



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**CAT¹-GRUPLARIN KATEGORİSİNDE ÇAPRAZLANMIŞ
MODÜLLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre KENDİR

DANIŞMAN

Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

AKSARAY, 2023

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 202342009 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Emre KENDİR** tarafından hazırlanan “**CAT¹-GRUPLARIN KATEGORİSİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN

Pamukkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Yunus ATALAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 19 / 04 / 2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Emre KENDİR

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin tamamlanmasında emeği geçen herkese en içten teşekkürlerimi sunarım. Her şeyden önce, yüksek lisans çalışmalarım boyunca paha biçilmez rehberliği, teşviki ve geri bildirimleri bu araştırmanın başarısına aracı olan danışmanım Doç. Dr. Tunçar şAHAN’a derinden borçluyum.

Ayrıca, bu çalışmanın kalitesini önemli ölçüde artıran yapıcı yorumları ve anlayışlı önerileri için tez savunma jüri üyeleri Doç. Dr. Yunus ATALAN ve Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN'e minnettarım.

Yüksek lisans yolculuğumun iniş ıkışları boyunca beni ayakta tutan sarsılmaz destekleri, anlayışları ve motivasyonları için aileme ve arkadaşlarıma minnettarım.

Son olarak, bu çalışmanın amacı doğrultusunda zamanlarını, bilgilerini ve deneyimlerini cömertçe paylaşan tüm katılımcılara en içten teşekkürlerimi sunmak isterim.

Değerli katkılarınız için hepinize teşekkür ederim.

Emre KENDİR

Aksaray, 2023

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	6
3. ÇAPRAZLANMIŞ CAT ¹ -MODÜLLER.....	10
3.1 Grupların Kategorisinde Çaprazlanmış Modüller	10
3.1.1 Grupların kategorisinde genişlemeler ve yarı-direkt çarpım.....	10
3.1.2 Çaprazlanmış modüller.....	12
3.2 Cat ¹ -Gruplar	17
3.3 Cat ¹ -Grupların Kategorisinde Çaprazlanmış Modüller	19
3.3.1 Cat ¹ -grupların kategorisinde genişlemeler ve yarı-direkt çarpım.....	19
3.3.2 Çaprazlanmış cat ¹ -modüller	23
4. KATEGORİ DENKLİĞİ.....	26
4.1 Çaprazlanmış Kareler	26
4.2 Cat ² -Gruplar	34
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	38
KAYNAKLAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ	43

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAT¹-GRUPLARIN KATEGORİSİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Emre KENDİR

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

ÖZET

Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin homotopi 2-tipten bağlantılı uzayların bir cebirsel modeli olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Ayrıca cat^1 -gruplar ve grupların kategorisindeki iç kategoriler, diğer bir ifadeyle 2-gruplar veya grup-grupoidler, kategoriksel olarak gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllere denktirler. Yani bu cebirsel yapılar da homotopi 2-tipten bağlantılı uzayların birer cebirsel modelidirler. Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki çaprazlanmış objeler birer gruplar üzerinde çaprazlanmış kare olarak, cat^1 -grupların kategorisindeki cat^1 -objeler ise cat^2 -grup olarak adlandırılır. Gruplar üzerindeki çaprazlanmış kareler ve buna kategoriksel olarak denk olan cat^2 -gruplar ise homotopi 3-tipten bağlantılı uzayların bir cebirsel modelidirler.

Bu tez çalışmasında, homotopi 3-tipten bağlantılı uzayların yeni bir cebirsel modeli olarak cat^1 -grupların kategorisindeki çaprazlanmış modül, yani çaprazlanmış cat^1 -modül, cebirsel yapısı karakterize edilip bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu tür cebirsel yapıların kategoriksel olarak gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelere denk oldukları gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış modül, cat^1 -grup, çaprazlanmış kare, cat^2 -grup.

Nisan, 2023; 43 sayfa

M.Sc. THESIS

CROSSED MODULES IN THE CATEGORY OF CAT^1 -GROUPS

Emre KENDİR

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tunçar ŒAHAN

ABSTRACT

It is well known that crossed modules over groups are an algebraic model of homotopy 2-type connected spaces. Moreover, cat^1 -groups and internal categories in the category of groups, i.e. 2-groups or group-groupoids, are categorically equivalent to crossed modules over groups. So these algebraic structures are algebraic models of homotopy 2-type connected spaces. Crossed objects in the category of crossed modules over groups are called crossed squares over groups, and cat^1 -objects in the category of cat^1 -groups are called cat^2 -groups. Crossed squares over groups and the categorically equivalent cat^2 -groups are an algebraic model of homotopy 3-type connected spaces.

In this thesis, as a new algebraic model of homotopy 3-type connected spaces, the algebraic structure of the crossed module on the category of cat^1 -groups, i.e. the crossed cat^1 -module, is characterized and some of its properties are studied. It is also shown that such algebraic structures are categorically equivalent to crossed squares over groups.

Keywords: Crossed module, cat^1 -group, crossed square, cat^2 -group

April, 2023; 43 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Grup homomorfizmlerinin bir dizisi.	10
Şekil 3.2. Grup homomorfizmlerinin bir dizisi.	10
Şekil 3.3. Grup genişlemesi.	10
Şekil 3.4. Ayrık genişlemenin kartezyen çarpıma denkliği.	11
Şekil 3.5. Ayrık genişleme morfizmi diyagramı.	12
Şekil 3.6. Çaprazlanmış modül diyagramı.	13
Şekil 3.7. Çaprazlanmış modül morfizmi diyagramı.	16
Şekil 3.8. Cat^1 -grup morfizmi diyagramı.	18
Şekil 4.1. Çaprazlanmış kare diyagramı.	27
Şekil 4.2. Çaprazlanmış kare morfizmi diyagramı.	27
Şekil 4.3. Cat^2 -grup diyagramı.	35
Şekil 4.4. Cat^2 -grup morfizm diyagramı.	35



1. GİRİŞ

Çaprazlanmış modüller ilk kez 1946 yılında İngiliz matematikçi John Henry Constantine Whitehead tarafından tanıtıldı ve Whitehead bu yapıları homotopi teorisi ve cebirsel topoloji üzerine yaptığı çalışmalarında kullandı (Whitehead, 1946). Whitehead çaprazlanmış modül kavramını, bir uzayın temel grubunu incelemek için bir araç olarak tanıttı ve bir uzayın birinci homotopi grubunun, uzayla ilişkili belirli bir çaprazlanmış modülün otomorfizm grubu olarak elde edilebileceğini gösterdi (Whitehead, 1948, 1949). Whitehead'in orijinal çaprazlanmış modül tanımı, modern tanımdan biraz farklıydı, ancak temel fikir aynıydı. Belirli aksiyomları sağlayan H üzerinde G nin bir grup etkimesiyle birlikte bir çift grup (G, H) olarak çaprazlanmış modülü tanımladı. 1970'lerin sonlarında Ronald Brown ve Christopher B. Spencer, şimdi daha yaygın olarak kullanılan tanım olan çaprazlanmış modül kavramının değiştirilmiş bir versiyonunu tanıttı (Brown ve Spencer, 1976). Brown tanımında, bir grup etkimesi yerine bir grup homomorfizmi fikrini kullandı ve kavramın daha genel bir versiyonu olan "grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül" kavramını ortaya koydu.

Çaprazlanmış modül kavramı, kavramı daha yüksek boyutlara genelleştiren ve günümüzde cebirsel topoloji ve ilgili alanlarda kullanılan çaprazlanmış modüllerin temel özelliklerinin çoğunu belirleyen Ronald Brown da dahil olmak üzere diğer matematikçiler tarafından daha da geliştirildi ve kavram, cebirsel topoloji, homotopi teorisi ve kategori teorisi dahil olmak üzere matematiğin çeşitli alanlarında uygulandı (Brown ve Higgins, 1978; Brown, 1984; Loday, 1982; Brown ve Loday, 1987a; Porter, 1987). Çaprazlanmış modüller ayrıca uzayların homotopi gruplarını, liflerin (fibrations) homotopi teorisini ve grupların gruplar tarafından genişlemelerinin sınıflandırılmasını incelemek için kullanıldı (Brown, 1987). Ayrıca yüksek boyutlu cebir çalışmalarında ve topolojik kuantum alan teorilerinin geliştirilmesinde kullanılmıştır (Ellis, 1988; Yetter 1992, 1993). Çaprazlanmış modüller fizikte, özellikle ayar (gauge) teorilerinin incelenmesinde de kullanılmıştır (Dijkgraaf ve Witten, 1990). Genel olarak, çaprazlanmış modül kavramının farklı cebirsel yapılar arasındaki ilişkileri anlamak için yararlı bir araç olduğu kanıtlanmış ve modern matematikte aktif bir araştırma alanı olmaya devam etmektedir (Higgins, 1956; Orzech 1972a, 1972b; Akız vd., 2020).

Çaprazlanmış modüller gruplardan daha karmaşık olan cebirsel yapıları tanımlamanın bir yolunu sağlarlar ve bir tür simetri veya dönüşümün söz konusu olduğu durumları incelemek için faydalıdır. Çaprazlanmış modüllerin önemli olmasının temel nedenlerinden bazıları şunlardır:

- Cebirsel topoloji: Çaprazlanmış modüller, deformasyona göre sürekli fonksiyonları inceleyen ve cebirsel topolojinin bir dalı olan homotopi teorisinde önemli bir araçtır. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisindeki ana uygulamalarından biri, grupların daha yüksek boyutlu analogları olan homotopi 2-tiplerinin incelenmesidir. Özellikle çaprazlanmış modüller, homotopi 2-tiplerini sınıflandırmak ve cebirsel yapılarını anlamak için kullanılır.
- Kategori teorisi: Çaprazlanmış modüller, matematiksel yapıların özelliklerini ve ilişkilerini inceleyen matematiğin bir dalı olan kategori teorisinde de kullanılır. Spesifik olarak, çaprazlanmış modüller, bir küme yerine bir kategoride bulunan bir grubun genelleştirilmesi olan kategorik grup kavramını tanımlamak için kullanılır. Kategorik grupların cebirsel topoloji, cebirsel geometri ve matematiksel fizikte uygulamaları vardır.
- Grup teorisi: Çaprazlanmış modüllerin, grupların uzantılarını incelemek ve grupları izomorfizme kadar sınıflandırmak için kullanıldıkları grup teorisinde de uygulamaları vardır. Özellikle, çaprazlanmış modüller, değişmeli uzantılardan daha karmaşık olan grupların değişmeli olmayan uzantılarını tanımlamanın bir yolunu sağlar.
- Matematiksel fizik: Çaprazlanmış modüller, temel parçacıkların davranışını tanımlayan bir fiziksel teoriler sınıfı olan ayar teorilerinin cebirsel yapısını incelemek için kullanıldıkları teorik fizikte de kullanılır. Özellikle çaprazlanmış modüller, bir manifold üzerindeki bir Lie grubunun grup etkimeleri ile ilgili olan ayar teorilerinin simetrilerini tanımlamanın bir yolunu sağlar. Bir grubun başka bir grup üzerinde bazı ek yapıyı koruyacak şekilde hareket ettiği durumları tanımlamak için kullanılırlar. Bu, parçacık fiziğindeki ayar grupları ve kristalografideki simetri grupları gibi matematik ve fizikteki birçok önemli örneği içerir.

