



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL (p, p) FONKSİYON VE İLGİLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Mihriban GEDİK

172110001

2020

GİRESUN

Yüksek Lisans Tezi

Ad Soyad : Mihriban GEDİK

Yıl : 2020

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇARPIMSAL (p, p) FONKSİYON VE İLGİLİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mihriban GEDİK

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN

Haziran 2020

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL (p, P) FONKSİYON VE İLGİLİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mihriban GEDİK

Enstitü Anabilim Dalı

: Matematik

Bu tez 08 /06 /2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Selahattin MADEN



Jüri Başkanı

Doç. Dr.
İmdat İŞCAN



Üye

Dr. Öğr. Üyesi
Sercan TURHAN



Üye

Doç. Dr. Bahadır KOZ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversitede veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

MİHRİBAN GEDİK

08/06/2020

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tüm aşamalarında bilgi ve deneyimleriyle yoluma ışık tutan ve değerli görüşleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim süresince bilgi birikimleri ve değerli görüşleriyle desteklerini esirgemeyen Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü başkanı Doç Dr. İmdat İŞCAN başta olmak üzere tüm öğretim üyelerine teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam boyunca güvenle, sevgiyle ve sabırla hep yanımda olan, desteklerini bir an bile eksik etmeyen aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜRLER.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IV
ÖZET	V
SUMMARY	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	3
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler	3
2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler	7
2.2. Bazı Özel Ortalamalar.....	8
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	10
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	25
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$L[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
$\forall$	: Her
I°	: I nın içi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ ' de herhangi bir aralık
β	: β Fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.1 Konveks kümeler

Şekil 2.1.2 Konveks olmayan kümeler

Şekil 2.1.3. Konveks fonksiyon

Şekil 2.1.4. Konkav fonksiyon

Şekil 2.1.5. Konveks fonksiyonun geometrik ifadesi



ÖZET

Bu tez çalışmasında yeni bir çarpımsal fonksiyon çeşiti olan çarpımsal (p, P) fonksiyon tanımı ve onunla ilgili teoremler ve sonuçlar verildi. Tezin ilk bölümünde, konveks fonksiyonlar ve eşitsizliklerin tarihi gelişimi ve literatür taraması verildi. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan tanımlar ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, tezin bulgular kısmına fikir veren lemmalar ve teoremler verildi. Dördüncü bölümde ise Çarpımsal (p, P) fonksiyonlarla ilgili lemmalar, teoremler ve sonuçlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Konveks Fonksiyonlar, Çarpımsal (p, P) fonksiyon, Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği, Ostrowski Eşitsizliği,

MULTIPLICATIVELY (p, P) -FUNCTION AND RELATED INTEGRAL INEQUALITIES

SUMMARY

In this thesis, a new product type of multiplicatively (p, P) function definition, and related theorems and results are given. In the first part of the thesis, the historical development of convex functions and inequalities and literature reviews are given. In the second part, the definitions and theorems necessary for our study are dedicated. In the third chapter, lemmas, and theorems giving an idea to the findings part of the thesis have existed. In the fourth chapter, lemmas, theorems, and results related to product (p, P) functions are obtained.

Key Words: Convex Functions, Multicatively (p, P) functions, Hermite-Hadamard Type Inequality, Ostrowski Type Inequality

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematik pozitif bilimlerin gelişmesinde önemli etkindir. Diğer bilimlerin de matematiğin bugüne gelmesinde katkıları olmuştur. Matematik, genel mantığın uygulama alanı ve zekânın bu yolda işlemesi görevini üstlenir. Ayrıca mekanik, fizik, astronomi bilimlerinin de temelini teşkil eder. Bunun dışında sosyal bilimler, tıp, jeoloji gibi alanlarda da matematiğe ihtiyaç vardır. Çevremizde gördüğümüz binalar, araçlar, yollar matematik ve mühendisliğin tasarımlarıdır.

Soyut bir ilim olan matematiğin pratik hayatımızdaki dokunuşlarını konveks fonksiyonlarla da görebiliriz. Konvekslik günlük hayatta da karşımıza çıkabilmektedir. Örneğin, dik pozisyonunda ayakta durduğumuzda, ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içinde, ağırlık merkezimizin dik iz düşümü boyunca dengemizi koruyabilmekteyiz.

Ayrıca konvekslik günlük hayatta başka birçok alanda da yer alır. Bu alanlar mühendislik, ekonomi, endüstri, fizik, tıp, sanat, iş alanları, veri analizi, bankacılık şeklinde sıralanabilir. Biyologlar çokgenlerin konvekslik ölçümünü kullanarak yaprak sınıflandırması yapmaktadır [1]. İş yerlerinde, konser salonlarında daha kaliteli ses iletimleri için yapılan akustik tasarımlarda konvekslikten yararlanılmaktadır [2]. Konveks fonksiyonların birçok uygulaması, uygulamalı matematik, matematiksel analiz, olasılık teorisi ve matematiğin diğer alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak yer almaktadır.

Konvekslik tarihi Archimedes' in çemberin içine çizdiği ve etrafına düzgün çokgenler yardımıyla π 'nin değerini hesaplamasına dayanır. Archimedes' in konveks bir şeklin çevre uzunluğunun onun çevresiyle diğer bir konveks şeklin uzunluğunun daha küçük olduğunu fark etmiştir.

Bundan sonra konvekslik matematik dünyasında, matematik ve geometri konuları arasında önemli bir yer edinmiştir. Konvekslik, lineer cebir, topoloji, eşitsizlik teorisi ve klasik ekstremum problemleri gibi çeşitli konularda önemli rol oynamaktadır.

Konvekslik literatürde Charles Hermit'in 1881 yılında bulduğu bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adında bir dergide yayınlamasıyla yerini almıştır.

Bu sonuç şu şekildedir;

Sur d'une intégrale définie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$; $x = b$; On aura les relations

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses.

En faisant dans ces formules $f(x) = 1/(1+x)$, $a = 0$, $b = x$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$$

Her ne kadar literatürde konveks fonksiyonlarla ilgili sonuçlara rastlanılsa da konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'ın bu çalışmalarından sonra konveks fonksiyonlar teorisinin hızlıca gelişme gösterdiği kabul edilmektedir.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Hilbert, Markoff, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar yazmışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır [3].

Bundan sonraki çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman'ın 1961'de yazdıkları 1934 ile 1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adını alan kitaptır [4]. 1970 yılında Mitrinović'in ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı yayınlanır [5]. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pecarić tarafından yazılan "Convex Function : Inequalities" isimli kitaptır. Konveks fonksiyonlar ve ilgili eşitsizlikleri için literatürde varolan diğer kitaplar ve doktora tezlerinden bazıları şunlardır: Bakınız [5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17].

Bunun dışında konveks fonksiyonların, eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonların uygulamasının bir sonucu olan birçok eşitsizlik ile bağlantısı vardır. Günümüzde kullandığımız birçok önemli eşitsizlik konveks fonksiyon uygulamalarının bir sonucudur. Örnek verecek olursak Hölder ve Minkowski gibi genel eşitsizlikler konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin bir sonucudur. Dolayısıyla konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinde çok önemli bir görevi üstlenmiştir.

M. Gürbüz'ün, "Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları" başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyonlar kullanılarak yeni tanımlamalar, örneklemeler yapılmış olup bu türden konveks fonksiyonlar ve literatürde bulunan bazı konveks fonksiyonların çarpımı üzerine integral eşitsizlikleri elde edilmiştir [18].

Biz bu çalışmamızda çarpımsal fonksiyonlar ve ilgili integral eşitsizliklerini inceleyeceğiz.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu bölümde bu çalışmada kullanılacak bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Lineer Uzay) : L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.

$+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: F \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) $L, +$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

G1. $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

G2. $\forall x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

G3. $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

G4. $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

G5. $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1. $A, x \in L$ dir,

L2. $A. (x + y) = \alpha. x + \alpha. y$ dir,

L3. $(A + \beta). x = \alpha. x + \beta. x$ dir,

L4. $(A\beta). x = \alpha(\beta x)$ dir,

L5. $1. x = x$ dir (Burada $1, F'$ nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L' ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L' ye kompleks lineer uzay adı verilir [19].

