



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ÇARPIMSAL İNTEGRAL DENKLEMLER ve ÇARPIMSAL İNTEGRAL
DENKLEMLERİN ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL
DENKLEMLER ile İLİŞKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice DURMAZ

MAYIS 2019
GÜMÜŞHANE

**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ÇARPIMSAL İNTEGRAL DENKLEMLER ve ÇARPIMSAL İNTEGRAL
DENKLEMLERİN ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL
DENKLEMLER ile İLİŞKİSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice DURMAZ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

“Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı”

Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17.05.2019

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 17.06.2019

MAYIS 2019



KABUL ve ONAY



Dr. Öğr. Üyesi Nihan GÜNGÖR danışmanlığında **Hatice DURMAZ** tarafından hazırlanan “**ÇARPIMSAL İNTEGRAL DENKLEMLER VE ÇARPIMSAL İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE İLİŞKİSİ**” isimli bu çalışma jürimiz tarafından Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Mühendisliği** Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak Oy Birliği ile kabul edilmiştir.

Başkan

.....

Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

Üye

.....

Doç. Dr. Tülay KESEMEN

Üye (Danışman)

.....

Dr. Öğr. Üyesi Nihan GÜNGÖR

ONAY

Bu tez 24.07/2019 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ferkan SİPAHİ

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum “Çarpımsal İntegral Denklemler ve Çarpımsal İntegral Denklemlerin Çarpımsal Diferansiyel Denklemler ile İlişkisi” isimli tez çalışmada; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 17/05/2019



Hatice DURMAZ

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ÇARPIMSAL İNTEGRAL DENKLEMLER ve ÇARPIMSAL İNTEGRAL
DENKLEMLERİN ÇARPIMSAL DİFERANSİYEL
DENKLEMLER ile İLİŞKİSİ**

HATİCE DURMAZ

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nihan GÜNGÖR

2019,65 sayfa

İntegral denklemler uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislikte önemli bir yere sahiptir ve bir çok uygulama alanı vardır. İntegral denklemler, diferansiyel denklemlerin çözümünde bir çözüm aracı olarak kullanıldığından, diferansiyel denklemler ile arasında yakın bir ilişki vardır. Diferansiyel denklemlerin uygulama alanlarının geniş olması integral denklemlerini önemli bir konuma getirmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak çarpımsal integral denklemler tanımlanmıştır ve çarpımsal integral denklemlerinin çözümleri irdelenmiştir. İkinci kısımda, çarpımsal integral denklemlerin çarpımsal diferansiyel denklemler ile ilişkisi incelenmiştir. Bir

arpımsal integral denklemin çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürüldüğü ve değişken veya sabit üstlü bir çarpımsal lineer diferansiyel denklemin arpımsal Volterra integral denklemine dönüştürüldüğü ispatlanmış ve örneklendirmeler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: arpımsal analiz, çarpımsal diferansiyel denklemler, çarpımsal integral denklemler, arpımsal Volterra integral denklemler



ABSTRACT
MS THESIS

**MULTIPLICATIVE INTEGRAL EQUATIONS and THE
RELATIONSHIP OF MULTIPLICATIVE INTEGRAL EQUATIONS WITH
MULTIPLICATIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS**

HATİCE DURMAZ

Gumushane University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nihan GÜNGÖR

2019, 65 pages

Integral equations have an important role and many applications in applied mathematics, mathematical physics and engineering. Since integral equations are used in the solution of differential equations, there is a close relationship with the differential equations. The wide range of applications of differential equations have brought integral equations into an important position.

In main results of this thesis, firstly, the multiplicative integral equations are defined and the solution of the multiplicative integral equations is studied. In the second part, the relationship of the multiplicative integral equations with the multiplicative differential equations is investigated. It is proved that a multiplicative integral equation is converted to a multiplicative differential equation and multiplicative linear differential equation with

constant or variable exponentials is converted to a multiplicative Volterra integral equation and also examples are made about them.

Keywords: Multiplicative calculus, Multiplicative differential equations, Multiplicative integral equations, Multiplicative Volterra integral equations



TEŞEKKÜR

Bu tezin çalışılmasında, planlanılmasında, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında ilgisini desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Nihan GÜNGÖR'e, tüm eğitim hayatım boyunca benden bir an olsun desteklerini eksik etmeyen sevgili ailem ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hatice DURMAZ
Gümüşhane,2019



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VIII
İÇİNDEKİLER.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Çarpımsal Türev.....	2
1.3. Çarpımsal Türevin Özellikleri.....	9
1.4. Çarpımsal İntegral.....	21
1.5. Çarpımsal Diferansiyel Denklem.....	30
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	32
2.1. Çarpımsal İntegral Denklemler.....	32
2.2. Çarpımsal İntegral Denklemler ile Çarpımsal Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki.....	35
2.2.1. Çarpımsal İntegral Denklemlerin Çarpımsal Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi.....	35
2.2.2. Çarpımsal Diferansiyel Denklemlerin Çarpımsal İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi.....	44
3. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	62
4. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	64
5. KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Çarpımsal ve Klasik Türev İlişkisi.....	16
--	----



TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1.1. Bazı Bilinen Fonksiyonların Çarpımsal ve Klasik Türev Kuralları.....23

Tablo 1.2. Bazı Bilinen Fonksiyonların Çarpımsal Ters Türev Kuralları.....28



SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$f^*(x)$	: f fonksiyonunun çarpımsal türevi
$\frac{d^*f}{dx^*}$	: f fonksiyonunun x 'e göre 1. mertbeden çarpımsal türevi
$\frac{\partial^*f}{\partial x^*}$	: f fonksiyonunun x 'e göre 1. mertbeden çarpımsal kısmi türevi
$f_x^*(x, y)$	: f fonksiyonunun x 'e göre çarpımsal kısmi türevi
$f_y^*(x, y)$	: f fonksiyonunun y 'ye göre çarpımsal kısmi türevi
$* \int f(x)^{dx}$	: f fonksiyonunun çarpımsal belirsiz integrali
$* \int_a^b f(x)^{dx}$	: f fonksiyonunun çarpımsal belirli integrali

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İntegral denklemler, uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislikte birçok problemin çözümü için 18.yüzyıldan bu yana başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerle olan ilişkisi ve diferansiyel denklemlerin uygulamada çok kullanılır olması nedeniyle, integral denklemler de mühendisliğin ve diğer alanların problemlerine daha çok girmeye başlamış ve önemi gittikçe artmıştır. İntegral denklemlerin çok geniş bir araştırma sahası olduğundan, integral denklemlerin tamamını içine alacak bir teori kurulamamaktadır. Bu nedenle integral denklemler niteliklerine göre ayrı ayrı incelenmektedirler. Bu ayrı incelemeler göz önüne alındığında Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri olarak ikiye ayrılmaktadır. Yapılan çalışmalarda özellikle Volterra İntegral Denklemleri ön planda olup diferansiyel denklemler ile arasındaki ilişkiye yer verilmektedir. Başlangıç koşulları verilen, değişken veya sabit katsayılı bir diferansiyel denklem, Volterra tipindeki bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi, bir integral denklem de diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Dolayısıyla, bir integral denklem başlangıç koşulları için sağlanan diferansiyel denklemin bir sınır değer problemi olarak da göz önüne alınabilir.

Diferansiyel ve integral denklemlerin temeli ünlü matematikçiler Newton ve Leibniz tarafından 17. Yüzyılda atılmıştır. Günümüzde bu analiz, en çok kullanılan matematiksel teoridir. Toplama işleminin en temel işlem olduğu düşünülerek, bu analiz toplamsal veya klasik analiz olarak adlandırılmaktadır. Klasik analiz göz önünde bulundurularak, temelini farklı aritmetik işlemlerin oluşturduğu analizler geliştirilebilir. Bunun önemli örneklerinden biri olarak 1887 yılında ünlü bilimci Volterra tarafından geliştirilen yeni analiz gösterilebilir. Volterra tarafından oluşturulan bu yeni analiz, simultane diferansiyel denklemlerin çözümleri için geliştirilmiştir. Bu analizde çarpma işlemi en temel işlem olduğundan, bu analize çarpımsal analiz denilmektedir.

Matematikte bazı problemlerin bilinen klasik kavramlar ile açıklanması ve analitik çözümünün bulunması o kadar kolay değildir. Bu tür problemlerin çözümü için alternatif olarak çarpımsal türev ve çarpımsal integral içeren çarpımsal analiz geliştirilmiştir.

Bu yeni analizin bazı problemlere uygulama kolaylığı getirdiği ve bazı durumlarda ise klasik analizden daha etkin ve daha hızlı sonuçlar verdiği de görülmüştür.

Yapılan literatür taramalarında çarpımsal analizde integral denklemler ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanmamış olup, yapılan araştırmaların ışığı altında klasik analizde integral denklemler ile ilgili yapılan bazı çalışmaların çarpımsal analize aktarılacağı fikri ortaya çıkmıştır. Bu tez çalışmasında çarpımsal analizdeki temel kavramlar kullanılarak, integral denklemlerle ilgili temel tanımlar ve sınıflandırmalar çarpımsal analize aktarılmıştır. Çarpımsal integral tanımı ve özellikleri kullanılarak çarpımsal integral denklemlerinin çözümü incelenmiştir. Ayrıca, çarpımsal Volterra integral denklemleri ile çarpımsal diferansiyel denklemler arasındaki ilişki irdelenmiştir.

1.2. Çarpımsal Türev

Bu kısımda bir fonksiyonun yeni çeşit bir türevi olan ve çarpımsal türev adı verilen kavram tanıtılacak ve çarpımsal türev ifade edilirken $*$ sembolü kullanılacaktır. Yani bir f fonksiyonunun klasik türevi ifade edilirken f' sembolü, çarpımsal türevi ifade edilirken de f^* sembolü kullanılacaktır.

Çarpımsal türev tanımı ile klasik türev tanımı arasındaki ilişkiyi yani benzerliklerini ve farklılıklarını daha iyi kavramak adına öncelikle herhangi bir f fonksiyonunun x deki klasik türevinin

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1.2.1)$$

şeklinde ifade edildiği gözönüne alınsın.

Klasik türevin aksine, herhangi bir g fonksiyonunun çarpımsal türevi orana dayalıdır. Bu nedenle, $f(x+h) - f(x)$ farkı yerine $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ oranı ve h bölümü yerine h ifadesinin çarpmaya göre tersi olan $\frac{1}{h}$ kuvveti alınarak

$$\left[\frac{g(x+h)}{g(x)} \right]^{\frac{1}{h}} \quad (1.2.2)$$

yazılır.

Özel olarak, g fonksiyonu klasik anlamda türevlenebilir ve $(g(x) > 0, \text{ her } x \text{ için})$ pozitif varsayılırsa h sifira yaklaşırken (1.2.2) denklemindeki oranın limiti g fonksiyonunun x 'deki çarpımsal türevidir, yani

$$g^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h)}{g(x)} \right]^{\frac{1}{h}} \quad (1.2.3)$$

şeklinde elde edilir. g fonksiyonu pozitif olduğu için köşeli parantezin içinde pozitifdir ve (1.2.3) denklemindeki $\frac{1}{h}$ kuvveti keyfi (sıfır olmayan) pozitif h sayıları için iyi tanımlıdır. Görüldüğü üzere aslında g fonksiyonunun pozitif olması gerekmemektedir, sadece *-türevi alınması istenilen x noktasında $g(x) \neq 0$ olmalıdır. Yinede, g fonksiyonunun pozitif olduğu varsayımı, tartışmayı daha basit hale getirir ve çarpımsal türevi alınmak istenilen noktaları etkilemez. g fonksiyonunun klasik türevi hakkında bilinenler kullanılarak, (1.2.3) denklemindeki limit

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h)}{g(x)} \right]^{\frac{1}{h}} &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln \left(\frac{g(x+h)}{g(x)} \right)^{\frac{1}{h}}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(g(x+h)) - \ln g(x)}{h}} \\ &= e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(g(x+h)) - \ln g(x)}{h}} \\ &= e^{\frac{d}{dx} \ln g(x)} \\ &= e^{\frac{g'(x)}{g(x)}} \\ &= e^{(\ln \circ g)'(x)} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $\ln \circ g$ fonksiyonu logaritmik fonksiyon ile g fonksiyonunun bileşkesidir. Sonuç olarak herhangi bir g fonksiyonunun çarpımsal türevi (1.2.4) denkleminde ifade edildiğı gibi elde edilir (Stanley, 1999).

