

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ÇARPIMSAL KUVVET SERİLERİNİN ÇARPIMSAL İNTEGRAL
DENKLEMLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS

Arzu BAL

OCAK-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ÇARPIMSAL KUVVET SERİLERİNİN ÇARPIMSAL İNTEGRAL
DENKLEMLERE UYGULANMASI**

**APPLICATION OF MULTIPLICATIVE POWER SERIES TO
MULTIPLICATIVE INTEGRAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Arzu BAL

**OCAK-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ÇARPIMSAL KUVVET SERİLERİNİN ÇARPIMSAL İNTEGRAL
DENKLEMLERE UYGULANMASI**

**APPLICATION OF MULTIPLICATIVE POWER SERIES TO
MULTIPLICATIVE INTEGRAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Arzu BAL

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK

**OCAK-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Çarpımsal Kuvvet Serilerinin Çarpımsal İntegral Denklemlere Uygulanması**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

13/01/2023

.....
Arzu BAL

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında sağladıkları katkılarla bana yol gösteren değerli danışman hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK'e ve Dr. Öğr. Üyesi Numan YALÇIN'a tüm desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde benden desteklerini esirgemeyen aileme minnettarım.

Arzu BAL

GÜMÜŞHANE – 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında çarpımsal analizin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Ayrıca çarpımsal dizi, sonlu çarpım ve çarpımsal seriler tanımlanmış ve bunlarla ilgili temel kurallar verilmiştir. Sonrasında çarpımsal kuvvet serileri ve çarpımsal Taylor serilerinden bahsedilmiştir. Tezin asıl konusu ise çarpımsal integral denklemler ve onların çarpımsal kuvvet serileri ile çözülmesidir. Birinci ve ikinci tipte çarpımsal integral denklemlerin tanımları verilmiştir. İkinci tipte olan farklı çarpımsal integral denklemlerin çözümleri, çarpımsal kuvvet serileri yöntemi kullanılarak araştırılmıştır. Yapılan bu çalışmalar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çarpımsal analiz, Çarpımsal integral denklemler, Çarpımsal kuvvet serileri yöntemi, İntegral denklemler

SUMMARY

In this thesis, the basic definitions and theorems of multiplicative analysis are given. In addition, multiplicative sequences, finite product and multiplicative series are defined and basic rules about them are given. Afterwards, multiplicative power series and multiplicative Taylor series are mentioned. The main subject of this thesis is multiplicative integral equations and their solution with multiplicative power series. Definitions of multiplicative integral equations of the first and second types are given. The solutions of different multiplicative integral equations of the second type are investigated using the multiplicative power series method. These studies are supported by examples.

Keywords: Multiplicative analysis, Multiplicative integral equations, Multiplicative power series method, Integral equations

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	HATA! YER İŞARETİ TANIMLANMAMIŞ.
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ	1
2. ÇARPIMSAL ANALİZ.....	4
3. ÇARPIMSAL DİZİLER VE ÇARPIMSAL SERİLER.....	12
3.1. Çarpımsal Diziler	12
3.2. Sonlu Çarpım	12
3.3. Çarpımsal Seriler.....	19
3.4. Çarpımsal Kuvvet Serileri.....	21
4. ÇARPIMSAL İNTEGRAL DENKLEMLER VE ÇARPIMSAL KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİ	26
4.1. Çarpımsal Fredholm İntegral Denklemleri (ÇFİD).....	27
4.1.1. Çekirdeği 1'e Eşit Olan ÇFİD'nin Çözümü.....	27
4.1.2. Çekirdeği Sadece x Değişkenine Bağlı Olan ÇFİD'nin Çözümü	33
4.1.3. Çekirdeği Sadece t Değişkenine Bağlı Olan ÇFİD'nin Çözümü	36
4.2. Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi (ÇVİD)	40
4.3. Çarpımsal Volterra-Fredholm İntegral Denklemi (ÇVFİD)	45
4.3.1. Çekirdekleri $K_1(x,t)=K_2(x,t)=1$ olan ÇVFİD'nin Çözümü	45
4.3.2. Çekirdekleri $K_1(x,t)=K(x,t)$, $K_2(x,t)=1$ olan ÇVFİD'nin Çözümü	49
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	59
KAYNAKÇA.....	60
ÖZGEÇMİŞ	63

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}_{exp}$	: Üstel reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{exp}^+$	: Üstel pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{exp}^-$	: Üstel negatif reel sayılar kümesi
$\oplus$	: Üstel toplama işlemi
$\ominus$	: Üstel çıkarma işlemi
$\odot$	: Üstel çarpma işlemi
$\oslash$	: Üstel bölme işlemi
$ x _*$	: Çarpımsal mutlak değer
$\lim_{x \rightarrow a}^* f(x)$	: Çarpımsal limit
$f^*(x)$	: Çarpımsal türev
$* \int f(x)^{dx}$	: Çarpımsal integral
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	: Çarpımsal dizi ($a_n \in \mathbb{R}_{exp}$)
$\prod_{n=0}^N a_n$	: Sonlu çarpım ($a_n \in \mathbb{R}_{exp}$)
$\prod_{n=0}^{\infty} a_n$	: Çarpımsal seri ($a_n \in \mathbb{R}_{exp}$)
$K_1(x, t)$	: Çarpımsal Volterra integralinin çekirdeği
$K_2(x, t)$	: Çarpımsal Fredholm integralinin çekirdeği
ÇVİD	: Çarpımsal Volterra integral denklemi
ÇFİD	: Çarpımsal Fredholm integral denklemi
ÇVFİD	: Çarpımsal Volterra-Fredholm integral denklemi

1. GİRİŞ

İntegral denklemler, 19. yüzyıldan itibaren uygulamalı matematik, matematiksel fizik gibi alanlarda pek çok problemin çözümünde kullanılmaktadır. Bir integral denklemi ilk defa Abel'in 1823 yılında bir mekanik problemde kullandığı bilinmektedir. Daha sonra mühendislik ve diğer temel bilim dallarında kullanılmaya başlanmış ve diferansiyel denklemlerin uygulamalarında önemli bir yer edinmiştir (Lovitt, 1950; Smithies, 1958; Krasnov vd., 1971). İntegral denklemler çok geniş bir araştırma alanına sahip olduğundan, tüm integral denklemleri kapsayan bir teori oluşturmak mümkün değildir. Bu nedenle integral denklemler özelliklerine göre ayrı ayrı incelenir. Bu incelemeler dikkate alındığında integral denklemler, Volterra ve Fredholm olmak üzere ikiye ayrılır. 19. yüzyılın sonunda Volterra ve 20. yüzyılın başında Fredholm, D. Hilbert, E. Schmidt genel bir integral denklem teorisinin geliştirilmesine katkıda bulunmuşlardır (Fredholm, 1903).

Wilhelm Leibniz ve Newton, 17. yüzyılda klasik analizi tanımlamışlardır. Klasik analiz trigonometri, geometri ve cebir üzerine kurulmuş; limit, türev ve integral gibi konulardan oluşmaktadır. Bu konuların inşasında toplama işlemi olduğundan klasik analize toplamsal analizde denilmektedir. Klasik analiz, bilgisayar, istatistik, tıp ve mühendislik alanlarında matematiksel modellemenin çokça kullanıldığı ve bunlara uygun çözüm yöntemlerinin geliştirildiği birçok alanda uygulamaya sahiptir.

Matematikte bazı problemleri klasik analiz yardımıyla açıklamak ve bu problemler için analitik çözümler bulmak bazen mümkün olmayabilir. Bu nedenle, klasik analiz yardımıyla çözülemeyen bu tür problemlerin çözümü için alternatif analizler geliştirilmiştir. 1967' den 1970' e kadar olan dönemde Michael Grossman ve Robert Katz tarafından Newtonyen olmayan (Non-Newtonian) analizler geliştirilmiştir. Bu süre zarfında geometrik analiz, harmonik analiz, bigeometrik analiz, anageometrik analiz, biharmonik analiz, anaharmonik analiz, bikuadratik ve anakuadratik analiz olmak üzere çok sayıda yeni analizler tanımlamışlardır. Bu yeni analizleri klasik (newtonyen) analizden ayırt etmek için "Newtonyen olmayan" ismi kullanılmış ve bu analizler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir (Grossman ve Katz, 1972). Newtonyen olmayan analizlerden biri olan geometrik analizi ilk önce Dick Stanley çalışmış ve geometrik analizin bazı avantajlarını ortaya çıkarmıştır (Stanley, 1999). Klasik (newtonyen) analizdeki toplama ve çıkarma işlemleri geometrik analizde sırasıyla çarpma ve bölme işlemlerine tekabül ettiğinden Stanley tarafından, geometrik analize çarpımsal analiz

(multiplicative calculus) denilmiştir. Daha sonra Duff Campbell, geometrik analiz ile ilgili olarak bazı yeni çalışmalar yapmıştır (Campbell, 1999). Bu analizin tarihi çok eski tarihlere dayanmasına rağmen bilim insanları tarafından uzun bir süre dikkat çekmemiştir. Ancak, Bashirov ve arkadaşları, Ocak 2008’de yaptıkları çalışmayla araştırmacıların dikkatini çarpımsal analiz üzerine çekmeyi başarmışlardır (Bashirov vd., 2008). Son yıllarda yapılan çalışmaların çarpımsal analizin çeşitli bilim dallarındaki problemlerin çözümlerinde farklı bir bakış açısı getirdiği gözlemlenmiştir (Bashirov vd. 2011; Filip vd., 2014; Córdova-Lepe, 2006; Córdova-Lepe, 2015; Rybaczuk ve Stopel, 2000; Rybaczuk ve Cetera., 2001; Kasprzak vd., 2004; Aniszewska, 2007; Misirli ve Ozyapici, 2009; Misirli ve Gurefe, 2011; Florak ve Assen, 2012; Çakmak ve Başar, 2012; Kadak ve Özlük, 2014; Córdova-Lepe, 2015; Goktas vd., 2022; Gökteş vd., 2022; Gulsen vd., 2022) (Yalçın, 2016; Yalçın ve Çelik, 2018; Yalçın vd., 2016; Yalçın, 2019; Yalçın, 2021; Yalçın ve Dedetürk, 2021; Yalçın ve Dedetürk, 2022).

Türkmen ve Başar (2012), geometrik (çarpımsal) analizde dizi kümeleriyle ilgili bazı temel sonuçları elde ettiler. Çakmak ve Başar (2012), Newtonyen olmayan analize dayanan dizi uzaylarında bazı yeni sonuçlar buldular. Duyar ve Erdoğan (2016), Newtonyen olmayan reel sayı serilerini ve bunların yakınsaklık özelliklerini incelediler. Sağır ve Erdoğan (2020), Newtonyen olmayan kuvvet serilerini ve yakınsaklık testlerini verdiler. Diğer taraftan, 2019 yılında çarpımsal integral denklemlerden biri olan çarpımsal Volterra integral denkleminin çözümlerinin ardışık yaklaşımlar yöntemiyle verildiği görülmüştür (Durmaz ve Güngör, 2019). Başka bir çalışmada çarpımsal lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri çarpımsal kuvvet serisi yöntemiyle incelenmiştir (Yalçın ve Dedetürk, 2022, basımda). Ayrıca, tezin çalışmasını oluşturan çarpımsal integral denklemlerin çarpımsal kuvvet serisi çözümleri verilmiştir (Bal, Yalçın ve Dedetürk, 2022).

Bu tez çalışması beş bölümden oluşur. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde kuramsal bilgiler verilmiştir. Çarpımsal analizin temel tanım ve teoremlerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde çarpımsal diziler ve çarpımsal seriler verilmiştir. Ayrıca çarpımsal kuvvet serilerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde bu tezin temelini oluşturan bazı yeni kavramlar tanımlanmıştır. Çarpımsal integral denklemlerin tanımı verilir çarpımsal Fredholm integral denklemi, çarpımsal Volterra integral denklemi ve çarpımsal Volterra-Fredholm integral denklemlerin tanımı yapılmıştır. Ayrıca bu çarpımsal integral denklemlerin çözümleri çarpımsal kuvvet serileri ile verilmiştir. Daha sonra yapılan bu çalışmalar örneklerle desteklenmiştir. Beşinci bölüm sonuç bölümü olup

bu bölümde klasik analize alternatif olarak gösterilen ve birçok problemin çözümünü kolaylaştıran çarpımsal analizin bilime farklı bir bakış açısı getirdiği saptanmıştır.