Genel olarak, çaprazlanmış modüller, cebirsel yapıları ve bunların matematiğin diğer alanlarıyla olan ilişkilerini incelemek için önemli ve çok yönlü bir araçtır. Karmaşık

yapıları ve simetrikleri daha soyut ve kavramsal bir şekilde anlamamıza olanak tanır, bu da yeni içgörülere ve keşiflere yol açabilir.

Çaprazlanmış modüller, cebirsel yapıları grup seviyesinin ötesinde genelleştirmeyi amaçlayan daha büyük bir yüksek boyutlu cebir teorisinin parçasıdır. Yüksek boyutlu cebirin temel fikri, yalnızca öğeleri ve işlemleri değil, aynı zamanda bu öğeler arasındaki yüksek boyutlu ilişkileri de içeren cebirsel yapıları incelemektir.

Yüksek boyutlu cebirin kalbinde, kategori kavramını genelleştiren matematiksel bir yapı olan n –kategori kavramı vardır. 0 –kategori sadece bir kümedir, 1 –kategori bir kategoridir, 2 –kategori morfizmler arasındaki ilişkileri içeren ekstra yapıya sahip bir kategoridir. Yüksek boyutlu cebirin temel kavrayışlarından biri, geleneksel olarak kümeler ve fonksiyonlar açısından tanımlanan birçok cebirsel yapının doğal olarak n –kategorileri olarak yeniden yorumlanabilmesidir. Örneğin, bir grup tek bir nesneye sahip bir 1 –kategori olarak düşünülebilir, burada morfizmler grup elemanlarıdır ve kompozisyon işlemi grup işlemi ile verilir. Benzer şekilde, bir topolojik uzay, nesneleri noktalar olan ve morfizmleri noktalar arasındaki eğriler olan bir 1 –kategori olarak düşünülebilir.

Brown ve Spencer (1976) grupoidlerin, yani her morfizmin bir izomorfizm olduğu kategorilerin, kategorisinde grup objeleri karakterize edip bu tip bir yapıyı grup-grupoid olarak adlandırmışlardır. Ayrıca grup-grupoidlerin kategorisi ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinin doğal olarak denk olduklarını göstermişlerdir. Bu denklik sayesinde çaprazlanmış modüller için tanımlanmış birçok kavram grup-grupoidlerin kategorisinde yorumlanmıştır (Brown ve Mucuk, 1994; Mucuk vd., 2014; Mucuk ve Şahan, 2019, Şahan, 2019). Brown ve Spencer (1976) tarafından verilen denklik, çok işlemli gruplar olarak adlandırılan, çok daha genel cebirsel kategoriler için Porter (1987) tarafından elde edilmiştir. Bu denklik sonucunda benzer yorumlama çalışmaları çok işlemli gruplar için de verilmiştir (Akız vd., 2013; Mucuk ve Şahan, 2014; Akız vd., 2020; Şahan ve Mucuk, 2020).

Çaprazlanmış modüller, yüksek boyutlu cebirde önemli bir araçtır çünkü cebirsel nesnelerin yüksek boyutlu yapısını yakalamanın bir yolunu sağlarlar. Spesifik olarak, bir çaprazlanmış modül, tek bir nesneye sahip bir 2 –kategoridir; burada morfizmler,

grup homomorfizmleridir ve daha yüksek boyutlu yapı, grubun kendi üzerindeki etkimesi ile verilir.

Daha genel olarak, çaprazlanmış kompleksler teorisi, çoklu grup etkimeleri ve daha yüksek boyutlu ilişkiler içeren daha yüksek boyutlu cebirsel yapıları incelemek için bir çerçeve sağlar. Çaprazlanmış kompleksler, çaprazlanmış modüllerin doğal bir genellemesidir ve karmaşık bir şekilde etkileşime giren bir grup kulesi ve grup etkimeleri olarak tanımlanır (Norrie, 1987, 1990; Brown ve Higgins, 1991; Mutlu ve Porter, 2000).

Genel olarak, yüksek boyutlu cebir teorisi ve bunun çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış kompleksler gibi cebirsel yapılara uygulamaları, matematiksel nesnelerin cebirsel yapısını geleneksel yöntemlerle mümkün olandan daha derin bir seviyede anlamak için güçlü bir çerçeve sağlar.

Homotopi tipleri topoloji ve geometrinin en temel kısımlarından biridir. Cebirsel modeller de konu içinde önemli bir yer teşkil etmektedir. 20. yüzyılın başlarında değişmeli olmayan bir boyutlu $\pi_1(X, x)$ temel grupların; geometri, topoloji ve analizdeki uygulamaları, $n \geq 0$ için n boyutlu $H_n(X)$ homoloji grubunun; integrasyon, Green-Stokes teoremi ve kompleks değerli fonksiyonlar teorisindeki uygulamaları ve bağlantılı bir uzay için $H_1(X) = \pi_1(X, x)^{Ab}$ eşitliği biliniyordu. Son eşitlikten de görüleceği gibi değişmeli olmayan $\pi_1(X, x)$ temel grubu incelenen X uzayı hakkında birinci homoloji grubu $H_1(X)$ den daha fazla bilgi içeriyordu ve bu nedenle “Temel grupların yüksek mertebeden değişmeli olamayan versiyonları”nın tanımlanması doğrultusunda önemli bir ihtiyaç doğmuştur. (X, x_0) noktalı topolojik uzayı için $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, 1), (X, x_0)]$ olup $n \geq 1$ için $\pi_n(X, x_0)$ üzerinde bir grup yapısı vardır ve $n \geq 2$ için $\pi_n(X, x_0)$ grubu değişmelidir (Brown, 1984; Brown ve Mucuk, 1994).

CW-uzayları ve aralarındaki sürekli dönüşümlerle birlikte oluşturduğu kategorinin $i > n$ için $\pi_i(X) = 0$ şartını sağlayan uzayların oluşturduğu full alt kategorisindeki objelere (uzaylara veya homotopilerine) n – tipler denir. **Gp** grupların kategorisini belirtmek üzere $\pi_1: 1 - \text{tipler} \rightarrow \mathbf{Gp}$ temel grup fanktoru 1-tipler ve **Gp** kategorileri arasında bir denklik oluşturur. $B: \mathbf{Gp} \rightarrow 1 - \text{tipler}$ sınıflandırma uzayı fanktoru π_1 fanktorunun doğal bir tersidir (Loday, 1982). Yani gruplar 1-tipler için cebirsel bir

modellerdir. Bu noktada Whitehead tarafından 2-boyutlu gruplar olarak da adlandırılan çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmış ve ardından Mac Lane ve Whitehead (1950) tarafından çaprazlanmış modüllerin 2-tipler için bir cebirsel model olduğu gösterilmiştir. Çaprazlanmış modüller ayrıca cebirde normal altgrupların, modüllerin ve merkezsiz genişlemelerin bir genellemesidir. Ayrıca son zamanlarda çaprazlanmış modül kavramı diferensiyel geometri ve Galois teorisinde kullanılmaya başlamıştır (Juro, 2011; Martins ve Picken, 2011; Mackenzie, 1987). Yine yakın zamanlarda Loday (1982) tarafından 2-tipler için cebirsel bir başka model olan cat^1 -grup ve 3-tipler için cebirsel bir model olarak çaprazlanmış kare kavramları tanımlanmıştır (Conduché, 1984; Arvasi, 1997). Çaprazlanmış kareler, çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki çaprazlanmış modül objelerdir.

Son zamanlarda, Norrie'nin tezinden bu yana, çaprazlanmış modüllerin cebirsel çalışması anlamında bir araştırma alanı ortaya ıktı (Norrie, 1987). Norrie (1990), aprazlanmış modüller kategorisinin ve bunlar arasındaki transmodler morfizmlerin birçok sonucunun çaprazlanmış modüller için uygun eşdeğerlere sahip olduğunu gösterdi. Loday (1982) ise çaprazlanmış modül sınıfının cat^1 -gruplarının sınıfına karşılık geldiğini gösterdi.

Bu tez çalışmasında ise çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki cat^1 -objeler karakterize edilip bu cebirsel yapıların kategorisinin çaprazlanmış karelerin kategorisine denk olduğunun gösterilmesi amaçlanmıştır. Böylece 3-tipler için bir başka cebirsel model elde edilmiş olacaktır. Ayrıca, iyi bilinen bir sonuç olarak, çaprazlanmış kareler ile cat^2 -gruplar kategorik olarak denk olduğundan bu tezde elde edilen cebirsel yapının, yani çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki cat^1 -objelerin de cat^2 -gruplara kategorik olarak denk olduğu gösterilmiş olacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tezin diğer bölümde kullanılan temel tanım ve sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.1. A en az bir elemanı olan bir küme ve $*$: $A \times A \rightarrow A$ bir ikili işlem olsun.

(i) Her $x, y, z \in A$ için

$$x * (y * z) = (x * y) * z \quad (2.1)$$

dır.

(ii) Her $x \in A$ için

$$x * e = e * x = x \quad (2.2)$$

olacak şekilde A kümesinin bir tek e elemanı vardır.

(iii) Her $x \in K$ için

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e \quad (2.3)$$

olacak şekilde A kümesinde bir tek x^{-1} elemanı vardır.

(iv) Her $x, y \in A$ için

$$x * y = y * x \quad (2.4)$$

dir.

Yukarıdaki (i)-(iii) şartını sağlayan $(A, *)$ cebirsel yapısına bir grup denir. Bu şartlara ek olarak (iv) şartı da sağlanırsa $(A, *)$ yapısına bir abelyen (değişmeli) grup denir.

Buradan itibaren tezin devamında, verilen grup abelyen olmasa bile, grup işlemi $+$ sembolü ile ve grubun birim elemanı 0 sembolü ile gösterilecektir.

Tanım 2.2 A bir grup ve $S \subseteq A$ olsun. Eğer S kümesi de aynı ikili işlemle bir grup oluyorsa S ye A nın bir alt grubu denir ve bu $S \leq A$ ile gösterilir. Yani; $S_1, S_2 \subseteq A$ olmak üzere

$$S_1 + S_2 = \{ s_1 + s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \} \quad (2.5)$$

ve

$$-S_1 = \{ -s_1 \mid s_1 \in S_1 \} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$S \leq A \Leftrightarrow S + S \subseteq S, \quad 0 \in S \quad \text{ve} \quad -S \subseteq S \quad (2.7)$$

dir.

Tanım 2.3 A bir grup ve $S \leq A$ olsun. Eğer her $a \in A$ için $a + S = \{a\} + S$ ve $S + a = S + \{a\}$ olmak üzere $a + S = S + a$ oluyorsa S ye A nın bir normal alt grubu (ideali) denir ve bu durum $S \trianglelefteq A$ ile gösterilir.

A bir grup ve N ise A nın bir normal alt grubu olarak verilsin. Bu durumda

$$A/N = \{a + N \mid a \in A\} \quad (2.8)$$

bölüm kümesi olmak üzere

$$\begin{aligned} A/N \times A/N &\rightarrow A/N \\ (a_1 + N, a_2 + N) &\mapsto (a_1 + N) + (a_2 + N) = (a_1 + a_2) + N \end{aligned} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanan işleme göre bir grup yapısı oluşturur ve bu grup A nın (N tarafından) bölüm grubu olarak adlandırılır.

Tanım 2.4 A ve B birer grup ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a_1, a_2 \in A$ için

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) \quad (2.10)$$

şartı sağlanıyorsa f dönüşümüne bir grup homomorfizmi denir.