O halde yukarıdaki açıklamalar göz önüne alınarak çarpımsal türev tanımını aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Tanım 1.2.1. (Çarpımsal Türev)

$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$ ifadesi tanımlıysa f fonksiyonunun x değişkenine göre çarpımsal türevi olarak adlandırılır ve $f^*(x)$ sembolü ile gösterilir. Yani

$$f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

şeklinde ifade edilir. $A \subseteq \mathbb{R}$ açık kümelerindeki bütün x değişkenleri için $f^*(x)$ fonksiyonu $f^*: A \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlanır (Mısırlı ve Bashirov, 2006).

Örnek 1.2.1. $f(x) = 5e^{2x}$ fonksiyonunun çarpımsal türevini hesaplayınız.

Çözüm: Çarpımsal türev tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{5e^{2(x+h)}}{5e^{2x}} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{5e^{2x}e^{2h}}{5e^{2x}} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (e^{2h})^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^2 \\ &= e^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.2.2. $f(x) = 3^x$ fonksiyonunun çarpımsal türevini hesaplayınız.

Çözüm: Çarpımsal türev tanımı kullanılarak,

$$f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3^{(x+h)}}{3^x} \right)^{\frac{1}{h}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3^x 3^h}{3^x} \right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (3^h)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Şimdi klasik türev ve çarpımsal türev arasındaki ilişkiyi detaylı açıklayacak olan teoremler ifade edilecektir.

Teorem 1.2.1. Eğer f fonksiyonu x noktasında pozitif ve klasik anlamda diferansiyellenebilir ise o zaman x noktasında çarpımsal diferansiyellenebilirdir ve

$$f^*(x) = e^{\frac{d}{dx}(\ln f(x))} = e^{\left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]}$$

dir (Stanley, 1999).

İspat: f fonksiyonu x noktasında pozitif ve klasik anlamda diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda $\ln o f$ fonksiyonu da klasik anlamda diferansiyellenebilirdir. Buradan $e^{(\ln o f)'(x)}$ ifadesi var olduğundan, (1.2.4) ifadesi gereğince f fonksiyonu x noktasında çarpımsal diferansiyellenebilirdir. Ayrıca (1.2.4) ifadesinden $f^*(x) = e^{\left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]}$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 1.2.3. $f(x) = c \cdot e^{\sin x}$ fonksiyonunun çarpımsal türevini hesaplayınız.

Çözüm: Teorem 1.2.1'den

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{(\ln c e^{\sin x})'} \\
&= e^{(\ln c + \ln e^{\sin x})'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{(\ln c)' + (\ln e^{\sin x})'} \\
&= e^{(\ln c)'} \cdot e^{(\ln e^{\sin x})'} \\
&= e^0 \cdot e^{(\sin x)'} \\
&= e^{\cos x}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.2.4. $f(x) = c \cdot \cos x$ fonksiyonunun çarpımsal türevini hesaplayınız.

Çözüm: Teorem 1.2.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{\frac{(c \cdot \cos x)'}{c \cdot \cos x}} \\
&= e^0 \cdot e^{\frac{\sin x}{\cos x}} \\
&= \frac{1}{e^{\tan x}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.2.4. $f(x) = c \cdot \sin x$ fonksiyonunun çarpımsal türevini hesaplayınız.

Çözüm: Teorem 1.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{\frac{(c \cdot \sin x)'}{c \cdot \sin x}} \\
&= e^0 \cdot e^{\frac{\cos x}{\sin x}} \\
&= e^{\cot x}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 1.2.2. Eğer f fonksiyonu x noktasında pozitif, çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir ve $f^*(x) \neq 0$ ise f fonksiyonu x noktasında klasik anlamda diferansiyellenebilirdir ve

$$f'(x) = f(x) \ln f^*(x)$$

biçimindedir (Stanley, 1999).

İspat: $f^*(x) \neq 0$ ve f çarpımsal olarak diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda Teorem 1.2.1'den

$$f^*(x) = e^{(\ln \circ f)'(x)}$$

yazılabilir. Burada eşitliğin iki tarafında doğal logaritması alınırsa

$$\ln f^*(x) = (\ln \circ f)'(x)$$

olarak elde edilir. Böylece

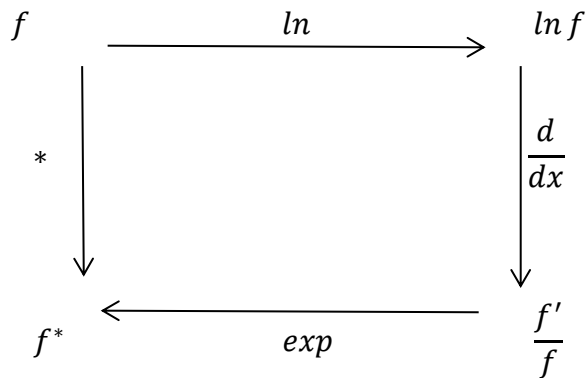
$$\begin{aligned} \ln(f^*(x)) &= \ln'(f(x)) \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

olup

$$f'(x) = f(x) \ln f^*(x)$$

elde edilir.

Bir f fonksiyonunun çarpımsal türevi ile klasik türevi arasındaki ilişkinin başka bir gösterim yoluda aşağıdaki şema ile ifade edilebilir (Stanley, 1999):



Şekil 1.1. Çarpımsal ve Klasik Türev İlişkisi

Tanım 1.2.2. f^* fonksiyonunun çarpımsal türevi varsa f fonksiyonunun 2. mertebeden çarpımsal türevi olarak adlandırılır ve f^{**} sembolü ile gösterilir. Bu durumda f fonksiyonunun 2. mertebeden klasik türevi varsa

$$f^{**}(x) = e^{(\ln of^*)'(x)} = e^{(\ln of)''(x)}$$

olarak ifade edilir. Bu ifade de $f''(x)$ var olduğundan $(\ln of)''(x)$ vardır.

Benzer şekilde bu yaklaşım tekrarlanarak, f fonksiyonunun x noktasında n . mertebeden klasik türevi varsa n . mertebeden çarpımsal türevi

$$f^{*(n)}(x) = e^{(\ln of)^{(n)}(x)}$$

şeklinde tanımlanır (Gürefe, 2009; Özyapıcı, 2009).

Tanım 1.2.3. $B \subseteq \mathbb{R}^+$ ve $g: B \rightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 1$ sayısı için $\left|\frac{x}{b}\right|^* < \delta$ iken $\left|\frac{g(x)}{g(b)}\right|^* < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 1$ sayısı mevcutsa g fonksiyonu $b \in B$ noktasında çarpımsal olarak süreklidir denir.

Eğer B kümesi üzerinde bütün noktalarda g fonksiyonu çarpımsal sürekli ise g fonksiyonu B kümesinde çarpımsal süreklidir denir (Gürefe, 2009; Özyapıcı, 2009).

Örnek 1.2.6. $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(x) = 2x^5$ fonksiyonunun $\forall x_0 \in \mathbb{R}^+$ için çarpımsal sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\varepsilon > 1$ sayısı için $\delta = \sqrt[5]{\varepsilon}$ alınırsa

$$\left|\frac{x}{x_0}\right|^* < \delta \text{ iken } \left|\frac{2x^5}{2x_0^5}\right|^* < \varepsilon$$

bağıntısı sağlanır.

1.3. Çarpımsal Türevin Özellikleri

Önerme 1.3.1.

- (1) Her $x \in (a, b)$ için $f(x) = c > 0$ sabit fonksiyonunun çarpımsal türevi 1 dir, yani $f^*(x) = 1$ dir.
- (2) Çarpımsal türevi 1 olan fonksiyon sabittir, yani $f^*(x) = 1$ ise her $x \in (a, b)$ için $f(x) = c > 0$ dır (Özyapıcı, 2009).

İspat:

- (1) (a, b) aralığında $f(x) = c > 0$ sabit fonksiyonu verilsin.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= e^{(\ln c)'} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

- (2) Her $x \in (a, b)$ için $f^*(x) = 1$ olsun. Bu durumda

$$f^*(x) = e^{(\ln \circ f)'(x)} = 1$$

elde edilir. Buradan , $f(x) = c > 0$ olduğu kolayca bulunabilir.

Önerme 1.3.2. Üstel bir fonksiyonun çarpımsal türevi sabit sayıya eşittir (Özyapıcı, 2009).

İspat: $a > 0$ iken $f(x) = a^x$ olsun. (1.2.3) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{a^{(x+h)}}{a^x} \right)^{\frac{1}{h}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} (a^h)^{\frac{1}{h}} \\
&= a
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.3.1. f ve g çarpımsal türevlenebilen herhangi iki fonksiyon olsun. c keyfi bir sabit olmak üzere $cf, fg, f+g, \frac{f}{g}, f^g$ fonksiyonları da çarpımsal türevlenebilirdir ve bu fonksiyonların çarpımsal türevleri aşağıdaki gibidir:

- (1) $(cf)^*(x) = f^*(x)$
- (2) $(fg)^*(x) = f^*(x) \cdot g^*(x)$
- (3) $(f+g)^*(x) = f^*(x)^{\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} \cdot g^*(x)^{\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}}$
- (4) $\left(\frac{f}{g}\right)^*(x) = \frac{f^*(x)}{g^*(x)}$
- (5) $(f^g)^*(x) = f^*(x)^{g(x)} \cdot f(x)^{g'(x)}$

(Özyapıcı, 2009; Güreffe, 2009).

İspat:

(1) f çarpımsal diferansiyellenebilen bir fonksiyon ayrıca c bir sabit olsun. $(cf)^*(x)$ fonksiyonu ele alınıp Teorem 1.2.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(cf)^*(x) &= e^{(\ln c f)'(x)} \\
&= e^{(\ln c + \ln f)'(x)} \\
&= e^0 \cdot e^{(\ln f)'(x)} \\
&= f^*(x)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

(2) f ve g çarpımsal diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. $(fg)^*(x)$ fonksiyonu ele alınıp Teorem 1.2.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(fg)^*(x) &= e^{(\ln ofg)'(x)} \\
&= e^{(\ln of + \ln og)'(x)} \\
&= e^{(\ln of)'(x) + (\ln og)'(x)} \\
&= e^{(\ln of)'(x)} \cdot e^{(\ln og)'(x)} \\
&= f^*(x) \cdot g^*(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3) f ve g çarpımsal diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. $(f + g)^*(x)$ fonksiyonu göz önüne alınıp Teorem 1.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(f + g)^*(x) &= e^{(\ln o(f+g))'(x)} \\
&= e^{\frac{(f+g)'(x)}{(f+g)}} \\
&= e^{\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}} \\
&= e^{\frac{f'(x)}{f(x)+g(x)}} \cdot e^{\frac{g'(x)}{f(x)+g(x)}} \\
&= f^*(x)^{\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} \cdot g^*(x)^{\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}}
\end{aligned}$$

bulunur.

(4) f ve g çarpımsal diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. $\left(\frac{f}{g}\right)^*(x)$ fonksiyonu ele alınsın. $g(x) > 0$ olarak kabul edilip Teorem 1.2.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^*(x) &= e^{(\ln o\left(\frac{f}{g}\right))'(x)} \\
&= e^{(\ln of)'(x) - (\ln og)'(x)} \\
&= e^{(\ln of)'(x)} \cdot e^{-(\ln og)'(x)} \\
&= \frac{e^{(\ln of)'(x)}}{e^{(\ln og)'(x)}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{f^*(x)}{g^*(x)}$$

olur.

(5) f ve g çarpımsal diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. Teorem 1.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} (f^g)^*(x) &= e^{(g \cdot \ln f)'(x)} \\ &= e^{(g'(\ln f) + g(\ln f)')(x)} \\ &= e^{g'(x)(\ln f)(x) + g(x)(\ln f)'(x)} \\ &= e^{g'(x)(\ln f)(x)} \cdot e^{g(x)(\ln f)'(x)} \\ &= f(x)^{g'(x)} \cdot f^*(x)^{g(x)} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.3.1. $f(x) = \cos x \cdot \sin x$ fonksiyonunun çarpımsal türevini hesaplayınız.

Çözüm: Teorem 1.3.1'in (2). şıkkı kullanılırsa

$$\begin{aligned} f^*(x) &= (\cos x \cdot \sin x)^* \\ &= (\cos x)^* (\sin x)^* \end{aligned}$$

olur. Örnek 1.2.3 ve Örnek 1.2.4 kullanılarak,

$$f^*(x) = e^{-\tan x} e^{\cot x}$$

bulunur.

Önerme 1.3.3.

$$[e^{f(x)}]^* = [f^*(x)]^{f(x)}$$

bağıntısı gerçekleşir (Özyapıcı, 2009).

İspat: Teorem 1.2.1'den

$$\begin{aligned}[e^{f(x)}]^* &= e^{(\ln e^{f(x)})'} \\ &= \frac{(e^{f(x)})'}{e^{f(x)}} \\ &= e^{f'(x)}\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}[e^{f(x)}]^* &= \left[e^{\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)} \right]^{f(x)} \\ &= \left[e^{(\ln of)'(x)} \right]^{f(x)} \\ &= [f^*(x)]^{f(x)}\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 1.3.4. $n \in \mathbb{R}$ ve f çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun çarpımsal türevinin n . kuvveti

$$[f^*(x)]^n = [f^n(x)]^*$$

ifadesine eşittir.

