{\left(\frac{(\tau(r_2))^{\tau(r_2)}}{(\tau(r_1))^{\tau(r_1)}} \right)^{\frac{1}{\tau(r_2)-\tau(r_1)}} G(\gamma(r_1), \gamma(r_2))}{e}. \quad (4.12)$$

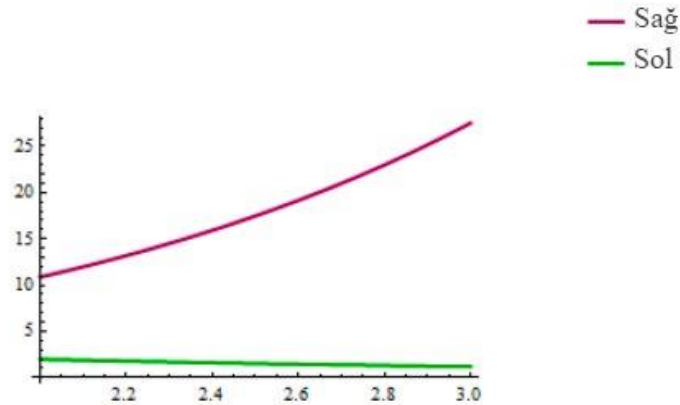
Örnek 4.5. Teorem 4.6’da $s = \frac{1}{2}$ alalım. $\tau, \gamma: A \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = x$ ve $\gamma(x) = e^x$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Buna göre τ ve γ fonksiyonları $[r_1, r_2]$ aralığında sırasıyla harmonik konveks ve çarpımsal harmonik s -konvektir. Dolayısıyla (4.11) eşitsizliği sağlanır.

1. Durum: $r_1 = [1, 1.75]$ ve $r_2 = [2, 6]$ olması durumunda (4.11) eşitsizliğinin grafiği aşağıdaki şekildedir:



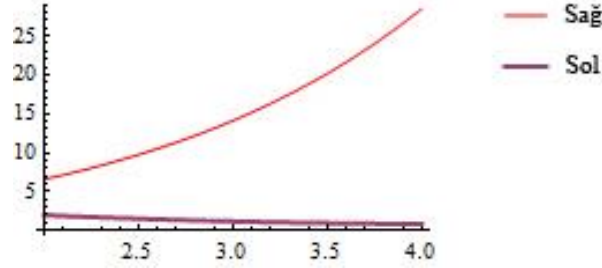
Şekil 4.7. Örnek 4.5’deki 1. durum için grafik

2. Durum: $r_1 = 1$ ve $r_2 = [2, 3]$ olması durumunda (4.11) eşitsizliğinin grafiği aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.8. Örnek 4.5’deki 2. durum için grafik

Örnek 4.6. Teorem 4.6'da $s = 1$ olsun. $\tau, \gamma: A \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = x$ ve $\gamma(x) = e^x$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Buna göre, τ ve γ fonksiyonları $r_1 = 1$ ve $r_2 = [2, 4]$ için $[r_1, r_2]$ aralığında sırasıyla harmonik konveks ve çarpımsal harmonik konvektir. Dolayısıyla (4.12) eşitsizliği sağlanır.



Şekil 4.9. Örnek 4.6'nın grafiği

Teorem 4.7. $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon olsun. $r_1 < r_2$ koşulunu sağlayan her $r_1, r_2 \in A$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq \int_0^1 [(\tau(r_1))^{t^s} (\tau(r_2))^{(1-t)^s}] dt. \quad (4.13)$$