2. ÇARPIMSAL ANALİZ

Tanım 2.1: Üstel sayı kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

a) Üstel reel sayılar kümesi:

$$\mathbb{R}_{exp} = \{e^x | x \in \mathbb{R}\},$$

b) Üstel pozitif reel sayılar kümesi:

$$\mathbb{R}_{exp}^+ = \{e^x | x \in \mathbb{R}, \quad x > 0\} = (1, \infty),$$

c) Üstel negatif reel sayılar kümesi:

$$\mathbb{R}_{exp}^- = \{e^x | x \in \mathbb{R}, \quad x < 0\} = (0, 1),$$

d) Üstel tam sayılar kümesi:

$$\mathbb{Z}_{exp} = \{e^x | x \in \mathbb{Z}\}.$$

Tanım 2.2: Üstel toplama, üstel çıkarma, üstel çarpma ve üstel bölme işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Çakmak ve Başar, 2012) : $\forall u, v \in \mathbb{R}_{exp}$

a) Üstel toplama:

$$u \oplus v = e^{\ln(u) + \ln(v)} = u \cdot v,$$

b) Üstel çıkarma:

$$u \ominus v = e^{\ln(u) - \ln(v)} = \frac{u}{v},$$

c) Üstel çarpma:

$$u \odot v = e^{\ln(u) \cdot \ln(v)} = u^{\ln(v)},$$

d) Üstel bölme:

$$u \oslash v = e^{\frac{\ln(u)}{\ln(v)}} = u^{\frac{1}{\ln(v)}}, \quad v \neq 1.$$

Tanım 2.3: Reel sayılar kümesinden üstel reel sayılar kümesine tanımlı bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ fonksiyonuna çarpımsal fonksiyon denir.

Tanım 2.4: $|\cdot|_*: \mathbb{R}_{exp} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}^+ \cup \{1\}$ tanımlı

$$|x|_* = \exp(|\ln(x)|)$$

fonksiyonuna çarpımsal mutlak değer fonksiyonu denir.

Bu tanıma göre

$$|u|_* = \begin{cases} u, & u \geq 1, \\ \frac{1}{u}, & u < 1. \end{cases}$$

yazılabilir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.5: Eğer her $\varepsilon > 1$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ iken $\left| \frac{f(x)}{L} \right|_* < \varepsilon$ kalacak şekilde $\delta > 0$ varsa f çarpımsal fonksiyonunun $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ noktasına yaklaşırken çarpımsal limiti L 'dir denir ve

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir (Bashirov vd., 2008).

.

Tanım 2.6: Eğer $* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f çarpımsal fonksiyonu $x = x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında çarpımsal süreklidir denir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.7: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ bir çarpımsal fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki limit var ise $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında f 'nin çarpımsal türevi

$$f^*(x) = \exp \left\{ \frac{d}{dx} (\ln \circ f)(x) \right\} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

olarak tanımlanır (Stanley, 1999).

Gösterim 2.1: $f(x)$ 'in çarpımsal türevi

$$f^*(x) \text{ veya } \frac{d^*}{dx} f(x)$$

ile gösterilir.

Önerme 2.1: $f(x)$ 'in çarpımsal türevinin $x = a$ daki değeri

$$f^*(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{f(a)} \right]^{1/(x-a)}$$

eşittir.

İspat:

$$\begin{aligned} f^*(a) &= e^{(\ln \circ f)'(a)} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{(\ln \circ f)(x) - (\ln \circ f)(a)}{x - a} \right] \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \exp \left[\frac{(\ln \circ f)(x) - (\ln \circ f)(a)}{x - a} \right] \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \exp \left[\frac{\ln(f(x)) - \ln(f(a))}{x - a} \right] \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \exp \left[\frac{\ln \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)}{x - a} \right] \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \left[e^{\ln \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)} \right]^{1/(x-a)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{f(a)} \right]^{1/(x-a)} \end{aligned}$$

■

Teorem 2.1: $f(x), h(x)$ çarpımsal fonksiyonlar ve c_1, c_2 iki reel sayı olsun.

Çarpımsal türev aşağıda verilen özelliklere sahiptir.

a) Çarpımsal türev çarpımsal doğrusaldır:

$$\frac{d^*}{dx} [(f(x))^{c_1} \cdot (h(x))^{c_2}] = (f^*(x))^{c_1} \cdot (h^*(x))^{c_2}$$

b) Sabit üstel sayıların çarpımsal türevi 1'e eşittir: $\forall C \in \mathbb{R}_{exp}$ için

$$\frac{d^*}{dx}(C) = 1$$

c) Bölümün çarpımsal türevi:

$$\frac{d^*}{dx} \left[\frac{f(x)}{h(x)} \right] = \frac{f^*(x)}{h^*(x)}$$

d) $a \in \mathbb{R}_{exp}, 0 \neq n \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{d^*}{dx}(a^{x^n}) = a^{n \cdot x^{n-1}}.$$

Önerme 2.2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türetilbilir fonksiyonu için

$$\frac{d^*}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f'(x)}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} \frac{d^*}{dx}(e^{f(x)}) &= \frac{d^*}{dx}(\exp \circ f)(x) \\ &= \exp \left\{ \frac{d(\ln \circ \exp \circ f)}{dx}(x) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} \\ &= e^{f'(x)}. \end{aligned}$$

■

Tanım 2.8: $f(x)$ bir çarpımsal fonksiyon olsun. Eğer

$$F^*(x) = f(x)$$

olacak şekilde bir $F(x)$ çarpımsal fonksiyonu varsa F' 'ye f 'nin bir çarpımsal ters türevi denir (Bashirov vd., 2008).

Teorem 2.2: Bir çarpımsal fonksiyonun iki ters türevinin oranı sabittir.

İspat: $f(x)$ bir çarpımsal fonksiyon ve $F(x)$ ile $H(x)$ ise f 'nin iki ters türevi olsun.

Bu durumda

$$F^*(x) = f(x) \text{ ve } H^*(x) = f(x)$$

dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa bölünürse

$$\frac{F^*(x)}{H^*(x)} = 1$$

$$\left(\frac{F(x)}{H(x)}\right)^* = 1$$

olduğu görülür. Bu ise bir $C > 0$ sabiti için

$$\frac{F(x)}{H(x)} = C$$

olması demektir. ■

Tanım 2.9: $F(x)$, $f(x)$ çarpımsal fonksiyonunun bir çarpımsal ters türevi olsun.

Bu durumda $f(x)$ 'in en genel ters türevine $f(x)$ 'in çarpımsal belirsiz integrali denir ve

$$* \int f(x)^{dx} = C \cdot F(x)$$

ile gösterilir. Burada $C \in \mathbb{R}_{exp}$ bir üstel sabittir (Bashirov vd., 2008).

Önerme 2.3: $f(x)$ 'in çarpımsal belirsiz integrali

$$* \int f(x)^{dx} = e^{\int (\ln \circ f)(x) dx}$$

biçiminde de verilebilir.

İspat: $F(x)$, $f(x)$ çarpımsal fonksiyonunun bir çarpımsal ters türevi olsun

$$F^*(x) = f(x)$$

$$\exp \left\{ \frac{d(\ln \circ F)}{dx}(x) \right\} = f(x)$$

$$\frac{d(\ln \circ F)}{dx}(x) = (\ln \circ f)(x)$$

$$\int \frac{d(\ln \circ F)}{dx}(x) dx = \int (\ln \circ f)(x) dx$$

$$(\ln \circ F)(x) + c = \int (\ln \circ f)(x) dx$$

$$e^{(\ln \circ F)(x) + c} = e^{\int (\ln \circ f)(x) dx}$$

$$C \cdot F(x) = e^{\int (\ln \circ f)(x) dx}.$$

Burada c integral sabiti ve $C = e^c$ eşit olan bir üstel sabittir. Diğer taraftan

$$* \int f(x)^{dx} = C \cdot F(x)$$

eşit olduğundan

$$* \int f(x)^{dx} = e^{\int (\ln \circ f)(x) dx}$$

eşitliği elde edilir. ■

Teorem 2.3: $f(x), h(x)$ çarpımsal fonksiyonlar ve c_1, c_2 iki reel sayı olsun.

Çarpımsal türev aşağıda verilen özelliklere sahiptir.

a) Çarpımsal integral çarpımsal doğrusaldır:

$$* \int [(f(x))^{c_1} \cdot (h(x))^{c_2}]^{dx} = \left(* \int f(x)^{dx} \right)^{c_1} \cdot \left(* \int h(x)^{dx} \right)^{c_2}.$$

b) 1'in çarpımsal integrali sabit üstel bir C sayısıdır (Çarpımsal integral sabiti)

$$* \int 1^{dx} = C.$$

c) Bölümün çarpımsal integrali:

$$* \int \left[\frac{f(x)}{h(x)} \right]^{dx} = \frac{* \int f(x)^{dx}}{* \int h(x)^{dx}}.$$

d) $a \in \mathbb{R}_{exp}$, $0 \neq n \in \mathbb{R}$ için

$$* \int [a^{(x^n)}]^{dx} = C \cdot a^{\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)}.$$

Burada C bir çarpımsal integral sabitidir.

Önerme 2.4: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$* \int [e^{f(x)}]^{dx} = e^{\int f(x) dx}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} * \int [e^{f(x)}]^{dx} &= * \int [(\exp \circ f)(x)]^{dx} \\ &= e^{\int (\ln \circ \exp \circ f)(x) dx} \\ &= e^{\int f(x) dx}. \end{aligned}$$

■

Tanım 2.10: $f(x)$ çarpımsal fonksiyonu $[a, b]$ aralığında çarpımsal sürekli olsun.

Bu durumda

$$* \int_a^b f(x)^{dx} = e^{\int_a^b (\ln \circ f)(x) dx}$$

biçiminde tanımlanan integrale $f(x)$ çarpımsal fonksiyonunun $x = a$ 'dan $x = b$ 'ye çarpımsal belirli integrali denir (Stanley, 1999).

Teorem 2.4: (Çarpımsal analizin birinci temel teoremi)

$f(x)$ çarpımsal fonksiyonu $[a, b]$ aralığında çarpımsal sürekli olsun. Ayrıca $[a, b]$ aralığındaki her x için

$$F(x) = * \int_a^x f(t) dt$$

olsun. Bu taktirde $[a, b]$ aralığında

$$F^*(x) = f(x)$$

eşitliği geçerlidir (Özyapıcı, 2009).

Teorem 2.5: (Çarpımsal analizin ikinci temel teoremi)

$f(x)$ çarpımsal fonksiyonu $[a, b]$ aralığında çarpımsal sürekli ve ayrıca $F(x), f(x)$ çarpımsal fonksiyonunun bir çarpımsal ters türevi olsun. Bu durumda

$$* \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b)}{F(a)}$$

eşitliği geçerlidir (Özyapıcı, 2009).

3. ÇARPIMSAL DİZİLER VE ÇARPIMSAL SERİLER

3.1. Çarpımsal Diziler

Tanım 3.1: Elemanları $\mathbb{R}_{exp}$ 'den seçilen bir diziye bir çarpımsal dizi denir. Çarpımsal dizi

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n \in \mathbb{R}_{exp} | n \in \mathbb{N}\}$$

ile gösterilir.

Tanım 3.2: Elemanları $\mathbb{R}_{exp}$ 'den seçilen bir sonlu diziye bir sonlu çarpımsal dizi denir. Λ sonlu elemanlı bir indeks kümesi olmak üzere sonlu çarpımsal dizi

$$(a_n)_{n \in \Lambda} = \{a_n \in \mathbb{R}_{exp} | n \in \Lambda\}$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 3.3: Elemanlarının tamamı sabit olan bir çarpımsal diziye sabit terimli çarpımsal dizi denir.

Tanım 3.4: Elemanları $a_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}, a_n = a_n(x)$ fonksiyonlarından oluşan ve en az bir tanesi sabit fonksiyon olmayan bir çarpımsal diziye değişken terimli çarpımsal dizi denir ve $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.5: Elemanları $\mathbb{R}_{exp}$ 'den seçilen çift indeksli bir diziye çift indeksli bir çarpımsal dizi denir ve

$$(a_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}} = \{a_{n,i} \in \mathbb{R}_{exp} | n, i \in \mathbb{N}\}$$

ile gösterilir.

3.2. Sonlu Çarpım

Tanım 3.6: $(a_n)_{0 \leq n \leq N} = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ sonlu bir çarpımsal dizi olsun. Bu durumda

$$\prod_{n=0}^N a_n = a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_N$$

sonlu çarpımına verilen sonlu çarpımsal dizinin elemanlarının sonlu çarpımı denir.

Sonlu çarpım sonlu elemanlı keyfi bir indeks kümesi için de verilebilir.

Tanım 3.7: Boş kümeden farklı sonlu elemanlı bir

$$\Lambda = \{n \in \mathbb{N} \mid n_0 \leq n \leq N; n_0, N \in \mathbb{N}\}$$

indeks kümesi için $(a_n)_{n \in \Lambda}$ bir sonlu çarpımsal dizi olsun. Bu durumda

$$\prod_{n \in \Lambda} a_n = \prod_{n=n_0}^N a_n = a_{n_0} \cdot a_{n_0+1} \cdot \dots \cdot a_{N-1} \cdot a_N$$

sonlu çarpımına Λ indeks kümesi üzerinde $(a_n)_{n \in \Lambda}$ sonlu çarpımsal dizisinin elemanlarının sonlu çarpımı denir.