İspat: $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere eşitliğin sağ tarafı ele alınıp Teorem 1.2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}[f^n(x)]^* &= e^{\frac{[f^n(x)]'}{f^n(x)}} \\ &= e^{\frac{n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)}{f^n(x)}} \\ &= e^{\frac{n \cdot f'(x)}{f(x)}}\end{aligned}$$

olur. Burada Teorem 1.2.2 kullanılarak geçiş yapılırsa

$$\begin{aligned}[f^n(x)]^* &= e^{\frac{n \cdot f(x) \ln f^*(x)}{f(x)}} \\ &= e^{n \cdot \ln f^*(x)} \\ &= e^{\ln(f^*(x))^n} \\ &= [f^*(x)]^n\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Önerme 1.3.5. c herhangi bir pozitif sabit sayı olsun. Eğer

(1) $f(x) = cx$ ise $f^*(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(2) $f(x) = cx^k$ ise $f^*(x) = e^{\frac{k}{x}}$

olur (Özyapıcı, 2009).

İspat:

(1) $f(x) = cx$ ise Teorem 1.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}f^*(x) &= e^{(\ln cx)'} \\ &= e^{(\ln c + \ln x)'} \\ &= 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

bulunur.

(2) $f(x) = cx^k$ ise Teorem 1.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}f^*(x) &= e^{(\ln cx^k)'} \\ &= e^{(\ln c + \ln x^k)'} \\ &= e^{(\ln c + k \cdot \ln x)'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1. e^{\frac{k}{x}} \\
&= e^{\frac{k}{x}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 1.3.6. f, g pozitif ve çarpımsal anlamda diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun.

Eğer

(1) $f(x) = ce^{kx}$ ise $f^*(x) = e^k$

(2) $f(x) = ce^{g(x)}$ ise $f^*(x) = [g^*(x)]^{g(x)}$

olur (Özyapıcı, 2009).

İspat:

(1) $f(x) = ce^{kx}$ ise Teorem 1.2.1'den

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{(\ln ce^{kx})'} \\
&= e^{(\ln c + \ln e^{kx})'} \\
&= e^{(\ln c + kx)'} \\
&= e^{(\ln c)'} \cdot e^{(kx)'} \\
&= 1. e^k \\
&= e^k
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

(2) $f(x) = ce^{g(x)}$ ise Teorem 1.2.1'den,

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{(\ln ce^{g(x)})'} \\
&= e^{(\ln c + \ln(e^{g(x)}))'} \\
&= e^{(\ln c)' + (\ln(e^{g(x)}))'} \\
&= e^{(\ln c)'} \cdot e^{\frac{(e^{g(x)})'}{e^{g(x)}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1. e^{\frac{g'(x).e^{g(x)}}{e^{g(x)}}} \\
&= e^{g'(x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Teorem 1.2.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{g(x). \ln g^*(x)} \\
&= e^{\ln(g^*(x))^{g(x)}} \\
&= [g^*(x)]^{g(x)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Önerme 1.3.7. c bir sabit ve g çarpımsal anlamda diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer

- (1) $f(x) = c \ln x$ ise $f^*(x) = e^{\frac{1}{x \ln x}}$
- (2) $f(x) = c(\ln g(x))$ ise $f^*(x) = [g^*(x)]^{\frac{1}{(\ln g(x))}}$

olarak hesaplanır (Özyapıcı, 2009).

İspat:

(1) $f(x) = c \ln x$ ise Teorem 1.2.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{(\ln(c \ln x))'} \\
&= e^{(\ln c)'}. e^{\frac{(\ln x)'}{\ln x}} \\
&= 1. e^{\frac{1}{x \ln x}} \\
&= e^{\frac{1}{x \ln x}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

(2) $f(x) = c(\ln g(x))$ ise Teorem 1.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{[\ln(c \cdot \ln g(x))]' } \\
&= e^{(\ln c)' + (\ln(\ln g(x)))' } \\
&= e^{(\ln c)'} \cdot e^{\frac{(\ln g(x))'}{\ln(g(x))}} \\
&= e^{\frac{\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))}} \\
&= e^{\frac{g'(x)}{g(x) \ln(g(x))}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Teorem 1.2.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{\frac{g(x) \ln(g^*(x))}{g(x) \ln(g(x))}} \\
&= e^{\frac{\ln(g^*(x))}{\ln(g(x))}} \\
&= [e^{\ln(g^*(x))}]^{\frac{1}{\ln(g(x))}} \\
&= [g^*(x)]^{\frac{1}{(\ln g(x))}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 1.3.8. h klasik anlamda diferansiyellenebilir ve g çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer f foksiyonu $f(x) = (goh)(x)$ biçiminde tanımlı ise çarpımsal türevi

$$f^*(x) = [g^*(h(x))]^{h'(x)}$$

olur (Özyapıcı, 2009).

İspat:

$f(x) = (goh)(x)$ olmak üzere Teorem 1.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= e^{(\ln \circ f)'(x)} \\
&= e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} \\
&= e^{\frac{g'(h(x)) \cdot h'(x)}{(g \circ h)(x)}} \\
&= \left[e^{\frac{g'(h(x))}{g(h(x))}} \right]^{h'(x)} \\
&= [g^*(h(x))]^{h'(x)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Aşağıda bazı fonksiyonların klasik anlamdaki türevleri ve çarpımsal türevleri tablo halinde verilmiştir (Stanley, 1999).

Tablo 1.1. Bilinen bazı fonksiyonların klasik ve çarpımsal türev kuralları

	$f(x)$	$f'(x)$	$f^*(x)$
1	c	0	1
2	ce^{kx}	cke^{kx}	e^k
3	cb^x	$c[\ln b]b^x$	b
4	cx	c	$\frac{1}{e^x}$
5	$c \ln x$	$c \frac{1}{x}$	$\frac{1}{e^{x \ln x}}$
6	$c f(x)$	$c f'(x)$	$f^*(x)$
7	$ax + b$	a	$\frac{a}{e^{ax+b}}$
8	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$	$f^*(x) \cdot g^*(x)$
9	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$	$\frac{1}{f^*(x)}$
10	$c \ln(f(x))$	$c \frac{f'(x)}{f(x)}$	$[f^*(x)]^{\frac{1}{\ln(f(x))}}$
11	cx^n	cnx^{n-1}	$\frac{n}{e^x}$
12	$c \sin x$	$c \cos x$	$e^{\cot x}$
13	$c \cos x$	$-c \sin x$	$e^{-\tan x}$
14	$ce^{\sin x}$	$c \cos x \cdot e^{\sin x}$	$e^{\cos x}$

Önerme 1.3.9. Eğer herhangi bir f fonksiyonu x_0 noktasında çarpımsal diferansiyellenebilir ise f , x_0 noktasında süreklidir (Özyapıcı, 2009).

İspat: f fonksiyonu x_0 noktasında çarpımsal diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda Teorem 1.2.1'den f fonksiyonu x_0 noktasında klasik olarak diferansiyellenebilirdir. Bir noktada klasik anlamda diferansiyellenebilen her fonksiyon o noktada süreklidir. Dolayısıyla f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Teorem 1.3.2. (Çarpımsal Ortalama Değer Teoremi)

f fonksiyonu pozitif, (a, b) aralığında çarpımsal olarak diferansiyellenebilen ve $[a, b]$ aralığında çarpımsal olarak sürekli bir fonksiyon ise

$$f^*(c) = \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{b-a}}$$

olacak şekilde $c \in (a, b)$ sayısı vardır (Gürefe, 2009; Özyapıcı, 2009).

Tanım 1.3.1. (Çarpımsal Kısmi Türev)

Pozitif ve tek değişkenli bir f fonksiyonunun

$$f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}}$$

şeklinde tanımlı çarpımsal türevi ve klasik türevi arasında

$$f^*(x) = e^{(\ln f(x))'} = e^{\frac{d}{dx}(\ln f(x))}$$

eşitliği vardır. Buna dayanarak iki değişkenli bir f fonksiyonunun çarpımsal kısmi türevleri

$$f_x^*(x, y) = e^{\frac{\partial}{\partial x} \ln(f(x, y))} \quad \text{ve} \quad f_y^*(x, y) = e^{\frac{\partial}{\partial y} \ln(f(x, y))}$$

şeklinde tanımlanır (Bashirov, 2013).

Teorem 1.3.3. (Çarpımsal Zincir kuralı)

f, y ve z 'ye bağlı sürekli çarpımsal kısmi türevleri mevcut olan bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in (a, b)$ için $f(y(x), z(x))$ tanımlı olacak şekilde (a, b) aralığında y ve z fonksiyonları klasik anlamda türevlenebilir ise

$$\frac{d^* f(y(x), z(x))}{dx^*} = f_y^*(y(x), z(x))^{y'(x)} \cdot f_z^*(y(x), z(x))^{z'(x)}$$

dir.

İspat: $f(y(x), z(x))$ fonksiyonunun çarpımsal türevi alınırken Teorem 1.2.1 kullanılırsa

$$\frac{d^* f(y(x), z(x))}{dx^*} = e^{\frac{d}{dx}(\ln(f(y(x), z(x))))}$$

olur. Burada $\ln(f(y(x), z(x)))$ fonksiyonunun klasik anlamda türevine ihtiyaç duyulduğundan klasik anlamda zincir kuralından faydalanılacaktır. Böylece

$$\frac{d}{dx} f(y(x), z(x)) = f_y(y(x), z(x)) \cdot y'(x) + f_z(y(x), z(x)) \cdot z'(x)$$

olduğundan

$$\frac{d}{dx} \ln(f(y(x), z(x))) = \frac{f_y(y(x), z(x)) \cdot y'(x)}{f(y(x), z(x))} + \frac{f_z(y(x), z(x)) \cdot z'(x)}{f(y(x), z(x))}$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{d^* f(y(x), z(x))}{dx^*} &= e^{\frac{f_y(y(x), z(x)) \cdot y'(x)}{f(y(x), z(x))}} \cdot e^{\frac{f_z(y(x), z(x)) \cdot z'(x)}{f(y(x), z(x))}} \\ &= e^{y'(x) \frac{\partial}{\partial y} \ln(f(y(x), z(x)))} \cdot e^{z'(x) \frac{\partial}{\partial z} \ln(f(y(x), z(x)))} \\ &= e^{\frac{\partial}{\partial y} \ln(f(y(x), z(x)))^{y'(x)}} \cdot e^{\frac{\partial}{\partial z} \ln(f(y(x), z(x)))^{z'(x)}} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece çarpımsal kısmi türev tanımı ve Önerme 1.3.4 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\frac{d^* f(y(x), z(x))}{dx^*} &= \frac{\partial^*}{\partial y^*} [f(y(x), z(x))]^{y'(x)} \cdot \frac{\partial^*}{\partial z^*} [f(y(x), z(x))]^{z'(x)} \\ &= f_y^*(y(x), z(x))^{y'(x)} \cdot f_z^*(y(x), z(x))^{z'(x)}\end{aligned}$$

elde edilir.

1.4. Çarpımsal İntegral

Bu kısımda, öncelikle çarpımsal ters türev kavramından bahsedilecek ve klasik integral kavramıyla olan ilişkisi ifade edilecektir. Sonrasında çarpımsal integraller ile ilgili gerekli özelliklere ve temel teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1.4.1. Her $x \in (a, b)$ için $F^*(x) = f(x)$ biçiminde ise $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir çarpımsal ters türevidir denir. Bu kavram için

$$* \int f(x)^{dx} = F(x)$$

notasyonu kullanılacaktır.

dx diferansiyelinin çarpım durumunda değil üstel durumda olmasına dikkat edilmelidir. Klasik anlamda ters türevde daima bir sabitle toplam halinde olduğu gibi çarpımsal anlamda ters türevde de daima bir sabitle çarpım söz konusudur.

Son olarak

$$e^{(\ln \circ F)'(x)} = f(x)$$

formülünden çarpımsal ters türev formülü

$$* \int [e^{f(x)}]^{dx} = e^{\int f(x) dx}$$

biçiminde ifade edilir. Bu ifade yalnızca üstel biçimde verilen bir fonksiyonun ters türevini bulmak için kullanılır. Verilen herhangi bir fonksiyonunun doğrudan ters türevini veren formül

$$* \int f(x)^{dx} = e^{\int \ln f(x) dx}$$

şeklinde yazılabilir. Burada f fonksiyonu pozitif ve $\ln f(x)$ fonksiyonu her yerde tanımlıdır. Yani buradan bir f fonksiyonunun çarpımsal belirsiz integralinin

$$* \int f(x)^{dx} = e^{\int \ln f(x) dx}$$

şeklinde hesaplandığı görülür. (Stanley, 1999).