Örnek 2.5 Her $r \in \mathbb{R}$ için $f(r) = r$ şeklinde tanımlanan $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

Eğer bir f grup homomorfizmi birebir ise monomorfizm, örten ise epimorfizm ve hem birebir hem de örten ise izomorfizm olarak adlandırılır. Bir A grubundan kendi üzerine tanımlanan izomorfizmlere otomorfizm denir ve A grubunun tüm otomorfizmlerinin kümesi $\text{Aut}(A)$ ile gösterilir. Ayrıca $\text{Aut}(A)$ kümesi fonksiyonların bilinen bileşke işlemi ile birlikte bir grup yapısı oluşturur. Bununla birlikte her $a \in A$ için

$$\begin{aligned} \psi_a &: A \rightarrow A \\ x &\mapsto \psi_a(x) = a + x - a \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm A nın bir otomorfizmidir. Bu tür otomorfizmlere birer iç otomorfizm denir ve A nın tüm iç otomorfizmlerin kümesi $\text{Inn}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6 A ve B iki grup ve $f: A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi olarak verilsin. Bu durumda $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$ kümesi f homomorfizminin çekirdeği olarak adlandırılır.

Tanım 2.7 A ve B birer grup olmak üzere

$$\begin{aligned} B \times A &\rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a \end{aligned} \quad (2.12)$$

fonksiyonu aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa B grubu A grubu üzerine etkir denir:

(i) Her $b, b_1 \in B$ ve $a \in A$ için

$$(b + b_1) \cdot a = b \cdot (b_1 \cdot a) \quad (2.13)$$

dır.

(ii) Her $b \in B$ ve $a, a_1 \in A$ için

$$b \cdot (a + a_1) = b \cdot a + b \cdot a_1 \quad (2.14)$$

dır.

(iii) Her $a \in A$ için

$$0_B \cdot a = a \quad (2.15)$$

dır.

Örnek 2.8 A bir grup ve N de A nın bir normal alt grubu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A \times N &\rightarrow N \\ (a, n) &\mapsto a \cdot n = a + n - a \end{aligned} \quad (2.16)$$

fonksiyonu bir grup etkimesidir. Gerçekten

(i) Her $a, a_1 \in A$ ve $n \in N$ için

$$\begin{aligned} (a + a_1) \cdot n &= (a + a_1) + n - (a + a_1) \\ &= a + a_1 + n - a_1 - a \\ &= a + (a_1 + n - a_1) - a \\ &= a + (a_1 \cdot n) - a \\ &= a \cdot (a_1 \cdot n) \end{aligned} \quad (2.17)$$

dır.

(ii) Her $a \in A$ ve $n, n_1 \in N$ için

$$\begin{aligned}
a \cdot (n + n_1) &= a + n + n_1 - a \\
&= a + n - a + a + n_1 - a \\
&= (a + n - a) + (a + n_1 - a) \\
&= a \cdot n + a \cdot n_1
\end{aligned} \tag{2.18}$$

dır.

(iii) Her $n \in N$ için

$$0 \cdot n = 0 + n - 0 = n \tag{2.19}$$

dır.

Bu etkimeye özel olarak konjügasyon etkimesi denir.

Tanım 2.9 A ve B birer grup olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
B \times A &\rightarrow A \\
(b, a) &\mapsto b \cdot a = a
\end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir grup etkimesidir. Gerçekten;

(i) Her $b, b_1 \in B$ ve $a \in A$ için

$$(b + b_1) \cdot a = a = b \cdot (b_1 \cdot a) \tag{2.21}$$

dır.

(ii) Her $b \in B$ ve $a, a_1 \in A$ için

$$b \cdot (a + a_1) = a + a_1 = b \cdot a + b \cdot a_1 \tag{2.22}$$

dır.

(iii) Her $a \in A$ için

$$0_B \cdot a = a \tag{2.23}$$

dır.

Bu etkimeye özel olarak aşikâr etkime denir.

3. ÇAPRAZLANMIŞ CAT¹-MODÜLLER

3.1 Grupların Kategorisinde Çaprazlanmış Modüller

Bu kısımda Porter (1987) tarafından verilen bir cebirsel kategoride çaprazlanmış modüllerin elde edilmesi yöntemi hatırlatılacaktır.

3.1.1 Grupların kategorisinde genişlemeler ve yarı-direkt çarpım

Tanım 3.1 G ve H iki grup olsun. Şekil 3.1’de verilen grup homomorfizmleri dizisinde her bir homomorfizmin görüntüsü bir sonrakinin çekirdeğine eşit ise bu dizi grupların bir kısa tam dizisi olarak adlandırılır.

$$\{0\} \longrightarrow G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} H \longrightarrow \{0\}$$

Şekil 3.1. Grup homomorfizmlerinin bir dizisi.

Tanım 3.2 G ve H iki grup olsun. Şekil 3.2’de verilen grup homomorfizmleri dizisinde $\{0\} \rightarrow G$ ve $H \rightarrow \{0\}$ sıfır homomorfizmler, $i: G \rightarrow E$ bir monomorfizm, $p: E \rightarrow H$ bir epimorfizm ve $i(G) = \ker p$ ise, yani bu dizi bir kısa tam dizi ise E ye H grubunun G grubu ile bir genişlemesi denir.

$$\{0\} \longrightarrow G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} H \longrightarrow \{0\}$$

Şekil 3.2. Grup homomorfizmlerinin bir dizisi.

Tanım 3.3 E grubu, H grubunun bir G grubu ile Şekil 3.3’teki gibi bir genişlemesi olsun. Eğer $ps = 1_H$ olacak şekilde bir $s: H \rightarrow E$ grup homomorfizmi varsa E ye H nin G ile bir ayrık (split) genişlemesi denir.

$$\{0\} \longrightarrow G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} H \longrightarrow \{0\}$$

Şekil 3.3. Grup genişlemesi.

Burada $i: G \rightarrow E$ bir monomorfizm olduğundan G grubunu E grubunun bir alt grubu, hatta $i(G) = \ker p$ olduğundan bir normal alt grubu olarak düşünebilir ve böylece her $g \in G$ için $i(g) = g$ olarak alınabilir.

E grubu, H grubunun bir G grubu ile aşağıdaki gibi bir ayrık genişlemesi olmak üzere

$$\begin{aligned} H \times G &\rightarrow G \\ (h, g) &\mapsto h \cdot g = s(h) + g - s(h) \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir grup etkimesi belirtir. Ayrıca $G \times H$ kümesi ile E kümesinin elemanları arasında birebir bir eşleme vardır (Şekil 3.4). Bu eşlemeler ise

$$\begin{aligned} \theta &: G \times H \rightarrow E \\ (g, h) &\mapsto \theta(g, h) = g + s(h) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ve bunun tersi olan

$$\begin{aligned} \theta^{-1} &: E \rightarrow G \times H \\ e &\mapsto \theta^{-1}(e) = (e - sp(e), p(e)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

fonksiyonları ile verilir.

$$(g, h) \xrightarrow{\theta} g + s(h) \xrightarrow{\theta^{-1}} (g, h) \quad (3.4)$$

Bu birebir eşleşmeler yardımıyla, bu eşleşmeler birer grup homomorfizmi (izomorfizmi) olacak şekilde, $G \times H$ üzerinde bir grup yapısı oluşturulabilir. Yani;

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(\theta((g, h) + (g_1, h_1))) &= \theta^{-1}(\theta((g, h)) + \theta((g_1, h_1))) \\ &= \theta^{-1}(g + s(h) + g_1 + s(h_1)) \\ &= (g + s(h) + g_1 - s(h), h + h_1) \\ &= (g + h \cdot g_1, h + h_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} (G \times H) \times (G \times H) &\rightarrow G \times H \\ ((g, h), (g_1, h_1)) &\mapsto (g, h) + (g_1, h_1) = (g + h \cdot g_1, h + h_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde verilen ikili işlemle $G \times H$ üzerinde, E grubuna izomorf olan, bir grup yapısı oluşturulur. Bu $G \times H$ grubuna G ile H gruplarının yarı-direkt çarpımı denir ve bu grup genelde $G \rtimes H$ ile gösterilir. Bu grupta birim eleman $(0_G, 0_H)$ elemanı ve bir (g, h) elemanının tersi ise $((-h) \cdot (-g), -h)$ dır.

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{i} & E & \xleftarrow[p]{s} & H \\ & & \updownarrow \theta^{-1} \quad \theta & & \\ & & G \times H & & \end{array}$$

Şekil 3.4. Ayırık genişlemenin kartezyen çarpıma denkliği.

Örnek 3.4 G ve H birer grup olsun. H nin G üzerine aşıkâr etkimesi verilsin. Bu durumda her $(g, h), (g_1, h_1) \in G \rtimes H$ için

$$\begin{aligned}(g, h) + (g_1, h_1) &= (g + h \cdot g_1, h + h_1) \\ &= (g + g_1, h + h_1)\end{aligned}\tag{3.7}$$

olup $G \rtimes H$ yarı-direkt çarpım grubu aslında $G \times H$ direkt çarpım grubu olur. Yani direkt çarpım grubu yarı-direkt çarpım grubunun bir özel halidir.

3.1.2 Çaprazlanmış modüller

E grubu, B grubunun bir A grubu ile bir ayrık genişlemesi ve E_1 grubu, B_1 grubunun bir A_1 grubu ile bir ayrık genişlemesi olsun. Bu durumda $f_A: A \rightarrow A_1$, $f_E: E \rightarrow E_1$ ve $f_B: B \rightarrow B_1$ birer grup homomorfizmi olmak üzere

- (i) $f_E i = i_1 f_A$,
- (ii) $f_B p = p_1 f_E$ ve
- (iii) $f_E s = s_1 f_B$

ise, yani diğer bir ifadeyle Şekil 3.5'te verilen diyagramlar değişmeli ise (f_A, f_E, f_B) üçlüsüne grupların kategorisinde bir ayrık genişleme dönüşümü denir.

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \longrightarrow \{0\} \\ & & \downarrow f_A & & \downarrow f_E & & \downarrow f_B \\ \{0\} & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{p_1} & B_1 \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

$\overset{s}{\curvearrowright}$ (E'den B'ye) $\underset{s_1}{\curvearrowright}$ (E₁'den B₁'ye)

Şekil 3.5. Ayrık genişleme morfizmi diyagramı.

Bir B grubunun bir A grubu üzerine bir grup etkimesi verilmişse bu etkimeden elde edilen yarı-direkt çarpım grubunun B nin A ile bir ayrık genişlemesi olduğunu görmüştük. Ayrıca her A grubunun kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile de bir ayrık genişlemesi elde edilebilir.

Tanım 3.5 A ve B birer grup ve $B \times A \rightarrow A$, $(b, a) \mapsto b \cdot a$ bir etkiye ve $\alpha: A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi olsun. Bu durumda eğer $(1_A, 1_A \times \alpha, \alpha)$ ve $(\alpha, \alpha \times 1_B, 1_B)$

üçlülere sırasıyla A nın kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile elde edilen ayrık genişlemeden B nin A üzerine yukarıda verilen etkimeden elde edilen ayrık genişlemesine ve B nin A üzerine yukarıda verilen etkimeden elde edilen ayrık genişlemesinden B nin kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile elde edilen ayrık genişlemesine birer ayrık genişleme dönüşümü ise (A, B, α) üçlüsüne bir çaprazlanmış modül denir (Porter, 1987).

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & A \rtimes A & \xrightleftharpoons[p_A]{s_A} & A \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow 1_A & & \downarrow 1_A \times \alpha & & \downarrow \alpha \\
 \{0\} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & A \rtimes B & \xrightleftharpoons[p]{s} & B \longrightarrow \{0\} \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \times 1_B & & \downarrow 1_B \\
 \{0\} & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i_B} & B \rtimes B & \xrightleftharpoons[p_B]{s_B} & B \longrightarrow \{0\}
 \end{array}$$

Şekil 3.6. Çaprazlanmış modül diyagramı.