Önerme 3.1:

a) Bir sonlu çarpımın logaritması bir sonlu toplamdır.

$$\ln \left(\prod_{n \in \Lambda} a_n \right) = \sum_{n \in \Lambda} \ln(a_n).$$

b) Bir sonlu toplam e tabanında üste yükseltirse bir sonlu çarpım elde edilir.

$$\exp \left(\sum_{n \in \Lambda} a_n \right) = \prod_{n \in \Lambda} \exp(a_n) = \prod_{n \in \Lambda} e^{(a_n)}.$$

Teorem 3.1: Çarpım operatörü çarpımsal doğrusaldır:

$$\prod_{n \in \Lambda} (a_n^c \cdot b_n^d) = \left(\prod_{n \in \Lambda} a_n \right)^c \cdot \left(\prod_{n \in \Lambda} b_n \right)^d$$

eşitliği geçerlidir. Burada $(a_n)_{n \in \Lambda}$ ve $(b_n)_{n \in \Lambda}$ iki sonlu çarpımsal dizi, Λ sonlu elemanlı bir indeks kümesi ve $c, d \in \mathbb{R}$ 'dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\prod_{n \in \Lambda} (a_n^c \cdot b_n^d) &= (\exp \circ \ln) \left[\prod_{n \in \Lambda} (a_n^c \cdot b_n^d) \right] \\
&= \exp \left\{ \ln \prod_{n \in \Lambda} (a_n^c \cdot b_n^d) \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{n \in \Lambda} \ln(a_n^c \cdot b_n^d) \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{n \in \Lambda} [c \cdot \ln(a_n) + d \cdot \ln(b_n)] \right\} \\
&= \exp \left\{ c \cdot \sum_{n \in \Lambda} \ln(a_n) + d \cdot \sum_{n \in \Lambda} \ln(b_n) \right\} \\
&= \exp \left\{ c \cdot \sum_{n \in \Lambda} \ln(a_n) \right\} \cdot \exp \left\{ d \cdot \sum_{n \in \Lambda} \ln(b_n) \right\} \\
&= \left(\exp \left\{ \sum_{n \in \Lambda} \ln(a_n) \right\} \right)^c \cdot \left(\exp \left\{ \sum_{n \in \Lambda} \ln(b_n) \right\} \right)^d \\
&= \left(\prod_{n \in \Lambda} \exp \ln(a_n) \right)^c \cdot \left(\prod_{n \in \Lambda} \exp \ln(b_n) \right)^d \\
&= \left(\prod_{n \in \Lambda} a_n \right)^c \cdot \left(\prod_{n \in \Lambda} b_n \right)^d
\end{aligned}$$

■

Önerme 3.2: $A = (a_n)_{n \in \Lambda}$ ve $B = (b_n)_{n \in \Lambda}$ 'nin iki sonlu çarpımsal dizi olsun. Ayrıca Λ 'nın sonlu elemanlı bir indeks kümesi olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki indeks değiştirme özellikleri geçerlidir.

1) Λ , bir sonlu indeks kümesi ve f , Λ kümesinde tanımlı birebir ve örten fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\prod_{n \in \Lambda} a_n = \prod_{n \in f(\Lambda)} a_{f^{-1}(n)}$$

eşitliği geçerlidir.

2) Gerekli olduğunda indeks kaydırma yapılabilir: $\forall z \in \mathbb{Z}$ için

$$\prod_{n=n_0}^N a_n = \prod_{n=n_0+z}^{N+z} a_{n-z}$$

eşitliği vardır.

3) Çarpımdaki elemanların tersten çarpımı sonucu değıştirmez:

$$\prod_{n=n_0}^N a_n = \prod_{n=n_0}^N a_{(N+n_0)-n}$$

4) Çarpımdaki elemanların tersten çarpımı sonucu değıştirmez:

$$\prod_{n=0}^N a_n = \prod_{n=0}^N a_{N-n}$$

İspat:

1) $\Lambda = \{i_k | 1 \leq k \leq N\}$ sonlu bir indeks kümesi ve f, Λ kümesinde tanımlı birebir ve örten fonksiyon olsun. f 'nin görüntü kümesi

$$J = f(\Lambda) = \{j_k = f(i_k) | 1 \leq k \leq N\}$$

biçimindedir. Buradan $i_k = f^{-1}(j_k), 1 \leq k \leq N$ olduğu görülür ve

$$\begin{aligned} \prod_{n \in \Lambda} a_n &= a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_N} \\ &= a_{f^{-1}(j_1)} \cdot a_{f^{-1}(j_2)} \cdot \dots \cdot a_{f^{-1}(j_N)} \\ &= \prod_{n \in J} a_{f^{-1}(n)} \\ \prod_{n \in \Lambda} a_n &= \prod_{n \in f(\Lambda)} a_{f^{-1}(n)} \end{aligned}$$

elde edilir.

2) İkinci özelliikte $\Lambda = \{n \in \mathbb{N} | n_0 \leq n \leq N\}$ ve $f(n) = n + z$ olarak alınırsa

$$\prod_{n=n_0}^N a_n = \prod_{n=n_0+z}^{N+z} a_{n-z}$$

elde edilir.

3) İkinci özelliikte $\Lambda = \{n \in \mathbb{N} | n_0 \leq n \leq N\}$ ve $f(n) = (N + n_0) - n$ olarak alınırsa

$$f(\Lambda) = \{N, N-1, \dots, n_0+1, n_0\} = \Lambda \quad \text{ve} \quad f^{-1}(n) = (N + n_0) - n = f(n)$$

olur. Buradan

$$\prod_{n=n_0}^N a_n = \prod_{n=n_0}^N a_{(N+n_0)-n}$$

elde edilir.

4) Dördüncü özelliikte $n_0 = 0$ alınırsa eşitlik elde edilir.

Teorem 3.2: Çarpım operatörünün çarpımsal doğrusal olmasından dolayı elemanları $a_i \in \mathbb{R}_{exp}$ olan $(a_i)_{i \in \Lambda}$ sonlu çarpımsal dizisinin çarpımı ile elemanları $b_j \in \mathbb{R}$ olan $(b_j)_{j \in J}$ sonlu (klasik) dizisinin toplamı için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\left(\prod_{i \in \Lambda} a_i \right)^{\sum_{j \in J} b_j} = \prod_{i \in \Lambda} \prod_{j \in J} a_i^{b_j}.$$

İspat:

$J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \in \Lambda} a_i \right)^{\sum_{j \in J} b_j} &= \left(\prod_{i \in \Lambda} a_i \right)^{b_{j_1} + b_{j_2} + \dots + b_{j_m}} \\ &= \left(\prod_{i \in \Lambda} a_i \right)^{b_{j_1}} \cdot \left(\prod_{i \in \Lambda} a_i \right)^{b_{j_2}} \cdot \dots \cdot \left(\prod_{i \in \Lambda} a_i \right)^{b_{j_m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i \in \Lambda} a_i^{b_{j_1}} \right) \cdot \left(\prod_{i \in \Lambda} a_i^{b_{j_2}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\prod_{i \in \Lambda} a_i^{b_{j_m}} \right) \\
&= \prod_{i \in \Lambda} (a_i^{b_{j_1}} \cdot a_i^{b_{j_2}} \cdot \dots \cdot a_i^{b_{j_m}}) \\
&= \prod_{i \in \Lambda} \prod_{j \in J} a_i^{b_j}
\end{aligned}$$

■

Teorem 3.3: $I = \{(n, i) | i + n \leq N; i, n \geq 0\}$ indeks kümesinde tanımlı

$$\prod_{(n,i) \in I} a_{n,i} = \prod_{n=0}^N \prod_{i=0}^{N-n} a_{n,i}$$

çift indeksli sonlu çarpımı için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\prod_{n=0}^N \prod_{i=0}^{N-n} a_{n,i} = \prod_{n=0}^N \prod_{i=0}^n a_{n-i,i}.$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^N \prod_{i=0}^{N-n} a_{n,i} &= \prod_{\substack{i+n \leq N \\ i, n \geq 0}} a_{n,i} \\
&= \prod_{i=0}^N \left(\prod_{n=0}^{N-i} a_{n,i} \right) \\
&= \prod_{i=0}^N \left(\prod_{n=i}^N a_{n-i,i} \right) \\
&= \prod_{0 \leq i \leq n \leq N} a_{n-i,i} \\
&= \prod_{n=0}^N \prod_{i=0}^n a_{n-i,i}
\end{aligned}$$

■

Teorem 3.4: $(a_n(x))_{n \in \Lambda}$ bir değişken terimli sonlu çarpımsal dizi olsun. Ayrıca Λ 'nın sonlu elemanlı bir indeks kümesi olduğunu varsayalım.

a) Bir sonlu çarpımın çarpımsal türevi terimlerin tek tek çarpımsal türevi alınarak hesaplanır:

$$\left(\prod_{n \in \Lambda} a_n(x) \right)^* = \prod_{n \in \Lambda} a_n^*(x)$$

b) Bir sonlu çarpımın çarpımsal integrali terimlerin tek tek çarpımsal integrali alınarak hesaplanır:

$$* \int \left(\prod_{n \in \Lambda} a_n(x) \right)^{dx} = \prod_{n \in \Lambda} \left(* \int a_n(x)^{dx} \right)$$

İspat:

a)

$$\begin{aligned} \left(\prod_{n \in \Lambda} a_n(x) \right)^* &= \exp \left(\frac{d}{dx} \ln \left(\prod_{n \in \Lambda} a_n(x) \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{d}{dx} \sum_{n \in \Lambda} \ln(a_n(x)) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n \in \Lambda} \frac{d}{dx} \ln(a_n(x)) \right) \\ &= \prod_{n \in \Lambda} \exp \left(\frac{d}{dx} \ln(a_n(x)) \right) \\ &= \prod_{n \in \Lambda} a_n^*(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} * \int \left(\prod_{n \in \Lambda} a_n(x) \right)^{dx} &= \exp \left(\int \ln \left(\prod_{n \in \Lambda} a_n(x) \right) dx \right) \\ &= \exp \left(\int \left(\sum_{n \in \Lambda} \ln(a_n(x)) \right) dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left(\sum_{n \in \Lambda} \left(\int \ln(a_n(x)) dx \right) \right) \\
&= \prod_{n \in \Lambda} \exp \left(\int \ln(a_n(x)) dx \right) \\
&= \prod_{n \in \Lambda} \left(* \int a_n(x)^{dx} \right)
\end{aligned}$$

■

3.3. Çarpımsal Seriler

Tanım 3.8: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n \in \mathbb{R}_{exp} | n \in \mathbb{N}\}$ bir çarpımsal dizi olsun. Bu durumda

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = * \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=0}^N a_n \right)$$

sonsuz çarpımına eğer sağdaki çarpımsal limit var ise bir çarpımsal seri denir. Bu çarpımsal limit var ise klasik limit ile

$$* \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=0}^N a_n \right) = \exp \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N \ln(a_n) \right) \right]$$

biçiminde hesaplanabilir. Çarpımsal limit yok ise çarpımsal seri tanımlı değildir denir.

Teorem 3.5: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iki çarpımsal dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikteki çarpımsal seriler tanımlı ise $\forall c, d \in \mathbb{R}$ için

$$\prod_{n=0}^{\infty} (a_n^c \cdot b_n^d) = \left(\prod_{n=0}^{\infty} a_n \right)^c \cdot \left(\prod_{n=0}^{\infty} b_n \right)^d$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Teorem 3.1'deki indeks kümesi

$$\Lambda = \{n \in \mathbb{N} | 0 \leq n \leq N\}$$

olarak alınırsa

$$\prod_{n=0}^N (a_n^c \cdot b_n^d) = \left(\prod_{n=0}^N a_n \right)^c \cdot \left(\prod_{n=0}^N b_n \right)^d$$

yazılabilir. Burada eşitliğin her iki tarafının $N \rightarrow \infty$ giderken limiti alınır

$$\prod_{n=0}^{\infty} (a_n^c \cdot b_n^d) = \left(\prod_{n=0}^{\infty} a_n \right)^c \cdot \left(\prod_{n=0}^{\infty} b_n \right)^d$$

eşitliği elde edilir. ■

Teorem 3.6: Çarpım operatörünün çarpımsal doğrusal olmasından dolayı $\prod_{i=0}^{\infty} a_i$ çarpımsal serisi ile $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ (klasik) serisi için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\left(\prod_{i=0}^{\infty} a_i \right)^{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{\infty} a_i^{b_j}.$$

İspat: Teorem 3.2'deki indeks kümeleri

$$\Lambda = \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq N\}, J = \{j \in \mathbb{N} \mid 0 \leq j \leq M\}$$

olarak alınır

$$\left(\prod_{i=0}^N a_i \right)^{\sum_{j=0}^M b_j} = \prod_{i=0}^N \prod_{j=0}^M a_i^{b_j}$$

yazılabilir. Burada her iki tarafın $N, M \rightarrow \infty$ giderken limiti alınır

$$\left(\prod_{i=0}^{\infty} a_i \right)^{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{\infty} a_i^{b_j}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.7: $(a_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}} = \{a_{n,i} \in \mathbb{R}_{exp} | n, i \in \mathbb{N}\}$ çift indeksli bir çarpımsal dizi olsun. Eğer çarpımsal seriler tanımlı ise

$$\prod_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{\infty} a_{n,i} = \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^n a_{n-i,i}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Teorem 3.3'deki eşitliğin her iki tarafının $N \rightarrow \infty$ giderken limiti alınırsa ispat biter. ■

Teorem 3.8: $(a_n(x))_{n \in \Lambda}$ değişken terimli bir çarpımsal dizi olsun. Eğer çarpımsal seriler tanımlı ise aşağıdakiler geçerlidir.

a) Bir çarpımsal serinin çarpımsal türevi terimlerin tek tek çarpımsal türevi alınarak hesaplanır:

$$\left(\prod_{n=0}^{\infty} a_n(x) \right)^* = \prod_{n=0}^{\infty} a_n^*(x)$$

b) Bir çarpımsal serinin çarpımsal integrali terimlerin tek tek çarpımsal integrali alınarak hesaplanır:

$$* \int \left(\prod_{n=0}^{\infty} a_n(x) \right)^{dx} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(* \int a_n(x)^{dx} \right)$$

İspat: Teorem 3.4'deki indeks kümesi $\Lambda = \{n \in \mathbb{N} | 0 \leq n \leq N\}$ olarak seçilir ve (a) ve (b) şıklarındaki eşitliklerin her iki tarafının $N \rightarrow \infty$ giderken limiti alınırsa ispat biter. ■

3.4. Çarpımsal Kuvvet Serileri

Tanım 3.9: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir çarpımsal dizi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ sabit bir nokta olsun. Bu durumda terimleri $a_n^{(x-x_0)^n}$, ye eşit olan değişken terimli

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n^{(x-x_0)^n}$$

arpımsal seriye bir çarpımsal kuvvet serisi denir (Yalçın, 2021).