İspat. τ çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon olduğundan,

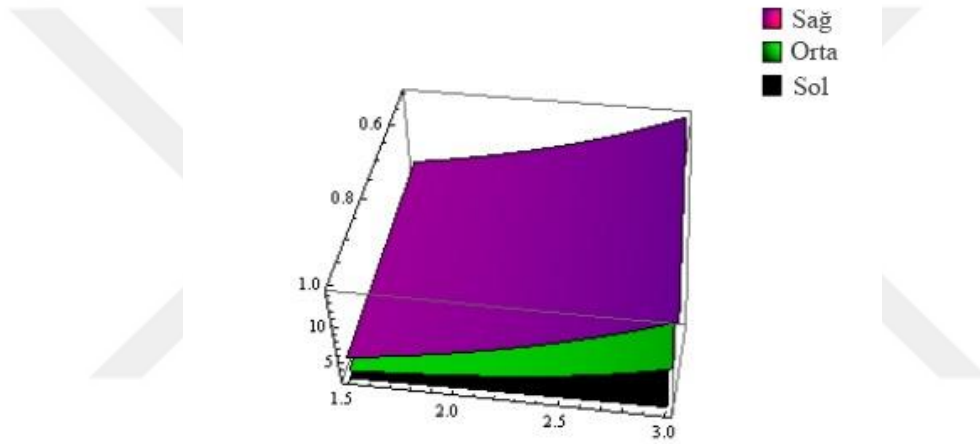
$$\begin{aligned} \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} &= \left(e^{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx} \right)^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\ &= e^{\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\ln(\tau(x))}{x^2} dx \right)} \\ &= e^{\left(\int_0^1 \ln \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right) dt \right)} \\ &\leq e^{\int_0^1 \ln((\tau(r_1))^{t^s} (\tau(r_2))^{(1-t)^s}) dt} \\ &\leq \int_0^1 e^{\ln((\tau(r_1))^{t^s} (\tau(r_2))^{(1-t)^s})} dt \\ &= \int_0^1 ((\tau(r_1))^{t^s} (\tau(r_2))^{(1-t)^s}) dt. \end{aligned}$$

Sonuç 4.7. (4.13) eşitsizliğinde $s = 1$ alındığı takdirde çarpımsal harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \leq L(\tau(r_1), \tau(r_2)) \leq A(\tau(r_1), \tau(r_2)). \quad (4.14)$$

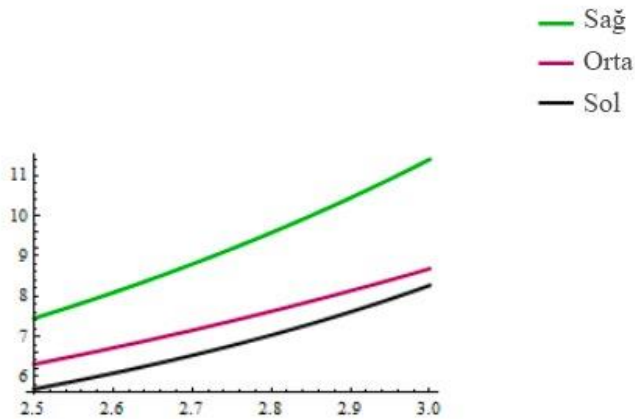
Örnek 4.7. Teorem 4.7’de $s = 1$ alalım. $\tau: A \rightarrow \mathbb{R}, \tau(x) = e^x$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre τ fonksiyonu $[r_1, r_2]$ aralığında çarpımsal harmonik konvektir. Dolayısıyla (4.14) eşitsizliği sağlanır.

1. Durum: $r_1 = [1, 1.5]$ ve $r_2 = [2, 2.5]$ olması durumunda (4.14) eşitsizliğinin grafiği aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.10. Örnek 4.7’deki 1. durum için grafik

2. Durum: $r_1 = 1$ ve $r_2 = [2.5, 3]$ olması durumunda (4.14) eşitsizliğinin grafiği:



Şekil 4.11. Örnek 4.7’deki 2. durum için grafik

Teorem 4.8. $\tau, \gamma: A \rightarrow \mathbb{R}$ iki çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon olsun. $r_1 < r_2$ koşulunu sağlayan her $r_1, r_2 \in A$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x)\gamma(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} &\leq \frac{1}{4} \int_0^1 [(\tau(r_2))^{2(1-t)^s} (\tau(r_1))^{2t^s}] dt \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^1 [(\gamma(r_2))^{2(1-t)^s} (\gamma(r_1))^{2t^s}] dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 [(\tau(r_2)\gamma(r_2))^{(1-t)^s} (\tau(r_1)\gamma(r_1))^{t^s}] dt. \quad (4.15) \end{aligned}$$