Örnek 1.4.1. $f(x) = e^{3x}$ fonksiyonunun çarpımsal ters türevini bulunuz.

Çözüm: Çarpımsal ters türev tanımı kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} * \int [e^{3x}]^{dx} &= e^{\int 3x dx} \\ &= e^{\frac{3x^2}{2} + c} \\ &= e^c \cdot e^{\frac{3x^2}{2}} \\ &= C e^{\frac{3x^2}{2}} \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

Örnek 1.4.2. $* \int [7]^{dx}$ çarpımsal ters türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} * \int [7]^{dx} &= e^{\int \ln 7 dx} \\ &= e^{\ln 7(x+c)} \\ &= e^{c \cdot \ln 7 + x \cdot \ln 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{c \cdot \ln 7} \cdot e^{\ln 7^x} \\
&= C 7^x
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.4.3. * $\int [e^{-\sin x}]^{dx}$ çarpımsal ters türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
* \int [e^{-\sin x}]^{dx} &= e^{\int -\sin x dx} \\
&= e^{\cos x + c} \\
&= e^c \cdot e^{\cos x} \\
&= C e^{\cos x}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 1.4.4. * $\int [e^{\cos x}]^{dx}$ çarpımsal ters türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
* \int [e^{\cos x}]^{dx} &= e^{\int \cos x dx} \\
&= e^{\sin x + c} \\
&= e^c \cdot e^{\sin x} \\
&= C e^{\sin x}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.4.5. * $\int [e^{-\tan x}]^{dx}$ çarpımsal ters türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$* \int [e^{-\tan x}]^{dx} = e^{-\int \tan x dx}$$

$$= e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx}$$

olur. Burada $\cos x = u, -\sin x dx = du$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{du}{u}} &= e^{\ln u + c} \\ &= e^c \cdot e^{\ln(\cos x)} \\ &= C \cdot \cos x \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Aşağıda bazı fonksiyonların çarpımsal ters türevleri tablo halinde verilmiştir (Stanley,1999).

Tablo 1.2. Bilinen bazı fonksiyonların çarpımsal ters türev kuralları

1	$* \int 1^dx = c$
2	$* \int k^dx = ck^x, k > 0$
3	$* \int [e^{kx}]^dx = ce^{\frac{kx^2}{2}}, k > 0$
4	$* \int [e^{kx^n}]^dx = ce^{\frac{kx^{n+1}}{n+1}}$
5	$* \int \left[e^{\frac{k}{x}} \right]^dx = cx^k$
6	$* \int [e^{\cos x}]^dx = ce^{\sin x}$
7	$* \int [e^{-\sin x}]^dx = c \cdot e^{\cos x}$
8	$* \int [e^{-\tan x}]^dx = c \cdot \cos x$

Tanım 1.4.2. Eğer f , fonksiyonu $[a, b]$ aralığında pozitif ve sürekli ise (a, b) aralığında çarpımsal integrellenebilirdir ve

$$* \int_a^b f(x)^dx = e^{\int_a^b \ln(f(x))dx}$$

şeklinde tanımlanır (Gürefe, 2009).

Teorem 1.4.1. f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında çarpımsal integrallenebilir ve (a, b) aralığında pozitif ve sürekli olsunlar. O zaman $k \in \mathbb{R}, a \leq c \leq b$ olmak üzere $f^k, fg, \frac{f}{g}$ fonksiyonları çarpımsal diferansiyellenebilirdir ve

$$\begin{aligned} (1) \quad * \int_a^b (f(x)^k)^{dx} &= \left(* \int_a^b (f(x))^{dx} \right)^k \\ (2) \quad * \int_a^b (f(x)g(x))^{dx} &= * \int_a^b (f(x))^{dx} .* \int_a^b (g(x))^{dx} \\ (3) \quad * \int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{dx} &= \frac{* \int_a^b (f(x))^{dx}}{* \int_a^b (g(x))^{dx}} \\ (4) \quad * \int_a^b (f(x))^{dx} &= * \int_a^c (f(x))^{dx} .* \int_c^b (f(x))^{dx} \end{aligned}$$

şeklindedir (Gürefe, 2009; Özyapıcı, 2009).

İspat:

(1) $[a, b]$ aralığında f fonksiyonu çarpımsal anlamda integrallenebilir olsun. Bu aralıkta f fonksiyonu pozitif ve sürekli olduğundan çarpımsal integral tanımından her $k \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} * \int_a^b (f(x)^k)^{dx} &= e^{\int_a^b (\ln(f(x)^k))^{dx}} \\ &= e^{\int_a^b k \ln(f(x))^{dx}} \\ &= e^{k \int_a^b \ln(f(x))^{dx}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} * \int_a^b (f(x)^k)^{dx} &= \left[e^{\int_a^b \ln(f(x))^{dx}} \right]^k \\ &= \left(* \int_a^b (f(x))^{dx} \right)^k \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(2) $[a, b]$ aralığında f ve g fonksiyonları çarpımsal anlamda integrallenebilir olsun. Buradan,

$$* \int_a^b (f(x)g(x))^{dx} = e^{\int_a^b \ln(f(x) \cdot g(x)) dx}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} * \int_a^b (f(x)g(x))^{dx} &= e^{\int_a^b (\ln f(x) + \ln g(x)) dx} \\ &= e^{\int_a^b \ln f(x) dx + \int_a^b \ln g(x) dx} \\ &= e^{\int_a^b \ln f(x) dx} \cdot e^{\int_a^b \ln g(x) dx} \\ &= * \int_a^b (f(x))^{dx} \cdot * \int_a^b (g(x))^{dx} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(3) $[a, b]$ aralığında f ve g fonksiyonları çarpımsal anlamda integrallenebilir olsun. Buradan

$$\begin{aligned} * \int_a^b \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{dx} &= e^{\int_a^b \ln \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) dx} \\ &= e^{\int_a^b (\ln f(x) - \ln g(x)) dx} \\ &= e^{\left(\int_a^b \ln f(x) dx - \int_a^b \ln g(x) dx \right)} \\ &= e^{\int_a^b \ln f(x) dx} \cdot e^{-\int_a^b \ln g(x) dx} \\ &= \frac{* \int_a^b (f(x))^{dx}}{* \int_a^b (g(x))^{dx}} \end{aligned}$$

elde edilir.

(4) $[a, b]$ aralığında f fonksiyonu çarpımsal anlamda integrallenebilir olsun. Eğer $a \leq c \leq b$ aralığında bir c sabiti alınırsa,

$$\begin{aligned} * \int_a^b (f(x))^{dx} &= e^{\int_a^b \ln f(x) dx} \\ &= e^{\left(\int_a^c \ln f(x) dx + \int_c^b \ln f(x) dx \right)} \\ &= e^{\int_a^c \ln f(x) dx} \cdot e^{\int_c^b \ln f(x) dx} \\ &= * \int_a^c (f(x))^{dx} \cdot * \int_c^b (f(x))^{dx} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 1.4.2. f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında çarpımsal tersi alınabilen bir fonksiyon olsun. Bu koşullarda

$$(1) * \int_a^b (f(x))^{dx} = \left[* \int_b^a (f(x))^{dx} \right]^{-1}$$

$$(2) * \int_a^a (f(x))^{dx} = 1$$

olur (Gürefe, 2009; Özyapıcı, 2009).

İspat:

(1) f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında çarpımsal tersi alınabilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda çarpımsal integral tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} * \int_a^b (f(x))^{dx} &= e^{\int_a^b \ln f(x) dx} \\ &= e^{-\int_b^a \ln f(x) dx} \end{aligned}$$

$$= \left[{}^* \int_b^a (f(x))^{dx} \right]^{-1}$$

bulunur.

(2) f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında çarpımsal tersi alınabilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda çarpımsal integral tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}^* \int_a^a (f(x))^{dx} &= e^{\int_a^a \ln f(x) dx} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.4.3. (Çarpımsal Analizin Temel Teoremi)

$f, [a, b]$ aralığında pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun. F fonksiyonu

$$F(x) = {}^* \int_a^x f(t)^{dt}, \quad a \leq x \leq b$$

olacak şekilde $[a, b]$ aralığında tanımlanmış olsun. Bu durumda F, f fonksiyonunun çarpımsal ters türevlerinden biridir. Bunun yanısıra, $G(x), f$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında herhangi bir ters türevi ise

$${}^* \int_a^b f(x)^{dx} = \frac{G(b)}{G(a)}$$

biçiminde ifade edilir (Özyapıcı, 2009).

Teorem 1.4.4. (Çarpımsal Kısmi İntegral)

f ve g fonksiyonları $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olarak tanımlanmış çarpımsal olarak

diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. Bu durumda f^g fonksiyonunda çarpımsal olarak diferansiyellenebilir. Ayrıca

$$* \int_a^b (f^*(x)^{g(x)})^{dx} = \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \frac{1}{* \int_a^b (f(x)^{g'(x)})^{dx}}$$

formunda ifade edilebilir (Özyapıcı, 2009).

Teorem 1.4.5. $f, [a, b]$ aralığında çarpımsal diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve f^* , $[a, b]$ aralığında çarpımsal integrallenebilir olsun. Bu taktirde $f(a) \neq 0$ olmak üzere

$$* \int_a^b f^*(x)^{dx} = \frac{f(b)}{f(a)}$$

olur.

İspat: Çarpımsal türev ve çarpımsal integral tanımları kullanılarak,

$$\begin{aligned} * \int_a^b f^*(x)^{dx} &= * \int_a^b \left(e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} \right)^{dx} \\ &= e^{\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx} \\ &= e^{\ln f(b) - \ln f(a)} \\ &= e^{\ln \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right)} \\ &= \frac{f(b)}{f(a)} \end{aligned}$$

elde edilir.

1.5. Çarpımsal Diferansiyel Denklem

Bilim ve mühendislik alanlarında kullanılan birçok matematiksel problemin modellenmesinde diferansiyel denklemler kullanılır. Ancak bilimsel bazı problemler klasik anlamdaki diferansiyel denklemler ile ifade edilemeyebilir. Bu durumun kolayca çözülebilmesi için çarpımsal diferansiyel denklemler kullanılmıştır. Bu bölümde kısaca çarpımsal diferansiyel denklemler tanıtılacaktır.

Tanım 1.5.1. Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre çarpımsal türevlerini içeren bir diferansiyel denkleme Çarpımsal Diferansiyel Denklem denir.

Tanım 1.5.2.

$$x^*(t) = f(t, x(t))$$

formu birinci dereceden çarpımsal diferansiyel denklem olarak adlandırılır ve

$$x'(t) = x(t) \cdot \ln f(t, x(t))$$

adi diferansiyel denkleme karşılık gelir. (Bashirov vd., 2011).

Tanım 1.5.3. F pozitif fonksiyonu için n . mertebeden bir çarpımsal diferansiyel denklem

$$F(x, y, y^*, \dots, y^{*(n-1)}, y^{*(n)}(x)) = 1, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada F fonksiyonu, y bağımsız değişkeninin n . mertebeye kadar çarpımsal türevlerini içerebilir (Gürefe, 2009; Özyapıcı, 2009).

Örnek 1.5.1. Aşağıdaki denklemler çarpımsal diferansiyel denklemlere örnek olarak verilebilir:

$$y^{**}(x) = 3 \cdot y(x)$$

$$y^*(x) = 1$$

$$y^{**}(x) = (y^*(x))^3$$

Örnek 1.5.2. x bağımsız değişkenine bağlı

$$y(x) = e^{ke^{cx}}$$

biçiminde tanımlı bütün fonksiyonlar

$$y^{**}y^* = y$$

formundaki çarpımsal diferansiyel denklemin çözümüdür. $y(x) = e^{ke^{cx}}$ fonksiyonunda k ve c değerleri sabittir.

Tanım 1.5.4. (Çarpımsal Lineer Diferansiyel Denklemler)

$f(x)$ pozitif tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$(y^{*(n)})^{a_n(x)} \cdot (y^{*(n-1)})^{a_{n-1}(x)} \dots (y^{**})^{a_2(x)} \cdot (y^*)^{a_1(x)} \cdot y^{a_0(x)} = f(x) \quad (1.5.1)$$

formunda tanımlanan çarpımsal diferansiyel denklemlere çarpımsal lineer diferansiyel denklem denir.