Tanım 3.10: $x_0 \in \mathbb{R}$ sabit bir nokta ve

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n^{(x-x_0)^n}, \prod_{n=0}^{\infty} b_n^{(x-x_0)^n}$$

arpımsal iki seri olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için çarpımsal kuvvet serilerinin tabanları eğit:

$$a_n = b_n$$

ise bu iki seri birbirine eęittir denir ve

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n^{(x-x_0)^n} = \prod_{n=0}^{\infty} b_n^{(x-x_0)^n}.$$

ile gösterilir.

Teorem 3.9: Bir arpımsal kuvvet serisinin çarpımsal türevi terimlerin tek tek çarpımsal türevi alınarak hesaplanır (Yalçın, 2021):

$$\left(\prod_{n=0}^{\infty} a_n^{(x-x_0)^n} \right)^* = \prod_{n=0}^{\infty} (a_{n+1})^{(n+1)(x-x_0)^n}.$$

Teorem 3.10: Bir arpımsal kuvvet serisinin çarpımsal integrali terimlerin tek tek çarpımsal integrali alınarak ağağıdaki gibi hesaplanır:

$$* \int \left(\prod_{n=0}^{\infty} a_n^{(x-x_0)^n} \right)^{dx} = C \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_{n-1})^{\frac{(x-x_0)^n}{n}}$$

Burada C arpımsal integral sabitidir (Yalçın, 2021).

Tanım 3.11: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında keyfi mertebeden türeve sahip bir çarpımsal fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x)$ çarpımsal fonksiyonunun x_0 noktası civarında çarpımsal Taylor serisi

$$T(f(x)) = \prod_{n=0}^{\infty} (f^{*(n)}(x_0))^{\frac{(x-x_0)^n}{n!}}$$

biçiminde tanımlanır (Bashirov vd., 2008).

Tanım 3.12: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ bir çarpımsal fonksiyon, $x_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f(x)$ çarpımsal fonksiyonuna x_0 'ın en az bir $N(x_0) \subset (a, b)$ komşuluğundaki tüm noktalar için ($x \in N(x_0)$) yakınsayan aşağıdaki gibi bir çarpımsal kuvvet serisi

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{(x-x_0)^n}, (a_n \in \mathbb{R}_{exp})$$

varsa $f(x)$ çarpımsal fonksiyonuna x_0 noktasında çarpımsal analitiktir denir (Yalçın, 2021).

Teorem 3.11: $f(x)$ çarpımsal fonksiyonu x_0 noktasında çarpımsal analitik ise x_0 'ın en az bir $N(x_0) \subset (a, b)$ komşuluğundaki tüm noktalar için çarpımsal Taylor serisi $T(f(x))$, $f(x)$ 'e yakınsar (Yalçın, 2021):

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (f^{*(n)}(x_0))^{\frac{(x-x_0)^n}{n!}}$$

Teorem 3.12: Eğer $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x)$ fonksiyonu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığında analitik bir fonksiyon ise $(\exp \circ f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ çarpımsal fonksiyonu (a, b) aralığında çarpımsal analitik bir fonksiyondur.

İspat: $x_0 \in (a, b)$ noktasını keyfi olarak seçelim. $f(x)$, (a, b) aralığında analitik olduğundan $f(x)$ fonksiyonuna x_0 'ın en az bir $N(x_0) \subset (a, b)$ komşuluğundaki tüm noktalar için ($x \in N(x_0)$) yakınsayan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eşitliğindeki gibi bir kuvvet serisi vardır. Her iki taraf e tabanında üste yükseltirse

$$\begin{aligned} (\exp \circ f)(x) &= \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \exp[a_n (x - x_0)^n] \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} e^{a_n (x - x_0)^n} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (e^{a_n})^{(x - x_0)^n} \\ (\exp \circ f)(x) &= \prod_{n=0}^{\infty} A_n^{(x - x_0)^n} \end{aligned}$$

eşit olduğu görülür. Burada $A_n = e^{a_n}$ 'dir. Bu ise $(\exp \circ f)$ çarpımsal fonksiyonunun $x_0 \in (a, b)$ noktasında çarpımsal analitik bir fonksiyon olması demektir. x_0 noktası keyfi seçildiğinden $(\exp \circ f)$ çarpımsal fonksiyonu (a, b) aralığında çarpımsal analitiktir. ■

Örnek 3.1: $\varphi(x) = e^{\sin(x)}$ çarpımsal fonksiyonunun çarpımsal Taylor serisini bulalım.

Çözüm:

$\sin(x)$ fonksiyonu analitik fonksiyon olduğundan $\varphi(x) = e^{\sin(x)}$ çarpımsal fonksiyonu da çarpımsal analitiktir.

$$\begin{cases} \varphi(x) = e^{\sin(x)} \\ \varphi^*(x) = e^{\cos(x)} \\ \varphi^{**}(x) = e^{-\sin(x)} \\ \varphi^{***}(x) = e^{-\cos(x)} \\ \varphi^{*(4)}(x) = e^{\sin(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi^*(0) = e \\ \varphi^{**}(0) = 1 \\ \varphi^{***}(0) = e^{-1} \\ \varphi^{*(4)}(0) = 1 \end{cases}$$

Bu şekilde $\varphi(x)$ 'in çarpımsal türevleri

$$\begin{aligned}\varphi^{*(n)}(x) &= e^{\sin(x+n\frac{\pi}{2})} \\ \varphi^{*(n)}(0) &= \begin{cases} 1, & n \text{ çift ise} \\ e^{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \\ \varphi^{*(2n)}(0) &= 1, \quad \varphi^{*(2n+1)}(0) = e^{(-1)^n}, n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan verilen çarpımsal fonksiyonun çarpımsal Taylor serisi

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \prod_{n=0}^{\infty} \left(\varphi^{*(n)}(0) \right)^{\frac{x^n}{n!}} \\ e^{\sin(x)} &= \prod_{n \in \mathbb{N}} 1^{\frac{x^{2n}}{(2n)!}} \cdot \prod_{n \in \mathbb{N}} [e^{(-1)^n}]^{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \\ e^{\sin(x)} &= \prod_{n \in \mathbb{N}} e^{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.13: Eğer $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$, $f = f(x)$ çarpımsal fonksiyonu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığında çarpımsal analitik bir fonksiyon ise $(\ln \circ f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında analitik bir fonksiyondur.

İspat: Bir önceki teoremin ispatına benzer şekilde bu teorem ispatlanır.

4. ÇARPIMSAL İNTEGRAL DENKLEMLER VE ÇARPIMSAL KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİ

Durmaz (2019), Güngör ve Durmaz (2020) çalışmalarında çarpımsal integral denklemin, 1. tipte ve 2. tipte çarpımsal Volterra integral denklemlerinin tanımlarını vermişlerdir. Ayrıca Durmaz (2019) çalışmasında çarpımsal lineer integral denklem, çarpımsal homojen olmayan integral denklem, çarpımsal homojen integral denklemin tanımlarını vermiştir. Burada çarpımsal Fredholm integral denklemi ve çarpımsal Volterra-Fredholm integral denklemleri de eklenerek çarpımsal integral denklemlerinin tanımları daha genel bir biçimde verilecektir.

Tanım 4.1: $f(x)$ verilen bir çarpımsal fonksiyon ve $K_1(x, t), K_2(x, t)$ verilen fonksiyonlar, $\varphi(x)$ bilinmeyen bir çarpımsal fonksiyon ve b verilen bir sayı olsun. Aşağıdaki denklemin verildiğini kabul edelim.

$$\left(* \int_0^x \varphi(t)^{K_1(x,t)} dt \right)^{s_1} \cdot \left(* \int_0^b \varphi(t)^{K_2(x,t)} dt \right)^{s_2} = f(x)$$

a) Eğer $s_1 = 1, s_2 = 0$ ise verilen denkleme 1. tipte çarpımsal Volterra integral denklemi (ÇVİD) denir.

b) Eğer $s_1 = 0, s_2 = 1$ ise verilen denkleme 1. tipte çarpımsal Fredholm integral denklemi (ÇFİD) denir.

c) Eğer $s_1 = 1, s_2 = 1$ ise verilen denkleme 1. tipte çarpımsal Volterra-Fredholm integral denklemi (ÇVFİD) denir.

d) $K_1(x, t), K_2(x, t)$ fonksiyonlarına integral denklemin çekirdekleri denir.

Tanım 4.2: $f(x)$ verilen bir çarpımsal fonksiyon ve $K_1(x, t), K_2(x, t)$ verilen fonksiyonlar, $\varphi(x)$ bilinmeyen bir çarpımsal fonksiyon ve b verilen bir sayı olsun. Aşağıdaki denklemin verildiğini kabul edelim.

$$\varphi(x) = f(x) \cdot \left(* \int_0^x \varphi(t)^{K_1(x,t)} dt \right)^{s_1} \cdot \left(* \int_0^b \varphi(t)^{K_2(x,t)} dt \right)^{s_2}$$

a) Eğer $s_1 = 1, s_2 = 0$ ise verilen denkleme 2. tipte çarpımsal Volterra integral denklemi denir.

b) Eğer $s_1 = 0, s_2 = 1$ ise verilen denkleme 2. tipte çarpımsal Fredholm integral denklemi denir.

c) Eğer $s_1 = 1, s_2 = 1$ ise verilen denkleme 2. tipte çarpımsal Volterra-Fredholm integral denklemi denir.

d) $K_1(x, t), K_2(x, t)$ fonksiyonlarına integral denklemin çekirdekleri denir.

Bu çalışmada verilen çarpımsal integral denklemlerdeki $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyonunu

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$$

çarpımsal kuvvet serisi biçiminde bulmak için $f(x)$ 'in çarpımsal Taylor serisi ve $K_1(x, t), K_2(x, t)$ fonksiyonlarının toplamsal (klasik) Taylor serisi kullanılacaktır.

4.1. Çarpımsal Fredholm İntegral Denklemleri (ÇFİD)

4.1.1. Çekirdeği 1'e Eşit Olan ÇFİD'nin Çözümü

Teorem 4.1: Çekirdeği 1'e eşit ve integralinin üst sınırı $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ olan

$$\varphi(x) = f(x) * \int_0^b \varphi(t) dt$$

ÇFİD verilsin. Burada $f(x)$ bir çarpımsal analitik fonksiyon ve çarpımsal kuvvet serisi

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n}$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (A_n)^{x^n}$$

çarpımsal kuvvet serisi çözümü aşağıdaki formüllerle hesaplanan A_n , $n \geq 0$ tabanlarına sahiptir.

$$A_n = C_n, \quad n \geq 1$$

$$A_0 = \left[C_0 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (C_k)^{b^{k+1}/(k+1)} \right]^{\frac{1}{(1-b)}}$$

İspat:

$f(x)$ çarpımsal analitik fonksiyon olduğundan $\ln(f(x))$ bir analitik fonksiyondur.