İspat. τ ve γ fonksiyonlarının çarpımsal harmonik s -konveksliğini ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$$

eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} &\left[\int_{r_1}^{r_2} \left((\tau(x)\gamma(x))^{\frac{1}{x^2}} \right)^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\ &= e^{\int_0^1 \ln \left[\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right] dt} \\ &\leq \int_0^1 \left[\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right] dt \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^1 \left[\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) + \gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right]^2 dt \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^1 [(\tau(r_2))^{(1-t)^s} (\tau(r_1))^{t^s} + (\gamma(r_2))^{(1-t)^s} (\gamma(r_1))^{t^s}]^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 [(\tau(r_2))^{2(1-t)^s} (\tau(r_1))^{2t^s}] dt + \frac{1}{4} \int_0^1 [(\gamma(r_2))^{2(1-t)^s} (\gamma(r_1))^{2t^s}] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 [(\tau(r_2)\gamma(r_2))^{(1-t)^s} (\tau(r_1)\gamma(r_1))^{t^s}] dt \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.9. $\tau, \gamma: A \rightarrow \mathbb{R}$ iki çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon olsun. $r_1 < r_2$ koşulunu sağlayan her $r_1, r_2 \in A$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x)\gamma(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} &\leq p \int_0^1 \left[(\tau(r_2))^{\frac{(1-t)^s}{p}} (\tau(r_1))^{\frac{t^s}{p}} \right] dt \\ &+ q \int_0^1 \left[(\gamma(r_2))^{\frac{(1-t)^s}{q}} (\gamma(r_1))^{\frac{t^s}{q}} \right] dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

İspat. τ ve γ fonksiyonlarının çarpımsal harmonik s -konveksliğini ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$ab \leq pa^{\frac{1}{p}} + qb^{\frac{1}{q}}, \quad p, q > 0, \quad p + q = 1$$

eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} &\left[\int_{r_1}^{r_2} ((\tau(x)\gamma(x))^{1/x^2})^{dx} \right]^{\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}} \\ &= e^{\int_0^1 \ln \left[\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right] dt} \\ &\leq \int_0^1 \left[\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right] dt \\ &\leq \int_0^1 \left[p \left(\tau \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right)^{\frac{1}{p}} + q \left(\gamma \left(\frac{r_1 r_2}{tr_2 + (1-t)r_1} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right] dt \\ &\leq \int_0^1 \left[p [(\tau(r_2))^{(1-t)^s} (\tau(r_1))^{t^s}]^{\frac{1}{p}} + q [(\gamma(r_2))^{(1-t)^s} (\gamma(r_1))^{t^s}]^{\frac{1}{q}} \right] dt \\ &= p \int_0^1 \left[(\tau(r_2))^{\frac{(1-t)^s}{p}} (\tau(r_1))^{\frac{t^s}{p}} \right] dt + q \int_0^1 \left[(\gamma(r_2))^{\frac{(1-t)^s}{q}} (\gamma(r_1))^{\frac{t^s}{q}} \right] dt \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada;

1. Çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard integral eşitsizliği elde edilmiştir.
2. Çarpımsal harmonik s -konveks iki fonksiyon verildiğinde, bunların çarpım ve bölümleri için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.
3. Biri harmonik konveks, diğeri çarpımsal harmonik s -konveks olan iki fonksiyon verildiğinde, bunların çarpım ve bölümleri için çarpımsal integral temelli yeni eşitsizlikler inşa edilmiştir.
4. Çarpımsal harmonik s -konveks fonksiyon sınıfı için bazı üst sınırlar elde edilmiştir.
5. Elde edilen eşitsizliklerin, bazı özel durumlar için çarpımsal harmonik konveks fonksiyon sınıfına ilişkin eşitsizliklere indirgendiği gösterilmiştir.

