

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**CATALAN VE MOTZKİN SAYILARINI İÇEREN BİR MATRİS YARDIMIYLA
BAZI YAKINSAK DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE**

Büşra SARIGÖZ OKTAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**CATALAN VE MOTZKİN SAYILARINI İÇEREN BİR MATRİS YARDIMIYLA
BAZI YAKINSAK DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE**

Büşra SARIGÖZ OKTAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CATALAN VE MOTZKİN SAYILARINI İÇEREN BİR MATRİS YARDIMIYLA
BAZI YAKINSAK DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE

Büşra SARIGÖZ OKTAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 07/02/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI (Danışman)

Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

ÖZET

CATALAN VE MOTZKIN SAYILARINI İÇEREN BİR MATRİS YARDIMIYLA BAZI YAKINSAK DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE

Büşra SARIGÖZ OKTAR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

Şubat 2025; 28 sayfa

Bu çalışmada, Catalan ve Motzkin sayılarını içeren bir matris yardımıyla bazı yakınsak dizi uzayları verilecektir. Bu uzayların dualleri belirlenip bu uzaylar üzerinde tanımlanan matris dönüşümlerinin bazı sınıfları karakterize edilecektir.

ANAHTAR KELİMELE: Catalan sayıları, Dizi uzayları, Matris dönüşümleri, α -, β -, γ -dualleri.

JÜRİ: Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

ABSTRACT

ON CERTAIN CONVERGENT SEQUENCE SPACES DERIVED BY THE MATRIX INVOLVING CATALAN AND MOTZKIN NUMBERS

Büşra SARIGÖZ OKTAR

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

February 2025; 28 pages

In this work, we give certain convergent sequence spaces derived by a matrix, involving Catalan and Motzkin numbers. As well, α -, β -, γ -duals of are given and some matrix mappings are presented on the resulting spaces.

KEYWORDS: Catalan numbers, sequence spaces, matrix transformations, α -, β -, γ -duals.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

Assoc. Prof. Dr. Ulaş YAMANCI

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kaynak Taraması ve Bulgular ve Tartışma olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bulgular ve Tartışma bölümünde kullanılacak olan bazı temel kavramların tanımları ve bazı önemli sonuçları Kaynak Taraması bölümünde verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde ise, Catalan ve Motzkin sayılarını içeren bir matris yardımıyla bazı yakınsak dizi uzayları verilecektir. Bu uzayların dualleri belirlenip bu uzaylar üzerinde tanımlanan matris dönüşümlerinin bazı sınıfları karakterize edilecektir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, hiçbir konuda desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
3. MATERYAL VE METOT	12
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	13
4.1. $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ dizi uzayları	13
4.1.1. $\alpha-$, $\beta-$, γ - Dualler	16
4.2. Matris Dönüşümleri	18
5. SONUÇLAR	24
6. KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Catalan ve Motzkin sayılarını içeren bir matris yardımıyla bazı yakınsak dizi uzayları üzerine ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

07/02/2025

Büşra SARIGÖZ OKTAR

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

ω : tüm kompleks veya reel terimli dizilerin uzay

c : bütün yakınsak dizilerin uzayı

c_0 : bütün sıfıra yakınsak dizilerin uzayı

ℓ_∞ : bütün sınırlı dizilerin uzayı

λ_A : A matrisinin etki alanı (domain)

C_n : n . Catalan sayısı



1. GİRİŞ

ω tüm kompleks veya reel terimli dizilerin uzayı olsun. Bu uzayın herhangi bir alt vektör uzayını dizi uzayı olarak adlandırılır. Literatür taraması yapıldığında, dizi uzaylarını içeren nitelikli çalışmaların birçoğundaki ilk amaç yeni bir dizi uzayı inşa etmek, bu uzayın Fonksiyonel Analiz’de iyi bilinen uzaylar ile doğrusal izomorfizm olup olmadığını araştırmaktır. Daha sonra, yine iyi bilinen uzaylarla olan kapsama bağıntılarını araştırmaktır. Ayrıca, tanımlanan yeni uzayın varsa Schauder tabanını ve α -, β -, γ - duallerini belirlemektir. Dahası, bilinen uzaylardan bu uzaylara karşılıklı olarak matris karakterizasyonunu yapmaktır.

c , c_0 ve ℓ_∞ ile bütün yakınsak, sıfıra yakınsak ve sınırlı dizilerin uzayı gösterilir ve sırasıyla

$$\begin{aligned}\ell_\infty &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_k |x_k| < \infty \right\}, \\ c &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k < \infty \right\}, \\ c_0 &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\}\end{aligned}$$

ile ifade edilir. ℓ_p ile de p -inci dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan bütün dizilerin uzayı gösterilir ve

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

$A = (a_{nk})$ ($k = 1, 2, \dots$ ve $n = 1, 2, \dots$) olmak üzere kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. ω uzayının her bir alt cümlesi kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör

uzayı olduğundan her $\forall x = (x_k) \in \omega$ dizisi

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla, matris çarpımı alınarak, $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi ve $x = (x_k)$ dizisi olmak üzere