Eğer $a_n(x)$ üstellerinin tümü sabit ise (1.5.1) denklemi sabit üstlü çarpımsal lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Aksi takdirde (1.5.1) denklemi değişken üstlü çarpımsal lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Eğer $f(x) = 1$ ise (1.5.1) denklemi çarpımsal homojen lineer diferansiyel denklem, aksi halde ise çarpımsal homojen olmayan lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır (Yalçın ve Çelik, 2018).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Çarpımsal İntegral Denklemler

İntegral denklemler, klasik anlamda bilinmeyen bir fonksiyonun bir veya birden fazla integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir. Bu bölümde ilk olarak klasik analizde yer alan integral denklemleri ile ilgili temel tanım ve sınıflandırmalar çarpımsal analize aktarılacak ve çarpımsal integral denklemlerinin çözümleriyle ilgili örneklendirmelere yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. Bilinmeyen fonksiyonun çarpımsal integral işareti altında bulunduğu denklemlere *çarpımsal integral denklem* denir.

Tanım 2.1.2. $u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) * \int_a^b [u(t)]^{K(x,t)} dt$$

formunda bir çarpımsal integral denklemde, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun lineer olması halinde çarpımsal integral denkleme *çarpımsal lineer integral denklem* denir.

Tanım 2.1.3.

$$u(x) = f(x) * \int_a^b [u(t)]^{K(x,t)} dt$$

formundaki çarpımsal integral denkleme *çarpımsal homojen olmayan integral denklem* denir. Ayrıca $f(x) = 1$ olması durumunda ise *çarpımsal homojen integral denklem* adını alır.

Tanım 2.1.4. İntegral sınırlarından birinin x gibi bir değişkene bağlı olması halinde çarpımsal integral denkleme *Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi* denir.

$u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = * \int_a^x [u(t)]^{K(x,t)} dt$$

şeklindeki ifadeye **Birinci Çeşit Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi** denir.

$f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen fonksiyonlar , $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) .* \int_a^x [u(t)]^{K(x,t)} dt$$

şeklindeki ifadeye **İkinci Çeşit Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi** denir.

Örnek 2.1.1. $u(x) = e^{x^2-x}$ fonksiyonunun

$$u(x) = \frac{1}{e^x} .* \int_0^x [(u(t))^2]^{dt}$$

şeklinde verilen çarpımsal integral denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle $* \int_0^x [(u(t))^2]^{dt}$ integrali hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} * \int_0^x [(u(t))^2]^{dt} &= * \int_0^x [(e^t)^2]^{dt} \\ &= e^{\int_0^x \ln e^{2t} dt} \\ &= e^{\int_0^x 2t dt} \\ &= e^{2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^x} \\ &= e^{x^2} \end{aligned}$$

Bulunan çarpımsal integralin sonucu çarpımsal integral denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{e^x} \cdot e^{x^2} \\ &= e^{x^2-x} \end{aligned}$$

olur. Bu ise $u(x) = e^{x^2-x}$ çözümünün çarpımsal integral denklemi sağladığını gösterir.

Örnek 2.1.2. $u(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun

$$u(x) = e^x \cdot * \int_0^x \left[(u(t))^{\frac{1}{x}} \right]^{dt}$$

şeklinde verilen çarpımsal integral denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle $* \int_0^x \left[(u(t))^{\frac{1}{x}} \right]^{dt}$ integrali hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} * \int_0^x \left[(u(t))^{\frac{1}{x}} \right]^{dt} &= * \int_0^x \left[(e^{2t})^{\frac{1}{x}} \right]^{dt} \\ &= e^{\int_0^x \ln e^{\frac{2t}{x}} dt} \\ &= e^{\int_0^x \frac{2t}{x} dt} \\ &= e^{\left. \frac{2}{x} \cdot \frac{t^2}{2} \right|_0^x} \\ &= e^x \end{aligned}$$

Bulunan çarpımsal integralin sonucu çarpımsal integral denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x \cdot e^x \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

olur. Bu ise $u(x) = e^{2x}$ çözümünün denklemini sağladığını gösterir.

2.2. Çarpımsal İntegral Denklemler ile Çarpımsal Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Değişken veya sabit üstlü bir çarpımsal diferansiyel denklem, çarpımsal Volterra tipindeki bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi bir çarpımsal integral denklemde çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Dolayısıyla bu kısımda çarpımsal integral denklemler ile çarpımsal diferansiyel denklemler arasındaki ilişki irdelenecektir.

2.2.1. Çarpımsal İntegral Denklemlerin Çarpımsal Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi

Matematiksel problemlerde bazen çarpımsal integral denklemlerin çözümünü bulmak zor olabilir. Bu sebeple çarpımsal integral denklemleri çarpımsal diferansiyel denklemlere dönüştürmeye ihtiyaç duyulabilir. Böyle durumlarda çarpımsal integral denklem çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürülürken, integral işareti altında türev alma işlemlerinin kullanılması gerekecektir. Dolayısıyla bu kısımda öncelikle **Çarpımsal Leibniz Kuralı** elde edilecektir. Bu kural aşağıda adım adım ilerlenerek ve ayrıntılı bir biçimde açıklanarak ifade edilip ispatlanacaktır.

Teorem 2.2.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$F(x) = * \int_a^x f(t) dt$$

şeklinde tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu çarpımsal diferansiyellenebilir ise

$$F^*(x) = f(x)$$

dir.

İspat: Çarpımsal integral tanımı gereğince

$$F(x) = * \int_a^x f(t) dt = e^{\int_a^x \ln(f(t)) dt}$$

yazılır. $F(x)$ fonksiyonunun çarpımsal türevi

$$F^*(x) = e^{\frac{F'(x)}{F(x)}}$$

şeklinde tanımlı olduğundan, $\frac{F'(x)}{F(x)}$ ifadesi hesaplanmalıdır. Böylece $F(x) = e^{\int_a^x \ln(f(t))dt}$ eşitliğinden yararlanılarak klasik analizin temel teoreminden faydalanılarak

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\frac{d}{dx} [\int_a^x \ln(f(t)) dt] \cdot e^{\int_a^x \ln(f(t))dt}}{e^{\int_a^x \ln(f(t))dt}} = \ln(f(x))$$

olup

$$F^*(x) = e^{\ln(f(x))} = f(x)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2. (Tek Değişkenli Fonksiyonlar için Çarpımsal Leibniz Kuralı)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $u, v: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ fonksiyonları klasik anlamda diferansiyellenebilir olsun . $x \in [\alpha, \beta]$ olmak üzere

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

fonksiyonu çarpımsal diferansiyellenebilir ise

$$F^*(x) = \frac{[f(v(x))]v'(x)}{[f(u(x))]u'(x)}$$

olur.

İspat: Çarpımsal integral tanımı gereğince

$$F(x) = * \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = e^{\int_{u(x)}^{v(x)} \ln f(t) dt}$$

yazılır. $F(x)$ fonksiyonunun çarpımsal türevi

$$F^*(x) = e^{\frac{F'(x)}{F(x)}}$$

şeklinde tanımlı olduğundan, $\frac{F'(x)}{F(x)}$ ifadesi hesaplanmalıdır. O halde $F(x) = e^{\int_{u(x)}^{v(x)} \ln f(t) dt}$ eşitliği göz önüne alınır ve klasik Leibniz kuralı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{F'(x)}{F(x)} &= \frac{\frac{d}{dx} \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \ln f(t) dt \right] \cdot e^{\int_{u(x)}^{v(x)} \ln f(t) dt}}{e^{\int_{u(x)}^{v(x)} \ln f(t) dt}} \\ &= \ln(f(v(x))) \cdot v'(x) - \ln(f(u(x))) \cdot u'(x) \\ &= \ln(f(v(x)))^{v'(x)} - \ln(f(u(x)))^{u'(x)} \\ &= \ln \left(\frac{f(v(x))^{v'(x)}}{f(u(x))^{u'(x)}} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$F^*(x) = e^{\ln \left(\frac{f(v(x))^{v'(x)}}{f(u(x))^{u'(x)}} \right)} = \frac{[f(v(x))]^{v'(x)}}{[f(u(x))]^{u'(x)}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.1. F fonksiyonu, $F_x^*(x, t)$, $F_t^*(x, t)$, $F_{xt}^{**}(x, t)$, $F_{tx}^{**}(x, t)$ çarpımsal kısmi türevleri var ve sürekli olan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{\partial^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial^*}{\partial t^*} F(x, t) \right) = \frac{\partial^*}{\partial t^*} \left(\frac{\partial^*}{\partial x^*} F(x, t) \right)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat: Öncelikle $\frac{\partial^*}{\partial t^*} F(x, t)$ ifadesi ele alınırsa çarpımsal kısmi türev tanımından,

$$\frac{\partial^*}{\partial t^*} F(x, t) = e^{\frac{\partial}{\partial t} \ln F(x, t)}$$

yazılır. Ardından bu ifadenin x 'e göre çarpımsal kısmi türevi alınır,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial^*}{\partial t^*} F(x, t) \right) &= \frac{\partial^*}{\partial x^*} \left(e^{\frac{\partial}{\partial t} \ln F(x, t)} \right) \\ &= e^{\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln e^{\frac{\partial}{\partial t} \ln F(x, t)} \right)} \\ &= e^{\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \ln F(x, t) \right)} \\ &= e^{\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \ln F(x, t) \right)} \\ &= e^{\frac{\partial}{\partial t} \left(\ln e^{\frac{\partial}{\partial x} \ln F(x, t)} \right)} \\ &= e^{\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{\partial^*}{\partial x^*} F(x, t) \right)} \\ &= \frac{\partial^*}{\partial t^*} \left(\frac{\partial^*}{\partial x^*} F(x, t) \right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 2.2.3. (İki Değişkenli Fonksiyonlar için Çarpımsal Leibniz Kuralı)

$f(x, t)$ fonksiyonu sürekli, $f_x^*(x, t)$ fonksiyonu çarpımsal diferansiyellenebilir ve $a(x), b(x)$ fonksiyonları klasik anlamda diferansiyellenebilir ise

$$\frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = * \int_{a(x)}^{b(x)} f_x^*(x, t) dt \cdot \frac{f(x, b(x))^{b'(x)}}{f(x, a(x))^{a'(x)}}$$

dir.

İspat: $f(x, t) = \frac{\partial^*}{\partial t^*} F(x, t) = F_t^*(x, t)$ şeklinde alınırsa,

$$* \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = * \int_{a(x)}^{b(x)} F_t^*(x, t) dt$$

yazılır. Buradan Teorem 1.4.5 kullanılarak

$$* \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = \frac{F(x, b(x))}{F(x, a(x))}$$

bulunur. Böylece çarpımsal türev özelliğinden

$$\frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = \frac{d^*}{dx^*} \left(\frac{F(x, b(x))}{F(x, a(x))} \right) = \frac{\frac{d^*}{dx^*} F(x, b(x))}{\frac{d^*}{dx^*} F(x, a(x))}$$

olur. Buradan çarpımsal zincir kuralı kullanılırsa,

$$\frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = \frac{F_x^*(x, b(x))^1 \cdot [F_{b(x)}^*(x, b(x))]^{b'(x)}}{F_x^*(x, a(x))^1 \cdot [F_{a(x)}^*(x, a(x))]^{a'(x)}} \quad (2.2.1)$$

bulunur. Böylece Önerme 2.2.1 kullanılarak, (2.2.1)ifadesinden

$$\begin{aligned} \frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) &= * \int_{a(x)}^{b(x)} \left(\frac{\partial^*}{\partial t^*} F_x^*(x, t) \right) dt \cdot \frac{f(x, b(x))^{b'(x)}}{f(x, a(x))^{a'(x)}} \\ &= * \int_{a(x)}^{b(x)} \left(\frac{\partial^*}{\partial t^*} \left(\frac{\partial^*}{\partial x^*} F(x, t) \right) \right) dt \cdot \frac{f(x, b(x))^{b'(x)}}{f(x, a(x))^{a'(x)}} \\ &= * \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial^*}{\partial t^*} F(x, t) \right) dt \cdot \frac{f(x, b(x))^{b'(x)}}{f(x, a(x))^{a'(x)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= * \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial^*}{\partial x^*} (F_t^*(x, t))^{dt} \cdot \frac{f(x, b(x))^{b'(x)}}{f(x, a(x))^{a'(x)}} \\
&= * \int_{a(x)}^{b(x)} f_x^*(x, t)^{dt} \cdot \frac{f(x, b(x))^{b'(x)}}{f(x, a(x))^{a'(x)}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.1.

$$u(x) = * \int_0^x [u(t)^x]^{dt}$$

çarpımsal integral denklemini çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürünüz.