Tanım 2.1.2. (Lineer Dönüşüm) : F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun.

$u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \rightarrow W$ dönüşümü,

(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

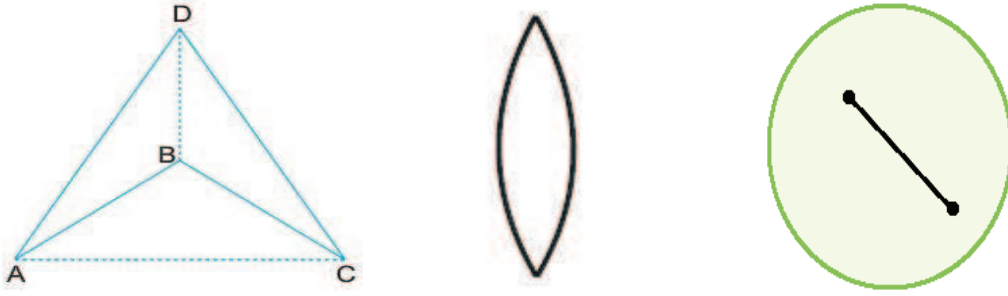
(b) $T(cu) = cT(u)$

Şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir. Eğer $V=W$ ise $T: V \rightarrow W$ lineer dönüşümüne bir lineer operatör denir [19].

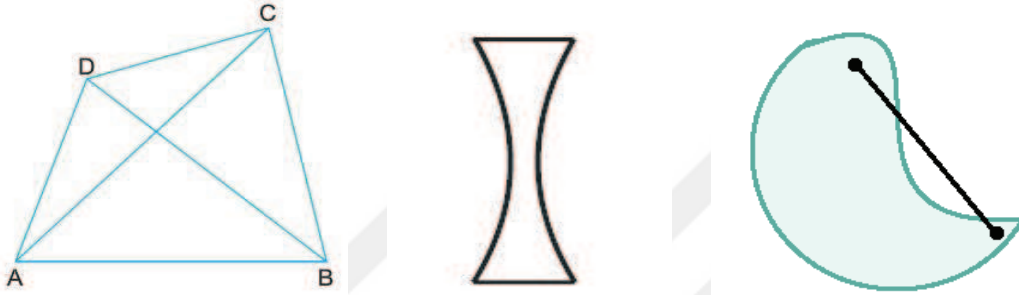
Tanım 2.1.3. (Konveks Küme): L bir uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere;

$$B = \{z \in L: z = ax + (1 - a)y, 0 \leq a \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = ax + (1 - a)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $a + (1 - a) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $a, (1 - a)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [20].



Şekil 2.1.1. Konveks(Dış Bükey) kümeler



Şekil 2.1.2. Konveks olmayan kümeler

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon) : $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad (2.1)$$

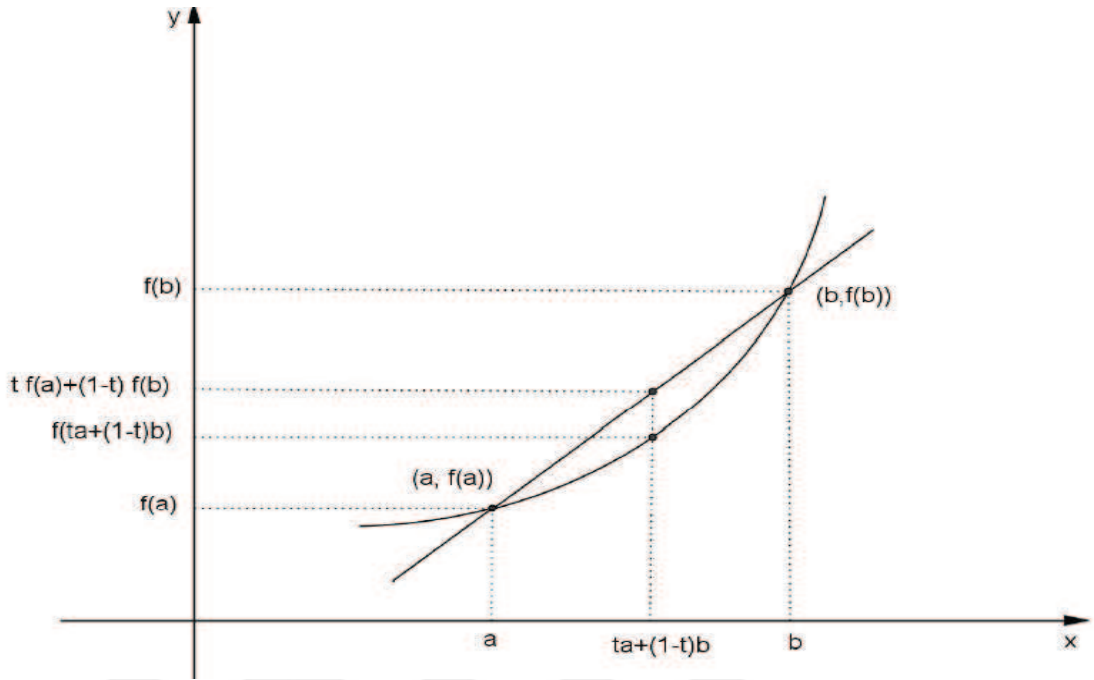
şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte " $\geq$ " olması durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $t \in (0, 1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [21].



Şekil 2.1.3. Konveks fonksiyon



Şekil 2.1.4. Konkav fonksiyon



Şekil 2.1.5. Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren doğru parçası her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.

Şekilden de görüldüğü gibi, eğer $f(a) \leq f(b)$ ise her $t \in [0, 1]$ için $f(a) \leq tf(a) + (1 - t)f(b) \leq f(b)$ dır. Konkav fonksiyon için doğru parçası f 'nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

Konveks fonksiyonun bazı özellikleri :

- i. Kapalı bir aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I^0 de kalan herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I^0 sürekli.
- iii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I^0 de f'_- ve f'_+ türevleri mevcut olup bu türevler artandır.
- iv. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise bu aralıkta sayılabilir bir E kümesi hariç f' mevcut ve sürekli.
- v. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu durumda; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (goh)(x)$ bileşke fonksiyonu da konvekstir.

vi. $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3, \dots, k$, k tane konveks fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), \quad a_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, k)$$

fonksiyonu da konvekstir [9].

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a) f , (a, b) aralığında süreklidir,

b) f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır [22].

Teorem 2.1.2. f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır [23].

Tanım 2.1.5. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x_1 < x_2$ olan $\forall x_1 < x_2 \in I$ için

i. $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii. $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii. $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv. $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

denir [24].

Tanım 2.1.6. (Beta Fonksiyonu): β Euler Beta fonksiyonu

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şekilde tanımlanır. Bu integralde $x, y > 0$ için yakınsaktır [9].

Beta fonksiyonu:

$$i. \quad \beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y), \quad x, y \in (0, \infty)$$

$$ii. \quad \beta(1, y) = \frac{1}{y}$$

$$iii. \quad \beta(1, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t^{x+y}}, \quad x, y > 0$$

$$iv. \quad \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0$$

$$v. \quad \beta(x, y) = \beta(y, x)$$

özelliklerini sağlar [25].

Tanım 2.1.7. (Hipergeometrik Fonksiyon): $c > b > 0$, $|z| < 1$ için

$${}_2F_1(a; b; c; z) = \frac{1}{\beta(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hipergeometrik fonksiyon denir [26].

2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.1.(İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise;

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Sonuç 2.2.1. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|$ ve $|g|^p$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise;

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. [13].

Tanım 2.2.2. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a < b$ koşulunu sağlayan $\forall a, b \in I$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir [27].

Tanım 2.2.3. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x + y| \end{aligned}$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [13].

Tanım 2.2.4. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f: [a, b]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Tanım 2.2.5.(Ostrowski Eşitsizliği) $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferansiyellenebilir ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise o halde aşağıdaki eşitsizlik her $x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

sağlanır.[28].

Tanım 2.2.6.(Simpson Eşitsizliği): $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (a, b) üzerinde dört defa sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4$$

elde edilir [29].