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen $(Ax)_n$ dizisi elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(Ax)_n = A_n x = \sum_k a_{nk} x_k$ toplamının yakınsak olduğu kabul edilir. Elde edilen $(A_n(x))$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin A matrisi ile yapılmış dönüşümü denir ve $x = (x_k) \in \lambda$ iken $(Ax)_n = A_n x \in \mu$ olmak üzere $A : \lambda \rightarrow \mu$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$A_n x = \sum_k a_{nk} x_k$$

mevcut ve $A_n x \rightarrow l \in \mathbb{C}$ oluyorsa $x = (x_k)$ ya l için A -toplanabilirdir denir. Bütün $A : \lambda \rightarrow \mu$ şeklindeki dönüşümler ailesi (λ, μ) ile gösterilir.

$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve λ dizi uzayı olmak üzere,

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\}$$

cümlesine A matrisinin etki alanı (domain) denir.

Literatür taraması yapıldığında görülür ki bazı üçgensel matrisler alınarak birçok yeni dizi uzayları inşa edilmiş ve bu uzayların birçok kapsama bağıntıları, izomorfik özellikleri, matris dönüşümlerinin karakterizasyon işlemi ele alınmıştır. Özellikle son yıllarda bazı önemli sayıları içeren üçgensel matrisler tanımlanıp matrisin etki alanı yardımıyla çeşitli Banach uzayları tanımlanıp çeşitli topolojik ve geometrik özellikleri incelenmiştir.

Sayılar Teorisi ve Kombinatorik alanlarında önemli yer tutan Catalan ve Motzkin sayılarının bir özdeşliğinden ilham alınarak Karakaş ve Dağlı (2023) tarafından $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})$ ile gösterilen

$$\tilde{c}_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{M_k}{C_{n+1}}, & 0 \leq k \leq n; \\ 0, & k > n; \end{cases}$$

matrisi tanımlanıp bu matris yardımıyla

$$\ell_p(\tilde{C}) = \left\{ z = (z_k) \in \omega : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k \right|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty \text{ için}$$

ve

$$\ell_{\infty}(\tilde{C}) = \left\{ z = (z_k) \in \omega : \sup_n \left| \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde Banach uzayları verilmiştir. Bu uzayların bazı topolojik ve geometrik özellikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})$ matrisinin c ve c_0 dizi uzaylarındaki etki alanı kullanılarak $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzayları verilecektir. Bu uzayların dualleri belirlenip bu uzaylar üzerinde tanımlanan matris dönüşümlerinin bazı sınıfları karakterize edilecektir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan temel kavramlar ve bu kavramların özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir cümle olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, X üzerinde bir metrik ya da uzaklık fonksiyonu denir. (X, d) ikilisine ise metrik uzay denir (Kreyszig, 1978).

$$M1) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$M2) d(x, y) = 0 \text{ olması için gerek ve yeter şart } x = y \text{ olmasıdır.}$$

$$M3) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Tanım 2.2. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $x = (x_n) \in X$ bir dizi olsun. $\exists x \in X \ni \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n > N(\varepsilon), d(x_n, x) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve $x \in X$ e de (x_n) dizisinin limiti denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3. (X, d) metrik uzay olmak üzere $x = (x_n) \in X$ bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m > N(\varepsilon), d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise, (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.4. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, eğer X de her Cauchy dizisi yakınsak ise, X e tam metrik uzay denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.5. X boş olmayan bir cümle ve K da bir cismi olsun. $+$: $X \times X \rightarrow X$ $(x, y) \rightarrow +(x, y) = (x + y)$ ve $\cdot$: $K \times X \rightarrow X$ $(\lambda, y) \rightarrow \cdot(\lambda, x) = \lambda x$ olmak üzere eğer $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzay (lineer uzay) denir (Kreyszig, 1978).

$$V1) x + y = y + x$$

$$V2) (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$V3) x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir tek } \theta \in K \text{ vardır.}$$

$$V4) x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir tek } -x \in X \text{ vardır.}$$

$$V5) 1 \cdot x = x$$

$$V6) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$V7) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$V8) \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x.$$

Tanım 2.6. K bir cisim, $(X, +, \cdot)$ ise bu cismin üzerinde bir lineer uzay ve Y , X in boş olmayan alt cümlesi olsun. Eğer $\forall x, y \in Y$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için $\lambda x + \mu y \in Y$ ise, Y ye X in bir lineer alt uzayı denir (Kreyszig,1978).

Tanım 2.7. X bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her α skaleri için;

$$N1) \forall x \in X \text{ için } \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \iff x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir (Kreyszig,1978).

Tanım 2.8. $x = (x_n)$ bir dizi olsun. Eğer, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde en az bir $M \in \mathbb{R}^+$ bulunabiliyorsa $x = (x_n)$ dizisine sınırlı dizi denir (Kreyszig,1978).