Çözüm: Her iki tarafın çarpımsal türevi alınırsa,

$$\frac{d^*}{dx^*}(u(x)) = \frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_0^x [u(t)^x]^{dt} \right)$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafına çarpımsal Leibniz kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
u^*(x) &= * \int_0^x \left[\frac{\partial^*}{\partial x^*} (u(t)^x) \right]^{dt} \cdot \frac{(u(x)^x)^{x'}}{(u(0)^x)^{0'}} \\
&= * \int_0^x \left[e^{\frac{\partial}{\partial x} (\ln u(t)^x)} \right]^{dt} \cdot u(x)^x \\
&= * \int_0^x \left[e^{\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot \ln u(t))} \right]^{dt} \cdot u(x)^x \\
&= * \int_0^x (e^{\ln u(t)})^{dt} \cdot u(x)^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= * \int_0^x u(t)^{dt} \cdot u(x)^x \\
&= u(x)^{-x} \cdot u(x)^x \\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $u^*(x) = 1$ çarpımsal diferansiyel denklemi elde edilir.

Örnek 2.2.2.

$$u(x) = x.* \int_0^x [u(t)^3]^{dt}$$

şeklinde verilen çarpımsal integral denklemini çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürünüz.

Çözüm: Her iki tarafın çarpımsal türevi alınırsa, çarpımsal türev özelliğinden

$$\frac{d^*}{dx^*}(u(x)) = \frac{d^*}{dx^*}(x) \cdot \frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_0^x [u(t)^3]^{dt} \right)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafına çarpımsal Leibniz kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
u^*(x) &= e^{\frac{1}{x}} \cdot * \int_0^x \left(\frac{\partial^*}{\partial x^*} [u(t)^3] \right)^{dt} \cdot \frac{(u(x)^3)^{x'}}{(u(0)^3)^{0'}} \\
&= e^{\frac{1}{x}} \cdot * \int_0^x \left(\frac{\partial^*}{\partial x^*} [u(t)^3] \right)^{dt} \cdot u(x)^3 \\
&= e^{\frac{1}{x}} \cdot * \int_0^x 1^{dt} \cdot u(x)^3 \\
&= e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\int_0^x \ln(1) dt} \cdot u(x)^3 \\
&= e^{\frac{1}{x}} \cdot 1 \cdot u(x)^3 \\
&= e^{\frac{1}{x}} \cdot u(x)^3
\end{aligned}$$

olur. Böylece $u^*(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot u(x)^3$ çarpımsal diferansiyel denklemi elde edilir.

Örnek 2.2.3.

$$u(x) = 2x.* \int_0^x ([u(t)]^{2t})^{dt}$$

çarpımsal integral denklemini çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürünüz.

Çözüm: Her iki tarafın çarpımsal türevi alınır

$$\frac{d^*}{dx^*}(u(x)) = \frac{d^*}{dx^*}(2x) \cdot \frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_0^x ([u(t)]^{2t})^{dt} \right)$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafına çarpımsal Leibniz kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \frac{d^*}{dx^*}(2x) \cdot \int_0^x [1]^{dt} \cdot \frac{(u(x)^{2 \cdot x})^{x'}}{(u(0)^{2 \cdot 0})^{0'}} \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot 1 \cdot [u(x)]^{2 \cdot x} \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot [u(x)]^{2 \cdot x} \\ &= e^{\frac{1}{x}} \cdot u(x)^{-2 \cdot x} \end{aligned}$$

olur. Böylece $u^*(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot u(x)^{-2 \cdot x}$ çarpımsal diferansiyel denklemi elde edilir.

Örnek 2.2.4.

$$u(x) = x^2.* \int_0^x ([u(t)]^3)^{dt}$$

çarpımsal integral denklemini çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürünüz.

Çözüm: Her iki tarafın çarpımsal türevi alınır

$$\frac{d^*}{dx^*}(u(x)) = \frac{d^*}{dx^*}(x^2) \cdot \frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_0^x [u(t)^3]^{dt} \right)$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafına çarpımsal Leibniz kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned} u^*(x) &= e^{\frac{2x}{x^2}} \cdot * \int_0^x [1]^{dt} \cdot \frac{(u(x)^3)^{x'}}{(u(0)^3)^{0'}} \\ &= e^{\frac{2}{x}} \cdot 1 \cdot u(x)^3 \\ &= e^{\frac{2}{x}} \cdot u(x)^3 \\ &= e^{\frac{2}{x}} \cdot u(x)^{-3} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $u^*(x) = e^{\frac{2}{x}} \cdot u(x)^{-3}$ çarpımsal diferansiyel denklemi elde edilir.

Örnek 2.2.5.

$$u(x) = \sin x \cdot * \int_0^x ([u(t)]^{\tan t})^{dt}$$

çarpımsal integral denklemini çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürünüz.

Çözüm: Her iki tarafın çarpımsal türevi alınır

$$\frac{d^*}{dx^*}(u(x)) = \frac{d^*}{dx^*}(\sin x) \cdot \frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_0^x ([u(t)]^{\tan t})^{dt} \right)$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafına olan çarpımsal Leibniz kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \frac{d^*}{dx^*}(\sin x) \cdot * \int_0^x [1]^{dt} \cdot \frac{(u(x)^{\tan x})^{x'}}{(u(0)^{\tan 0})^{0'}} \\ &= e^{\frac{\cos x}{\sin x}} \cdot 1 \cdot [u(x)]^{\tan x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\cot x} \cdot [u(x)]^{\tan x} \\
&= e^{\cot x} \cdot u(x)^{\tan x}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $u^*(x) = e^{\cot x} \cdot u(x)^{\tan x}$ çarpımsal diferansiyel denklemi elde edilir.

2.2.2. Çarpımsal Diferansiyel Denklemlerin Çarpımsal İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi

Literatürde yer alan ve matematiksel problemlerde kullanılan çarpımsal diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak bazen kolay olmayabilir. Bu nedenle çarpımsal diferansiyel denklemleri çarpımsal integral denklemlere dönüştürme ihtiyacı hissedilebilir. Bu bölümde lineer çarpımsal diferansiyel denklemler çarpımsal Volterra integral denklemlerine dönüştürülecektir.

Öncelikle birinci mertebeden çarpımsal lineer diferansiyel denklemin çarpımsal Volterra integral denklemine dönüştürülmesinden bahsedilecektir.

$$\begin{aligned}
\frac{d^*y}{dx^*} &= f(x, y) \\
y(x_0) &= y_0
\end{aligned}$$

çarpımsal diferansiyel denklemi gözönüne alınsın. İlk olarak her iki tarafın çarpımsal integrali alınırsa

$$* \int_{x_0}^x [y^*(t)]^{dt} = * \int_{x_0}^x [f(t, y(t))]^{dt}$$

yazılır. Buradan Teorem 1.4.5 gereğince,

$$\begin{aligned}
\frac{y(x)}{y(x_0)} &= * \int_{x_0}^x [f(t, y(t))]^{dt} \\
y(x) &= y(x_0) \cdot * \int_{x_0}^x [f(t, y(t))]^{dt}
\end{aligned}$$

olur. Başlangıç şartı yerine yazılırsa

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [f(t, y(t))] dt$$

biçiminde çarpımsal Volterra integral denklemi elde edilir.

n . mertebeden bir çarpımsal diferansiyel denklemi çarpımsal Volterra integral denklemine dönüştürmek için, n - katlı integralin tek katlı integrale indirgenmesine olanak sağlayacak formüle ihtiyaç duyulmaktadır. Bu formülü elde edebilmek için öncelikle iki katlı integrali tek katlı integrale dönüştüren formül bulunarak daha sonra bu formül n - katlı integrale genişletilecektir.

Önerme 2.2.2. Her $x \geq a$ için $f(x)$ fonksiyonu sürekli ise

$$\int_a^x \int_a^s f(t) dt ds = \int_a^x [f(t) (x-t)] dt$$

dir.

İspat: Eğer

$$F(s) = \int_a^s f(t) dt$$

olarak alınırsa Teorem 2.2.1'den

$$F'(s) = f(s)$$

bulunur. O halde istenilen eşitliğin hesaplanması için

$$I = * \int_a^x F(s) ds = e^{\int_a^x \ln F(s) ds} \quad (2.2.2)$$

çarpımsal integralinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için klasik anlamda kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak yani

$$\ln F(s) = u, \quad \frac{F'(s)}{F(s)} ds = du$$

$$ds = dv, \quad s = v$$

dönüşümleri yapılarak $\int_a^x \ln F(s) ds$ integrali,

$$\begin{aligned} \int_a^x \ln F(s) ds &= s \cdot \ln F(s) \Big|_a^x - \int_a^x \frac{F'(s)}{F(s)} ds \\ &= x \cdot \ln F(x) - a \cdot \ln F(a) - \int_a^x \frac{F'(s)}{F(s)} \cdot s ds \\ &= \ln \left(\frac{[F(x)]^x}{[F(a)]^a} \right) - \int_a^x \frac{F'(s)}{F(s)} \cdot s ds \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.2.2) ifadesinden

$$I = e^{\ln \left(\frac{[F(x)]^x}{[F(a)]^a} \right)} \cdot e^{\int_a^x \frac{F'(s)}{F(s)} \cdot s ds}$$

elde edilir. Teorem 1.2.2 gereğince $F'(s) = F(s) \cdot \ln(F^*(s))$ olduğundan,

$$\begin{aligned} I &= \frac{[F(x)]^x}{[F(a)]^a} \cdot e^{-\int_a^x \ln(F^*(s)) \cdot s ds} \\ &= \frac{\left(* \int_a^x f(t) dt \right)^x}{\left(* \int_a^a f(t) dt \right)^a} \cdot e^{-\int_a^x \ln(F^*(s)) \cdot s ds} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left({}^* \int_a^x f(t) dt \right)^x \cdot \frac{1}{e^{\int_a^x \ln(F^*(s))^s ds}} \\
&= \left({}^* \int_a^x f(t) dt \right)^x \cdot \frac{1}{{}^* \int_a^x [(F^*(s))^s]^s ds} \tag{2.2.3}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $F^*(s) = f(s)$ olduğu kullanılarak,

$${}^* \int_a^x [(F^*(s))^s]^s ds = {}^* \int_a^x [(f(s))^s]^s ds = {}^* \int_a^x [(f(t))^t]^t dt$$

yazılır. Böylece (2.2.3) ifadesinden

$$\begin{aligned}
I &= \left({}^* \int_a^x f(t) dt \right)^x \cdot \frac{1}{{}^* \int_a^x [(f(t))^t]^t dt} \\
&= \frac{{}^* \int_a^x [(f(t))^x]^t dt}{{}^* \int_a^x [(f(t))^t]^t dt} \\
&= {}^* \int_a^x [(f(t))^{x-t}]^t dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, yukarıdaki Önerme 2.2.2 genelleştirilerek çarpımsal diferansiyel denklemlerin çarpımsal integral denklemlere dönüştürülmesi sırasında kullanılacak olan çok katlı çarpımsal integralin tek katlı çarpımsal integral olarak ifade edilmesini sağlayan önermeye yer verilecektik.

Önerme 2.2.3. n pozitif bir tamsayı ve a bir sabit sayı olmak üzere, n katlı bir çarpımsal integral tek katlı çarpımsal integral olarak

$$* \int_a^x \dots (n) \dots * \int_a^x u(t) dt \dots dt = * \int_a^x \left[(u(t))^{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}} \right] dt \quad (2.2.4)$$

bağıntısıyla ifade edilir.