2.3. Bazı Özel Ortalamalar

a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar; [7,8]

i.Aritmetik ortalama :

$$A = A(a, b) := \frac{a+b}{2}$$

ii.Geometrik ortalama :

$$G = G(a, b) := \sqrt{ab}$$

iii.Harmonik ortalama :

$$H = H(a, b) := \frac{2ab}{a+b}$$

iv.Logaritmik ortalama :

$$L = L(a, b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \frac{b-a}{\ln b - \ln a} & , a \neq b \end{cases}$$

v.p-logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a, b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} & , a \neq b \end{cases}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p 'nin monoton artan olduğu biliniyor. $L_0 = I, L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

şeklinde yer almaktadır.

Son olarak x, y pozitif sayıların r -inci kuvvetlerinin genelleştirilmiş ortalaması

$$L_r(x, y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r} & , r \neq 0, x \neq y \\ \frac{x - y}{\ln x - \ln y} & , r = 0, x \neq y \\ xy \frac{\ln x - \ln y}{x - y} & , r = -1, x \neq y \\ x & , x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Teorem 3.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ çarpımsal P -fonksiyonu ve $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $f \in L[a, b]$ için

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) f(a+b-x) dx \leq [f(a)f(b)]^2 \\ \text{ii)} \quad & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a)f(b) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq [f(a)f(b)]^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır [30].

Önerme 3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu ve $g: \left\{\frac{1}{x}, x \in I\right\} \rightarrow I, g(x) = \frac{1}{x}$ olsun. f fonksiyonunun çarpımsal harmonik P fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart $f \circ g$ fonksiyonunun $g^{-1}(I) = \left\{\frac{1}{x}, x \in I\right\}$ aralığında çarpımsal P -fonksiyonu olmasıdır[31].

Teorem 3.2. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$ ve $a, b \in I, a < b$ olsun. Eğer $f, [a, b]$ aralığında harmonik p -fonksiyonu

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{2ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du \leq 2[f(a) + f(b)]$$

eşitsizliği sağlanır [32].

Önerme 3.2.

- i. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ bir fonksiyon olsun. f , çarpımsal harmonik P -fonksiyonudur ancak ve ancak $\ln f$ fonksiyonunda harmonik P -fonksiyondur. Bu nedenle $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ çarpımsal harmonik P -fonksiyonu, logaritmik harmonik P -fonksiyonu olarak adlandırılır.
- ii. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ harmonik P -fonksiyon ise

$$f\left(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\right) \leq f(x) + f(y) \leq f(x)f(y)$$

eşitsizliğinden f fonksiyonu da çarpımsal harmonik p -fonksiyonudur[31].

Lemma 3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° de diferensiyallenebilen bir fonksiyon,

$a, b \in I$ için $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &= \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} f'\left(\frac{ab}{tb + (1-t)a}\right) dt \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır[33].

Teorem 3.3. $f: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ çarpımsal harmonik p -fonksiyonu ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)f([a^{-1}+b^{-1}-x^{-1}]^{-1})}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2 \\ \text{ii)} \quad & f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq f(a)f(b) \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikler sağlanır [31].

İspat:

i) f fonksiyonu çarpımsal harmonik P -fonksiyonu olduğundan

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &= f\left(\frac{2\left[\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right]\left[\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right]}{\left[\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right] + \left[\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right]}\right) \\ &\leq f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \quad (3.1) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Yukarıda elde edilen eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında integrali alınıp, $x = \frac{ab}{ta+(1-t)b}$ değişken değişimi yapıldığında

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)f([a^{-1}+b^{-1}-x^{-1}]^{-1})}{x^2} dx.$$

Bununla beraber basit matematiksel hesaplamalarla

$$\int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt \leq [f(a)f(b)]^2 \quad (3.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.1) ve (3.2) den

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)f([a^{-1}+b^{-1}-x^{-1}]^{-1})}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

ii) Benzer olarak, f fonksiyonu çarpımsal harmonik P -fonksiyonu olduğundan

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &\leq f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \\ &\leq f(a)f(b) f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadenin $[0,1]$ aralığında integrali alınıp, $x = \frac{ab}{ta+(1-t)b}$ değişken değişimi yapıldığında

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq f(a)f(b) \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx$$

elde edilir. Bununla beraber

$$\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt \leq f(a)f(b),$$

olduğundan

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq f(a)f(b) \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylelikle ispat tamamlanır.

Önerme 3.3. [31] Yukarıdaki teoremin (i) ve (ii) maddelerinden

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &\leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)f([a^{-1}+b^{-1}-x^{-1}]^{-1})}{x^2} dx \\ &\leq f(a)f(b) \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq [f(a)f(b)]^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir;

Önerme 3.4. Teorem 3.1. ve Önerme 3.1. den Teorem 3.3.'ün ispatı aşağıdaki gibi de verilebilir.

$f: I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu çarpımsal harmonik p -fonksiyonu olduğundan, Teorem 3.1.'den $a, b \in I$ ve $a < b$ için $[1/b, 1/a]$ aralığında $f \circ g$ fonksiyonu da çarpımsal harmonik p -fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} i) \quad (f \circ g)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right) &\leq \frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} (f \circ g)(u) (f \circ g)\left(\frac{1}{a} + b - u\right) du \\ &\leq \left[(f \circ g)\left(\frac{1}{a}\right) (f \circ g)\left(\frac{1}{b}\right) \right]^2 \\ ii) \quad (f \circ g)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right) &\leq (f \circ g)\left(\frac{1}{a}\right) (f \circ g)\left(\frac{1}{b}\right) \frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} (f \circ g)(u) du \\ &\leq \left[(f \circ g)\left(\frac{1}{a}\right) (f \circ g)\left(\frac{1}{b}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Son eşitsizlikte $g(x) = \frac{1}{x}$ alınırsa ve integralde $u = \frac{1}{x}$ değişken değişimi yapılırsa Teorem 3.3. 'deki eşitsizlikler elde edilebilir.

Teorem 3.2. ve Önerme 3.2.'den çarpımsal harmonik P -fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitsizlikleri verilebilir[31].

Teorem 3.4. [31]. $F: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, çarpımsal harmonik P -fonksiyonu ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \exp \left\{ \frac{2ab}{b-a} \int_a^b \frac{\ln f(u)}{u^2} du \right\} \leq [f(a)f(b)]^2$$

İspat: Eşitsizliklerin ispatı Teorem 3.2. ve Önerme 3.2.'den kolayca görülebilir.

Teorem 3.5. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 de diferensiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$ için $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$. Eğer $|f'|^q$ $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında çarpımsal harmonik P -fonksiyonu için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\ &\leq \frac{ab(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{2} \left[\frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [31].

İspat: Lemma 3.1. ve Power-Mean integral eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} \right| \left| f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) \right| dt \\
& \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left| \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^2} \right| \left| f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad |f'|^q \text{ fonksiyonu } [a, b] \text{ aralığında çarpımsal harmonik } P\text{-fonksiyonu olduğundan} \\
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \\
& \leq \frac{ab(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{2} \left(\int_0^1 \frac{|1-2t|}{(tb + (1-t)a)^2} dt \right) \\
& \quad \text{eşitsizliği elde edilir. Burada kolayca görülebilir ki} \\
& \quad \int_0^1 \frac{|1-2t|}{(tb + (1-t)a)^2} dt = \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln \left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right) \\
& \quad \text{eşitliği sağlanır.}
\end{aligned}$$

Teorem 3.6. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 de diferensiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$ için $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$. Eğer $|f'|^q$ $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında çarpımsal harmonik P -fonksiyonu ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğunda;

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \leq \frac{ab(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L_{-2q}^{-2}(a, b)$$

eşitsizliği elde edilir[31].

İspat: Lemma 3.1. Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında çarpımsal harmonik p -fonksiyonu olmasından;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \leq \frac{ab(b-a)}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{(tb + (1-t)a)^{2q}} \right| \left| f' \left(\frac{ab}{tb + (1-t)a} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{ab(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(tb + (1-t)a)^{2q}} dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son ifadede basit matematiksel hesaplamalar yapıldığında

$$\int_0^1 \frac{1}{(tb + (1-t)a)^{2q}} dt = \frac{b^{-2q+1} - a^{-2q+1}}{(-2q+1)(b-a)},$$

eşitliği sağlanır ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2. $f: I^0 \subseteq R \rightarrow R, I^0$ da differansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [34].