Yani $\ln(f(x))$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \ln \left(\prod_{n=0}^{\infty} (C_n)^{x^n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \ln((C_n)^{x^n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\ln(C_n) \cdot x^n] \end{aligned}$$

eşittir. Burada $c_n = \ln(C_n)$ tanımlarsak

$$\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

eşitliği vardır. $\varphi(x)$ çarpımsal fonksiyonu

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (A_n)^{x^n}$$

eşit olduğundan $\ln(\varphi(x))$ fonksiyonu

$$\ln(\varphi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eşit olur. Burada $a_n = \ln(A_n)$ 'dir. Şimdi

$$\varphi(x) = f(x) * \int_0^b \varphi(t) dt$$

denkleminin her iki tarafının logaritması alınırsa

$$\ln(\varphi(x)) = \ln(f(x)) + \ln \left[* \int_0^b \varphi(t) dt \right]$$

$$\ln(\varphi(x)) = \ln(f(x)) + \ln \left[\exp \int_0^b \ln(\varphi(t)) dt \right]$$

$$\ln(\varphi(x)) = \ln(f(x)) + \int_0^b \ln(\varphi(t)) dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \int_0^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^b a_k t^k dt \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right)$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \left[c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

Buradan

$$a_n = c_n, n \geq 1$$

ve

$$a_0 = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right)$$

$$a_0 = c_0 + b \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right)$$

$$(1-b) \cdot a_0 = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right)$$

yazılabilir. Böylelikle

$$a_n = c_n, n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{1-b} \left[c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right) \right]$$

elde edilir. Eşitliklerin her iki tarafı e tabanında üste yükseltilirse

$$e^{a_n} = e^{c_n}, n \geq 1$$

$$A_n = C_n, n \geq 1$$

ve

$$\exp(a_0) = \exp \left\{ \frac{1}{1-b} \left[c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right) \right] \right\}$$

$$e^{a_0} = \left\{ \exp \left[c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-b}}$$

$$e^{a_0} = \left\{ e^{c_0} \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-b}}$$

$$e^{a_0} = \left[e^{c_0} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left(\frac{b^{k+1}}{k+1} a_k \right) \right]^{\frac{1}{1-b}}$$

$$e^{a_0} = \left[e^{c_0} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (e^{a_k})^{\frac{b^{k+1}}{k+1}} \right]^{\frac{1}{1-b}}$$

$$A_0 = \left[C_0 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (A_k)^{\frac{b^{k+1}}{k+1}} \right]^{\frac{1}{1-b}}$$

$$A_0 = \left[C_0 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (C_k)^{\frac{b^{k+1}}{k+1}} \right]^{\frac{1}{1-b}}$$

yazılır. Buradan denklemin çarpımsal kuvvet serisi çözümünün tabanları

$$A_n = C_n, \quad n \geq 1$$

$$A_0 = \left[C_0 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (C_k)^{b^{k+1}/(k+1)} \right]^{\frac{1}{(1-b)}}$$

olarak bulunmuş olur. ■

Örnek 4.1: Aşağıdaki ÇFİD verilsin.

$$\varphi(x) = e^{-1+\sin(x)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) dt$$

Bu denklemi çarpımsal kuvvet serisi yöntemiyle çözelim.

Çözüm: Bu denklem çekirdeği 1'e eşit olan bir ÇFİD'dir. Burada $b = \frac{\pi}{2}$ 'dir.

Bilinmeyen fonksiyon $\varphi(x)$ 'in çarpımsal kuvvet serisi

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (A_n)^{x^n}$$

olsun.

$f(x)$ 'in çarpımsal kuvvet serisi

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (C_n)^{x^n}$$

olsun. Verilen $f(x) = e^{-1+\sin(x)}$ fonksiyonunun çarpımsal Taylor serisi açılımı şu biçimdedir:

$$f(x) = e^{-1+\sin(x)}$$

$$f(x) = e^{-1} \cdot e^{\sin(x)}$$

$$f(x) = e^{-1} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} e^{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (C_n)^{x^n} = e^{-1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[\exp \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \right) \right]^{x^{2n-1}}$$

Buradan

$$\begin{cases} C_0 = e^{-1}, \\ C_{2n-1} = \exp \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \right), n \geq 1 \\ C_{2n} = 1, n \geq 1, \end{cases}$$

bulunur. $A_n = C_n, n \geq 1$ eşitliğinden

$$\begin{cases} A_{2n-1} = \exp \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \right), n \geq 1 \\ A_{2n} = 1, n \geq 1, \end{cases}$$

elde edilir. Ayrıca teoremden

$$A_0 = \left\{ C_0 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (C_k)^{\frac{b^{k+1}}{k+1}} \right\}^{\frac{1}{(1-b)}}$$

eşitliği kullanılırsa

$$A_0 = \left\{ e^{-1} \cdot \prod_{\substack{k=2n-1, \\ n \geq 1}} (C_k)^{\frac{b^{k+1}}{k+1}} \cdot \prod_{\substack{k=2n, \\ n \geq 1}} (C_k)^{\frac{b^{k+1}}{k+1}} \right\}^{\frac{1}{(1-b)}}$$

$$A_0 = \left\{ e^{-1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (C_{2n-1})^{\frac{(\frac{\pi}{2})^{2n-1+1}}{(2n-1+1)}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (C_{2n})^{\frac{(\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{2n+1}} \right\}^{\frac{1}{(1-\frac{\pi}{2})}}$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= \left\{ e^{-1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[\exp \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \right)^{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{2n}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1)^{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}} \right]^{\frac{1}{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}} \right\} \\
A_0 &= \left\{ e^{-1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[\exp \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)} \right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1)^{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}} \right]^{\frac{1}{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}} \right\} \\
A_0 &= \left\{ e^{-1} \cdot \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \right) \right] \cdot 1 \right\}^{\frac{1}{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}} \\
A_0 &= \left\{ e^{-1} \cdot \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}} \\
A_0 &= \left\{ e^{-1} \cdot \exp \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}} \\
A_0 &= \left\{ e^{-1} \cdot \exp \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}} \\
A_0 &= \{ e^{-1} \cdot e^1 \}^{\frac{1}{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}} \\
A_0 &= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler çözümde yazılarak

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \prod_{n=0}^{\infty} (A_n)^{x^n} \\
\varphi(x) &= A_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1})^{x^{2n-1}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (A_{2n})^{x^{2n}} \\
\varphi(x) &= 1 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[\exp \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \right) \right]^{x^{2n-1}} \cdot 1 \\
\varphi(x) &= e^{\sin(x)}.
\end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

■

4.1.2. Çekirdeği Sadece x Değişkenine Bağlı Olan ÇFİD'nin Çözümü

Aşağıda çekirdeği sadece x değişkenine bağlı olan ÇFİD'nin çözümü verilecektir.

Teorem 4.2: Aşağıdaki çekirdeği sadece x değişkenine bağlı olan ÇFİD'yi ele alalım.

$$\varphi(x) = f(x) \cdot * \int_0^b \varphi(t)^{K(x)} dt$$

$$\varphi(x) = f(x) \cdot \left[* \int_0^b \varphi(t) dt \right]^{K(x)}$$

Ayrıca verilen $f(x)$ çarpımsal analitik fonksiyonunun çarpımsal kuvvet serisi $f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n}$ ve verilen $K(x)$ analitik fonksiyonunun toplamsal kuvvet serisi $K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$ olsun. Burada $b > 0$ 'dır. Bu durumda

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$$

çarpımsal kuvvet serisi çözümü aşağıdaki formüllerle hesaplanan a_n , $n \geq 0$ tabanlarına sahiptir.

$$a_n = \left[\left(\prod_{j=0}^{\infty} (c_j)^{\left(\frac{b^{j+1}}{j+1}\right)} \right)^{1/\left[1 - \sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1}\right]} \right]^{k_n} \cdot c_n$$

İspat:

$$\varphi(x) = f(x) \cdot * \int_0^b \varphi(t)^{K(x)} dt$$

$$\varphi(x) = f(x) \cdot \left[* \int_0^b \varphi(t) dt \right]^{K(x)}$$

Burada $A = * \int_0^b \varphi(t) dt$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x) \cdot A^{K(x)} \\
\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot A^{K(x)} \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot A^{\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n} \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (A^{k_n})^{x^n}
\end{aligned}$$

ve $b_n = A^{k_n}$ olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (b_n)^{x^n} \\
\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (b_n \cdot c_n)^{x^n} \\
a_n &= (b_n \cdot c_n)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\varphi(t) = \prod_{n=0}^{\infty} (b_n \cdot c_n)^{t^n}$$

bulunur. Şimdi A 'nın değerini bulalım.

$$\begin{aligned}
A &= * \int_0^b \varphi(t) dt \\
A &= * \int_0^b \left[\prod_{n=0}^{\infty} (b_n \cdot c_n)^{t^n} \right] dt \\
A &= \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ * \int_0^b [(b_n \cdot c_n)^{t^n}] dt \right\} \\
A &= \prod_{n=0}^{\infty} (b_n \cdot c_n)^{\int_0^b t^n dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \prod_{n=0}^{\infty} (b_n \cdot c_n)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \\
A &= \prod_{n=0}^{\infty} (A^{k_n} \cdot c_n)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \\
A &= \prod_{n=0}^{\infty} \left[\left((A)^{k_n \cdot \frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \right) \cdot \left((c_n)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \right) \right] \\
A &= \left[\prod_{n=0}^{\infty} (A)^{k_n \cdot \frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \right] \cdot \left[\prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \right] \\
A &= \left[(A)^{\sum_{n=0}^{\infty} k_n \cdot \frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \right] \cdot \left[\prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \right]
\end{aligned}$$

A 'nın kuvvetlerini aynı tarafa alalım:

$$\begin{aligned}
(A)^{1 - \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cdot \frac{b^{n+1}}{(n+1)}} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \\
A &= \left[\prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)}} \right]^{\frac{1}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cdot \frac{b^{n+1}}{(n+1)}}}
\end{aligned}$$

Böylelikle

$$\begin{aligned}
a_n &= b_n \cdot c_n \\
a_n &= A^{k_n} \cdot c_n \\
a_n &= \left[\left(\prod_{j=0}^{\infty} (c_j)^{\left(\frac{b^{j+1}}{j+1} \right)} \right)^{1 / \left[1 - \sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} \right]} \right]^{k_n} \cdot c_n
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.1.3. Çekirdeği Sadece t Değişkenine Bağlı Olan ÇFİD'nin Çözümü

Teorem 4.3: Aşağıdaki çekirdeği sadece t değişkenine bağlı olan ÇFİD'yi ele alalım.

$$\varphi(x) = f(x) \cdot * \int_0^b \varphi(t)^{K(t)} dt$$

Burada verilen $f(x)$ çarpımsal analitik fonksiyonunun çarpımsal kuvvet serisi $f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n}$ ve verilen $K(x)$ analitik fonksiyonunun toplamsal kuvvet serisi $K(x) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j t^j$ olsun. Burada $b > 0$ 'dır. Bu durumda denklemin

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$$

çarpımsal kuvvet serisi çözümü aşağıdaki formüllerle hesaplanan a_n , $n \geq 0$ tabanlarına sahiptir.

$$\begin{cases} a_0 = \left[c_0 \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (c_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{i+j+1}}{i+j+1} \right)} \right]^{\frac{1}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} \right)}}, \\ a_n = c_n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

İspat:

$$\varphi(x) = f(x) \cdot * \int_0^b \varphi(t)^{K(t)} dt$$

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot * \int_0^b \left[\left(\prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{t^i} \right)^{\sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot t^j} \right]^{dt} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot * \int_0^b \left[\prod_{i=0}^{\infty} [(a_i)^{t^i}]^{\sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot t^j} \right]^{dt} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot * \int_0^b \left[\prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{t^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot t^j} \right]^{dt} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\int_0^b t^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot t^j dt} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\int_0^b (\sum_{j=0}^{\infty} k_j \cdot t^{i+j}) dt} \end{aligned}$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} = \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_0^b k_j \cdot t^{i+j} dt \right)}$$

ve

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right)_{t=0}^b} \\ \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{i+j+1}}{i+j+1} \right)} \\ a_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \left[c_0 \cdot \left(\prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{i+j+1}}{i+j+1} \right)} \right) \right] \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (c_n)^{x^n} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$a_n = c_n, \quad n \geq 1$$

ve

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{i+j+1}}{i+j+1} \right)} \\ a_0 &= c_0 \cdot (a_0)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} \right)} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (a_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{i+j+1}}{i+j+1} \right)} \\ (a_0)^{1 - \sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} \right)} &= \left[c_0 \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (a_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{i+j+1}}{i+j+1} \right)} \right] \\ a_0 &= \left[c_0 \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (a_i)^{\sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{i+j+1}}{i+j+1} \right)} \right]^{\frac{1}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} \left(k_j \cdot \frac{b^{j+1}}{j+1} \right)}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Örnek 4.2: Aşağıdaki ÇFİD verilsin.

$$\varphi(x) = e^{x-\frac{b^2}{2}} \cdot \int_0^b \varphi(t) dt, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Bu denklemi çarpımsal kuvvet serisi yöntemiyle çözelim.