Tanım 2.9. Eğer $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tamsa, yani bu uzayda alınan herhangi bir Cauchy dizisi yakınsak ise, bu uzaya Banach uzayı denir (Kreyszig,1978).

Tanım 2.10. X lineer bir normlu uzayında bir (b_n) dizisi verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$$

olacak şekilde bir tek (λ_n) skaler dizisi varsa, (b_n) dizisine, X için bir Schauder taban denir (Wilansky,1968). Yani,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^m \lambda_n b_n \right\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

ise, (b_n) dizisine X için bir Schauder taban denir (Wilansky,1984).

Tanım 2.11. X, Y aynı K cismi üzerinde lineer uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall x_1, x_2 \in X$ skalerleri için

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

ise f dönüşümüne lineer dönüşüm denir (Kreyszig, 1978). X den Y ye olan bütün lineer dönüşümlerin cümlesi, $L(X, Y)$ olarak gösterilir. $Y = \mathbb{C}$ ya da $Y = \mathbb{R}$ olarak alınırsa f lineer dönüşümüne, X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. X üzerindeki lineer fonksiyonların cümlesi X^* ile gösterilir. Bu cümleye X in cebirsel duali denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.12. T, X den Y ye bir lineer dönüşüm olsun. T birebir ve örtense T ye X den Y ye bir lineer izomorfizm, X ve Y uzaylarına izomorfik uzaylar denir. $X \cong Y$ ile gösterilir. X uzayından Y uzayına T izomorfizmi uzaklıkları koruyorsa T ye X den Y ye bir izometri, X ve Y ye de izometrik olarak izomorf uzaylar denir (Choudhary ve Nanda 1989).

Tanım 2.13. X, Y normlu lineer uzaylar, $f \in L(X, Y)$ ve $\forall x \in X$ için

$$\|f(x)\| \leq M \|x\|$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ bulunuyorsa f ye X üzerinde sınırlı lineer operatör denir (Kreyszig, 1978). X den Y ye bütün sınırlı lineer dönüşümlerin cümlesi de $B(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. $f \in L(X, Y)$ için

$$\|f\| = \inf \{M > 0 : \forall x \in X \quad \|f(x)\| \leq M \|x\|\} \quad (2.1)$$

şeklindeki ifadeye f nin operatör normu denir (Kreyszig, 1978).

Teorem 2.15. X, Y normlu lineer uzaylar ve $f \in B(X, Y)$ olsun. Buna göre;

- (i) f bir $\theta \in X$ de sürekli ise f, X de düzgün sürekli.
- (ii) f, X de sürekli $\iff f$ sınırlıdır (Kreyszig, 1978).

Teorem 2.16. X, Y normlu bir lineer uzaylar olsun. Eğer Y normlu lineer uzayı Banach uzayı ise, $B(X, Y)$ bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.17. $k = 1, 2, \dots$ ve $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere $a_{nk} \in \mathbb{C}$ matrisine sonsuz matris denir. Bütün dizilerin cümlesi ω bir vektör uzayı yapısına sahip olduğundan $\forall x = (x_k) \in \omega$ dizisinin terimleri

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde sonsuz bileşenli bir kolon vektörü olarak yazılabilir. Yani yukarıda seçilen $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi ile $x = (x_k)$ dizisinin matris çarpımını alınarak;

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan $(Ax)_n$ dizisini elde ederiz. Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = A_n x = \sum_k a_{nk} x_k = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots$$

toplamlarının yakınsak olduğunu kabul ediyoruz. Böylece elde edilen $(A_n(x))$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin A matrisi ile yapılmış dönüşümü denir (Chaudary ve Nanda, 1989).

Tanım 2.18. $T = (t_{nk})$ sonsuz matrisi olsun. Eğer, $T = (t_{nk})$ sonsuz matrisi

$$t_{nk} = \begin{cases} 0, & k > n \text{ ise} \\ t_{nn} \neq 0, & k = n \text{ ise} \end{cases}$$

şartlarını sağlıyorsa T matrisine alt üçgensel matris denir (Malkowsky ve Pawan, 1999).

Tanım 2.19. X bir lineer uzay ve d , X üzerinde bir metrik olsun. Eğer, X üzerindeki cebirsel işlemler sürekli fonksiyonlar ise, yani (x_n) ve (y_n) X de iki dizi (λ_n) de skalerlerin bir dizisi olmak üzere

$$x_n \rightarrow x \text{ ve } y_n \rightarrow y \implies x_n + y_n \rightarrow x + y$$

ve

$$\lambda_n \rightarrow \lambda \text{ ve } x_n \rightarrow x \implies \lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$$

ise, (X, d) metrik uzayına lineer metrik uzay denir (Malkowsky ve Rakocevic, 2000).

Tanım 2.20. X bir lineer metrik uzay olsun. Eğer X uzayı tam ise X e Frechet uzayı denir (Wilansky, 1964).