Teorem 3.7. $f: I \rightarrow [1, \infty)$ aralığında çarpımsal P -fonksiyonu olsun. $f \in L[a, b]$ için

- i. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) f(a+b-x) dx \leq [f(a)f(b)]^2$
- ii. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a)f(b) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq [f(a)f(b)]^2$

eşitsizlikler geçerlidir[30].

İspat: *i)* f fonksiyonu çarpımsal P -fonksiyon olduğu için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{[ta + (1-t)b] + [tb + (1-t)a]}{2}\right) \\ &\leq f(ta + (1-t)b) f(tb + (1-t)a) \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik $[0,1]$ de integrallenebildiğinde ve $x = ta + (1-t)b$ değişken değişimi yapıldığında

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) f(a+b-x) dx.$$

Buna ek olarak basit hesaplamayla

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) f(tb + (1-t)a) dt \leq [f(a)f(b)]^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) f(a+b-x) dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

ii) Benzer şekilde f çarpımsal P -fonksiyonu olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq f(ta + (1-t)b) f(tb + (1-t)a) \\ &\leq f(a)f(b) f(tb + (1-t)a) \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik $[0,1]$ de integrallenebildiğinde ve $x = ta + (1 - t)b$ değişken değişimi yapıldığında

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a)f(b) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(a)f(b),$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a)f(b) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

Önerme 3.5. Teorem 3.7'nin (i) ve (ii) şartlarından;

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)f(a+b-x)dx \\ &\leq f(a)f(b) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq [f(a)f(b)]^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır[30].

Teorem 3.8. $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I^0$ 'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $|f'|$ çarpımsal P -fonksiyonu olsun. Varsayalım ki $a, b \in I$ için $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)|f'(a)||f'(b)|}{4}$$

eşitsizliği sağlanır[30].

İspat: Lemma 3.2.'den

$$\begin{aligned} &\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t)|f'(ta + (1-t)b)|dt \end{aligned}$$

$|f'|$ çarpımsal P -fonksiyonu olduğundan

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right| \\
&\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \\
&\leq \frac{b-a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \int_0^1 |1-2t| dt = \frac{(b-a) |f'(a)| |f'(b)|}{4}
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.9. $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I^0$ 'da diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $P \in \mathbb{R}$ ve $p > 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ çarpımsal P -fonksiyonu olsun. $a, b \in I$ için $f' \in L[a, b]$ ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} f'(a) f'(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $q = \frac{p}{p-1}$ dir eşitsizlikleri sağlanır[30].

İspat: $a, b \in I$ olsun. Hölder integral eşitsizliği ve Lemma 3.2.'den

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
&\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \\
&\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} |f'(a)| |f'(b)|,
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.10. $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I^0$ 'de diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Varsayalım ki $q \in \mathbb{R}, q > 1$ için $|f'|^q$ çarpımsal P -fonksiyonu olsun. Farz edelim ki $a, b \in I$ için $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} |f'(a)| |f'(b)|$$

eşitsizliği sağlanır eşitsizlikleri sağlanır[30].

İspat: $a, b \in I^0$ ve f , çarpımsal P -fonksiyonu olsun. Böylece Lemma 3.2. eşitliği ve Power Mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t| |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{\frac{1}{q}} |f'(a)| |f'(b)| \\ & = \frac{b-a}{4} |f'(a)| |f'(b)| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.3. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 de diferansiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$ için $a < b$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f' \in L[a, b]$ olduğunda

$$\begin{aligned} & f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du = \frac{1}{p(b^p - a^p)} \\ & \left\{ (x^p - a^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-1/p}} f'([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p}) dt \right. \\ & \left. - (b^p - x^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-1/p}} f'([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \right\} \quad (3.3) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir[35].

İspat:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left\{ (x^p - a^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-1/p}} f'([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p}) dt \right. \\
& \quad \left. \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-1/p}} f'([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p}) dt \right. \\
& \quad \left. - (b^p - x^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-1/p}} f'([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \right\} \\
& = \frac{1}{(b^p - a^p)} \left[(x^p - a^p) \int_0^1 t df \left([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p} \right) \right. \\
& \quad \left. + (b^p - x^p) \int_0^1 t df \left([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p} \right) \right] \\
& = \frac{1}{(b^p - a^p)} \left[(x^p - a^p) \left\{ tf \left([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^1 f \left([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p} \right) dt \right\} \right. \\
& \quad \left. + (b^p - x^p) \left\{ tf \left([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^1 f \left([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p} \right) dt \right\} \right] = f(x) - \frac{p}{(b^p - a^p)} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \\
& \text{eşitliği sağlanır.}
\end{aligned}$$

Lemma 3.4. $0 < a \leq x, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \eta \geq 1$ olduğunda;

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{t^\lambda (1-t)^\mu}{(tx^p + (1-t)a^p)^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt = C_{a,p}(x, \lambda, \mu, \eta) = \begin{cases} B_{a,p}(x, \lambda, \mu, \eta), & p < 0 \\ A_{a,p}(x, \lambda, \mu, \eta), & p > 0 \end{cases} \\
& \int_0^1 \frac{t^\lambda (1-t)^\mu}{(tx^p + (1-t)b^p)^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt = S_{b,p}(x, \lambda, \mu, \eta) = \begin{cases} T_{b,p}(x, \lambda, \mu, \eta), & p < 0 \\ U_{b,p}(x, \lambda, \mu, \eta), & p > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

burada

$$B_{a,p}(x, \lambda, \mu, \eta) = \frac{\beta(\lambda + 1, \mu + 1)}{a^{\eta p - \eta}} {}_2F_1 \left(\eta - \frac{\eta}{p}, \lambda + 1; \lambda + \mu + 2; 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^p \right),$$

$$A_{a,p}(x, \lambda, \mu, \eta) = \frac{\beta(\mu + 1, \lambda + 1)}{x^{\eta p - \eta}} {}_2F_1 \left(\eta - \frac{\eta}{p}, \mu + 1; \lambda + \mu + 2; 1 - \left(\frac{a}{x} \right)^p \right),$$

$$T_{b,p}(x, \lambda, \mu, \eta) = \frac{\beta(\mu + 1, \lambda + 1)}{x^{\eta p - \eta}} {}_2F_1\left(\eta - \frac{\eta}{p}, \mu + 1; \lambda + \mu + 2; 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^p\right),$$

$$U_{b,p}(x, \lambda, \mu, \eta) = \frac{\beta(\lambda + 1, \mu + 1)}{b^{\eta p - \eta}} {}_2F_1\left(\eta - \frac{\eta}{p}, \lambda + 1; \lambda + \mu + 2; 1 - \left(\frac{x}{b}\right)^p\right),$$

elde edilir[35].

İspat.(i). $p > 0$ için bakıldığında;

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^\lambda (1-t)^\mu}{(tx^p + (1-t)a^p)^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt &= \frac{1}{x^{\eta p - \eta}} \int_0^1 \frac{t^\mu (1-t)^\lambda}{\left[1 - t\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^p\right)\right]^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt \\ &= \frac{\beta(\mu + 1, \lambda + 1)}{x^{\eta p - \eta}} {}_2F_1\left(\eta - \frac{\eta}{p}, \mu + 1; \lambda + \mu + 2; 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^p\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^\lambda (1-t)^\mu}{(tx^p + (1-t)b^p)^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt &= \frac{1}{b^{\eta p - \eta}} \int_0^1 \frac{t^\lambda (1-t)^\mu}{\left[1 - t\left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^p\right)\right]^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt \\ &= \frac{\beta(\lambda + 1, \mu + 1)}{b^{\eta p - \eta}} {}_2F_1\left(\eta - \frac{\eta}{p}, \lambda + 1; \lambda + \mu + 2; 1 - \left(\frac{x}{b}\right)^p\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

(ii) $p < 0$ için bakıldığında;

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^\lambda (1-t)^\mu}{(tx^p + (1-t)a^p)^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt &= \frac{1}{a^{\eta p - \eta}} \int_0^1 \frac{t^\lambda (1-t)^\mu}{\left[1 - t\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^p\right)\right]^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt \\ &= \frac{\beta(\lambda + 1, \mu + 1)}{a^{\eta p - \eta}} {}_2F_1\left(\eta - \frac{\eta}{p}, \lambda + 1; \lambda + \mu + 2; 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^p\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^\lambda (1-t)^\mu}{(tx^p + (1-t)b^p)^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt &= \frac{1}{x^{\eta p - \eta}} \int_0^1 \frac{t^\mu (1-t)^\lambda}{\left[1 - t\left(1 - \left(\frac{b}{x}\right)^p\right)\right]^{\eta - \frac{\eta}{p}}} dt \\ &= \frac{\beta(\mu + 1, \lambda + 1)}{x^{\eta p - \eta}} {}_2F_1\left(\eta - \frac{\eta}{p}, \mu + 1; \lambda + \mu + 2; 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^p\right) \end{aligned}$$

Lemma 3.3. ve Lemma 3.4. ‘ kullanarak p -konveks fonksiyonlar için yeni Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edebiliriz.