Çözüm: Bu denklem çekirdeği 1'e eşit olan bir ÇFİD'dir. Bilinmeyen fonksiyon

$\varphi(x)$ 'in çarpımsal kuvvet serisi $\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$ olsun. Verilen $f(x) = e^{x-\frac{b^2}{2}}$ fonksiyonunun çarpımsal Taylor serisi açılımı şu biçimdedir:

$$e^{x-\frac{b^2}{2}} = e^{-\frac{b^2}{2}} \cdot e^x = e^{-\frac{b^2}{2}} \cdot e^x \cdot 1^{x^2} \cdot \dots \cdot 1^{x^n} \cdot \dots$$

$$e^{x-\frac{b^2}{2}} = \left(e^{-\frac{b^2}{2}}\right)^1 \cdot e^x \cdot \prod_{n=2}^{\infty} 1^{x^n}$$

Şimdi çözüm adımlarına bakalım.

$$\varphi(x) = e^{x-\frac{b^2}{2}} \cdot \int_0^b \varphi(t) dt$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} = \left(e^{-\frac{b^2}{2}}\right)^1 \cdot e^x \cdot \prod_{n=2}^{\infty} 1^{x^n} \cdot \int_0^b \left[\prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{t^k} \right] dt$$

İşlemleri devam ettirerek

$$\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} = \left(e^{-\frac{b^2}{2}}\right)^1 \cdot e^x \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \int_0^b \left[(a_k)^{t^k} \right] dt$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} = \left(e^{-\frac{b^2}{2}}\right)^1 \cdot e^x \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{t=0}^b}$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} = \left(e^{-\frac{b^2}{2}}\right)^1 \cdot e^x \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\left[\frac{b^{k+1}}{k+1} \right]}$$

yazılabilir.

$$a_0 \cdot a_1^x \cdot \prod_{n=2}^{\infty} (a_n)^{x^n} = \left\{ \left(e^{-\frac{b^2}{2}}\right) \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\left[\frac{b^{k+1}}{k+1} \right]} \right\}^1 \cdot e^x$$

Böylece $a_1 = e$, $a_n = 1$, $n \geq 2$ olduğu görülür. a_0 ise

$$a_0 = \left(e^{-\frac{b^2}{2}} \right) \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\left[\frac{b^{k+1}}{k+1} \right]}$$

$$a_0 = e^{-\frac{b^2}{2}} \cdot (a_0)^b \cdot (a_1)^{\frac{b^2}{2}} \cdot 1$$

$$a_0 = e^{-\frac{b^2}{2}} \cdot (a_0)^b \cdot e^{\frac{b^2}{2}}$$

$$(a_0)^{1-b} = 1$$

$$a_0 = 1.$$

olarak bulunur. Buradan

$$a_0 = 1, a_1 = e$$

$$a_n = 1, n \geq 2$$

elde edilir. Böylelikle çözüm

$$\varphi(x) = 1^1 \cdot e^x \cdot \prod_{n=2}^{\infty} 1^{x^n}$$

$$\varphi(x) = e^x.$$

olarak bulunur.

4.2. Çarpımsal Volterra İntegral Denklemi (ÇVİD)

Teorem 4.4: Aşağıdaki ÇVİD ele alalım.

$$\varphi(x) = f(x) \cdot * \int_0^x \varphi(t)^{K(x,t)} dt$$

Burada verilen $f(x)$ çarpımsal analitik fonksiyonunun çarpımsal kuvvet serisi $f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n}$ olsun. Ayrıca analitik bir fonksiyon olarak verilen $K(x, t)$ çekirdeğinin toplamsal kuvvet serisi $K(x, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (k_{i,j} x^i t^j)$ olsun. Bu durumda denklemin

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$$

çarpımsal kuvvet serisi çözümü aşağıdaki formüllerle hesaplanan a_n , $n \geq 0$ tabanlarına sahiptir.

$$\begin{cases} a_0 = c_0, \\ a_n = c_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (a_i)^{\sum_{j=0}^{n-1-i} \frac{k_{n-1-i-j,j}}{i+j+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

İspat:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) \cdot * \int_0^x \varphi(t)^{K(x,t)} dt \\ \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot * \int_0^x \left[\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{t^n} \right]^{\sum_{i,j=0}^{\infty} (k_{i,j} x^i t^j)} dt \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot * \int_0^x \left[\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{t^n \sum_{i,j=0}^{\infty} (k_{i,j} x^i t^j)} \right] dt \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \left[* \int_0^x (a_n)^{t^n \sum_{i,j=0}^{\infty} (k_{i,j} x^i t^j)} dt \right] \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\int_0^x \left[\sum_{i,j=0}^{\infty} (k_{i,j} \cdot x^i \cdot t^n \cdot t^j) \right] dt} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\sum_{i,j=0}^{\infty} \left[k_{i,j} \cdot x^i \cdot \left(\int_0^x t^{n+j} dt \right) \right]} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\sum_{i,j=0}^{\infty} \left[k_{i,j} \cdot x^i \cdot \left(\frac{t^{n+j+1}}{n+j+1} \right) \Big|_{t=0}^x \right]} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\sum_{i,j=0}^{\infty} \left(k_{i,j} \cdot x^i \cdot \frac{x^{n+j+1}}{n+j+1} \right)} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\sum_{i,j=0}^{\infty} \left(\frac{k_{i,j}}{n+j+1} \cdot x^{n+i+j+1} \right)} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k_{i,j}}{n+j+1} \cdot x^{n+i+j+1} \right)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Teorem (3.7)'nin toplam sembolü için benzeri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left(\frac{k_{i-j,j}}{n+j+1} \cdot x^{n+i+1} \right)} \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{j=0}^i \frac{k_{i-j,j}}{n+j+1} \right) \cdot x^{n+i+1} \right]} \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{\infty} \left[(a_n)^{\left(\sum_{j=0}^i \frac{k_{i-j,j}}{n+j+1} \right) \cdot x^{n+i+1}} \right].
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$u(n, i) = \sum_{j=0}^i \frac{k_{i-j,j}}{n+j+1}$$

olarak tanımlarsak

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{\infty} \left[(a_n)^{u(n,i) \cdot x^{n+i+1}} \right] \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^n (a_{n-i})^{u(n-i,i) \cdot x^{n+1}} \right] \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^n (a_{n-i})^{u(n-i,i)} \right]^{x^{n+1}} \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^n (a_i)^{u(i,n-i)} \right]^{x^{n+1}} \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{n-1} (a_i)^{u(i,n-i-1)} \right]^{x^n}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$a_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_n)^{x^n} = c_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{n-1} (a_i)^{u(i,n-i-1)} \right]^{x^n}$$

eşit olduğu görülür ve böylelikle

$$a_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_n)^{x^n} = c_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (a_i)^{u(i,n-i-1)} \right]^{x^n}$$

elde edilir. Devamında tabanlar için

$$a_0 = c_0,$$

$$a_n = c_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (a_i)^{u(i,n-i-1)}, \quad n \geq 1$$

eşitlikleri bulunur.

$$u(i, n-i-1) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \left(\frac{k_{n-i-1-j,j}}{i+j+1} \right)$$

değeri a_n 'de yerine yazılırsa

$$a_n = c_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (a_i)^{\left(\sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{k_{n-i-1-j,j}}{i+j+1} \right)}, \quad n \geq 1.$$

formülü elde edilir. Böylelikle $\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$ çözümünün tabanları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{cases} a_0 = c_0, \\ a_n = c_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (a_i)^{\sum_{j=0}^{n-1-i} \frac{k_{n-1-i-j,j}}{i+j+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

■

Örnek 4.3: Aşağıdaki ÇVİD

$$\varphi(x) = e^{-x^2-x+3} \cdot \int_0^x \varphi(t) dt$$

verilsin. Bu denklemi çarpımsal kuvvet serisi yöntemini (ÇKS) kullanarak çözelim.

Çözüm: Bilinmeyen fonksiyon $\varphi(x)$ 'in çarpımsal kuvvet serisi $\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$ olsun. Şimdi denklemin iki tarafının kuvvet serisi açılımını yapalım.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^3 \cdot (e^{-1})^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \int_0^x \varphi(t) dt \\ \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= e^3 \cdot (e^{-1})^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \int_0^x \left[\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{t^n} \right] dt \\ &= e^3 \cdot (e^{-1})^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \int_0^x [(a_n)^{t^n}] dt \\ &= e^3 \cdot (e^{-1})^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\frac{x^{n+1}}{n+1}} \\ &= e^3 \cdot (e^{-1})^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_{n-1})^{\frac{x^n}{n}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2^{x^2} \cdot \prod_{n=3}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= e^3 \cdot (e^{-1})^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot a_0^x \cdot a_1^{\frac{x^2}{2}} \cdot \prod_{n=3}^{\infty} (a_{n-1})^{\frac{x^n}{n}} \\ a_0 \cdot a_1^x \cdot a_2^{x^2} \cdot \prod_{n=3}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= e^3 \cdot (e^{-1} \cdot a_0)^x \cdot (e^{-1} \cdot a_1^{1/2})^{x^2} \cdot \prod_{n=3}^{\infty} (a_{n-1})^{\frac{x^n}{n}} \end{aligned}$$

eşit olduğu görülür. ÇKS'nin tabanları için

$$\begin{cases} a_0 = e^3, \\ a_2 = e^{-1} \cdot a_1^{1/2}, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = e^{-1} \cdot a_0, \\ a_n = (a_{n-1})^{1/n}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

yazılabilir. Böylelikle ÇKS'nin tabanları

$$a_0 = e^3; a_1 = e^2; (a_n) = 1, n \geq 2$$

olduğu görülür. Verilen denklemin çözümü

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$$

$$\varphi(x) = a_0 \cdot (a_1)^x \cdot \prod_{n=2}^{\infty} 1^{x^n}$$

$$\varphi(x) = e^{2x+3}.$$

olarak bulunur.

4.3. Çarpımsal Volterra-Fredholm İntegral Denklemleri (ÇVFİD)

4.3.1. Çekirdekleri $K_1(x,t)=K_2(x,t)=1$ olan ÇVFİD'nin Çözümü

Teorem 4.5: Aşağıdaki ÇVFİD verilsin.

$$\varphi(x) = f(x) \cdot \int_0^x \varphi(t) dt \cdot \int_0^b \varphi(t) dt.$$

Burada $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\ln 2\}$. Ayrıca verilen çarpımsal analitik $f(x)$ fonksiyonunun çarpımsal kuvvet serisi

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n}$$

olsun. Bu durumda denklemin çarpımsal kuvvet serisi çözümü

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$$

aşağıda formülleri verilen a_n , $n \geq 0$ tabanlarına sahiptir.

$$a_0 = \left\{ c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \right\}^{\frac{1}{(2-e^b)}}$$

$$a_1 = c_1 \cdot a_0,$$

$$a_n = c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \cdot (a_0)^{\frac{1}{n!}}, \quad n \geq 2$$

İspat: $\varphi(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının çarpımsal kuvvet serileri sırasıyla

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n},$$

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n}$$

biçiminde olsun. Teoremdeki denklemin her iki tarafının kuvvet serisi açılımını kullanalım.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) \cdot \left(* \int_0^x \varphi(t) dt \right) \cdot \left(* \int_0^b \varphi(t) dt \right) \\ \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \cdot \left[* \int_0^x \left(\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{t^n} \right) dt \right] \cdot \left[* \int_0^b \left(\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{t^n} \right) dt \right] \\ \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \left[\prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \right] \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \left[* \int_0^x ([a_n]^{t^n}) dt \right] \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \left[* \int_0^b ([a_n]^{t^n}) dt \right] \\ &= \left[\prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \right] \cdot \left[\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\frac{x^{n+1}}{n+1}} \right] \cdot \left[\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \right] \\ &= \left[\prod_{n=0}^{\infty} (c_n)^{x^n} \right] \cdot \left[\prod_{n=1}^{\infty} (a_{n-1})^{\frac{x^n}{n}} \right] \cdot \left[\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \right] \end{aligned}$$

$$a_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_n)^{x^n} = \left\{ c_0 \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \right\} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cdot (a_{n-1})^{\frac{1}{n}} \right]^{x^n}$$

Böylelikle

$$a_0 = c_0 \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \quad \text{ve} \quad a_n = c_n \cdot (a_{n-1})^{\frac{1}{n}}, \quad n \geq 1$$

eşittir. Buradan

$$a_0 = c_0 \cdot (a_0)^b \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\frac{b^{n+1}}{n+1}}$$

$$(a_0)^{1-b} = c_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\frac{b^{n+1}}{n+1}}$$

yazılabilir. Öncelikle a_n 'i a_0 cinsinden yazalım.