Yukarıdaki tanımda verilen $(1_A, 1_A \times \alpha, \alpha)$ ve $(\alpha, \alpha \times 1_B, 1_B)$ dönüşümlerinin birer ayrık genişleme dönüşümü olması için

$$\begin{aligned}
 1_A \times \alpha & : A \rtimes A \rightarrow A \rtimes B \\
 (a, a_1) & \mapsto (a, \alpha(a_1))
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \alpha \times 1_B & : A \rtimes B \rightarrow B \rtimes B \\
 (a, b) & \mapsto (\alpha(a), b)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

dönüşümlerinin birer grup homomorfizmi olması yeterlidir. Yani;

$$\begin{aligned}
 (1_A \times \alpha)((a, a_1) + (a_2, a_3)) &= (1_A \times \alpha)((a + a_1 \cdot a_2, a_1 + a_3)) \\
 &= (1_A \times \alpha)((a + a_1 + a_2 - a_1, a_1 + a_3)) \\
 &= (a + a_1 + a_2 - a_1, \alpha(a_1 + a_3)) \\
 &= (a + a_1 + a_2 - a_1, \alpha(a_1) + \alpha(a_3))
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

ile

$$\begin{aligned}
(1_A \times \alpha)((a, a_1)) + (1_A \times \alpha)((a_2, a_3)) &= (a, \alpha(a_1)) + (a_2, \alpha(a_3)) \\
&= (a + \alpha(a_1) \cdot a_2, \alpha(a_1) + \alpha(a_3))
\end{aligned} \tag{3.11}$$

birbirlerine eşit olmalıdır. Böylece her $a_1, a_2 \in A$ için;

$$\alpha(a_1) \cdot a_2 = a_1 + a_2 - a_1 \tag{3.12}$$

olmalıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(\alpha \times 1_B)((a, b) + (a_1, b_1)) &= (\alpha \times 1_B)((a + b \cdot a_1, b + b_1)) \\
&= (\alpha(a + b \cdot a_1), b + b_1) \\
&= (\alpha(a) + \alpha(b \cdot a_1), b + b_1)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ile

$$\begin{aligned}
(\alpha \times 1_B)((a, b)) + (\alpha \times 1_B)((a_1, b_1)) &= (\alpha(a), b) + (\alpha(a_1), b_1) \\
&= (\alpha(a) + b \cdot \alpha(a_1), b + b_1) \\
&= (\alpha(a) + b + \alpha(a_1) - b, b + b_1)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

birbirlerine eşit olmalıdır. Böylece her $a_1 \in A$ ve $b \in B$ için;

$$\alpha(b \cdot a_1) = b + \alpha(a_1) - b \tag{3.15}$$

olmalıdır. O halde çaprazlanmış modül tanımını elemanlar cinsinden aşağıdaki gibi yapabiliriz.

Önerme 3.6 A ve B birer grup ve $\alpha: A \rightarrow B$ bir grup homomorfizmi olmak üzere

$$\begin{aligned}
B \times A &\rightarrow A \\
(b, a) &\mapsto b \cdot a
\end{aligned} \tag{3.16}$$

bir grup etkimesi olsun. Eğer her $a, a_1 \in A$ ve $b \in B$ için;

- (i) $\alpha(b \cdot a) = b + \alpha(a) - b$,
- (ii) $\alpha(a) \cdot a_1 = a + a_1 - a$

şartları sağlanıyorsa (A, B, α) üçlüsü grupların kategorisinde bir çaprazlanmış modül olur.

Örnek 3.7 Her G grubu iki farklı biçimde bir çaprazlanmış modül olarak düşünülebilir.

- (i) G nin herhangi bir N normal alt grubu için G nin N üzerine konjugasyon etkimesi ile birlikte $\text{inc}: N \rightarrow G$ içine dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür.
- (ii) G nin tüm otomorfizmlerinin grubu $\text{Aut}(G)$ nin G üzerine

$$\begin{aligned} \text{Aut}(G) \times G &\rightarrow G \\ (f, x) &\mapsto f \cdot x = f(x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlı etkimesiyle birlikte $\Phi: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ iç otomorfizm dönüşümü bir çaprazlanmış modül belirtir.

Örnek 3.8 X bir topolojik grup olsun.

$$\text{St}_{\pi X} e = \{ [\alpha] \mid \alpha: [0,1] \rightarrow X \text{ sürekli ve } \alpha(0) = 1 \} \quad (3.18)$$

ve her $[\alpha] \in \text{St}_{\pi X} e$ için $d([\alpha]) = \alpha(1)$ olarak tanımlanmak üzere $(\text{St}_{\pi X} e, X, d)$ bir çaprazlanmış modüldür.

(A, B, α) ve (A', B', α') birer çaprazlanmış modül, $f_A: A \rightarrow A'$ ve $f_B: B \rightarrow B'$ birer grup homomorfizmi olsun. Eğer

- (i) $f_B \alpha = \alpha' f_A$ ve
- (ii) her $a \in A$ ve $b \in B$ için;

$$f_A(b \cdot a) = f_B(b) \cdot f_A(a) \quad (3.19)$$

şartları sağlanırsa, yani diğer bir ifadeyle Şekil 3.7'deki diyagramlar değişmeli ise $\langle f_A, f_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')$ ikilisine (A, B, α) dan (A', B', α') ya bir çaprazlanmış modül morfizmi denir.

$$\begin{array}{ccccc}
B \times A & \xrightarrow{\cdot} & A & \xrightarrow{\alpha} & B \\
f_B \times f_A \downarrow & & f_A \downarrow & & \downarrow f_B \\
B' \times A' & \xrightarrow{\cdot} & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B'
\end{array}$$

Şekil 3.7. Çaprazlanmış modül morfizmi diyagramı.

Tüm çaprazlanmış modüller ve bunlar arasında yukarıda tanımlandığı şekilde çaprazlanmış modül morfizmleri bir kategori oluşturur. Bu kategori ise **XMod(Gp)** ile gösterilir.

Tanım 3.9 (A, B, α) ve (C, D, γ) birer çaprazlanmış modül olmak üzere

- (i) $C \leq A, D \leq B$,
- (ii) $\gamma = \alpha|_C$ ve
- (iii) D nin C üzerine etkimesi, B nin A üzerine etkimesinden indirgenmiş etkimesidir;

şartları sağlanıyorsa (C, D, γ) çaprazlanmış modülüne (A, B, α) çaprazlanmış modülünün bir alt objesi ya da alt çaprazlanmış modülü denir (Norrie, 1987).

Önerme 3.10 $\langle f_A, f_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere bu çaprazlanmış modül morfizminin görüntüsü olarak adlandırılan

$$\text{Im}\langle f_A, f_B \rangle = (\text{Im } f_A, \text{Im } f_B, \alpha'|_{\text{Im } f_A}) \quad (3.20)$$

bir çaprazlanmış modül olup (A', B', α') çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür.

Tanım 3.11 (A, B, α) bir çaprazlanmış modül ve (S, T, σ) ise (A, B, α) nın bir alt çaprazlanmış modülü olmak üzere

- (i) $T \leq B$,
- (ii) her $s \in S$ ve $b \in B$ için

$$b \cdot s \in S \quad (3.21)$$

(iii) her $t \in T$ ve $a \in A$ için

$$t \cdot a - a \in S \quad (3.22)$$

şartları sağlanıyorsa (S, T, σ) çaprazlanmış modülüne (A, B, α) çaprazlanmış modülünün bir normal alt objesi ya da normal alt çaprazlanmış modülü ya da kısaca bir ideali denir (Norrie, 1987).

Önerme 3.12 $\langle f_A, f_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere bu çaprazlanmış modül morfizminin çekirdeği olarak adlandırılan

$$\ker \langle f_A, f_B \rangle = (\ker f_A, \ker f_B, \alpha|_{\ker f_A}) \quad (3.23)$$

bir çaprazlanmış modül olup (A, B, α) çaprazlanmış modülünün bir idealidir.

3.2 Cat¹-Gruplar

Tanım 3.13 G bir grup ve $s, t: G \rightarrow G$ birer grup homomorfizmi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (G, s, t) üçlüsüne bir cat¹-grup denir (Loday, 1982).

- (i) $st = t, ts = s$ ve
- (ii) $[\ker s, \ker t] = \{0\}$.

Burada (ii) şartı şu anlama gelmektedir: G nin $\ker s$ ve $\ker t$ altgruplarının elemanları değişmelidir.

Önerme 3.14 (G, s, t) bir cat¹-grup olmak üzere

- (i) $ss = s,$
- (ii) $tt = t$ ve
- (iii) $\text{Im } s = \text{Im } t$

dir.

Her tek elemanlı $\{0\}$ grubu $s = 1_{\{0\}}$ ve $t = 1_{\{0\}}$ endomorfizmleri ile beraber bir cat¹-grup olur. Bu cat¹-gruba sıfır cat¹-grup denir. Ayrıca, daha genel olarak, her G grubu için $(G, 1_G, 1_G)$ üçlüsü de bir cat¹-gruptur.

Tanım 3.15 (G, s, t) ve (G', s', t') birer cat^1 -grup olsun. Bir $f: G \rightarrow G'$ grup homomorfizmi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa bu f dönüşümüne bir cat^1 -grup morfizmi denir (Loday, 1982).

- (i) $fs = s'f$ ve
- (ii) $ft = t'f$.

Yani $f: G \rightarrow G'$ bir cat^1 -grup morfizmidir ancak ve ancak aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightleftharpoons[s]{s} & G \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ G' & \xrightleftharpoons[t']{s'} & G' \end{array}$$

Şekil 3.8. Cat^1 -grup morfizmi diyagramı.

$f: (G, s, t) \rightarrow (G', s', t')$ bir cat^1 -grup morfizmi olmak üzere eğer $f: G \rightarrow G'$ grup homomorfizmi bir monomorfizm (epimorfizm, izomorfizm) ise bu $f: (G, s, t) \rightarrow (G', s', t')$ cat^1 -grup morfizmi monomorfizm (epimorfizm, izomorfizm) olarak adlandırılır.

Tüm cat^1 -gruplar, yukarıda tanımlandığı şekilde cat^1 -grup morfizmleri ile birlikte bir kategori oluşturur bu kategori **$\text{Cat}^1 - (\text{Gp})$** ile gösterilir.

Grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile cat^1 -grupların kategorisinin denk olduğunu Loday (1982) tarafından gösterilmiştir. Şimdi bazı detaylara ihtiyacımız olduğundan bu denkliği hatırlatalım.

Teorem 3.16 Grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi **$\text{XMod}(\text{Gp})$** ile cat^1 -grupların kategorisi **$\text{Cat}^1 - (\text{Gp})$** doğal olarak denktir (Loday, 1982).

İspat: Öncelikle bir $F: \text{XMod}(\text{Gp}) \rightarrow \text{Cat}^1 - (\text{Gp})$ fonktoru tanımlayalım: Bir (A, B, α) çaprazlanmış modülü için $G = A \rtimes B$,

$$\begin{aligned} s &: A \rtimes B \rightarrow A \rtimes B \\ (a, b) &\mapsto s(a, b) = (0, b) \end{aligned} \quad (3.24)$$

ve

$$\begin{aligned} t &: A \rtimes B \rightarrow A \rtimes B \\ (a, b) &\mapsto t(a, b) = (0, \alpha(a) + b) \end{aligned} \quad (3.25)$$

olmak üzere $F_0((A, B, \alpha)) = (G, s, t)$ dir. Ayrıca bir $\langle f_A, f_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')$ çaprazlanmış modül morfizmi için $F_1(\langle f_A, f_B \rangle) = f_A \times f_B$ dir.