Teorem 3.11. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 de diferensiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^0$ için $a < b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f' \in L[a, b]$. Eğer $|f'|^q$ $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında p -konveks ise her $x \in [a, b]$ için;

$$\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)}$$

$$\times \left\{ (x^p - a^p)^2 C_{a,p}^{1-\frac{1}{q}}(x, 1, 0, 1) [C_{a,p}(x, 2, 0, 1) |f'(x)|^q + C_{a,p}(x, 1, 1, 1) |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + (b^p - x^p)^2 S_{b,p}^{1-\frac{1}{q}}(x, 1, 0, 1) [S_{b,p}(x, 2, 0, 1) |f'(x)|^q + S_{b,p}(x, 1, 1, 1) |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir[35].

İspat: Lemma3.3., Power mean integral eşitsizliği ve $|f'|^q, [a, b]$ aralığında p-konveks olmasından

$$\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \{ (x^p - a^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left([tx^p + (1-t)a^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \right. \\ \left. + (b^p - x^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left([tx^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \right\} \\ \leq \frac{(x^p - a^p)^2}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left((tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{(b^p - x^p)^2}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left((tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \frac{(x^p - a^p)^2}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left(\int_0^1 \frac{t^2 |f'(x)|^q + t(1-t) |f'(a)|^q}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{(b^p - x^p)^2}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \frac{t^2 |f'(x)|^q + t(1-t) |f'(b)|^q}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Teorem 3.12. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 de diferensiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^0$ için $a < b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f' \in L[a, b]$. Eğer $|f'|^q$ $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında p-konveks ise $\forall x \in [a, b]$ için;

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left\{ (x^p - a^p)^2 C_{a,p}^{1-\frac{1}{q}}(x, 0, 0, 1) \right. \\ & \times [C_{a,p}(x, q+1, 0, 1) |f'(x)|^q + C_{a,p}(x, q, 1, 1) |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \\ & + (b^p - x^p)^2 S_{b,p}^{1-\frac{1}{q}}(x, 0, 0, 1) \\ & \left. [S_{b,p}(x, q+1, 0, 1) |f'(x)|^q + S_{b,p}(x, q, 1, 1) |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir[35].

İspat: Lemma 3.3., Lemma 3.4. Power mean integral eşitsizliği ve $|f'|^q, [a, b]$ aralığında p-konveks olmasından

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \\ & \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left\{ (x^p - a^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} \left| f'([tx^p + (1-t)a^p]^{\frac{1}{p}}) \right| \right. \\ & \quad \left. + (b^p - x^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \left| f'([tx^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}) \right| dt \right\} \\ & \leq \frac{(x^p - a^p)^2}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{1}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 \frac{t^q}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} \left| f'([tx^p + (1-t)a^p]^{\frac{1}{p}}) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(b^p - x^p)^2}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{1}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 \frac{t^q}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \left| f'([tx^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(x^p - a^p)^2}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{1}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\int_0^1 \frac{t^{q+1}|f'(x)|^q + t^q(1-t)|f'(a)|^q}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{(b^p - x^p)^2}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{1}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\int_0^1 \frac{t^{q+1}|f'(x)|^q + t^q(1-t)|f'(b)|^q}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left\{ (x^p - a^p)^2 C_{a,p}^{1-\frac{1}{q}}(x, 0, 0, 1) \right. \\
&\times [C_{a,p}(x, q+1, 0, 1)|f'(x)|^q + C_{a,p}(x, q, 1, 1)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \\
&\left. + (b^p - x^p)^2 S_{b,p}^{1-\frac{1}{q}}(x, 0, 0, 1) [S_{b,p}(x, q+1, 0, 1)|f'(x)|^q + S_{b,p}(x, q, 1, 1)|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bu şekilde ispat tamamlanır.

Teorem 3.13. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 de diferensiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^0$ için $a < b$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f' \in L[a, b]$. Eğer $|f'|^q$ $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında p-konveks fonksiyonu ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğunda;

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left(\frac{1}{q+2} \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ (x^p - a^p)^2 C_{a,p}^{\frac{1}{r}}(x, 0, 0, r) \right. \\
&\times |f'(x)|^q + \frac{1}{q+1} |f'(a)|^q \\
&\left. + (b^p - x^p)^2 S_{b,p}^{\frac{1}{r}}(x, 0, 0, r) \left[|f'(x)|^q + \frac{1}{q+1} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir[35].

İspat: Lemma 3.3., Lemma 3.4., Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ 'nun $[a, b]$ aralığında p-konveks olmasından

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \\
&\times \left\{ (x^p - a^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{(tx^p + (1-t)a^p)^{r-\frac{r}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 t^q \left| f' \left([tx^p + (1-t)a^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (b^p - x^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{(tx^p + (1-t)b^p)^{r-\frac{r}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 t^q \left| f' \left([tx^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
& \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left(\frac{1}{q+2} \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ (x^p - a^p)^2 C_{a,p}^{\frac{1}{r}}(x, 0, 0, r) \times \left[|f'(x)|^q + \frac{1}{q+1} |f'(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (b^p - x^p)^2 S_{b,p}^{\frac{1}{r}}(x, 0, 0, r) \left[|f'(x)|^q + \frac{1}{q+1} |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bu şekilde ispat tamamlanır.

Teorem 3.14 $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 de diferensiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^0$ için $a < b$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f' \in L[a, b]$. Eğer $|f'|^q$ $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında p-konveks fonksiyonu ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğunda;

$$\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \\
& \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left\{ (x^p - a^p)^2 C_{a,p}^{\frac{1}{r}}(x, r, 0, r) \times \left[\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (b^p - x^p)^2 S_{b,p}^{\frac{1}{r}}(x, r, 0, r) \left[\frac{|f'(x)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir[35].

İspat: Lemma3.3., Lemma3.4., Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ nun $[a, b]$ aralığında p- konveks olmasından

$$\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \\
& \times \left\{ (x^p - a^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{t^r}{(tx^p + (1-t)a^p)^{r-\frac{r}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 \left| f' \left([tx^p + (1-t)a^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (b^p - x^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{t^r}{(tx^p + (1-t)b^p)^{r-\frac{r}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 \left| f' \left([tx^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left\{ (x^r - a^r)^2 C_{a,p}^{\frac{1}{r}}(x, r, 0, r) \times \left[\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (b^p - x^p)^2 S_{b,p}^{\frac{1}{r}}(x, r, 0, r) \left[\frac{|f'(x)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.15. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 de diferensiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^0$ için $a < b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f' \in L[a, b]$. Eğer $|f'|^q$ $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında p-konveks fonksiyonu ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \\ & \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left(\frac{1}{r+1} \right)^{\frac{1}{r}} \left\{ (x^p - a^p)^2 [C_{a,p}(x, 1, 0, q) |f'(x)|^q + C_{a,p}(x, 0, 1, q) |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + (b^p - x^p)^2 [S_{b,p}(x, 1, 0, q) |f'(x)|^q + S_{b,p}(x, 0, 1, q) |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \text{eşitsizliği elde edilir[35].} \end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.3, Lemma 3.4, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ nun $[a, b]$ aralığında p-konveks olmasından