İspat: (2.2.4) eşitliğinin sağ tarafı I_n ile gösterilsin yani

$$I_n = * \int_a^x [u(t)]^{(x-t)^{n-1}} dt \quad (2.2.5)$$

olsun. $F(x, t) = [u(t)]^{(x-t)^{n-1}}$ alınarak çarpımsal Leibniz kuralından faydalanılırsa gerekli düzenlemelerle

$$\begin{aligned} \frac{d^* I_n}{dx^*} &= * \int_a^x F_x^*(x, t) dt \cdot \frac{[F(x, x)]^1}{[F(x, a)]^0} \\ &= * \int_a^x F_x^*(x, t) dt \cdot \frac{[[u(x)]^{(x-x)^{n-1}}]^1}{[[u(a)]^{(x-a)^{n-1}}]^0} \\ &= * \int_a^x F_x^*(x, t) dt \end{aligned}$$

olur. Çarpımsal kısmi türev tanımı kullanılarak geçiş yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^* I_n}{dx^*} &= * \int_a^x \left(e^{\frac{\partial}{\partial x} \ln F(x, t)} \right) dt \\ &= * \int_a^x \left(e^{\frac{(n-1) \cdot (x-t)^{n-2} \cdot \ln u(t) \cdot [u(t)]^{(x-t)^{n-1}}}{[u(t)]^{(x-t)^{n-1}}}} \right) dt \\ &= * \int_a^x \left(e^{(n-1) \cdot (x-t)^{n-2} \cdot \ln u(t)} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= * \int_a^x \left(e^{\ln([u(t)]^{(n-1) \cdot (x-t)^{n-2}})} \right) dt \\
&= * \int_a^x ([u(t)]^{(n-1) \cdot (x-t)^{n-2}}) dt
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece I_n ifadesinden ve çarpımsal integralin özelliğinden faydalanılarak $n > 1$ için

$$\frac{d^* I_n}{dx^*} = \left(* \int_a^x ([u(t)]^{(x-t)^{n-2}}) dt \right)^{(n-1)} = (I_{n-1})^{n-1} \quad (2.2.6)$$

yazılır. Özel olarak $n = 1$ için (2.2.5) ifadesinden,

$$I_1(x) = * \int_a^x u(t) dt$$

olup

$$\frac{d^* I_1}{dx^*} = \frac{d^*}{dx^*} \cdot \left(* \int_a^x (u(t)) dt \right) = u(x) \quad (2.2.7)$$

bulunur. (2.2.6) ifadesinin çarpımsal türevi alınır, çarpımsal Leibniz kuralından

$$\begin{aligned}
\frac{d^{**} I_n}{dx^{**}} &= \frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_a^x ([u(t)]^{(x-t)^{n-2}}) dt \right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{d^*}{dx^*} \left(* \int_a^x ([u(t)]^{(x-t)^{n-2}}) dt \right) \right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left({}^* \int_a^x \left[\frac{\partial^*}{\partial x^*} ([u(t)]^{(x-t)^{n-2}}) \right]^{dt} \cdot \frac{[[u(x)]^{(x-x)^{n-2}}]^1}{[[u(a)]^{(x-a)^{n-2}}]^0} \right)^{n-1} \\
&= \left({}^* \int_a^x \left(\frac{\partial^*}{\partial x^*} ([u(t)]^{(x-t)^{n-2}}) \right)^{dt} \right)^{n-1} \\
&= \left({}^* \int_a^x \left(e^{\frac{\partial}{\partial x} (\ln([u(t)]^{(x-t)^{n-2}}))} \right)^{dt} \right)^{n-1} \\
&= \left({}^* \int_a^x e^{\left(\frac{(u(t)^{(x-t)^{n-2}})'}{u(t)^{(x-t)^{n-2}}} \right) dt} \right)^{n-1} \\
&= \left({}^* \int_a^x e^{\left(\frac{\ln u(t) \cdot [(n-2)(x-t)^{n-3}] \cdot u(t)^{(x-t)^{n-2}}}{u(t)^{(x-t)^{n-2}}} \right) dt} \right)^{n-1} \\
&= \left({}^* \int_a^x \left[e^{\left(\ln(u(t))^{(n-2)(x-t)^{n-3}} \right)} \right]^{dt} \right)^{n-1} \\
&= \left({}^* \int_a^x \left[(u(t))^{(n-2)(x-t)^{n-3}} \right]^{dt} \right)^{n-1} \\
&= \left({}^* \int_a^x \left[(u(t))^{(x-t)^{n-3}} \right]^{dt} \right)^{(n-1) \cdot (n-2)} \\
&= (I_{n-2})^{(n-1) \cdot (n-2)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar çarpımsal türev alınırsa benzer şekilde

$$\frac{d^{*(3)} I_n}{dx^{*(3)}} = (I_{n-3})^{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}$$

olur. Bu şekilde devam edilerek,

$$\frac{d^{*(n-1)}I_n}{dx^{*(n-1)}} = (I_1)^{(n-1)!} \quad (2.2.8)$$

elde edilir. O halde (2.2.7) ifadesinden, n . mertebeden çarpımsal türev için

$$\frac{d^{*(n)}I_n}{dx^{*(n)}} = \left(\frac{d^*I_1}{dx^*}\right)^{(n-1)!} = [u(x)]^{(n-1)!}$$

yazılır. $n \geq 1$ iken $I_n(a) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa (2.2.8) ifadesinden, $I_n(x)$ ve $I_n(x)$ fonksiyonunun ilk $(n-1)$ türevinin $x = a$ için sağlandığı sonucuna varılabilir. Yukarıdaki bağıntılardan, geriye doğru hareket edilerek çarpımsal integral alma işlemleri yapılırsa (2.2.7) ifadesinden,

$$\frac{I_1(x)}{I_1(a)} = * \int_a^x u(t)^{dt}, I_1(a) = 1$$

olup

$$I_1(x) = * \int_a^x u(t)^{dt}$$

elde edilir. Ayrıca x_1 ve x_2 birer parametre olmak üzere

$$I_2(x) = * \int_a^x I_1(x_2)^{dx_2} = * \int_a^x * \int_a^{x_2} u(x_1)^{dx_1 dx_2}$$

yazılır. Benzer şekilde çarpımsal integral alma işlemlerine devam edilirse,

$$I_3(x) = * \int_a^x ([I_2(x_3)]^2)^{dx_3} = \left(* \int_a^x I_2(x_3)^{dx_3} \right)^2 = \left(* \int_a^x * \int_a^{x_3} * \int_a^{x_2} u(x_1)^{dx_1 dx_2 dx_3} \right)^2$$

⋮

$$I_n(x) = \left(* \int_a^x * \int_a^{x_n} \dots * \int_a^{x_3} * \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right)^{(n-1)!}$$

bulunur. I_n yerine (2.2.5) ifadesi yazılırsa

$$* \int_a^x \left[(u(t))^{(x-t)^{n-1}} \right] dt = \left(* \int_a^x * \int_a^{x_n} \dots * \int_a^{x_3} * \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right)^{(n-1)!}$$

olup buradan,

$$\left(* \int_a^x \left[(u(t))^{(x-t)^{n-1}} \right] dt \right)^{\frac{1}{(n-1)!}} = * \int_a^x * \int_a^{x_n} \dots * \int_a^{x_3} * \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

yazılır. O halde $x = x_1 = x_2 = \dots = x_n$ alınırsa, istenilen

$$* \int_a^x \dots (n) \dots * \int_a^x u(t) dt \dots dt = * \int_a^x \left[(u(t))^{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}} \right] dt$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi n .mertebeden çarpımsal lineer diferansiyel denklemin çarpımsal integral denkleme nasıl dönüştürüleceği ifade edilecektir.

$$\frac{d^{*(n)}y}{dx^{*(n)}} \cdot \left(\frac{d^{*(n-1)}y}{dx^{*(n-1)}} \right)^{a_1(x)} \cdot \left(\frac{d^{*(n-2)}y}{dx^{*(n-2)}} \right)^{a_2(x)} \dots \left(\frac{d^*y}{dx^*} \right)^{a_{n-1}(x)} \cdot (y)^{a_n(x)} = f(x) \quad (2.2.9)$$

çarpımsal lineer diferansiyel denklemi gözönüne alınsın. Ayrıca

$$y(0) = c_0, y^*(0) = c_1, y^{*(n-1)}(0) = c_{n-1} \quad (2.2.10)$$

şeklinde n tane başlangıç koşulu verilsin. Eğer

$$\frac{d^{*(n)}y}{dx^{*(n)}} = u(x)$$

dönüşümü uygulanırsa, buradan

$$\frac{d^{*(n)}y}{dx^{*(n)}} = \frac{d^*}{dx^*} \left(\frac{d^{*(n-1)}y}{dx^{*(n-1)}} \right) = u(x)$$

yazılır. Her iki tarafın çarpımsal integrali alınır,

$$\begin{aligned} * \int_0^x d^* \left(\frac{d^{*(n-1)}y}{dx^{*(n-1)}} \right) &= * \int_0^x u(t) dt \\ \frac{y^{*(n-1)}(x)}{y^{*(n-1)}(0)} &= * \int_0^x u(t) dt \\ y^{*(n-1)}(x) &= c_{n-1} * \int_0^x u(t) dt \end{aligned}$$

çarpımsal türev mertebesi bir merteye düşürülmüş olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} * \int_0^x d^* \left(\frac{d^{*(n-2)}y}{dx^{*(n-2)}} \right) &= * \int_0^x \left(c_{n-1} * \int_0^x u(t) dt \right) dt \\ \frac{y^{*(n-2)}(x)}{y^{*(n-2)}(0)} &= * \int_0^x c_{n-1}^{dt} . * \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt \\ \frac{y^{*(n-2)}(x)}{c_{n-2}} &= e^{\int_0^x \ln c_{n-1} dt} . * \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt \\ \frac{y^{*(n-2)}(x)}{c_{n-2}} &= (c_{n-1})^x . * \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt \end{aligned}$$

$$y^{*(n-2)}(x) = c_{n-2} \cdot (c_{n-1})^x \cdot \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt$$

bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse

$$* \int_0^x d^* \left(\frac{d^{*(n-3)} y}{dx^{*(n-3)}} \right) = * \int_0^x [(c_{n-1})^x \cdot c_{n-2}] dt \cdot * \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt dt$$

$$y^{*(n-3)}(x) = c_{n-3} \cdot (c_{n-2})^x \cdot (c_{n-1})^{x^2} \cdot * \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt dt$$

⋮

$$y^* = c_1 \cdot (c_2)^x \cdot (c_3)^{x^2} \dots (c_{n-2})^{x^{n-3}} \cdot (c_{n-1})^{x^{n-2}} \cdot * \int_0^x \dots (n-1) \cdot * \int_0^x u(t) dt \dots dt$$

olur. Böylece

$$y = c_0 \cdot (c_1)^x \cdot (c_2)^{x^2} \dots (c_{n-1})^{x^{n-1}} \cdot * \int_0^x \dots (n) \dots * \int_0^x u(t) dt \dots dt$$

elde edilir. Yukarıda bulunan ifadeler, (2.2.9) ifadesinde yer alan çarpımsal lineer diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$u(x) \left[(c_{n-1})^{a_1(x)} \cdot \left(* \int_0^x u(t) dt \right)^{a_1(x)} \right] \cdot \left[(c_{n-2})^{a_2(x)} \cdot (c_{n-1})^{x \cdot a_2(x)} \cdot \left(* \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt \right)^{a_2(x)} \right]$$

...

$$\left[(c_0)^{a_n(x)} \cdot (c_1)^{x \cdot a_n(x)} \cdot (c_2)^{x^2 \cdot a_n(x)} \cdot \dots \cdot (c_{n-1})^{x^{n-1} \cdot a_n(x)} \cdot \left(* \int_0^x \dots (n) \dots * \int_0^x u(t) dt \dots dt \right)^{a_n(x)} \right] = f(x)$$

$$u(x) \cdot (c_0)^{a_n(x)} \cdot (c_1)^{x \cdot a_n(x) + a_{n-1}(x)} \cdot \dots \cdot (c_{n-1})^{x^{n-1} \cdot a_n(x) + \dots + a_1(x)} \cdot \left(* \int_0^x u(t) dt \right)^{a_1(x)}$$

$$\cdot \left(\int_0^x \int_0^x u(t) dt dt \right)^{a_2(x)} \cdot \dots \cdot \left(\int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(t) dt \dots dt \right)^{a_n(x)} = f(x) \quad (2.2.11)$$

olarak bulunur. Burada gösterimi kolaylaştırmak adına

$$a_1(x) + a_2(x).x + \dots + a_n(x).x^{n-1} = f_{n-1}(x)$$

$$a_2(x) + a_3(x).x + \dots + a_n(x).x^{n-2} = f_{n-2}(x)$$

⋮

$$a_{n-1}(x) + a_n(x).x = f_1(x)$$

$$a_n(x) = f_0(x)$$

yazılarak

$$F(x) = \frac{f(x)}{(c_0)^{f_0(x)} \cdot (c_1)^{f_1(x)} \dots (c_{n-1})^{f_{n-1}(x)}} \quad (2.2.12)$$

şeklinde alınırsa (2.2.11) eşitliğinin sağ tarafı x 'in bir fonksiyonu olmak üzere

$$u(x) \cdot \left(\int_0^x u(t) dt \right)^{a_1(x)} \cdot \left(\int_0^x \int_0^x u(t) dt dt \right)^{a_2(x)} \cdot \dots \cdot \left(\int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(t) dt \dots dt \right)^{a_n(x)} = F(x)$$

biçiminde düzenlenebilir. Görüldüğü üzere çok katlı çarpımsal integrallerle işlem yapmaya ihtiyaç duyulmaktadır. Bunu kolaylaştırmak adına Önerme 2.2.2' deki eşitlik kullanılarak

$$(x) \cdot \left(\int_0^x u(t) dt \right)^{a_1(x)} \cdot \left(\int_0^x [u(t)^{x-t}] dt \right)^{a_2(x)} \dots \left(\int_0^x u(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \right)^{a_n(x)} = F(x)$$

$$u(x) \cdot \int_0^x \left(u(t) \left[a_1(x) + (x-t).a_2(x) + \dots + a_n(x) \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \right)^{dt} = F(x)$$

elde edilir. Eğer çekirdek fonksiyonu

$$K(x, t) = a_1(x) + (x - t).a_2(x) + \dots + a_n(x). \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

şeklinde alınırsa,

$$u(x). * \int_0^x u(t)^{K(x,t)} dt = F(x)$$

formunda ikinci çeşit çarpımsal Volterra integral denklemi elde edilir. Böylece verilen n . mertebeden çarpımsal diferansiyel denklem bir çarpımsal integral denkleme dönüşmüş olur.