Şimdi, tersine olarak, bir $H: \mathbf{Cat}^1 - (\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{XMod}(\mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım: Bir (G, s, t) cat^1 -grubu için

$$\begin{aligned} \text{Im } s \times \ker s &\rightarrow \ker s \\ (x, g) &\mapsto x \cdot g = x + g - x \end{aligned} \quad (3.26)$$

bir grup etkimesidir ve bu etkiye ile birlikte $t|_{\ker s}: \ker s \rightarrow \text{Im } s$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül yapısına sahiptir. Yani; $H_0((G, s, t)) = (\ker s, \text{Im } s, t|_{\ker s})$ olarak tanımlanır. Ayrıca bir $f: (G, s, t) \rightarrow (G', s', t')$ cat^1 -grup morfizmi için

$$\langle f|_{\ker s}, f|_{\text{Im } s} \rangle: (\ker s, \text{Im } s, t|_{\ker s}) \rightarrow (\ker s', \text{Im } s', t'|_{\ker s'}) \quad (3.27)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmidir. Yani; $H_1(f) = \langle f|_{\ker s}, f|_{\text{Im } s} \rangle$ dir.

3.3 Cat^1 -Grupların Kategorisinde Çaprazlanmış Modüller

Bu kısımda Porter (1987) tarafından verilen tekniğe göre, tezin temel konusu olan, cat^1 -grupların kategorisinde çaprazlanmış modüllerin karakterizasyonu verilecektir. Yazım kolaylığı açısından tezin devamında cat^1 -gruplar $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$, $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$, ... şeklinde gösterilecektir.

3.3.1 Cat^1 -grupların kategorisinde genişlemeler ve yarı-direkt çarpım

$\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$, $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ ve $\mathcal{E} = (E, s_E, t_E)$ birer cat^1 -grup olmak üzere sıfır cat^1 -grup $\mathcal{O} = (\{0\}, 1_{\{0\}}, 1_{\{0\}})$ ile gösterilsin. $i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ bir cat^1 -grup monomorfizmi, $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ bir cat^1 -grup epimorfizmi ve $k: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ ise $pk = 1_{\mathcal{B}}$ olacak şekilde bir cat^1 -

grup monomorfizmi olsun. Bu durumda $\mathcal{E} = (E, s_E, t_E)$ cat^1 -grubuna $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ nin $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ tarafından bir ayrık cat^1 -grup genişlemesi denir.

Bu şekilde bir ayrık genişlemeden $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ nin $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ üzerine aşağıdaki şekilde bir türetilmiş etkimesi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a = k(b) + a - k(b) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Bu etkiye aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) her $b, b_1 \in B$ ve $a \in A$ için

$$(b + b_1) \cdot a = b \cdot (b_1 \cdot a), \quad (3.29)$$

(ii) her $b \in B$ ve $a, a_1 \in A$ için

$$b \cdot (a + a_1) = b \cdot a + b \cdot a_1, \quad (3.30)$$

(iii) her $a \in A$ için

$$0_B \cdot a = a, \quad (3.31)$$

(iv) her $b \in B$ için

$$b \cdot 0_A = 0_A, \quad (3.32)$$

(v) her $b \in \ker s_B$ ve $a_1 \in \ker t_A$ için

$$b \cdot a_1 = a_1, \quad (3.33)$$

(vi) her $b_1 \in \ker t_B$ ve $a \in \ker s_A$ için

$$b_1 \cdot a = a. \quad (3.34)$$

Burada dikkat edelim ki (iv) şartı (ii) şartından elde edilebilmektedir. Böylece cat^1 -grupların kategorisinde etkiye tanımı verebiliriz.

Tanım 3.17 $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ birer cat^1 -grup olmak üzere bir

$$\begin{aligned} B \times A &\rightarrow A \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a \end{aligned} \quad (3.35)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer

(i) her $b, b_1 \in B$ ve $a \in A$ için

$$(b + b_1) \cdot a = b \cdot (b_1 \cdot a), \quad (3.36)$$

(ii) her $b \in B$ ve $a, a_1 \in A$ için

$$b \cdot (a + a_1) = b \cdot a + b \cdot a_1, \quad (3.37)$$

(iii) her $a \in A$ için

$$0_B \cdot a = a, \quad (3.38)$$

(iv) her $b \in \ker s_B$ ve $a_1 \in \ker t_A$ için

$$b \cdot a_1 = a_1, \quad (3.39)$$

(v) her $b_1 \in \ker t_B$ ve $a \in \ker s_A$ için

$$b_1 \cdot a = a, \quad (3.40)$$

şartları sağlanıyorsa bu fonksiyona $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine bir cat^1 -grup etkimesi denir.

Bir $\mathcal{E} = (E, s_E, t_E)$ cat^1 -grubu bir $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ cat^1 -grubunun bir $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ cat^1 -grubu tarafından bir ayrık cat^1 -grup genişlemesi ve bir $\mathcal{E}' = (E', s_{E'}, t_{E'})$ cat^1 -grubu bir $\mathcal{B}' = (B', s_{B'}, t_{B'})$ cat^1 -grubunun bir $\mathcal{A}' = (A', s_{A'}, t_{A'})$ cat^1 -grubu tarafından bir ayrık cat^1 -grup genişlemesi olsun. Eğer $f_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, $f_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ ve $f_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ ayrık cat^1 -grup genişlemesi yapısını oluşturan dönüşümlerle uyumlu birer cat^1 -grup morfizmi iseler bu durumda $(f_{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{E}}, f_{\mathcal{B}})$ üçlüsüne bir ayrık cat^1 -grup genişlemesi morfizmi denir. Tüm ayrık cat^1 -grup genişlemeleri ve bunlar arasındaki ayrık cat^1 -grup genişlemesi morfizmleri bir kategori oluşturur ve bu kategori $\mathbf{SpExt}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ ile gösterilir.

Tanım 3.18 $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ birer cat^1 -grup olmak üzere $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine bir

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a \end{aligned} \quad (3.41)$$

cat^1 -grup etkimesi verilsin. Bu durumda $A \rtimes B$ grubu

$$\begin{aligned}
s_{A \rtimes B} = s_A \times s_B & : A \rtimes B \rightarrow A \rtimes B \\
(a, b) & \mapsto s_{A \rtimes B}(a, b) = (s_A(a), s_B(b))
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ve

$$\begin{aligned}
t_{A \rtimes B} = t_A \times t_B & : A \rtimes B \rightarrow A \rtimes B \\
(a, b) & \mapsto t_{A \rtimes B}(a, b) = (t_A(a), t_B(b))
\end{aligned} \tag{3.43}$$

dönüşümleri ile birlikte bir cat^1 -grup yapısına sahiptir. Gerçekten $s_{A \rtimes B} t_{A \rtimes B} = t_{A \rtimes B}$ ve $t_{A \rtimes B} s_{A \rtimes B} = s_{A \rtimes B}$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $[\ker s_{A \rtimes B}, \ker t_{A \rtimes B}] = \{(0,0)\}$ olduğunu da görelim. $(a, b) \in \ker s_{A \rtimes B}$, yani $a \in \ker s_A$, $b \in \ker s_B$ ve $(a_1, b_1) \in \ker t_{A \rtimes B}$, yani $a_1 \in \ker t_A$, $b_1 \in \ker t_B$, olsun. Bu durumda etkiye tanımının (iv) ve (v) şartlarından

$$\begin{aligned}
(a, b) + (a_1, b_1) &= (a + b \cdot a_1, b + b_1) \\
&= (a + a_1, b + b_1) \\
&= (a_1 + a, b_1 + b) \\
&= (a_1 + b_1 \cdot a, b_1 + b) \\
&= (a_1, b_1) + (a, b)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

dir. Bu $(A \rtimes B, s_{A \rtimes B}, t_{A \rtimes B})$ cat^1 -grubuna $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ cat^1 -gruplarının yarı-direkt çarpımı denir ve $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{B}$ ile gösterilir. $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{B}$ yarı-direkt çarpım cat^1 -grubu $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ tarafından bir ayrık cat^1 -grup genişlemesi olur.

Örnek 3.19 $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ bir cat^1 -grup olmak üzere A nın kendi üzerine konjugasyon etkimesi aslında $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ nın kendi üzerine bir cat^1 -grup etkimesidir. Gerçekten $a \in \ker s_A$ ve $a_1 \in \ker t_A$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot a &= a_1 + a - a_1 \\
&= a + a_1 - a_1 \\
&= a
\end{aligned} \tag{3.45}$$

dır. Diğer şartların sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Bu etkiye ile birlikte $\mathcal{A}$ nın kendisi ile yarı-direkt çarpımı $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{A}$ elde edilir. $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{A}$ yarı-direkt çarpım cat^1 -grubu $\mathcal{A}$ nın kendisi tarafından bir ayrık cat^1 -grup genişlemesi olur.

3.3.2 Çaprazlanmış cat^1 -modüller

Tanım 3.20 $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ birer cat^1 -grup olmak üzere $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine bir

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a \end{aligned} \tag{3.46}$$

cat^1 -grup etkimesi verilsin. Ayrıca bir $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ cat^1 -grup morfizmi bulunsun. Eğer $(1_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}} \times \alpha, \alpha)$ ve $(\alpha, \alpha \times 1_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{B}})$ üçlülere sırasıyla $\mathcal{A}$ nin kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile elde edilen ayrık cat^1 -grup genişlemeden $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine yukarıda verilen etkimeden elde edilen ayrık genişlemesine ve $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{A}$ üzerine yukarıda verilen etkimeden elde edilen ayrık genişlemesinden $\mathcal{B}$ nin kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile elde edilen ayrık genişlemesine birer ayrık genişleme dönüşümü ise $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ üçlüsüne bir cat^1 -grupların kategorisinde bir çaprazlanmış modül ya da kısaca bir çaprazlanmış cat^1 -modül denir.

Yukarıdaki tanımda belirtilen şartlar incelendiğinde çaprazlanmış cat^1 -modül tanımı elemanlar cinsinden de verilebilir.

Önerme 3.21 $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ birer cat^1 -grup ve $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir cat^1 -grup morfizmi olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a \end{aligned} \tag{3.47}$$

bir cat^1 -grup etkimesi olsun. Eğer her $a, a_1 \in A$ ve $b \in B$ için;

- (i) $\alpha(b \cdot a) = b + \alpha(a) - b,$
- (ii) $\alpha(a) \cdot a_1 = a + a_1 - a$

şartları sağlanıyorsa $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ üçlüsü bir çaprazlanmış cat^1 -modül olur.

Sonuç 3.22 $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ birer cat^1 -grup ve $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir cat^1 -grup morfizmi olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (b, a) &\mapsto b \cdot a\end{aligned}\tag{3.48}$$

bir cat^1 -grup etkimesi olsun. Eğer bu etkiye ile birlikte (A, B, α) gruplar üzerinde bir çaprazlanmış modül yapısına sahip ise $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ üçlüsü bir çaprazlanmış cat^1 -modül olur. Diğer bir ifadeyle bir çaprazlanmış cat^1 -modül gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinde bir cat^1 -obje olarak da düşünülebilir.