$$a_n = c_n \cdot (a_{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

$$a_1 = c_1 \cdot a_0$$

$$a_2 = c_2 \cdot (a_1)^{\frac{1}{2}} = c_2 \cdot (c_1 \cdot a_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_2 = c_2 \cdot (c_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (a_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_3 = c_3 \cdot (c_2)^{\frac{1}{3}} \cdot (c_1)^{\frac{1}{2 \cdot 3}} \cdot (a_0)^{\frac{1}{3!}}$$

$$a_4 = c_4 \cdot (c_3)^{\frac{1}{4}} \cdot (c_2)^{\frac{1}{3 \cdot 4}} \cdot (c_1)^{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}} \cdot (a_0)^{\frac{1}{4!}}$$

$$\vdots$$

Bu devam ettirilerek

$$a_1 = c_1 \cdot a_0$$

$$a_n = c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \cdot (a_0)^{\frac{1}{n!}}, \quad n \geq 2$$

elde edilir. Şimdi a_0 'ı bulalım.

$$\begin{aligned}
(a_0)^{1-b} &= c_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \\
&= \left(c_0 \cdot (a_1)^{\frac{b^2}{2}} \right) \cdot \prod_{n=2}^{\infty} (a_n)^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \\
&= \left(c_0 \cdot (c_1 \cdot a_0)^{\frac{b^2}{2}} \right) \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \cdot (a_0)^{\frac{1}{n!}} \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \\
&= \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \cdot (a_0)^{\frac{b^2}{2}} \\
&\quad \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[(a_0)^{\frac{1}{n!}} \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \\
&= \left(a_0^{\frac{b^2}{2}} \cdot \prod_{n=2}^{\infty} (a_0)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}} \right) \cdot \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \\
&\quad \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} (a_0)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}} \cdot \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} (a_0)^{\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}} \cdot \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \\
&= (a_0)^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}} \cdot \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \\
&= (a_0)^{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{n!}} \cdot \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. a_0 'lar aynı tarafa toplanır.

$$(a_0)^{1-b-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{n!}} = \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}}$$

$$(a_0)^{1-b-(e^b-1-b)} = \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}}$$

$$a_0^{2-e^b} = \left[c_0 \cdot (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \right] \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}}$$

ve son olarak

$$a_0 = \left\{ c_0 (c_1)^{\frac{b^2}{2}} \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left[c_n \left(\prod_{k=1}^{n-1} (c_k)^{\frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}} \right) \right]^{\frac{b^{n+1}}{n+1}} \right\}^{\frac{1}{(2-e^b)}}$$

elde edilir.

4.3.2. Çekirdekleri $K_1(x,t)=K(x,t)$, $K_2(x,t)=1$ olan ÇVFİD'nin Çözümü

Teorem 4.6: Aşağıdaki çarpımsal Volterra Fredholm integral denklemini ele alalım.

$$\varphi(x) = f(x) \cdot * \int_0^x \varphi(t)^{K(x,t)} dt \cdot * \int_0^b \varphi(t) dt.$$

Burada $b \in \mathbb{R}^+$ olarak alınacaktır. Aşağıdaki kabulleri yapalım.

a) Verilen çarpımsal analitik $f(x)$ fonksiyonunun çarpımsal kuvvet serisi açılımı

$f(x) = \prod_{i=0}^{\infty} (c_i)^{x^i}$ olsun. Analitik olan $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonunun kuvvet serisi açılımı

$K(x, t) = \sum_{n,j=0}^{\infty} (k_{n,j} x^n t^j)$ olsun.

b)

$$u(i, n) = \sum_{j=0}^n \binom{k_{n-j,j}}{i+j+1}$$

olarak tanımlansın.

c) Elemanları aşağıda verilen $B = (b_{ij})_{(N+1) \times (N+1)}$ ve $L = (l_{ij})_{(N+1) \times (N+1)}$ matrisleri tanımlansın. $0 \leq i, j \leq N$ için

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{b^{j+1}}{j+1}, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases}$$

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i \leq j, \\ u(j, i - j - 1), & i > j. \end{cases}$$

d) $V_{(N+1) \times (N+1)}$ matrisi $V = I - B - L$ olarak tanımlansın. Burada $I_{(N+1) \times (N+1)}$ birim matristir.

e) C vektörü

$$C = \begin{bmatrix} \ln c_0 \\ \vdots \\ \ln c_i \\ \vdots \\ \ln c_N \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın.

Bu kabuller altında eğer $\det(V) \neq 0$ ise

$$a_i = \exp\{(V^{-1}C)_i\}, 0 \leq i \leq N$$

olmak üzere

$$\tilde{\varphi}(x) = \prod_{i=0}^N (a_i)^{x^i}$$

verilen denklemin $\varphi(x)$ çözümünün N . dereceden bir yaklaşımıdır.

İspat:

Bilinmeyen fonksiyon $\varphi(x)$ 'in çarpımsal kuvvet serisi

$$\varphi(x) = \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{x^i},$$

biçiminde olsun.

$\varphi(x)$ fonksiyonunun N . dereceden bir yaklaşımı $\tilde{\varphi}(x)$ aşağıdaki gibi verilsin.

$$\varphi(x) \cong \tilde{\varphi}(x) = \prod_{i=0}^N (a_i)^{x^i}.$$

Verilen $f(x)$ fonksiyonunun N . dereceden yaklaşımı aşağıdadır.

$$f(x) = \prod_{i=0}^{\infty} (c_i)^{x^i}$$

$$f(x) \cong \prod_{i=0}^N (c_i)^{x^i}.$$

Verilen denklemdeki

$$* \int_0^b \varphi(t) dt$$

çarpımsal integralinin bir yaklaşımını bulalım.

$$\begin{aligned} * \int_0^b \varphi(t) dt &\cong * \int_0^b \tilde{\varphi}(t) dt \\ &= * \int_0^b \left[\prod_{i=0}^N (a_i)^{t^i} \right] dt \\ &= \prod_{i=0}^N * \int_0^b [(a_i)^{t^i}] dt \\ &= \prod_{i=0}^N (a_i)^{\int_0^b t^i dt} \\ &= \prod_{i=0}^N (a_i)^{\frac{b^{i+1}}{i+1}} \end{aligned}$$

$$* \int_0^b \varphi(t) dt \cong \prod_{i=0}^N (a_i)^{\frac{b^{i+1}}{i+1}}.$$

Şimdi denklemdeki Volterra çarpımsal integralinin N . dereceden bir yaklaşımını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
* \int_0^x \varphi(t)^{K(x,t)} dt &= * \int_0^x \left\{ \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{t^i} \right\}^{\sum_{n,j=0}^{\infty} [k_{n,j} \cdot x^n t^j]} dt \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} \left\{ * \int_0^x (a_i)^{t^i \sum_{n,j=0}^{\infty} [k_{n,j} \cdot x^n t^j]} dt \right\} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} \left\{ * \int_0^x (a_i)^{\sum_{n,j=0}^{\infty} [k_{n,j} \cdot x^n t^{i+j}]} dt \right\} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\int_0^x \sum_{n,j=0}^{\infty} [k_{n,j} \cdot x^n t^{i+j}] dt} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{n,j=0}^{\infty} [k_{n,j} \cdot x^n \left(\int_0^x t^{i+j} dt \right)]} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{n,j=0}^{\infty} \left[k_{n,j} \cdot x^n \cdot \left(\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right)_{t=0}^x \right]} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{n,j=0}^{\infty} \left[k_{n,j} \cdot x^n \cdot \frac{x^{i+j+1}}{i+j+1} \right]} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{n,j=0}^{\infty} \left(k_{n,j} \cdot \frac{x^{i+n+j+1}}{i+j+1} \right)} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(k_{n,j} \cdot \frac{x^{i+n+j+1}}{i+j+1} \right)} \\
&= \prod_{i=0}^{\infty} (a_i)^{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left(k_{n-j,j} \cdot \frac{x^{i+n+1}}{i+j+1} \right)} \\
* \int_0^x \varphi(t)^{K(x,t)} dt &= \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} \left[(a_i)^{\sum_{j=0}^n \left(\frac{k_{n-j,j}}{i+j+1} \right)} \right]^{x^{i+n+1}}
\end{aligned}$$

Bu aşamada

$$u(i, n) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{k_{n-j,j}}{i+j+1} \right)$$

olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned} * \int_0^x \varphi(t)^{K(x,t)} dt &= \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} [a_i^{u(i,n)}]^{x^{i+n+1}} \\ &= \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{n=0}^i [a_{i-n}^{u(i-n,n)}]^{x^{i+1}} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{n=0}^{i-1} [a_{i-1-n}^{u(i-1-n,n)}]^{x^i} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{n=0}^{i-1} [a_{i-1-n}^{u(i-1-n,n)}] \right)^{x^i} \\ * \int_0^x \varphi(t)^{K(x,t)} dt &\cong \prod_{i=1}^N \left(\prod_{n=0}^{i-1} [a_{i-1-n}^{u(i-1-n,n)}] \right)^{x^i} \end{aligned}$$

Şimdi bu yaklaşımları

$$\varphi(x) = f(x) \cdot \left[* \int_0^x \varphi(t)^{K(x,t)} dt \right] \cdot \left[* \int_0^b \varphi(t) dt \right]$$

çarpımsal integral denkleminde kullanalım.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \prod_{i=0}^N (c_i)^{x^i} \cdot \prod_{i=1}^N \left(\prod_{n=0}^{i-1} [a_{i-1-n}^{u(i-1-n,n)}] \right)^{x^i} \cdot \prod_{i=0}^N (a_i)^{\frac{b^{i+1}}{i+1}} \\ \prod_{i=0}^N (a_i)^{x^i} &= \prod_{i=0}^N (c_i)^{x^i} \cdot \prod_{i=1}^N \left(\prod_{n=0}^{i-1} [a_{i-1-n}^{u(i-1-n,n)}] \right)^{x^i} \cdot \prod_{i=0}^N (a_i)^{\frac{b^{i+1}}{i+1}} \\ a_0 \cdot \prod_{i=1}^N (a_i)^{x^i} &= \left[c_0 \cdot \prod_{i=0}^N (a_i)^{\frac{b^{i+1}}{i+1}} \right] \cdot \prod_{i=1}^N \left(c_i \cdot \prod_{n=0}^{i-1} [a_{i-1-n}^{u(i-1-n,n)}] \right)^{x^i} \end{aligned}$$

Böylelikle

$$a_0 = c_0 \cdot \prod_{i=0}^N (a_i)^{\frac{b^{i+1}}{i+1}}$$

$$a_i = c_i \cdot \prod_{n=0}^{i-1} [a_{i-1-n}^{u(i-1-n,n)}], \quad 1 \leq i \leq N.$$

olduğu görülür. İkinci denklemdeki çarpımda farklı bir indeks $j = i - 1 - n$ kullanılırsa

$$a_i = c_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} [a_j^{u(j,i-1-j)}], \quad 1 \leq i \leq N.$$

yazılır. Denklemlerdeki bilinmeyenleri sol tarafa toplarsak

$$\begin{cases} a_0^{1-b} \cdot \prod_{j=1}^N (a_j)^{\frac{-b^{j+1}}{j+1}} = c_0 \\ \left(\prod_{j=0}^{i-1} [a_j^{u(j,i-1-j)}] \right)^{-1} \cdot a_i = c_i, 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Her bir denklemin her iki tarafının logaritması alınarak

$$\begin{cases} (1-b) \ln a_0 - \sum_{j=1}^N \left(\frac{b^{j+1}}{j+1} \right) \ln a_j = \ln c_0 \\ - \sum_{j=0}^{i-1} u(j, i-1-j) \ln a_j + \ln a_i = \ln c_i, 1 \leq i \leq N \end{cases}$$

yazılır. Teoremde olduğu gibi $I_{(N+1) \times (N+1)}$ birim matris ve elemanları sırasıyla

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{b^{j+1}}{j+1}, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases}$$

$$l_{ij} = \begin{cases} 0, & i \leq j, \\ u(j, i - 1 - j), & i > j, \end{cases}$$

olan $B = (b_{ij})_{(N+1) \times (N+1)}$ ve $L = (l_{ij})_{(N+1) \times (N+1)}$ matrisleri için $V = I - B - L$ matrisini tanımlayalım. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} \ln a_0 \\ \vdots \\ \ln a_i \\ \vdots \\ \ln a_N \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \ln c_0 \\ \vdots \\ \ln c_i \\ \vdots \\ \ln c_N \end{bmatrix}$$

vektörleri için denklem sisteminin matris formu aşağıdaki gibi olur.

$$VA = C$$

Bu matris denklemin çözümü $\det(V) \neq 0$ ise

$$A = V^{-1}C.$$

Buradan $\tilde{\varphi}(x) = \prod_{i=0}^N (a_i)^{x^i}$ yaklaşık çarpımsal kuvvet serisi çözümünün tabanları

$$\ln a_i = (V^{-1}C)_i, \quad 0 \leq i \leq N$$

eşitliğinden

$$a_i = \exp\{(V^{-1}C)_i\}, 0 \leq i \leq N$$

olarak bulunur.

Örnek 4.4: Aşağıdaki ÇVFİD ele alalım.

$$\varphi(x) = e^{-x^2+2x-\frac{1}{4}} \cdot \int_0^x \varphi(t) dt \cdot \int_0^{1/2} \varphi(t) dt$$

Bu denklemi ÇKSY kullanarak çözelim.