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \\ & \times \left\{ (x^p - a^p)^2 \left(\int_0^1 t^r dt \right)^{1/r} \left(\int_0^1 \frac{|f'([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p})|^q}{(tx^p + (1-t)a^p)^{q-q/p}} dt \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + (b^p - x^p)^2 \left(\int_0^1 t^r dt \right)^{1/r} \left(\int_0^1 \frac{|f'([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p})|^q}{(tx^p + (1-t)b^p)^{q-q/p}} dt \right)^{1/q} \right\} \\ & \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left(\frac{1}{r+1} \right)^{\frac{1}{r}} \left\{ (x^p - a^p)^2 [C_{a,p}(x, 1, 0, q) |f'(x)|^q + C_{a,p}(x, 0, 1, q) |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + (b^p - x^p)^2 [S_{b,p}(x, 1, 0, q) |f'(x)|^q + S_{b,p}(x, 0, 1, q) |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \text{bu şekilde ispat tamamlanır.} \end{aligned}$$

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tanım 4.1. $I \subseteq (0, \infty)$ bir aralık olsun. $\forall x, y \in I, t \in [0, 1]$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}}\right) \leq f(x)f(y) \quad (4.1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna çarpımsal p -konveks fonksiyon denir.

Bu şartı sağlayan fonksiyon sınıfları MPP(I) ile gösterilecek ve I aralığı üzerinde çarpımsal (p, P) fonksiyonları sınıfı olarak ifade edilecektir.

Önerme 4.1. $f \in MPP(I)$ ise f fonksiyonunun görüntüsü 1' e eşit veya 1' den büyüktür.

İspat: (4.1) eşitsizliğinde $t = 1$ alınırsa

$$f(x) \leq f(x)f(y) \Rightarrow f(x)[1 - f(y)] \leq 0$$

olur. Tanım gereği $\forall x \in I$ için $f(x) \geq 0$ olduğundan $\forall y \in I$ için $f(y) \geq 1$ olur.

Benzer şekilde $t = 0$ alınırsa

$$f(y) \leq f(x)f(y) \Rightarrow f(y)[1 - f(x)] \leq 0$$

olur. Tanım gereği $\forall y \in I$ için $f(y) \geq 0$ olduğundan $\forall x \in I$ için $f(x) \geq 1$ olur.

Önerme 4.2.

- i. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyon olsun. f çarpımsal (p, P) fonksiyondur gerek ve yeter şart $\ln f$ (p, P) fonksiyondur. O halde $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonuna $\log$ -(p, P) fonksiyon denir.
- ii. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ (p, P) fonksiyon ise f çarpımsal (p, P) fonksiyondur. Çünkü,

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}}\right) \leq f(x) + f(y) \leq f(x)f(y)$$

olur.

Örnek 4.1. $f: I \subseteq [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu, $f(x) = x$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu çarpımsal (p, P) fonksiyondur. Çünkü $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $x, y \in [1, \infty), x < y$ için

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}}\right) = (tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}} \leq y \leq xy = f(x)f(y)$$

olur.

Örnek 4.2. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu, $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu çarpımsal (p, P) fonksiyondur. Çünkü $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $x, y \in (0, \infty), x < y$ için

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}}\right) = e^{(tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}}} \leq e^y \leq e^{xy} = f(x)f(y)$$

olur.

Örnek 4.3. $f: I \subseteq [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu, $f(x) = x^p$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu çarpımsal (p, P) fonksiyondur. Çünkü $p \geq 1$ ve $x, y \in [1, \infty), x < y$ için

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}}\right) = tx^p + (1-t)y^p \leq y^p \leq x^p y^p = f(x)f(y)$$

olur.

Önerme 4.3. $I \subseteq (0, \infty)$ bir aralık, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

- i. $p \leq 1$ ve f çarpımsal P fonksiyon ve azalmayan fonksiyon ise f çarpımsal (p, P) fonksiyondur.
- ii. $p \geq 1$ ve f çarpımsal P fonksiyon ve artmayan fonksiyon ise f çarpımsal (p, P) fonksiyondur.

İspat:

- i. $p \leq 1$ için

$$(tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}} \leq tx + (1-t)y$$

dir. f çarpımsal P fonksiyon ve artmayan fonksiyon olduğundan

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}}\right) \leq f(tx + (1-t)y) \leq f(x)f(y)$$

olur.

- ii. $p \geq 1$ için

$$(tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}} \geq tx + (1-t)y$$

dir. f çarpımsal P fonksiyon ve artmayan fonksiyon olduğundan

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{\frac{1}{p}}\right) \leq f(tx + (1-t)y) \leq f(x)f(y)$$

olur.

Örnek 4.4. $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fonksiyonu, $f(x) = |x|^p + 1$ için çarpımsal p -fonksiyonudur.

- I. $p > 0$ ve $x < y$ durumları için bakıldığında;

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{1/p}\right) = |tx^p + (1-t)y^p| + 1 \leq t|x|^p + (1-t)|y|^p + 1$$

$$= t|x|^p + (1-t)|y|^p + 1 - t + t = t(|x|^p + 1) + (1-t)(|y|^p + 1)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte

$$|x|^p + 1 > 1$$

$$|y|^p + 1 > 1$$

olduğundan

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{1/p}\right)$$

$$\leq t(|x|^p + 1)(|y|^p + 1) + (1-t)(|y|^p + 1)(|x|^p + 1)$$

$$= (|x|^p + 1)(|y|^p + 1)(t + 1 - t) = f(x)f(y)$$

eşitliği elde edilir.

- II. $p < 0$ ve $x < y$ durumları için bakıldığında;

$$f\left((tx^p + (1-t)y^p)^{1/p}\right) = |tx^p + (1-t)y^p| + 1 \leq t|x|^p + (1-t)|y|^p + 1$$

$$= t|x|^p + (1-t)|y|^p + 1 - t + t = t(|x|^p + 1) + (1-t)(|y|^p + 1)$$

$$\begin{aligned}
&\geq t(|x|^p + 1)(|y|^p + 1) + (1 - t)(|y|^p + 1)(|x|^p + 1) \\
&= (|x|^p + 1)(|y|^p + 1)(t + 1 - t) = f(x)f(y) \\
&p < 0 \text{ ve } x < y \text{ olduğundan} \\
&|x|^p + 1 \not\leq |y|^p + 1 \\
&\text{eşitsizliği elde edilir.}
\end{aligned}$$

Teorem 4.1.

$f, g: I \rightarrow [1, \infty)$ olsun. Eğer f ve g çarpımsal p fonksiyonu ise fg fonsiyonu da çarpımsal p fonksiyonu olur.

İspat. $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
&(fg) \left((tx^p + (1 - t)y^p)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= f \left((tx + (1 - t)y^p)^{1/p} \right) g \left((tx^p + (1 - t)y^p)^{1/p} \right) \\
&\leq [f(x)f(y)][g(x)g(y)] = [f(x)g(x)][f(y)g(y)] = [(fg)(x)][(fg)(y)].
\end{aligned}$$

Lemma 4.1. $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu I^0 de diferensiyallenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$ için $a < b$ ve $p \in R \setminus \{0\}$. $f' \in L[a, b]$ olduğunda;

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \\
&= \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 (1 - 2t) \frac{f' \left((ta^p + (1 - t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right)}{(ta^p + (1 - t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} dt \quad (4.2)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Öncelikle (4.2) eşitsizliğin sol tarafında kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1 - 2t) d \left(f(ta^p + (1 - t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= (1 - 2t) f((ta^p + (1 - t)b^p)^{\frac{1}{p}}) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 f(ta^p + (1 - t)b^p)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\int_0^1 (1 - 2t) d \left(f(ta^p + (1 - t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right) = -f(a) - f(b) + \frac{2p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında ve eşitliği

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1 - 2t) f' \left((ta^p + (1 - t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right) \frac{1}{p} (ta^p + (1 - t)b^p)^{\frac{1}{p}-1} (a^p - b^p) dt \\
&= -f(a) - f(b) + \frac{2p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.