Örnek 3.23 G bir grup ve N de bunun bir normal altgrubu olsun. Bu durumda $(G, 1_G, 1_G)$ ve $(N, 1_N, 1_N)$ üçlülerinin birer cat^1 -grup olduklarını biliyoruz. Ayrıca G nin N üzerine konjugasyon etkimesi aslında bir cat^1 -grup etkimesi olur. Böylelikle $\text{inc}: N \rightarrow G$ içine dönüşümü bir cat^1 -grup morfizmi olup $((N, 1_N, 1_N), (G, 1_G, 1_G), \text{inc})$ bir çaprazlanmış cat^1 -modüldür.

Tanım 3.24 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ ile $(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \alpha')$ üçlülere birer çaprazlanmış cat^1 -modül ve $f: A \rightarrow A'$ ile $g: B \rightarrow B'$ birer grup homomorfizmi olsun. Eğer

- (i) $f s_A = s_{A'} f, f t_A = t_{A'} f,$
- (ii) $g s_B = s_{B'} g, g t_B = t_{B'} g,$
- (iii) $g \alpha = \alpha' f$ ve
- (iv) her $a \in A$ ve $b \in B$ için;

$$f(b \cdot a) = g(b) \cdot f(a)\tag{3.49}$$

şartları sağlanıyorsa $\langle f, g \rangle$ ikilisine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ dan $(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \alpha')$ ne bir çaprazlanmış cat^1 -modül morfizmi denir.

$$\langle f_A, f_B \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')\tag{3.50}$$

Dikkat edelim ki burada (i) şartı $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ dönüşümünün bir cat^1 -grup morfizmi olduğu, (ii) şartı $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ dönüşümünün bir cat^1 -grup morfizmi olduğu, (iii) ve (iv) şartları ise

$$\langle f, g \rangle: (A, B, \alpha) \rightarrow (A', B', \alpha')\tag{3.51}$$

dönüşümünün gruplar üzerinde bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğu anlamına gelmektedir.

Objeleri tüm çaprazlanmış cat^1 -modüller, morfizmleri ise tüm çaprazlanmış cat^1 -modül morfizmleri olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ ile gösterilir.



4. KATEGORİ DENKLİĞİ

4.1 Çaprazlanmış Kareler

Çaprazlanmış kareler, cebir, topoloji ve kombinatorik dahil olmak üzere çeşitli alanlarda incelenen cebirsel bir kavramdır. Cebirde, grupların yapısını ve grup genişlemelerini incelemek için çaprazlanmış kareler kullanılmıştır. Ayrıca, çaprazlanmış modüller ve çift grupoidler gibi yeni cebirsel yapılar oluşturmak için de çaprazlanmış modüller kullanılmıştır. Topolojide, homotopi teorisini ve daha yüksek boyutlu cebirleri incelemek ve homotopi 3-tipleri için yeni modeller oluşturmak için çaprazlanmış kareler kullanılmıştır. Genel olarak, çaprazlanmış kareler, çeşitli alanlarda uygulamaları olan çok yönlü matematiksel objelerdir. Çaprazlanmış kareler üzerine daha fazla araştırma, cebir, topoloji ve kombinatorikte yeni anlayışlara ve uygulamalara yol açabilir.

Şimdi öncelikle çaprazlanmış kare tanımını Brown ve Loday (1987b) tarafından verildiği şekilde hatırlayalım.

Tanım 4.1 L, M, N ve P birer grup, $\lambda: L \rightarrow M$, $\lambda': L \rightarrow N$, $\mu: M \rightarrow P$ ve $\nu: N \rightarrow P$ birer grup homomorfizmi ve P grubunun L, M ve N grupları üzerine birer etkimesi bulunsun. Bu etkimeler sayesinde M nin N ve L üzerine μ tarafından

$$\begin{aligned} m \cdot n &= \mu(m) \cdot n \\ m \cdot l &= \mu(m) \cdot l \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı ve N nin M ve L üzerinde ν tarafından

$$\begin{aligned} n \cdot m &= \nu(n) \cdot m \\ n \cdot l &= \nu(n) \cdot l \end{aligned} \tag{4.2}$$

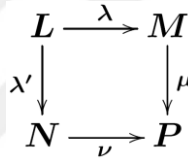
şeklinde tanımlı etkimeleri elde edilir. Ayrıca P grubu kendi üzerine konjügasyon etkimesi ile ele alınsın. Eğer

$$\begin{aligned} h &: M \times N \rightarrow L \\ (m, n) &\mapsto h(m, n) \end{aligned} \tag{4.3}$$

fonksiyonu ile beraber $\mathcal{X} = (L, M, N, P)$ dördlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu $\mathcal{X} =$

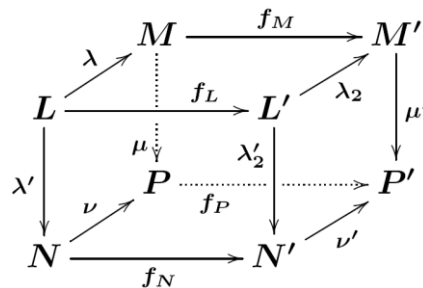
(L, M, N, P) dörtlüsüne grupların kategorisinde bir çaprazlanmış kare denir. Her $l \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ve $p \in P$ için

- (i) λ ve λ' dönüşümleri P –invarianttır, yani, $\lambda(p \cdot l) = p \cdot \lambda(l)$ ve $\lambda'(p \cdot l) = p \cdot \lambda'(l)$ dır. Ayrıca (M, P, μ) , (N, P, ν) ve $(L, P, \kappa = \mu\lambda = \nu\lambda')$ birer çaprazlanmış modüldür.
- (ii) $\lambda h(m, n) = m + n \cdot (-m)$, $\lambda' h(m, n) = m \cdot n - n$,
- (iii) $h(\lambda(l), n) = l + n \cdot (-l)$, $h(m, \lambda'(l)) = m \cdot l - l$,
- (iv) $h(m + m', n) = m \cdot h(m', n) + h(m, n)$,
 $h(m, n + n') = h(m, n) + n \cdot h(m, n')$ ve
- (v) $h(p \cdot m, p \cdot n) = p \cdot h(m, n)$.



Şekil 4.1. Çaprazlanmış kare diyagramı.

$\mathcal{X} = (L, M, N, P)$ ve $\mathcal{X}' = (L', M', N', P')$ birer çaprazlanmış kare ve f_L, f_M, f_N ve f_P birer grup homomorfizmi olsun. Eğer bu f_L, f_M, f_N ve f_P grup homomorfizmleri tüm etkimeler ve $h: M \times N \rightarrow L$ ile $h': M' \times N' \rightarrow L'$ fonksiyonları ile uyumlu ise $f = \langle f_L, f_M, f_N, f_P \rangle$ dörtlüsüne $\mathcal{X}$ den $\mathcal{X}'$ ne tanımlı bir çaprazlanmış kare morfizmi denir. Gruplar üzerinde tanımlanan tüm çaprazlanmış kareler ile bunlar arasında yukarıdaki gibi tanımlanan çaprazlanmış kare morfizmleri bir kategori oluşturur. Bu kategori **X²Mod** ile gösterilir.



Şekil 4.2. Çaprazlanmış kare morfizmi diyagramı.

Teorem 4.2 Cat^1 -grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi **XMod(Cat¹ – Gp)** ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi

$\mathbf{X}^2\mathbf{Mod}(\mathbf{Gp})$ doğal olarak denktir.

İspat: Öncelikle bir $\theta: \mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{X}^2\mathbf{Mod}(\mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım. θ fanktoru objeler üzerinde şöyle tanımlansın: $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ üçlüsü $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ kategorisinde bir obje olsun. O halde $L = \ker s_A, M = \ker s_B, N = \text{Im } s_A, P = \text{Im } s_B$, $\lambda = \alpha|_{\ker s_A}, \lambda' = t_A|_{\ker s_A}, \mu = t_B|_{\ker s_B}, \nu = \alpha|_{\text{Im } s_A}$ ve $h(m, n) = m \cdot n - n$ olmak üzere $\theta_0((\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)) = \mathcal{X} = (L, M, N, P)$ bir çaprazlanmış karedir. Önce h fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $m \in M = \ker s_B$ ve $n \in N = \text{Im } s_A$ için $s_B(m) = 0$ ve $s_A(a) = n$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} s_A(m \cdot s_A(a) - s_A(a)) &= s_A(m \cdot s_A(a)) - s_A s_A(a) \\ &= s_B(m) \cdot s_A s_A(a) - s_A s_A(a) \\ &= 0 \cdot s_A(a) - s_A(a) \\ &= s_A(a) - s_A(a) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

yani $m \cdot n - n \in \ker s_A = L$ dir. Şimdi (i)-(v) şartlarının sağlandığını gösterelim. Gerçekten, $l \in L, m \in M, n \in N$ ve $p \in P$ olmak üzere P nin M üzerine etkimesi ve N nin L üzerine etkimesi sırasıyla

$$\begin{aligned} p \cdot m &= p + m - p \\ n \cdot l &= n + l - n \end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi $l \in L, m, m' \in M, n, n' \in N$ ve $p \in P$ olsun.

(i) Önce λ ve λ' dönüşümlerinin P –invariant olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \lambda(p \cdot l) &= \alpha(p \cdot l) \\ &= p + \alpha(l) - p \\ &= p \cdot \alpha(l) \\ &= p \cdot \lambda(l) \end{aligned} \tag{4.6}$$

ve $p \in P = \text{Im } s_B$ olduğundan $p = s_B(b)$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. O halde

$$\begin{aligned}
\lambda'(p \cdot l) &= t_A(s_B(b) \cdot l) \\
&= t_B s_B(b) \cdot t_A(l) \\
&= s_B(b) \cdot t_A(l) \\
&= p \cdot \lambda'(l)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dir. Böylece λ ve λ' dönüşümlerinin P –invariant olduğunu göstermiş olduk. Şimdi (M, P, μ) , (N, P, ν) ve $(L, P, \kappa = \mu\lambda)$ üçlülerinin birer çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. (M, P, μ) üçlüsünün bir çaprazlanmış modül olduğunu zaten biliyoruz. Ayrıca $(N, P, \nu) = \langle s_A, s_B \rangle(A, B, \alpha)$ görüntü çaprazlanmış modüldür. O halde sadece $(L, P, \kappa = \mu\lambda)$ üçlüsünün bir çaprazlanmış modül olduğunu göstermek yeterlidir.

(a) $l \in L$ ve $p \in P$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\kappa(p \cdot l) &= \mu(\lambda(p \cdot l)) \\
&= \mu(p \cdot \lambda(l)) \\
&= p + \mu(\lambda(l)) - p \\
&= p + \kappa(l) - p
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(b) $l, l' \in L$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\kappa(l) \cdot l' &= \mu(\lambda(l)) \cdot l' \\
&= \lambda(l) \cdot l' \\
&= l + l' - l
\end{aligned} \tag{4.9}$$

olup (L, P, κ) da bir çaprazlanmış modüldür.