Tanım 2.21. $X \subset \omega$ olacak şekilde bir metrik uzayı olsun. Eğer,

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \tau_k(x) = x_k \ (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümleri sürekli ise, yani X de yakınsaklık koordinatsal yakınsaklığı gerektiriyorsa X e K -uzayı denir (Wilansky, 1984).

Tanım 2.22. $X \subset \omega$ olacak şekilde bir lineer metrik uzay olsun. Eğer, X dizi uzayı tam ve X de

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \tau_k(x) = x_k \ (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümleri sürekli ise, X e FK -uzayı denir. Eğer, FK -uzayı üzerinde bir norm tanımlanabilirse bu uzaya BK -uzayı denir (Malkowsky ve Rakocevic, 2000).

Teorem 2.23. X normuna göre bir BK -uzayı ve T de üçgensel bir matris olsun. Bu takdirde; X_T cümlesi, $\forall x \in X_T$ için

$$\|x\|_T = \|T(x)\|$$

normuna göre bir BK -uzayıdır (Malkowsky ve Pawan, 1999).

Çalışma boyunca sıkça kullanılacak olan bazı standart dizi uzaylarının tanımlarını verelim.

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\}$$

$$\begin{aligned}
c &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k < \infty \right\} \\
\ell_\infty &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_k |x_k| < \infty \right\} \\
\ell_p &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\} \\
cs &= \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_k x_k < \infty \right\} \\
bs &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup \left| \sum_{k=0}^n x_k \right| < \infty \right\}
\end{aligned}$$

Örnek 2.24. ω uzayı $d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k(1+|x_k - y_k|)}$ metriğine göre bir FK-uzayıdır (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Örnek 2.25. c , c_0 ve ℓ_p uzayları $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ normuna göre, $1 \leq p < \infty$ için ℓ_p uzayı da

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir BK-uzayıdır (Malkowsky E., 2001).

Teorem 2.26. BK-uzayları arasında tanımlanan lineer dönüşümler süreklidirler (Cooke R.G., 1950).

Tanım 2.27. λ bir dizi uzayı, $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. A sonsuz matrisinin λ_A ile gösterilen etki alanı

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\}$$

olarak tanımlanır (Başar 2012). λ_A cümlesi diziler üzerinde tanımlanan skalerle çarpma ve toplama işlemlerine göre bir lineer uzaydır. Bu nedenle λ_A cümlesi bir dizi uzayı olarak düşünülebilir. A limitleme metodu tarafından üretilen yeni λ_A dizi uzayı genel olarak ya uzayın bir genellemesi olur ya da orijinal λ uzayını kapsar.

Matris etki alanı ile ilgili detaylı bilgi Altay ve Başar (2007), Altay vd (2006), Kirişçi ve Başar (2010), Mursaleen ve Noman (2010) çalışmalarında ve Başar (2012), Mursaleen ve Başar (2020) kitaplarında mevcuttur.

Matris dönüşümlerinin karakterize edilmesi ile ilgili de son yıllarda oldukça fazla çalışmalar mevcuttur (Başarır ve Kara 2011, Candan 2014, Choudhary vd 2022, Dağlı 2022, Sarıgöz Oktar ve Dağlı 2024).

Ayrıca, son yıllarda, bazı üçgensel matrisler yardımıyla yeni Banach uzayları oluşturma fikri oldukça yaygınlaşmıştır. Özellikle, bazı önemli sayılar ve fonksiyonlar bu amaçla kullanılmıştır. Örneğin, Fibonacci sayıları ile ilgili Ercan ve Bektaş (2017), Kara (2013), Kara ve İlkhan (2016); tribonacci ile ilgili Dağlı ve Yaying (2023), Yaying ve Hazarika (2020), Yaying ve Kara (2021); Catalan sayıları ile ilgili Dağlı (2023), Yaying vd (2023); Bell sayıları ile ilgili Karakaş (2023); Schröder sayıları ile ilgili Dağlı (2022,2023); ve sayılar teorisi ile ilgili fonksiyonlar hakkında İlkhan (2020), İlkhan ve Kara (2019), İlkhan vd (2020), İlkhan vd (2020) çalışmalar yapmıştır.

Catalan sayıları C_n ile gösterilir ve $n \geq 0$ için $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ açık formülü ile verilir (Stanley 2015). Bu sayılar ayrıca Motzkin sayısı M_n kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k. \quad (2.2)$$

Matematikte, M_n Motzkin sayısı, bir daire üzerindeki n nokta arasında kesişmeyen kırışları çizmenin farklı yollarının sayısıdır.

Ayrıca, Catalan sayıları aşağıdaki bağıntılara sahiptir:

$$C_n = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}, \quad C_0 = 1 \quad (2.3)$$

ve

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n, \quad C_0 = 1.$$

İlkhan (2020) ve Kara ve Kara (2021) çalışmalarında Catalan sayıları içeren (2.3) bağıntısından yararlanılıp bir matris tanımlanmış, iyi bilinen dizi uzaylarındaki matris etki alanı incelenmiş ve birçok önemli özellikler sunulmuştur.