$p=1$ için konvekslik ve $p = -1$ harmonikliğin sağlandığını görebiliriz.

Teorem 4.2. $f: I \rightarrow [1, \infty)$ aralığında çarpımsal P -fonksiyon, $a, b \in I, a < b$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_0^1 \frac{f(x)f(a^p + b^p - x^p)}{x^{1-p}} dx \\ & \leq [f(a)]^2 [f(b)]^2 \\ \text{ii.} \quad & f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq \frac{f(a)f(b)p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \leq [f(a)]^2 [f(b)]^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{[ta + (1-t)b] + [tb + (1-t)a]}{2}\right) \\ &\leq f(ta + (1-t)b)f(tb + (1-t)a) \end{aligned}$$

denklemlerinden ve f fonksiyonunun çarpımsal P -fonksiyon olmasından yola çıkarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) = f\left(\left(\frac{ta^p + (1-t)b^p + (1-t)a^p + tb^p}{2}\right)^{1/p}\right) \\ & \leq f\left((ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}\right) f\left(((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}\right) \\ & f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq \int_0^1 f\left((ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}\right) f\left(((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}\right) dt \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik $[0,1]$ aralığında integrallendiğinde ve $(ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}} = x$ değişken değişimi yapıldığında;

$(ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}} = x \Rightarrow ta^p + (1-t)b^p = x^p$ ve $(a^p - b^p)dt = px^{p-1}dx$ ifadesi elde edilir.

$$f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_0^1 \frac{f(x)f(a^p + b^p - x^p)}{x^{1-p}} dx$$

Buna ek olarak basit hesaplamalarla

$$\int_0^1 f\left((ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}\right) f\left(((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}\right) dt$$

$$\leq \int_0^1 f(a) f(b) f(a) f(b) dt = [f(a)]^2 [f(b)]^2$$

Son durumda

$$f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_0^1 \frac{f(x) f(a^p + b^p - x^p)}{x^{1-p}} dx$$

$$\leq [f(a)]^2 [f(b)]^2$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\text{ii. } f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq f\left((ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}\right) f\left(((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}\right)$$

$$\leq f(a) f(b) f\left(((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}\right)$$

Her iki tarafın $[0,1]$ aralığında integralini alınırsa

$$f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq \int_0^1 f(a) f(b) f\left(((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}\right) dt$$

olur. Sağ taraftaki integralde $x = ((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}$ değişken değişimi yapılırsa

$$f(a) f(b) \int_0^1 f\left(((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}\right) dt = \frac{f(a) f(b) p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx$$

İfadesi elde edilir. Öte yandan

$$f(a) f(b) \int_0^1 f\left(((1-t)a^p + tb^p)^{1/p}\right) dt \leq [f(a) f(b)]^2$$

Olduğundan ispat tamalanır.

Teorem 4.3. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^o ' de diferansiyellenebilir, $a, b \in I, a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $q \geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında çarpımsal (p, P) fonksiyonu, $p > 0$, ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right|$$

$$\leq \frac{(b^p - a^p) b^{1-p} |f'(a)| |f'(b)|}{2p} \beta(1, 2) {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{p}, 1; 3; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^p}{b^p}\right)\right) \quad (4.4)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: (4.2) eşitsizliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp Power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \left| \frac{(1-2t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \right| \left| f' \left((ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \\
&\leq \frac{b^p - a^p}{2p} \left(\int_0^1 \left| \frac{(1-2t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left| \frac{(1-2t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \right| \left| f' \left((ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonu çarpımsal (p, P) fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\
&\leq \frac{(b^p - a^p) |f'(a)| |f'(b)|}{2p} \left(\int_0^1 \left| \frac{(1-2t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left| \frac{(1-2t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \right| dt \\
&= \int_0^{1/2} \frac{(1-2t)dt}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} + \int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)dt}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \\
&= b^{1-p} {}_2F_1 \left(1 - \frac{1}{p}, 1; 3; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^p}{b^p} \right) \right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2. (4.4) eşitsizliğinde $p = 1$ alınırsa [30]'da Teorem 7 elde edilir.

Teorem 4.4. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^o 'de diferansiyellenebilir, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $q > 1$ için $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ şartına göre $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında çarpımsal (p, P) fonksiyonu, $p > 0$ ise

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\
&\leq \frac{(b^p - a^p) b^{\frac{(1-p)r}{q}} |f'(a)| |f'(b)|}{2p} \beta(1, 2) {}_2F_1 \left(r - \frac{r}{p}, 1; 3; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^p}{b^p} \right) \right) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

İspat: (4.2) eşitsizliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\
& \leq \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \left| \frac{(1-2t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \right| \left| f' \left((ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \\
& \leq \frac{b^p - a^p}{2p} \left(\int_0^1 \left| \frac{(1-2t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \right|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \times \left(\int_0^1 \left| f' \left((ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonu çarpımsal (p, P) fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\
& \leq \frac{(b^p - a^p) |f'(a)| |f'(b)|}{2p} \left(\int_0^1 \left| \frac{(1-2t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} \right|^r dt \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 \frac{|1-2t|^r}{(ta^p + (1-t)b^p)^{r-\frac{r}{p}}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \\
& = \int_0^{1/2} \frac{(1-2t)^r dt}{(ta^p + (1-t)b^p)^{r-\frac{r}{p}}} + \int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)^r dt}{(ta^p + (1-t)b^p)^{r-\frac{r}{p}}} \\
& = b^{\frac{(1-p)r}{q}} {}_2F_1 \left(r - \frac{r}{p}, 1; 3; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^p}{b^p} \right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3. (4.5) eşitsizliğinde $p = 1$ alınırsa [30]' da Teorem 6 elde edilir.

Teorem 4.5. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° de differansiyellenebilir bir fonksiyon. $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $|f'|^q$ fonksiyonu $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında çarpımsal (p, P) olduğunda $\forall x \in [a, b]$ için

i. $p > 0$ ise

$$\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \frac{(x^p - a^p)^2 x^{1-p} |f'(x)| |f'(a)|}{p(b^p - a^p)} \beta(1,2) {}_2F_1 \left(1 - \frac{1}{p}, 1; 3; 1 - \frac{a^p}{x^p} \right) \\ \frac{(b^p - x^p)^2 b^{1-p} |f'(x)| |f'(b)|}{p(b^p - a^p)} \beta(2,1) {}_2F_1 \left(1 - \frac{1}{p}, 2; 3; 1 - \frac{x^p}{b^p} \right)$$

ii. $p < 0$ ise

$$\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \frac{(x^p - a^p)^2 a^{1-p} |f'(x)| |f'(a)|}{p(b^p - a^p)} \beta(2,1) {}_2F_1 \left(1 - \frac{1}{p}, 2; 3; 1 - \frac{x^p}{a^p} \right) \\ \frac{(b^p - x^p)^2 x^{1-p} |f'(x)| |f'(b)|}{p(b^p - a^p)} \beta(1,2) {}_2F_1 \left(1 - \frac{1}{p}, 1; 3; 1 - \frac{b^p}{x^p} \right)$$