(ii) Şimdi $\lambda h(m, n) = m + n \cdot (-m)$ ve $\lambda' h(m, n) = m \cdot n - n$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\lambda h(m, n) &= \lambda(m \cdot n - n) \\
&= \alpha(m \cdot n - n) \\
&= m + \alpha(n) - m - \alpha(n) \\
&= m + \alpha(n) \cdot (-m) \\
&= m + \nu(n) \cdot (-m) \\
&= m + n \cdot (-m)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ve $n \in N = \text{Im } s_A$ olduğundan $n = s_A(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. O halde

$$\begin{aligned}
\lambda' h(m, n) &= \lambda'(m \cdot s_A(a) - s_A(a)) \\
&= t_A(m \cdot s_A(a) - s_A(a)) \\
&= t_A(m \cdot s_A(a)) - t_A(s_A(a)) \\
&= t_B(m) \cdot t_A(s_A(a)) - s_A(a) \\
&= \mu(m) \cdot s_A(a) - s_A(a) \\
&= \mu(m) \cdot n - n \\
&= m \cdot n - n
\end{aligned} \tag{4.11}$$

dır.

(iii) Şimdi $h(\lambda(l), n) = l + n \cdot (-l)$ ve $h(m, \lambda'(l)) = m \cdot l - l$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
h(\lambda(l), n) &= \lambda(l) \cdot n - n \\
&= \alpha(l) \cdot n - n \\
&= l + n - l - n \\
&= l + n \cdot (-l)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
h(m, \lambda'(l)) &= m \cdot \lambda'(l) - \lambda'(l) \\
&= t_B(m) \cdot t_A(l) - t_A(l) \\
&= t_A(m \cdot l - l)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olup $m \cdot l - l \in N = \text{Im } s_A$ olduğundan $m \cdot l - l = s_A(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
h(m, \lambda'(l)) &= t_A(m \cdot l - l) \\
&= t_A(s_A(a)) \\
&= s_A(a) \\
&= m \cdot l - l
\end{aligned} \tag{4.14}$$

dir.

- (iv) Şimdi $h(m + m', n) = m \cdot h(m', n) + h(m, n)$ ve $h(m, n + n') = h(m, n) + n \cdot h(m, n')$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
h(m + m', n) &= (m + m') \cdot n - n \\
&= m \cdot (m' \cdot n) - n \\
&= m \cdot (m' \cdot n) - m \cdot n + m \cdot n - n \\
&= m \cdot (m' \cdot n - n) + (m \cdot n - n) \\
&= m \cdot h(m', n) + h(m, n)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ve

$$\begin{aligned}
h(m, n + n') &= m \cdot (n + n') - (n + n') \\
&= m \cdot n + m \cdot n' - n' + n \\
&= m \cdot n - n + n + (m \cdot n' - n') + n \\
&= h(m, n) + (n + h(m, n')) + n \\
&= h(m, n) + n \cdot h(m, n)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

dir.

- (v) Son olarak $h(p \cdot m, p \cdot n) = p \cdot h(m, n)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
h(p \cdot m, p \cdot n) &= h(p + m - p, p \cdot n) \\
&= (p + m - p) \cdot (p \cdot n) - p \cdot n \\
&= (p + m - p + p) \cdot n - p \cdot n \\
&= p \cdot (m \cdot n) - p \cdot n \\
&= p \cdot (m \cdot n - n) \\
&= p \cdot h(m, n)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

dir.

Böylece $\mathcal{X} = (L, M, N, P)$ gerçekten bir çaprazlanmış karedir. Şimdi $(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \alpha')$ üçlüsü $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ kategorisinde herhangi bir obje, $\theta_0((\mathcal{A}', \mathcal{B}', \alpha')) = \mathcal{X}' = (L', M', N', P')$ ve $\langle f, g \rangle: (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{A}', \mathcal{B}', \alpha')$ ise $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ kategorisinde herhangi bir morfizm olsun. O halde $f_L = f|_{\ker s_A}$, $f_M = g|_{\ker s_B}$, $f_N = f|_{\text{Im } s_A}$ ve $f_P = g|_{\text{Im } s_B}$ olmak üzere $\theta_1(\langle f, g \rangle) = \langle f_L, f_M, f_N, f_P \rangle$ yani

$$\langle f_L, f_M, f_N, f_P \rangle: \mathcal{X} = (L, M, N, P) \rightarrow \mathcal{X}' = (L', M', N', P') \quad (4.18)$$

bir çaprazlanmış kare morfizmidir. $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ dönüşümünün bir fanktor olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi bir $\psi: \mathbf{X}^2\mathbf{Mod}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ fanktoru tanımlayalım. ψ fanktoru objeler üzerinde şöyle tanımlansın: $\mathcal{X} = (L, M, N, P)$ bir çaprazlanmış kare, $l \in L$, $m \in M$, $n \in N$ ve $p \in P$ olmak üzere $A = L \rtimes N$, $B = M \rtimes P$, $s_A(l, n) = (0, n)$, $t_A(l, n) = (0, \lambda'(l) + n)$, $s_B(m, p) = (0, p)$, $t_B(m, p) = (0, \mu(m) + p)$, $\alpha = \lambda \times \nu$ ve B grubunun A grubu üzerine etkimesi

$$(m, p) \cdot (l, n) = (m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n), p \cdot n) \quad (4.19)$$

olarak tanımlansın. O halde $\psi_0(\mathcal{X}) = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ kategorisinde bir objedir. Gerçekten $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ nin birer cat^1 -grup ve (A, B, α) nın bir çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz. O halde sadece etkimenin bir cat^1 -grup etkimesi olduğunu göstermemiz yeterlidir. $(m, p) \in B$ ve $(l, n) \in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned} s_A((m, p) \cdot (l, n)) &= s_A(m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n), p \cdot n) \\ &= (0, p \cdot n) \\ &= (0, p) \cdot (0, n) \\ &= s_B(m, p) \cdot s_A(l, n) \end{aligned} \quad (4.20)$$

ve

$$\begin{aligned}
t_A((m, p) \cdot (l, n)) &= t_A(m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n), p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'(m \cdot (p \cdot l) + h(m, p \cdot n)) + p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'(m \cdot (p \cdot l)) + \lambda' h(m, p \cdot n) + p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'((\mu(m) + p) \cdot l) + m \cdot (p \cdot n) - p \cdot n + p \cdot n) \\
&= (0, \lambda'((\mu(m) + p) \cdot l) + m \cdot (p \cdot n)) \\
&= (0, (\mu(m) + p) \cdot \lambda'(l) + (\mu(m) + p) \cdot n) \\
&= (0, (\mu(m) + p) \cdot (\lambda'(l) + n)) \\
&= (0, \mu(m) + p) \cdot (0, \lambda'(l) + n) \\
&= t_B(m, p) \cdot t_A(l, n)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

dır. Şimdi $\mathcal{X}' = (L', M', N', P')$ üçlüsü $\mathbf{X}^2\mathbf{Mod}(\mathbf{Gp})$ kategorisinde herhangi bir çaprazlanmış kare, $\theta_0(\mathcal{X}' = (L', M', N', P')) = (\mathcal{A}', \mathcal{B}', \alpha')$ ve $\langle f_L, f_M, f_N, f_P \rangle: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ ise bir çaprazlanmış kare morfizmi olsun. O halde $f = f_L \times f_N$ ve $g = f_M \times f_P$ olmak üzere $\psi_1(\langle f_L, f_M, f_N, f_P \rangle) = \langle f, g \rangle$ yani

$$\langle f, g \rangle: (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{A}', \mathcal{B}', \alpha') \tag{4.22}$$

$\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ kategorisinde bir morfizmdir. $\psi = (\psi_0, \psi_1)$ dönüşümünün bir fanktor olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi $\eta: \psi\theta \Rightarrow 1_{\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{XMod}}$ ve $\varphi: \theta\psi \Rightarrow 1_{\mathbf{X}^2\mathbf{Mod}}$ doğal izomorfizmlerini tanımlayalım. $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ kategorisindeki her $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ objesi için

$$\begin{aligned}
f_A &: \ker s_A \times \text{Im } s_A \rightarrow A \\
(a, x) &\mapsto a + x
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_B &: \ker s_B \times \text{Im } s_B \rightarrow B \\
(b, y) &\mapsto b + y
\end{aligned} \tag{4.24}$$

olmak üzere $\eta_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)} = (f, g)$ izomorfizmidir. Ayrıca $\mathbf{X}^2\mathbf{Mod}(\mathbf{Gp})$ kategorisindeki herhangi bir çaprazlanmış kare $\mathcal{X} = (L, M, N, P)$ için

$$\begin{aligned} f_L = \pi_1 & : L \times \{0\} \rightarrow L \\ (l, 0) & \mapsto l \end{aligned} \quad (4.25)$$

ve

$$\begin{aligned} f_M = \pi_1 & : M \times \{0\} \rightarrow M \\ (m, 0) & \mapsto m \end{aligned} \quad (4.26)$$

ve

$$\begin{aligned} f_N = \pi_2 & : \{0\} \times N \rightarrow N \\ (0, n) & \mapsto n \end{aligned} \quad (4.27)$$

ve

$$\begin{aligned} f_P = \pi_2 & : \{0\} \times P \rightarrow P \\ (0, p) & \mapsto p \end{aligned} \quad (4.28)$$

olmak üzere $\varphi_X = \langle f_L, f_M, f_N, f_P \rangle$ izomorfizmidir. Diğer detaylar kolaylıkla görülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2 Cat²-Gruplar

Tanım 4.2 G bir grup ve $i \in \{1, 2\}$ olmak üzere $s_i, t_i: G \rightarrow G$ dört grup endomorfizmi olmak üzere eğer

(i) her $i \in \{1, 2\}$ için

$$s_i t_i = t_i, t_i s_i = s_i, \quad (4.29)$$

(ii) $i \neq j$ olacak şekildeki her $i, j \in \{1, 2\}$ için

$$s_i s_j = s_j s_i, t_i t_j = t_j t_i, s_i t_j = t_j s_i, \quad (4.30)$$

(iii) her $i \in \{1, 2\}$ için

$$[\ker s_i, \ker t_i] = \{0\} \quad (4.31)$$

şartları sağlanıyorsa (G, s_1, t_1, s_2, t_2) beşlisine bir cat²-grup denir (Loday, 1982).

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} & G \\
t_2 \downarrow & & \downarrow s_2 \\
G & &
\end{array}$$

Şekil 4.3. Cat²-grup diyagramı.

Açıkça görülüyor ki bir (G, s_1, t_1, s_2, t_2) cat²-grubu aslında aynı G grubu üzerinde birbirinden bağımsız fakat bibiriyle uyumlu iki cat¹-gruptan, (G, s_1, t_1) ve (G, s_2, t_2) , oluşur.

(G, s_1, t_1, s_2, t_2) ve $(G', s'_1, t'_1, s'_2, t'_2)$ birer cat²-grup olmak üzere eğer bir $f: G \rightarrow G'$ grup homomorfizmi

(i) her $i \in \{1, 2\}$ için

$$f s_i = s'_i f, \quad (4.32)$$

(ii) her $i \in \{1, 2\}$ için

$$f t_i = t'_i f \quad (4.33)$$

şartlarını sağlıyorsa ya da diğer bir ifadeyle Şekil 4.4'teki diyagramlar değişmeli ise bu f dönüşümüne cat²-grupların bir morfizmi denir. Diğer bir deyişle f grup homomorfizminin bir cat²-grup morfizmi olabilmesi için gerek ve yeter şart $f: (G, s_1, t_1) \rightarrow (G', s'_1, t'_1)$ ve $f: (G, s_2, t_2) \rightarrow (G', s'_2, t'_2)$ dönüşümlerinin birer cat¹-grup morfizmi olmasıdır.

$$\begin{array}{ccccc}
G & \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} & G & & \\
t_2 \downarrow & & \downarrow s_2 & \searrow f & \\
G & & G' & \xrightleftharpoons[t'_1]{s'_1} & G' \\
& & \downarrow t'_2 & & \downarrow s'_2 \\
& & G' & &
\end{array}$$

Şekil 4.4. Cat²-grup morfizm diyagramı.