Karakaş ve Dağlı (2023), (2.2) bağıntısı yardımıyla $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})$ ile gösterilen

$$\tilde{c}_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{M_k}{C_{n+1}}, & 0 \leq k \leq n; \\ 0, & k > n; \end{cases} \quad (2.4)$$

matrisini tanımlamışlardır. Ayrıca,

$$\ell_p(\tilde{C}) = \left\{ z = (z_k) \in \omega : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k \right|^p < \infty \right\}, \quad (1 \leq p < \infty \text{ için})$$

ve

$$\ell_{\infty}(\tilde{C}) = \left\{ z = (z_k) \in \omega : \sup_n \left| \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde Banach uzayları verilmiştir. Bu uzayların bazı geometrik ve topolojik özellikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})$ matrisinin c ve c_0 dizi uzaylarındaki etki alanı kullanılarak $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzayları verilecektir. Bu uzayların dualleri belirlenip bu uzaylar üzerinde tanımlanan matris dönüşümlerinin bazı sınıfları karakterize edilecektir.



3. MATERYAL VE METOT

Kaynak taraması bölümünde yer alan genel Fonksiyonel Analiz kavram ve teoremler ışığında, son yıllarda yapılan çalışmalarda yer alan özel sayılar ve fonksiyonları içeren matris ve bunun yardımıyla sunulan uzaylar ve özellikler Materyal ve Metot olarak kullanılacaktır.



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})$ matrisinin c ve c_0 dizi uzaylarındaki etki alanı kullanılarak $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzayları tanımlanacaktır. Bu uzayların dualleri belirlenip bu uzaylar üzerinde verilen matris dönüşümlerinin bazı sınıfları karakterize edilecektir.

4.1. $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ dizi uzayları

Bu bölümde, $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların sırasıyla c_0 ve c uzayları ile doğrusal izomorfik oldukları gösterilecektir. Ayrıca, bu uzaylar için Schauder tabanları verilecektir.

$c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ dizi uzaylarını

$$c_0(\tilde{C}) = \left\{ z = (z_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k = 0 \right\}$$

ve

$$c(\tilde{C}) = \left\{ z = (z_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k \text{ mevcut} \right\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Tüm $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = (\tilde{C}z)_n$ dizisini

$$y_n = (\tilde{C}z)_n = \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k, \quad (4.1)$$

şeklinde herhangi $z = (z_k)$ dizisinin $\tilde{C}$ -dönüşümü olarak tanımlayalım. Ayrıca, tüm $k \in \mathbb{N}$ için

$$z_k = (\tilde{C}^{-1}z)_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{C_{j+1}}{M_k} y_j \quad (4.2)$$

ifadesi geçerlidir.

Belirtelim ki, $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzayları

$$\|z\|_{c_0(\tilde{C})} = \|z\|_{c(\tilde{C})} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k \right|$$

normu ile BK-uzaylarıdır.

Teorem 4.1. $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzayları, sırasıyla c_0 ve c uzayları ile doğrusal izomorfiktir.

İspat Her iki uzayın kanıtlarının benzerliklerinden dolayı, ilk iddianın kanıtını sunmak yeterlidir. $L : c_0(\tilde{C}) \rightarrow c_0$ ile $L(z) = (\tilde{C}_n(z))$ dönüşümü tanımlansın. L nin doğrusal olduğu açıktır. $L(z) = 0$ olduğu gerçeğinden $z = 0$ olduğu sonucuna varılabilir, bu nedenle L birebirdir. Herhangi bir dizi $y = (y_n) \in c_0$ için (4.2) uygularsak,

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n(z) &= \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k z_k \\ &= \frac{1}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M_k \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{C_{i+1}}{M_k} y_i \\ &= y_n,\end{aligned}$$

buradan, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(z) = y_n$ ye ulaşılabilir. Bu nedenle, $Lz = y$ den, L örtendir. $\|z\|_{c_0(\tilde{C})} = \|y\|_{\ell_\infty}$ gerçeğinden, L nin normu koruduğu sonucuna varılır. Yani, $c_0(\tilde{C})$ ve c_0 doğrusal izomorfiktir. $\square$

Teorem 4.2. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\psi^{(k)} \in c_0(\tilde{C})$ olmak üzere $\psi^{(k)} = \{\psi_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$\psi_n^{(k)} = \begin{cases} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{C_{k+1}}{M_n}, & (k \leq n); \\ 0, & (k > n); \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde,

(a) : $c_0(\tilde{C})$ uzayı için, $\{\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots\}$ kümesi bir baz oluşturur ve $c_0(\tilde{C})$ içindeki her z nin

$$z = \sum_k w_k \psi^{(k)} \quad (4.3)$$

şeklinde tek bir temsili vardır.

(b) : $c(\tilde{C})$ uzayı için, $\{e, \psi^{(k)}\}$ kümesi bir baz oluşturur ve $c(\tilde{C})$ içindeki her z nin

$$z = \mu e + \sum_k (w_k - \mu) \psi^{(k)} \quad (4.4)$$

şeklinde tek bir temsili vardır. Burada $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{C}z)_k$ dir.