İspat: (3.3) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değerini alıp Power mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left\{ (x^p - a^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} |f'([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p})| dt \right. \\ \left. + (b^p - x^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-1/p}} |f'([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p})| dt \right\} \\ \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \{ (x^p - a^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-1/p}} \right)^{1-1/q} \\ \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-1/p}} |f'([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p})|^q dt \right)^{1/q} \\ + (b^p - x^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-1/p}} \right)^{1-1/q} \}$$

$$\left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-1/p}} |f'([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p})|^q dt \right)^{1/q}$$

olur. . $|f'|^q$ çarpımsal (p, P) fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \\ &\left\{ (x^p - a^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-1/p}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-1/p}} |f'(x)f'(a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &+ \\ &\left. (b^p - x^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-1/p}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-1/p}} |f'(b)f'(x)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &= \left\{ \frac{(x^p - a^p)^2 |f'(x)||f'(a)|}{p(b^p - a^p)} \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-1/p}} dt \right. \\ &+ \left. \frac{(b^p - x^p)^2 |f'(x)||f'(b)|}{p(b^p - a^p)} \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-1/p}} dt \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikteki integraller hipergeometrik fonksiyon şeklinde ifade edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.6. $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° de differansiyellenebilir bir fonksiyon $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $q > 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında çarpımsal (p, P) olduğunda $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ şartı altında

i. $p > 0$ ise

$$\begin{aligned} &\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \\ &\frac{(x^p - a^p)^2 x^{1-p} |f'(x)||f'(a)|}{p(b^p - a^p)} \left(\beta(1, r+1) {}_2F_1 \left(r - \frac{r}{p}, 1; r+2; 1 - \frac{a^p}{x^p} \right) \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\frac{(b^p - x^p)^2 b^{1-p} |f'(x)||f'(b)|}{p(b^p - a^p)} \left(\beta(r+1, 1) {}_2F_1 \left(r - \frac{r}{p}, r+1; r+2; 1 - \frac{x^p}{b^p} \right) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

ii. $p < 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \\
& \frac{(x^p - a^p)^2 x^{1-p} |f'(x)| |f'(a)|}{p(b^p - a^p)} \left(\beta(r+1, 1) {}_2F_1 \left(r - \frac{r}{p}, r+1; r+2; 1 - \frac{x^p}{a^p} \right) \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \frac{(b^p - x^p)^2 b^{1-p} |f'(x)| |f'(b)|}{p(b^p - a^p)} \left(\beta(1, r+1) {}_2F_1 \left(r - \frac{r}{p}, 1; r+2; 1 - \frac{b^p}{x^p} \right) \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat: (3.3) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değerini alıp Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \\
& \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \left\{ (x^p - a^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}} |f'([tx^p + (1-t)a^p]^{1/p})| dt \right. \\
& \quad \left. + (b^p - x^p)^2 \int_0^1 \frac{t}{(tx^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} |f'([tx^p + (1-t)b^p]^{1/p})| dt \right\} \\
& \leq \frac{1}{p(b^p - a^p)} \\
& \left\{ (x^p - a^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{t^r dt}{(tx^p + (1-t)a^p)^{r-\frac{r}{p}}} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |f'([tx^p + (1-t)a^p]^{\frac{1}{p}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (b^p - x^p)^2 \left(\int_0^1 \frac{t^r dt}{(tx^p + (1-t)b^p)^{r-\frac{r}{p}}} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |f'([tx^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonu çarpımsal (p, P) fonksiyon olduğundan

$$\left| f(x) - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right|$$

$$\leq \left\{ \frac{(x^p - a^p)^2 |f'(x)| |f'(a)|}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{t^r dt}{(tx^p + (1-t)a^p)^{r-\frac{r}{p}}} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\ \left. + \frac{(b^p - x^p)^2 |f'(x)| |f'(b)|}{p(b^p - a^p)} \left(\int_0^1 \frac{t^r dt}{(tx^p + (1-t)b^p)^{r-\frac{r}{p}}} \right)^{\frac{1}{r}} \right\}$$

olur. Son eşitsizlikteki integralleri Hipergeometrik fonksiyon yardımıyla ifade edilirse ispat tamamlanır.



BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Son zamanlarda literatürde araştırmacılar farklı konveks sınıfları için Hermite Hadamard tipli ve Simpson Tipli eşitsizlikler üzerine çalışmalar yapmaktadır. Bunların en önemlilerinden birisi de çarpımsal konvekslik ve çarpımsal harmonik konveksliktir. Bizde bu çalışmada daha geneli olan çarpımsal (p, P) fonksiyonlar sınıfını tanımladık ve bu fonksiyon sınıfından yararlanarak Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler ve Simpson Tipli eşitsizlikler ile ilgili teoremler ve sonuçlar verdik. Elde ettiğimiz bu yeni konvekslik sınıfı Ostrowski tipli eşitsizliklere uygulanabilir. Bunun yanısıra farklı konvekslik sınıfları için ifade edilen integral eşitsizliklerine de uygulanabilir ve yeni genel integral eşitsizlikleri elde edilebilir. Bunların hepsi açık birer problemlerdir.



KAYNAKLAR

- [1] Kala, J. R, Viriri,S., Moodley, D. and Tapamo, J.R., Leaf Classification Using Convexity Measure of Polygons, I mage and Signal Processing, 7th International Conference, May 30-June 1, Canada. 2016.
- [2] <http://knaufdanoline.com/wp-content/uploads/Room-shape.pdf>
- [3] Hardy, G., Littlewood, J. E, Polya, G., Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom 1952.
- [4] Beckenbach E.F. and Bellman R.,Inequalities.Springer-Verlag,198pp.,Berlin.1961.
- [5] Mitrinović, D.S., Pecarić J.E. and Fink A.M., Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London,1991
- [6] Alomari M.W.N. Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson type for s -convex, quasi-convex and r -convex mappings with some applications, Doktora Tezi. University Kebangsaan Malaysia Bangi 2011.
- [7] Bagdasar O. Inequalities and Aplplications, Bachelor's Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca, 2006.
- [8] Bullen P.S., Mitrinović, D.S., Vasi's P.M. Means and Their Inequalities, Springer Science Business Media, B.V.,1988
- [9] Dragomir S.S and Pearce C.E.M., Selected Topics on Hermite-Hadamard type inequalities and applications, RGMIA Monographs, Available online at <http://rgmia.vu.edu.au/monographs/Hermite-Hadamard.html> 2000.
- [10]Ekinci, A., Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar İçin Integral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum 2014.
- [11]Kavurmacı, H., Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli Integral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum 2012.
- [12]Mihe,san, V. G., A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania. 1993.
- [13]Mitrinović, D.S., Pecarić J.E. Fink A.M., Classical and New Inequalities in Analysis,Kluwer Academic Publishers, 740, UK 1993.
- [14]Set, E., Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.2010.
- [15]Tunç, M., Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum 2011.
- [16]Wright, E.M. An inequality for convex functions, The American Mathematicly .Monthly 61,620-622.1954.
- [17]Yaldız, H., Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Yüksek Lisans Tezi, Düzce Üniversitesi, Düzce 2012.

- [18] Gürbüz, M., Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine Integral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum 2013.
- [19] Anton H. and Rorrers, C. Elementary Linear Algebra, John Wiley and Sons Inc., 2006.
- [20] Bayraktar M., Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1, 2000.
- [21] Niculescu, C.P. and Persson, L.E. Convex Function and Their Appl., A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media INC., 255 pp., 2006.
- [22] Azpetia A.G. Convex function and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., (28):7-12,1994.
- [23] Mitrinović, D.S., Analytic Inequalities, Springer, Berlin, 1970.
- [24] Adams. R.A., Essex, C., Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, pp 934. 2010.
- [25] Jeffrey, A., Dai, H-H., Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK. 2008.
- [26] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo J.J., Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier. Amsterdam. 2006.
- [27] Pecarić J., Proschan F., Tong Y.L. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc., 1992.
- [28] Mitrinović, D.S., Pecarić J.E. and Fink A.M., Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, vol.53, Springer Science and Business Media,2012.
- [29] Dragomir S.S and Pearce C.E.M. Quasi-convex function and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57:337-385. 1998.
- [30] Kadakal H., Multiplicatively P-functions and some new inequalities, New Trends in Mathematical Sciences, 6(4), 111-118, 2018.
- [31] İşcan İ., Olucak V., Multiplicatively Harmonically P-Functions And Some Related Inequalities. *Sigma*, 37(2), 521-528, 2019.
- [32] İşcan İ., Numan S., Bekar K., Hermite-Hadamard and Simpson type inequalities for differentiable harmonically P-functions, British Journal of Mathematics & Computer Science 4.14 1908-1920, 2014.
- [33] İşcan I. , Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 43 (6) ,935-942, 2014.
- [34] Dragomir S.S., and Agarwal R.P. Two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula).Appl. Math. Vol. 11,No. 5 pp. 91-95,1998
- [35] İşcan I., Ostrowski type inequalities for p-convex functions, New Trends in Mathematical Sciences, 4(3), 140, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Mihriban Gedik. 1990 yılında Giresun’da doğdu. İlk, orta eğitimini Terme\SAMSUN ve lise eğitimini Giresun’da tamamladı. 2008 yılında Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi’nden mezun oldu.2009 yılında Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı.