Objeleri cat²-gruplar, morfizmleri ise yukarıda tanımlandığı şekilde cat²-grup morfizmleri olan bir kategori oluşturulabilir. Bu kategori ise **Cat² – Gp** sembolü ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem 1988 yılında Ellis (1988) tarafından verilmiştir.

Teorem 4.3 Cat^2 -grupların kategorisi $\mathbf{Cat}^2 - \mathbf{Gp}$ ile gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi $\mathbf{X}^2\mathbf{Mod}(\mathbf{Gp})$ doğal olarak denktir (Ellis, 1988).

Bu denkliklerin ispatlarında verilen fanktorlar birlikte göz önüne alındığında $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ kategorisindeki bir $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ objesi için

$$G := (\ker s_A \rtimes \text{Im } s_A) \rtimes (\ker s_B \rtimes \text{Im } s_B) \quad (4.34)$$

dersek

$$\begin{aligned} s_1 : G &\rightarrow G \\ ((a, x), (b, y)) &\mapsto ((0, x), (0, y)) \end{aligned} \quad (4.35)$$

ve

$$\begin{aligned} t_1 : G &\rightarrow G \\ ((a, x), (b, y)) &\mapsto ((0, t_A(a) + x), (0, t_B(b) + y)) \end{aligned} \quad (4.36)$$

ve

$$\begin{aligned} s_2 : G &\rightarrow G \\ ((a, x), (b, y)) &\mapsto ((0, 0), (b, y)) \end{aligned} \quad (4.37)$$

ve

$$\begin{aligned} t_2 : G &\rightarrow G \\ ((a, x), (b, y)) &\mapsto ((0, 0), (\alpha(a), \alpha(x)) + (b, y)) \end{aligned} \quad (4.38)$$

olmak üzere (G, s_1, t_1, s_2, t_2) beşlisi bir cat^2 -grup olur. Tersine olarak (G, s_1, t_1, s_2, t_2) bir cat^2 -grup ise $A = \ker s_2$, $B = \text{Im } s_2$, $\alpha = t_2|_A$, $s_A = s_1|_A$, $t_A = t_1|_A$, $s_B = s_1|_B$ ve $t_B = t_1|_B$ olmak üzere $\mathcal{A} = (A, s_A, t_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, s_B, t_B)$ birer cat^1 -grup ve (A, B, α) bir çaprazlanmış modüldür. Hatta $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha)$ üçlüsü $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ kategorisinin bir objesidir.

O halde yukarıdaki verilmiş olan sonuçlar ışığında bizde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.4 Cat^1 -grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ ile cat^2 -grupların kategorisi $\mathbf{Cat}^2 - \mathbf{Gp}$ doğal olarak denktir.

Ayrıca şahan ve Mohammed (2019) aprazlanmış modüllerin kategorisindeki i kategorileri karakterize edip bu tip cebirsel yapılar ile çaprazlanmış karelerin kategoriksel olarak denk olduklarını göstermişlerdir. Bu sonuca dayanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.5 Cat^1 -grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbf{XMod}(\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Gp})$ ile çaprazlanmış modüllerin kategorisindeki i kategorilerin kategorisi $\mathbf{Cat}(\mathbf{XMod})$ doğal olarak denktir.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuç olarak, çaprazlanmış modüller, farklı cebirsel yapılar arasındaki etkileşimi incelemek ve anlamak için güçlü bir çerçeve sağlar. Bu yapıların etkileşime girdiği karmaşık yolları yakalamamıza ve daha basit olanlardan daha karmaşık nesneler oluşturmamıza izin verir. Ayrıca, çaprazlanmış modüller, topoloji ve cebirsel geometriden teorik fizik ve bilgisayar bilimine kadar çok çeşitli matematik alanlarında uygulama bulmuştur.

Çaprazlanmış modüllerin incelenmesi yoluyla, cebirsel yapıların zengin ve birbirine bağlı dünyasına dair fikir edinebiliriz. İster saf matematikle ister onun uygulamalarıyla ilgilenin, çaprazlanmış modül teorisi büyüleyici ve ödüllendirici bir çalışma alanı sunar.

On yıllar boyunca çeşitli cebirsel yapılar üzerinde çaprazlanmış modül yapısı inşa edilmiş ve çok çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bununla kalmayıp bu cebirsel yapılar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller birçok problemde anahtar obje olarak kullanılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezde, Porter (1987) tarafından verilen yöntemler kullanılarak, öncelikle cat^1 -grupların kategorisindeki çaprazlanmış modüller tanımlanmış ve elemanlar, işlemler ve etkimeler yardımı ile karakterize edilmiştir. Bu tip cebirsel yapılar çaprazlanmış cat^1 -modüller olarak adlandırılmış ve çeşitli özellikleri incelenerek çaprazlanmış cat^1 -modüllerin kategorisi oluşturulmuştur. Bir çaprazlanmış cat^1 -modülün aslında gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisinde bir cat^1 -obje olduğu görülmüştür.

Son olarak, bu çalışmanın asıl amacı içinde, çaprazlanmış cat^1 -modüller kategorisinin gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi ile doğal olarak denk olduğu ispatlanmış ve böylece yeni oluşturulan bu cebirsel yapının, çaprazlanmış cat^1 -modüllerin, homotopi 3-tipleri için yeni bir cebirsel model olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Daha önce yapılmış çalışmalardan bilindiği üzere gruplar üzerindeki çaprazlanmış karelerin kategorisi ile cat^2 -grupların kategorisi doğal olarak denktir. Bu denklik bu çalışmada elde edilen sonuç ile birleştirildiğinde çaprazlanmış cat^1 -modüllerin kategorisinin de cat^2 -grupların kategorisine denk olduğu sonucuna varılır.

Daha sonra yapılabilecek çalışmalara örnek olarak, bu tezde tekrar edilen teknikler kullanılarak, benzer sonuçlar, yalnızca cat^1 -gruplar için değil, aynı zamanda daha genel ve daha yüksek boyutlu cebirsel kategoriler için de gösterilebilir. Ayrıca grup teorisinde bildiğimiz; normallik, bölüm, merkez, komütatör, vb. kavramları, gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerde elde edildiği gibi, çaprazlanmış cat^1 -modüller için de elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- Akız, H. F., Alemdar, N., Mucuk, O. ve Şahan, T., 2013. Coverings of internal groupoids and crossed modules in the category of groups with operations, *Georgian Mathematical Journal*, 20, 2, 223 – 238.
- Akız, H. F., Mucuk, O. ve Şahan, T., 2020. Liftings of crossed modules in the category of groups with operations, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 38, 7, 181 – 193.
- Alp, M., 1998. Pullbacks of crossed modules and cat^1 -groups, *Turkish Journal of Mathematics*, 22, 273 – 281.
- Arvasi, Z., 1997. Crossed squares and 2-crossed modules of commutative algebras, *Theory and Applications of Categories*, 3, 7, 160 – 181.
- Brown, R., 1984. Coproducts of crossed P-modules: Applications to second homotopy groups and to the homology of groups, *Topology*, 23, 3, 337 – 345.
- Brown, R., 1987. From groups to groupoids: a brief survey, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 19, 113 – 134.
- Brown, R. ve Higgins, P. J., 1978. On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 36, 193-212.
- Brown, R. ve Higgins, P. J., 1991. The classifying space of a crossed complex, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 110, 1, 95 – 120.
- Brown, R. ve Loday, J. L., 1987a. Homotopical excision, and Hurwicz theorems, for n -cubes of spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 54, 3, 176 – 192.
- Brown, R. ve Loday, J. L., 1987b. Van Kampen theorems for diagrams of spaces, *Topology*, 26, 3, 311 – 335.
- Brown, R. ve Spencer, C. B., 1976. G -groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen series A*, 79, 4, 296 – 302.
- Conduché, D., 1984. Modules croisés généralisés de longueur 2, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 34, 2-3, 155 – 178.
- Dijkgraaf, R. ve Witten, E., 1990. Topological gauge theories and group cohomology, *Communications in Mathematical Physics*, 129, 2, 393 – 429.
- Ellis, G. J., 1988. Higher dimensional crossed modules of algebras, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 52, 277 – 282.

- Higgins, P. J., 1956. Groups with multiple operators, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3, 6, 366 – 416.
- Jurčo, B., 2011. Crossed module bundle gerbes; classification, string group and differential geometry, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 8, 05, 1079 – 1095.
- Loday, J. L., 1982. Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 24, 179 – 202.
- Mac Lane, S. ve Whitehead, J. H. C., 1950. On the 3-types of a complex, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36,1, 41 – 48.
- Mackenzie, K.C.H., 1987. Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, volume 124 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press.
- Martins, J. F. ve Picken, R., 2011. The fundamental Gray 3-groupoid of a smooth manifold and local 3-dimensional holonomy based on a 2-crossed module, *Differential Geometry and its Applications*, 29, 2, 179 – 206.
- Mucuk, O. ve Şahan, T., 2014. Coverings and crossed modules of topological groups with operations, *Turkish Journal of Mathematics*, 38, 5, 833 – 845.
- Mucuk, O. ve Şahan, T., 2019. Group-groupoid actions and liftings of crossed modules, *Georgian Mathematical Journal*, 26, 3, 437 – 447.
- Mucuk, O., Şahan, T. ve Alemdar, N., 2014. Normality and quotients in crossed modules and group-groupoids, *Applied Categorical Structures*, 23, 415 – 428.
- Mutlu, A. ve Porter, T., 2000. Freeness Conditions for Crossed Squares and Squared Complexes, *Kluwer Academic Publishers*, 20, 8, 345 – 368.
- Norrie, K., 1987. Crossed modules and analogues of groups theorems, *Dissertation*, King's College, University of London.
- Norrie, K., 1990. Actions and automorphisms of crossed modules, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 118, 2, 129 – 146.
- Orzech, G., 1972a. Obstruction theory in categories. I, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2, 287 – 314.
- Orzech, G., 1972b. Obstruction theory in categories. II, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2, 315 – 340.
- Porter, T., 1987. Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 30, 373 – 381.

- Porter, T., 1998. Topological quantum field theories from homotopy n –types, Journal of the London Mathematical Society, 58, 3, 723 – 732.
- Şahan, T., 2019. Further remarks on liftings of crossed modules, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 48, 3, 743 – 752.
- Şahan, T. ve Mucuk, O., 2020. Normality and quotient in the category of crossed modules within the category of groups with operations, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 38, 7, 169 – 179.
- Whitehead, J.H.C., 1946. Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy groups, Annals of Mathematics, 47, 4, 806 – 810.
- Whitehead, J.H.C., 1948. On Operators in Relative Homotopy Groups, Annals of Mathematics, 49, 610 – 640.
- Whitehead, J.H.C., 1949. Combinatorial homotopy. II, Bulletin of the American Mathematical Society, 55, 213 – 245.
- Yetter, D.N., 1992. Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed G –sets, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 1, 1–20.
- Yetter, D.N., 1993. TQFT's from homotopy 2-types, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 2, 113 – 123.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Emre KENDİR

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Erciyes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik
Öğretmenliği Programı, 2015-2019

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik A.B.D., 2020-2023

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Emre KENDİR, Tunçar ŞAHAN, Cat^1 -grupların kategorisinde çaprazlanmış modüller, Ulusal Matematik Sempozyumu 2021, İstanbul Üniversitesi, 31 Ağustos- 3 Eylül, 2021, İstanbul.