Örnek 2.2.6.

$$\frac{d^*y}{dx^*} = [y(x)]^{f(x)}$$

$$y(0) = c_0$$

şeklinde verilen birinci mertebeden çarpımsal lineer diferansiyel denklemi çarpımsal integral denkleme dönüştürünüz.

Çözüm: Öncelikle

$$\frac{d^*y}{dx^*} = u(x)$$

dönüşümü uygulansın. Bu ifade

$$\frac{d^*y}{dx^*} = \frac{d^*}{dx^*}(y) = d^*y = u(x)$$

biçiminde yazılır. Eşitliğin her iki tarafının çarpımsal integrali alınırsa

$$* \int_0^x d^*y = * \int_0^x u(t)^{dt}$$

olur. Teorem 1.4.5 kullanılarak,

$$\frac{y(x)}{y(0)} = * \int_0^x u(t) dt$$

bulunur. Böylece başlangıç şartı yerine yazılırsa

$$y(x) = c_0 * \int_0^x u(t) dt$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlik ve $\frac{d^*y}{dx^*} = u(x)$ dönüşümü çarpımsal diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$u(x) = \left[c_0 * \int_0^x u(t) dt \right]^{f(x)}$$

$$u(x) = c_0^{f(x)} * \int_0^x [u(t)^{f(x)}] dt$$

bulunur. $c_0^{f(x)} = F(x)$ ve $K(x, t) = f(x)$ olarak alınırsa verilen çarpımsal diferansiyel denklemin,

$$u(x) = F(x) * \int_0^x [u(t)]^{K(x,t)} dt$$

şeklinde bir Volterra integral denklemine dönüştüğü görülür.

Örnek 2.2.7.

$$\frac{d^*y}{dx^*} = y(x)e^x, y(0) = 1$$

şeklinde verilen birinci mertebeden çarpımsal lineer diferansiyel denklemi çarpımsal integral denkleme dönüştürünüz.

Çözüm: Öncelikle

$$\frac{d^*y}{dx^*} = u(x)$$

dönüşümü uygulansın. Bu ifade

$$\frac{d^*y}{dx^*} = \frac{d^*}{dx^*}(y) = d^*y = u(x)$$

biçiminde yazılır. Eşitliğin her iki tarafının çarpımsal integrali alınır

$$* \int_0^x d^*y = * \int_0^x u(t) dt$$

olur. Teorem 1.4.5 kullanılarak,

$$\frac{y(x)}{y(0)} = * \int_0^x u(t) dt$$

bulunur. Böylece başlangıç şartı yerine yazılırsa

$$y(x) = 1 \cdot * \int_0^x u(t) dt$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlik ve $\frac{d^*y}{dx^*} = u(x)$ dönüşümü çarpımsal diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$u(x) = \left[* \int_0^x u(t) dt \right]^{e^x}$$

$$u(x) = * \int_0^x [u(t) e^x] dt$$

biçiminde bir çarpımsal Volterra integral denklemine dönüştüğü görülür.

Örnek 2.2.8.

$$\frac{d^{*2}y(x)}{dx^{*2}} = y(x)^{\cos x}$$

$$y(0) = 1 \quad , \quad y^*(0) = 1$$

şeklinde verilen birinci mertebeden çarpımsal lineer diferansiyel denklemini çarpımsal integral denklemine dönüştürünüz.

Çözüm: Öncelikle

$$\frac{d^{*2}y(x)}{dx^{*2}} = u(x)$$

dönüşümü uygulansın. Bu ifade

$$\frac{d^{*2}y}{dx^{*2}} = d^* \left(\frac{d^*y}{dx^*} \right) = d^*y^*(x) = u(x)$$

biçiminde yazılır. Eşitliğin her iki tarafının çarpımsal integrali alınırsa,

$$* \int_0^x d^*y^*(x) = * \int_0^x u(t)^{dt}$$

olur. Teorem 1.4.5 kullanılarak,

$$\frac{y^*(x)}{y^*(0)} = * \int_0^x u(t)^{dt}$$

bulunur. Böylece $y^*(0) = 1$ başlangıç şartı yerine yazılırsa,

$$y^*(x) = 1.* \int_0^x u(t) dt$$

şeklinde bulunur. Eşitliğin her iki tarafının tekrar çarpımsal integrali alınırsa,

$$* \int_0^x y^*(t) dt = * \int_0^x * \int_0^x u(t) dt$$

olur. Teorem 1.4.5 kullanılarak,

$$\frac{y(x)}{y(0)} = * \int_0^x * \int_0^x u(t) dt$$

bulunur. Böylece $y(0) = 1$ başlangıç şartı yerine yazılırsa,

$$y(x) = 1.* \int_0^x * \int_0^x u(t) dt$$

bulunur. Elde edilen bu eşitliğin sağ tarafına Önerme 2.2.3 uygulanırsa

$$y(x) = * \int_0^x \left[u(t) \frac{(x-t)^{2-1}}{(2-1)!} \right] dt$$

$$y(x) = * \int_0^x [u(t)^{(x-t)}] dt$$

olur. Bulunan bu eşitlik ve $\frac{d^*y}{dx^*} = u(x)$ dönüşümü çarpımsal diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(x) = \left[* \int_0^x [u(t)^{(x-t)}] dt \right]^{cos x}$$

$$u(x) = * \int_0^x [u(t)^{\cos x \cdot (x-t)}]^{dt}$$

biçiminde bir çarpımsal Volterra integral denklemi elde edilir.



4. BULGULAR ve TARTIŞMA

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya birden fazla integral işareti altında bulunduğu, matematiksel fizik ve uygulamalı matematikteki birçok problemin çözümünde karşılaşılan denklemlerdir. İntegral denklemler çok geniş bir araştırma sahasına sahip olduğundan niteliklerine göre ayrı ayrı incelenmişlerdir. Diferansiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyonun değişik türevlerinden oluşmaktadır. Diferansiyel denklemler bir problemi tek başına tanımlamaya yeterli olmadığından sınır şartlarının da eklenmesi gerekmektedir. Ancak, integral denklemlerde ilave şartlara gerek duymadan problemlerin tam olarak tanımı verilebilmektedir. Bundan yola çıkarak integral denklemler, diferansiyel denklemlerin çözümünde bir çözüm aracı olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle diferansiyel denklemler ile integral denklemler arasında yakın bir ilişki vardır. İntegral denklemlerin, diferansiyel denklemler ile olan yakın ilişkisi ve diferansiyel denklemlerin mühendislikte çokça kullanılması integral denklemleri önemli bir konuma getirmiştir.

Yapılan literatür taramalarında çarpımsal analizde integral denklemleri ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. İntegral denklemlerin, diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılması ve literatürde çarpımsal diferansiyel denklemlerin tanımlanmış olması, integral denklemlerin çarpımsal analize taşınarak problem çözümlerinde kolaylık sağlayacağı ve yeni bakış açısı getireceği fikrini ortaya çıkarmıştır. Bu sebeple tez çalışmasında integral denklemlerle ilgili bazı çalışmaların çarpımsal analize aktarılması amaçlanmıştır.

Öncelikle genel bilgilerde çarpımsal analizin en temel unsurları olan çarpımsal türev ve çarpımsal integral konuları ele alınarak gerekli tanımlar, teoremler ve konuyu daha iyi kavrayabilmek için bazı örneklere yer verilmiştir. Bunun yanısıra çalışmanın asıl kısmının incelenebilmesi için gerekli olan çarpımsal diferansiyel denklemlerden bahsedilmiştir.

Bulgular kısmında, ilk olarak Krasnov, Kiselev ve Makeronko (1976), Aksoy (1983), Tulga (2006), Özkaya (2010) ve Köklü (2018) çalışmalarından faydalanılarak ihtiyaç duyulan integral denklemi ile ilgili tanımlar çarpımsal analize aktarılmıştır. Böylece çarpımsal integral denklemi tanımı oluşturulmuş, gerekli sınıflandırılmalar yapılmış ve çarpımsal integral denklemlerin çözümleri incelenerek örneklendirmeler yapılmıştır.

Krasnov, Kiselev ve Makaronko (1976) ve Aksoy (1983) çalışmalarında integral denklemlerde kullanılan ispat teknikleri ile Stanley (1999), Bashirov, Mısırlı ve Gürefe (2008), Bashirov, Mısırlı, Özyapıcı ve Tandoğdu (2011), Bashirov (2013) çalışmalarında yer alan çarpımsal analizle ilgili temel kavramlar ve ispat tekniklerinden faydalanılarak çarpımsal integral denklemleri ve çarpımsal diferansiyel denklemler arasındaki ilişki irdelenmiştir. Böylece bir çarpımsal integral denklemin çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürülebildiği ve değişken veya sabit üstlü bir çarpımsal diferansiyel denklemin çarpımsal Volterra integral denklemine dönüştürülebildiği ispatlanarak örneklendirmeler yapılmıştır.



5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Klasik analizde yer alan integral denklemler ile ilgili temel kavramlar ve gerekli sınıflandırmalar çarpımsal analize aktararak çarpımsal integral denklemleri tanımlanmıştır. Çarpımsal türev ve çarpımsal integral özellikleri kullanılarak, çarpımsal integral denklemlerinin çözümleri irdelenerek örneklendirilmiştir. Bir çarpımsal integral denklemin çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürülebildiği ispatlanmış ve örneklendirmeler yapılmıştır. Değişken veya sabit üstlü bir çarpımsal lineer diferansiyel denklemin çarpımsal Volterra integral denklemine dönüştürülebildiği ispatlanmış ve örneklendirmeler yapılmıştır. Bu tez çalışmasında çarpımsal Volterra integral denklemleri üzerinde durulmuştur. Yapılacak çalışmalarda integral denklemlerinin farklı çeşitleri çarpımsal analize aktarılabilir. Bunun yanı sıra integral denklemleri ile ilgili diğer çözüm teknikleri çarpımsal analize aktararak incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

- Aksoy Y., 1983. İntegral Denklemler, İstanbul, Yıldız Üniversitesi Yayınları, Sayı:166
- Bashirov A., 2013. On Line And Double Multiplicative Integrals, TWMS App. Eng. Math.V., N.1, 103-107
- Bashirov A., Mısırlı E. ve Özyapıcı A., 2008. Multiplicative Calculus And Its Applications, J.Math. Anal. Appl. 337, 36-48
- Bashirov A., Mısırlı E., Özyapıcı A. ve Tandoğdu Y., 2011. On Modeling With Multiplicative Differential Equations, Appl. Math. J. Chinese Univ., 26(4):425-438
- Campbell D., 2007. Multiplicative Calculus And Student Projects, Multiplicative Calculus and Student Projects
- Gürefe Y., 2009. Çarpımsal Analiz ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 49s.
- Köklü K. Ö., 2018. İntegral Denklemler, Ankara, Papatya Bilim Yayıncılık, 350s.
- Krasnov M., Kiselev A. ve Makeronko G., 1976. İntegral Denklemler (çev: Cevdet Cerit), İstanbul, 156 s.
- Özkaya O., 2010. Volterra İntegral Denklemlerinin Ardışık Yaklaşım Yöntemiyle Çözümü, Yüksek Mühendislik Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Aydın, 39s.
- Özyapıcı A., 2009. Çarpımsal Analiz ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 105s.
- Stanley D., 1999. A Multiplicative Calculus, PRİMUS, Volume IX Number 4, 310-326
- Tulga İ., 2006. İntegral Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri, Yüksek Mühendislik Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, 67s.
- Yalçın N. ve Çelik E., 2018. Solution of multiplicative homogeneous linear differential equations with constant exponentials, New Trends in Mathematical Sciences, 6, No. 2, 58-67

ÖZGEÇMİŞ

Hatice DURMAZ, 23.11.1994'te Erzurum İspir'de doğdu. İlkokulu ve Ortaokulu İzmir'de Atatürk İlköğretim Okulu'nda 2005-2008 yıllarında bitirdi. Lise öğrenimini İzmir'de Ferzent Bulum Lisesi'nde 2012 yılında tamamladı. Lisans eğitimini 2012-2016 yılları arasında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nde tamamladı. Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde tezli yüksek lisans eğitimini 2016 yılında başlayıp 2019 yılı itibariyle tamamladı.