Çözüm. Bilinmeyen fonksiyon $\varphi(x)$ 'in çarpımsal kuvvet serisi $\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n}$ olsun. Verilen $f(x) = e^{-x^2+2x-\frac{1}{4}}$ fonksiyonunun çarpımsal Taylor serisi

$$e^{-x^2+2x-\frac{1}{4}} = e^{\frac{-1}{4}} \cdot (e^2)^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{k=3}^{\infty} 1^{x^k}$$

biçimindedir. İlk olarak denklemin iki tarafında bulunan fonksiyonlara karşılık gelen çarpımsal kuvvet serilerini yazalım.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{-x^2+2x-\frac{1}{4}} \cdot \int_0^x \varphi(t) dt \cdot \int_0^{1/2} \varphi(t) dt \\ \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= e^{\frac{-1}{4}} \cdot (e^2)^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \int_0^x \left(\prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{t^n} \right) dt \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{t^k} \right) dt \\ &= e^{\frac{-1}{4}} \cdot (e^2)^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \int_0^x [(a_n)^{t^n}] dt \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} [(a_k)^{t^k}] dt \\ &= e^{\frac{-1}{4}} \cdot (e^2)^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\int_0^x t^n dt} \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\int_0^{\frac{1}{2}} t^k dt} \\ &= e^{\frac{-1}{4}} \cdot (e^2)^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^x} \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{t=0}^{\frac{1}{2}}} \\ &= e^{\frac{-1}{4}} \cdot (e^2)^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{\frac{x^{n+1}}{n+1}} \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1}} \\ &= \left[e^{\frac{-1}{4}} \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1}} \right] \cdot (e^2)^x \cdot (e^{-1})^{x^2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[(a_{n-1})^{\frac{1}{n}} \right]^{x^n} \\ \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} &= \left[e^{\frac{-1}{4}} \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1}} \right] \cdot (e^2 \cdot a_0)^x \cdot (e^{-1} \cdot a_1^{1/2})^{x^2} \\ &\quad \cdot \prod_{n=3}^{\infty} \left[(a_{n-1})^{\frac{1}{n}} \right]^{x^n} \end{aligned}$$

Böylelikle

$$a_0 = e^{\frac{-1}{4}} \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1}}$$

$$a_1 = e^2 \cdot a_0$$

$$a_2 = e^{-1} \cdot a_1^{1/2}$$

$$a_2 = (a_0)^{1/2}$$

$$a_n = (a_{n-1})^{1/n}, \quad n \geq 3$$

olduğu görülür. İkinci olarak a_n , $n \geq 2$ değerini a_0 cinsinden yazalım.

$$a_3 = (a_2)^{1/3} \Rightarrow a_3 = (a_0^{1/2})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a_3 = (a_0)^{\frac{1}{3!}}$$

$$a_4 = (a_3)^{1/4} \Rightarrow a_4 = (a_0^{1/3!})^{\frac{1}{4}} \Rightarrow a_4 = (a_0)^{\frac{1}{4!}}$$

$$\vdots$$

$$a_n = (a_0)^{1/n!}, \quad n \geq 2.$$

Sonrasında a_0 'ın değerini hesaplayalım.

$$a_0 = e^{\frac{-1}{4}} \cdot \prod_{k=0}^{\infty} (a_k)^{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1}}$$

$$a_0 = e^{\frac{-1}{4}} \cdot (a_0)^{\frac{1}{2}} \cdot (a_1)^{\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}} \cdot \prod_{k=2}^{\infty} (a_k)^{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1}}$$

$$a_0 = e^{\frac{-1}{4}} \cdot (a_0)^{\frac{1}{2}} \cdot (e^2 \cdot a_0)^{\frac{1}{8}} \cdot \prod_{k=2}^{\infty} \left(a_0^{\frac{1}{k!}} \right)^{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1}}$$

ve

$$a_0 = (a_0)^{\frac{5}{8}} \cdot \prod_{k=2}^{\infty} (a_0)^{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{(k+1)!}}$$

$$a_0 = (a_0)^{\frac{5}{8}} \cdot \prod_{k=3}^{\infty} (a_0)^{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{(k)!}}$$

$$a_0 = (a_0)^{\frac{5}{8}} \cdot (a_0)^{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{(k)!}}$$

$$a_0 = (a_0)^{\frac{5}{8}} \cdot (a_0)^{\left(\frac{-13}{8} + e^{\frac{1}{2}}\right)}$$

yazılır. Buradan

$$a_0^{\left(1 - \frac{5}{8} + \frac{13}{8} - e^{1/2}\right)} = 1$$

$$(a_0)^{2 - e^{1/2}} = 1$$

$$a_0 = 1$$

olarak elde edilir. Çarpımsal kuvvet serisi çözümünün tabanları aşağıdaki gibidir.

$$a_n = \begin{cases} e^2, & n = 1 \\ 1, & n \neq 1 \end{cases}$$

Denklemin çözümü

$$\varphi(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (a_n)^{x^n} = 1^1 \cdot (e^2)^x \cdot \prod_{n=2}^{\infty} 1^{x^n}$$

$$\varphi(x) = e^{2x}.$$

olarak bulunur.

5. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında çarpımsal analizin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Ayrıca çarpımsal dizi, sonlu çarpım ve çarpımsal seriler tanımlanmış ve bunlarla ilgili temel kurallar verilmiştir. Sonrasında çarpımsal kuvvet serileri ve çarpımsal Taylor serilerinden bahsedilmiştir. Tezin asıl konusu ise çarpımsal integral denklemler ve onların kuvvet serileri ile çözülmesidir. Dördüncü bölümde, birinci ve ikinci tipte çarpımsal integral denklemler verilmiştir. Bu iki tip için Fredholm, Volterra ve Volterra-Fredholm çarpımsal integrallerini içeren çarpımsal integral denklemler tanımlanmıştır. Son olarak ikinci tipte çarpımsal integral denklemler için çözüm yöntemleri araştırılmış ve çarpımsal kuvvet serisi yöntemiyle çözümleri incelenmiştir. Tezin çalışmasını oluşturan çarpımsal integral denklemlerin çarpımsal kuvvet serisi çözümleri (Bal, Yalçın ve Dedetürk, 2022) makalesinde yayımlanmıştır.

KAYNAKÇA

- Aniszewska, D. (2007). Multiplicative Runge-Kutta method. *Nonlinear Dynamics*, 50, 265-272.
- Bal A., Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2022). Solutions of multiplicative integral equations via the multiplicative power series method. *Politeknik Dergisi*, 1-1.
- Bal, A., Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2022). On solutions of integral equations in geometric analysis. 6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 20-22 Mayıs 2022, Ordu, Türkiye, s. 111-123.
- Bashirov, A. E., Kurpınar, E. M. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337(1), 36-48.
- Bashirov, A. E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. ve Özyapıcı, A. (2011). On modeling with multiplicative differential equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 26(4), 425-438.
- Brunner, H. (2017). *Volterra integral equations: an introduction to theory and applications (Cambridge monographs on applied and computational mathematics)*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/9781316162491.
- Campbell, D. (1999). Multiplicative calculus and student projects. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 327-332.
- Córdova-Lepe, F. (2006). The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics. *TEMAT-Theaeteto Atheniensi Mathematica*, 2(3).
- Cordova-Lepe, F., Robledo, G. ve Cabrera-Villegas, J. (2015). Population growth modeling with boom and bust patterns: the impulsive differential equation formalism. *Journal of Biological Systems*, 23(supp01), 135-149.
- Çakmak, A. F., ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1), 1-17.
- Delves, L. M. ve Mohamed, J. L. (1988). Computational methods for integral equations. *CUP Archive*.
- Durmaz, H. (2019). *Çarpımsal integral denklemler ve çarpımsal integral denklemlerin çarpımsal diferansiyel denklemler ile arasındaki ilişkisi. Yüksek lisans tezi, Gümüşhane Üniversitesi, Gümüşhane, (571956)*.
- Duyar, C. ve Erdogan, M. (2016). On non-Newtonian real number series. *IOSR Journal of Mathematics*, 12(6), 34-48.

- Duyar, B. S. ve Erdogan, F. (2020). On non-Newtonian power series and its applications. *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), 294-303.
- Filip, D. ve Piatecki, C. (2014). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth. hal-00945781f.
- Florack, L. ve van Assen, H. (2012). Multiplicative calculus in biomedical image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42(1), 64-75.
- Fredholm, I. (1903). Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, 27, 365-390.
- Goktas, S., Yilmaz, E. ve Yar, A. C. (2022). Multiplicative derivative and its basic properties on time scales. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(4), 2097-2109.
- Göktaş, S., Kemaloğlu, H. ve Yilmaz, E. (2022). Multiplicative conformable fractional Dirac system. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(3), 973-990.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*. Lee Press, Pigeon Cove, MA
- Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 10(4), 525-528.
- Gulsen, T., Yilmaz, E. ve Goktas, S. (2022). Multiplicative Dirac system. *Kuwait Journal of Science*, 49(3).
- Güngör, N. ve Durmaz, H. (2020). Multiplicative Volterra integral equations and the relationship between multiplicative differential equations. *Ikonion Journal of Mathematics*, 2(2), 9-25.
- Gürefe, Y. (2009). *Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.*
- Kadak, U. ve Özlük, M. (2015). Generalized Runge-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus. *Abstract and Applied Analysis*, 2015.
- Kasprzak, W., Lysik, B. ve Rybaczuk, M. (2004). Measurements, dimensions, invariant models and fractals. *Ukrainian Society on Fracture Mechanics*, SPOLOM, Wrocław-Lviv, Poland.
- Krasnov, M. L., Kiselev, A. V., Makarenko, G. I. ve Yankovsky, G. (1971). *Problems and exercises in integral equations*.
- Lovitt, W.V. (1950). *Linear integral equations*. New York: Dover Publications Inc.
- Misirli, E. ve Ozyapici, A. (2009). Exponential approximations on multiplicative calculus. *In Proc. Jangjeon Math. Soc.* 12(2), 227-236.
- Misirli, E. ve Güreffe, Y. (2011). Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods. *Numerical Algorithms*, 57(4), 425-439.

- Rybaczuk, M. ve Stoppel, P. (2000). The fractal growth of fatigue defects in materials. *International Journal of Fracture*, 103(1), 71-94.
- Rybaczuk, M. ve Cetera, A. (2001). Non-homogeneous fractal growth of fatigue defects in materials. *SAE Technical Paper* (No. 2001-01-4057).
- Smithies, F. (1958). *Integral equations* (No. 49). CUP Archive.
- Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 310-326.
- Türkmen, C. ve Başar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, First International Conference on Analysis and Applied Mathematics, 18-21 Ekim 2012, Gümüşhane.
- Upadhyay, S. ve Rai, K. N. (2015). *Integral equation: An introduction*.
- Yalcin, N., Celik, E. ve Gokdogan, A. (2016). Multiplicative Laplace transform and its applications. *Optik*, 127(20), 9984-9995.
- Yalçın, N. (2016). *Çarpımsal Türev ve Çarpımsal Lineer Diferensiyel Denklemler, Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Erzurum.*
- Yalçın, N. ve Çelik, E. (2018a). The solution of multiplicative non-homogeneous linear differential equations. *J. Appl. Math. Comput*, 2(1), 27-36.
- Yalcin, N. ve Celik, E. (2018b). Solution of multiplicative homogeneous linear differential equations with constant exponentials. *New Trends in Mathematical Sciences*, 6(2), 58-67.
- Yalçın, N. ve Çelik, E. (2019). Çarpımsal Cauchy-Euler ve Legendre Diferansiyel Denklemi. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 9(3), 373-382.
- Yalçın, N. (2021). The solutions of multiplicative Hermite differential equation and multiplicative Hermite polynomials. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 70(1), 9-21.
- Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2021). Solutions of multiplicative ordinary differential equations via the multiplicative differential transform method. *Aims Mathematics*, 6(4), 3393-3409.
- Yalcın, N. ve Dedetürk, M. Solutions of multiplicative linear differential equations via the multiplicative power series method., (In press).

ÖZGEÇMİŞ

Arzu Bal, evli ve Elif adında bir kız çocuğu annesidir. İlkokul ve liseyi İstanbul'da, üniversiteyi Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde okuyarak bitirdi. Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde formasyon eğitimi aldı. 2019 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisans programına başladı. Yüksek lisans eğitimi sürecinde yapılan 1 tane ESCI indeksli dergide yayınlanmış makalesi ve 1 tane uluslararası sempozyumda sunulan bildirisi vardır.

Yayınlar:

Bal A., Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2022). Solutions of Multiplicative İntegral Equations via The Multiplicative Power Series Method. *Politeknik Dergisi*, 1-1.

Bal, A., Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2022). On solutions of integral equations in geometric analysis. 6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 20-22 Mayıs 2022, Ordu, Türkiye, s. 111-123.