İspat (a) : $\psi_n^{(k)} \in c_0(\tilde{C})$ olduğu açıktır. Çünkü,

$$\tilde{C}\psi^{(k)} = e^{(k)} \in c_0$$

sağlanır. $z \in c_0(\tilde{C})$ olsun. Her negatif olmayan m tamsayısı için

$$z^{[m]} = \sum_{k=0}^m w_k \psi^{(k)}$$

yazalım. Son eşitliğin her iki tarafına $\tilde{C}$ -dönüşümü uygulanıp sonra bu dönüşümün lineer olduğu kullanılırsa,

$$\tilde{C}z^{[m]} = \sum_{k=0}^m w_k^F \tilde{C}\psi^{(k)} = \sum_{k=0}^m (\tilde{C}z)_k e^{(k)}$$

elde edilir. Ayrıca, $i, m \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ \tilde{C}(z - z^{[m]}) \right\}_i = \begin{cases} (\tilde{C}z)_i, & (i > m); \\ 0, & (0 \leq i \leq m); \end{cases}$$

yazılabilir. Verilmiş herhangi $\varepsilon > 0$ için $z \in c_0(\tilde{C})$ ise $\tilde{C}z \in c_0$ olduğundan $\left| (\tilde{C}z)_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $m \geq m_0$ koşulunu sağlayan m_0 tamsayısı vardır. Sonuç olarak, tüm $m \geq m_0$ için

$$\|z - z^{[m]}\|_{\tilde{C}} = \sup_{i \geq m} \left| (\tilde{C}z)_i \right| \geq \sup_{i \geq m_0} \left| (\tilde{C}z)_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

sağlanır ki bu da (4.3) ile verilen

$$z = \sum_k w_k \psi^{(k)}$$

şeklinde bir gösterimin olduğu anlamına gelir. Şimdi, bu gösterimin tek olduğunu kanıtlayalım. Aksini kabul edelim. Yani z nin

$$z = \sum_k w'_k \psi^{(k)}$$

şeklinde başka bir gösterimi olduğunu varsayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} (\tilde{C}z)_n &= \sum_k w'_k \left\{ \tilde{C}\psi^{(k)} \right\}_n \\ &= \sum_k w'_k e_n^{(k)} = w'_n \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $(\tilde{C}z)_n = w_n$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak, $z \in c_0(\tilde{C})$ nin (4.3) deki gösterimi bir tekdir.

(b) $e \in c$ ve $\{\psi^{(k)}\} \subset c_0(\tilde{C})$ olduğundan $\{e, \psi^{(k)}\} \subset c_0(\tilde{C})$ dir. $z \in c_0(\tilde{C})$ olsun. Bu durumda (4.4) şartını sağlayan bir tek μ vardır. $u = z - \mu e$ denirse $u \in c_0(\tilde{C})$ olur. (a) kısmı gereğince u gösterimi bir tekdir. Dolayısıyla,

$$z - \mu e = \sum_k (w_k - \mu) \psi^{(k)}$$

yazılır ki buradan

$$z = \mu e + \sum_k (w_k - \mu) \psi^{(k)}$$

elde edilmiş olur. □

4.1.1. α -, β -, γ -Dualler

Bu bölümde, $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzaylarının α -dual, β -dual ve γ -dualleri sunulacaktır.

Λ ve Ψ dizi uzayları için $S(\Lambda, \Psi)$ cümlesi

$$S(\Lambda, \Psi) = \{u \in \omega : \text{Her } z \in \Lambda \text{ için } zu \in \Psi\}$$

ile tanımlanır. Bu notasyonla, Λ nın α -, β -, γ -dualleri şu şekilde verilebilir:

$$\Lambda^\alpha = S(\Lambda, \ell_1), \quad \Lambda^\beta = S(\Lambda, cs) \text{ ve } \Lambda^\gamma = S(\Lambda, bs),$$

Şimdi, $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzaylarının α -dual, β -dual ve γ -duallerinin kanıtlarında kullanılacak olan lemmaları kanıtsız olarak verelim.

Lemma 4.3. $W = (w_{nk}) \in (c_0, \ell_1) = (c, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{N, M \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in M} w_{nk} \right| < \infty,$$

olmasıdır. Burada $F, \mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin ailesini gösterir (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 4.4. Herhangi bir $\mathcal{U} = (u_{nk})$ üçgensel matrisi ve bunun tersi $\mathcal{V} = (v_{nk})$ matrisi olsun. Bu takdirde, $\mathcal{P} = (p_{nk})$ matrisi

$$p_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^n t_j v_{jk}, & (k \leq n); \\ 0, & (k > n); \end{cases}$$

şeklinde ise,

$$\Lambda_U^\beta = \{t = t_k \in \omega : \mathcal{P} \in (\Lambda, c)\}$$

$$\Lambda_U^\gamma = \{t = t_k \in \omega : \mathcal{P} \in (\Lambda, \ell_\infty)\}$$

ifadeleri geçerlidir (Altay ve Başar, 2007).