Bu çalışmadaki nihai hedefimiz; bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların Konveks Fonksiyonlar Teorisi'ne, Eşitsizlik Teorisi'ne ve bunların kullanıldığı alanlara katkıda bulunabilmektir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, öncelikle farklı türden konvekslik tanımlarını inceleyerek teze konulmayan ve literatürde henüz bulunmayan daha birçok konvekslik sınıfı için çarpımsal integral temelli yeni integral eşitsizlikleri elde edebilirler. Farklı türdeki konveks fonksiyonları kullanarak, özdeşlikler yardımıyla Hermite-Hadamard, Midpoint, Trapezoid, Simpson, Ostrowski tipli birçok yeni eşitsizlik inşa edebilirler. Bu eşitsizliklere özel ortalamalar uygulayarak, özel ortalamalar teorisine katkı sağlayabilirler.



KAYNAKLAR

- [1] **Beckenbach, E.F. & Bellman, R.** (1961). *Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
- [2] **Szarki, J.** (1965). *Differential Inequalities*. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii, Warszawa.
- [3] **Mitrinovic, D.S.** (1970). *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
- [4] **Mitrinovic D.S., Pecaric, J.E. & Fink, A.M.** (1991). *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers, 587, Dordrecht/Boston/London.
- [5] **Mitrinovic, D.S., Pecaric, J., Fink, A.M.** (1993). *Classical and new inequalities in analysis* (Vol. 61), Springer Science & Business Media. Dordrecht/Boston/London.
- [6] **Hermite, C.** (1883). Über die definition der homogenen functionen von n veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte mathematik* 94(1).
- [7] **Hadamard, J.** (1893). Etude sur les proprietes des fonctions entieres en particulier d'une fonction consideree par Riemann, *J. Math. Pures Appl.*, 58 (1893), 171-215.
- [8] **Roberts, A.W. & Varberg, D.E.** (1973). *Convex Functions*. Academic Press, 300pp, New York.
- [9] **Niculescu C. P., & Persson L.** (2018). *Convex functions and their applications*. Springer CMS books in mathematics, New York, USA, 255 pp.

- [10] **Bayraktar, M.** (2000). *Fonksiyonel Analiz*, Gazi kitabevi, Ankara.
- [11] **Bayraktar, M.** (2010). *Analiz*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- [12] **Adams, R.A. and Essex, C.** (2010). *Calculus A Complete Course*. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- [13] **Dragomir S.S. & Pearce, C.E.M.** (2000). *Selected Topics on Hermite–Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University.
- [14] **Hudzik, H. & Maligranda, L.** (1994). Some Remarks on s-Convex Functions. *Aequationes Mathematicae*, 48, 100-111.
- [15] **İşcan, İ.** (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 935-942.
- [16] **Noor M.A, Noor K.I., Awan M.U. & Costache S.** (2015). *Some Integral Inequalities for Harmonically h-Convex Functions*. U.P.B. Sci. Bull., Series A, 77 (1) (2015), 5-16.
- [17] **Pecaric, J. E., Proschan F. & Tong. Y. L.** (1992). *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*, Academic Press Inc. Boston.
- [18] **Noor M.A, Noor K.I. & Awan M.U.** (2014). *Some Characterizations of Harmonically log-Convex Functions*. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 17 (2014), No. 1. pp. 51-61.
- [19] **Awan M.U. Noor M.A. & Noor K.I.** (2018). *Some Integral Inequalities for Harmonically logarithmic h-Convex Functions*. *Sohag J. Math.* 5(2) (2018), 57-62.
- [20] **Bullen, P.S.** (2003). *Handbook of Means and Their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- [21] **Dragomir S.S. & Fitzpatrick S.** (1999). *The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense*. *Demonstratio Mathematica*. 32(4), 687-696.
- [22] **Grossman, M. & Katz, R.** (1972). *Non-Newtonian Calculus*. Lee Press, Pigeon Cove, MA.
- [23] **Bashirov, A.E., Kurpinar, E. & Özyapıcı, A.** (2008). *Multiplicative calculus and applications*. *J. Math. Anal. Appl.* 337(1), 36-48.
- [24] **Ali M.A., Abbas M., Zhang Z., Sial I.B. & Arif R.** (2019). *On Integral Inequalities for Product and Quotient of Two Multiplicatively Convex Functions*. *Asian Research Journal of Mathematics*. 12(3), 1-11.