Teorem 4.5. $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzaylarının α -duali

$$\varphi_1 = \left\{ t = (t_n) \in \omega : \sup_{N, M \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in M} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{C_{k+1}}{M_n} t_n \right| < \infty \right\}$$

şeklindedir.

İspat Herhangi bir $t = (t_n) \in \omega$ dizi ile ilişkili olarak bir $\mathcal{A} = (a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{C_{k+1}}{M_n} t_n, & (k \leq n); \\ 0, & (k > n); \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Tüm $n \in \mathbb{N}$ için (4.1) ile verilen $\tilde{C}$ -dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{A}_n y = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{C_{k+1}}{M_n} t_n y_k = t_n z_n \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) eşitliği yorumlanırsa, $tz \in \ell_1$ için $z \in c_0(\tilde{C})$ veya $c(\tilde{C})$ ancak ve ancak $\mathcal{A}y \in \ell_1$ için $y \in c_0$ veya $y \in c$ olduğu sonucu çıkar. Bu nedenle, Lemma 4.3 kullanılarak

$$\sup_{N, M \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in M} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{C_{k+1}}{M_n} t_n \right|$$

ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak, $(c_0(\tilde{C}))^\alpha = (c(\tilde{C}))^\alpha = \varphi_1$ elde edilir. $\square$

Aşağıdaki teorem, $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzaylarının β - ve γ -duallarını gösterir, kanıtı Lemma 4.4 yardımıyla yapılır.

Teorem 4.6. φ_2, φ_3 ve φ_4 kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\varphi_2 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} t_i \right| < \infty \right\},$$

$$\varphi_3 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} t_i \text{ her biri için } k \in \mathbb{N} \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$\varphi_4 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} t_i \text{ mevcut} \right\}.$$

Bu takdirde, $(c_0(\tilde{C}))^\beta = \varphi_2 \cap \varphi_3$, $(c(\tilde{C}))^\beta = \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4$, $(c_0(\tilde{C}))^\gamma = (c(\tilde{C}))^\gamma = \varphi_2$ dir.

4.2. Matris Dönüşümleri

Bu bölümün amacı, $\Lambda \in \{c_0, c\}$ ve $\Psi \in \{\ell_1, c_0, c, \ell_\infty\}$ için $(\Lambda(\tilde{C}), \Psi)$ uzayında bazı matris sınıflarının karakterizasyonunu yapmaktır.

Lemma 4.7. $W = (w_{nk}) \in (c, c)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |w_{nk}| < \infty, \quad (4.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{nk} = \lambda_k, \quad (k \in \mathbb{N} \text{ için}) \quad (4.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k w_{nk} = \lambda$$

Ayrıca, $W = (w_{nk}) \in (c_0, c_0)$ olması için gerek ve yeter koşul (4.7) nin sağlanması ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{nk} = 0, \quad (k \in \mathbb{N} \text{ için}) \quad (4.8)$$

olmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 4.8. $W = (w_{nk}) \in (c_0, \ell_\infty) = (c, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter koşul (4.6) şartının sağlanmasıdır. Ayrıca, $W = (w_{nk}) \in (c_0, c)$ olması için gerek ve yeter koşul (4.6) ve (4.7) nin geçerli olmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 4.9. $W = (w_{nk}) \in (c, c_0)$ olması için gerek ve yeter koşul (4.6) ve (4.8) şartlarının sağlanması ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k w_{nk} = 0$ olmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Ayrıca, aşağıdaki teoreme ihtiyacımız vardır ve teoremin kanıtı Kara ve Başarır (2011) tarafından verilmiştir.

Teorem 4.10. Λ bir FK-uzayı ve Ψ, ω nin herhangi bir alt kümesi olsun. $\mathcal{U} = (u_{nk})$ üçgen matrisinin tersini temsil eden $\mathcal{V} = (v_{nk})$ matrisi olsun. Bu takdirde, $W = (w_{nk}) \in (\Lambda_{\mathcal{U}}, \Psi)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$G^{(n)} = \left(g_{mk}^{(n)} \right) \in (\Lambda, c), \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ için})$$

ve

$$G = (g_{nk}) \in (\Lambda, \Psi),$$

ifadelerinin sağlanmasıdır. Burada

$$g_{mk}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=k}^m w_{ni} v_{ik}, & (k \leq m); \\ 0, & (k > m); \end{cases}$$

ve

$$g_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} w_{ni} v_{ik}, \quad (\text{her } k, m, n \in \mathbb{N} \text{ için})$$

dir.

Şimdi, bazı koşulları sıralayalım:

$$\text{Her sabit } n \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^j \left| \sum_{i=k}^j (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ni} \right| < \infty. \quad (4.9)$$

$$\text{Her sabit } k, n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^j (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ni}. \quad (4.10)$$

$$\text{Her sabit } n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^j \sum_{i=k}^j (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ni}. \quad (4.11)$$

$$\sup_{N, M \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in M} \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{C_{k+1}}{M_n} w_{ni} \right| < \infty. \quad (4.12)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ni} \right| < \infty. \quad (4.13)$$

$$\text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ni} = 0. \quad (4.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ni} = 0. \quad (4.15)$$

$$\text{Her sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ni} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ni} \text{ mevcut.} \quad (4.17)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{r=0}^n \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ri} \right| < \infty. \quad (4.18)$$

$$\text{Her sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ri} = 0. \quad (4.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_{r=0}^n \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ri} = 0. \quad (4.20)$$

$$\text{Her sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ri} \text{ vardır.} \quad (4.21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_{r=0}^n \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{C_{k+1}}{M_i} w_{ri} \text{ mevcut.} \quad (4.22)$$

Yukarıda verilen ifadeler ışığında $\Lambda \in \left\{ c_0 \left(\tilde{C} \right), c \left(\tilde{C} \right) \right\}$ ve $\Psi \in \{ \ell_1, c_0, c, \ell_\infty \}$ olmak üzere $W = (w_{nk}) \in (\Lambda, \Psi)$ karakterizasyonu verilebilir.

Teorem 4.11. $\Lambda \in \left\{ c_0 \left(\tilde{C} \right), c \left(\tilde{C} \right) \right\}$ ve $\Psi \in \{ \ell_1, c_0, c, \ell_\infty \}$ olsun. O zaman, $W = (w_{nk}) \in (\Lambda, \Psi)$ için karakterizasyon, Tablo 5.1 de gözlemlenebilir.

1. (4.9), (4.10) ve (4.12) geçerlidir.
2. (4.9), (4.10), (4.11) ve (4.12) geçerlidir.
3. (4.9), (4.10), (4.13) ve (4.14) geçerlidir.
4. (4.9), (4.10), (4.11), (4.13) (4.14) ve (4.15) geçerlidir.
5. (4.9), (4.10), (4.13) ve (4.16) geçerlidir.
6. (4.9), (4.10), (4.11), (4.13), (4.16) ve (4.17) geçerlidir.
7. (4.9), (4.10) ve (4.13) geçerlidir.
8. (4.9), (4.10), (4.11) ve (4.13) geçerlidir.

Sonuç 4.12. $\Lambda \in \left\{ c_0 \left(\tilde{C} \right), c \left(\tilde{C} \right) \right\}$ ve $\Psi \in \{ cs_0, cs, bs \}$ olsun. O zaman, $W = (w_{nk}) \in (\Lambda, \Psi)$ için karakterizasyon, Tablo 5.2 de gözlemlenebilir.

1. (4.9), (4.10), (4.18) ve (4.19) geçerlidir.
2. (4.9), (4.10), (4.11), (4.18), (4.19) ve (4.20) geçerlidir.
3. (4.9), (4.10), (4.18) ve (4.21) geçerlidir.
4. (4.9), (4.10), (4.11), (4.18) (4.21) ve (4.22) geçerlidir.
5. (4.9), (4.10) ve (4.18) geçerlidir.
6. (4.9), (4.10), (4.11) ve (4.18) geçerlidir.

Lemma 4.13. $W = (w_{nk}) \in (\ell_1, c_0)$ olması için gerek ve yeter koşul (4.8) ifadesinin sağlanması ve

$$\sup_{n,k \in \mathbb{N}} |w_{nk}| < \infty \quad (4.23)$$

olmasıdır. $W = (w_{nk}) \in (\ell_\infty, c_0)$ olması için gerek ve yeter koşul (4.8) ifadesinin sağlanması ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |w_{nk}| = 0$ olmasıdır. Ayrıca, $W = (w_{nk}) \in (\ell_1, c)$ olması için gerek

ve yeter koşul (4.7) ve (4.23) bağıntılarının sağlanmasıdır. Dahası, $W = (w_{nk}) \in (\ell_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter koşul (4.7) nin sağlanması ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |w_{nk}| = \sum_k \left| \lim_{n \rightarrow \infty} w_{nk} \right|$$

olmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Teorem 4.14. $\mathcal{A} = (a_{nk})$ ve $\mathcal{T} = (t_{nk})$ sonsuz matrisleri arasında tüm $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} a_{ik}$$

şeklinde bir bağıntı olsun. Bunun sonucunda, $\mathcal{A} \in \left(\Psi, \Lambda \left(\tilde{C} \right) \right)$ olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir Ψ dizi uzayı ve $\Lambda = \{c_0, c\}$ uzayı için $\mathcal{T} \in (\Psi, \Lambda)$ olmasıdır.

İspat Herhangi bir $z = (z_k) \in \Psi$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} t_{nk} z_k = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} z_k$$

gerçeğinden tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{T}_n(z) = \tilde{C}_n(\mathcal{A}z)$ yazılır. Yani, $z = (z_k) \in \Psi$ için, $\mathcal{A}z \in \Lambda \left(\tilde{C} \right)$ olması için gerek ve yeter koşul $z = (z_k) \in \Psi$ için, $\mathcal{T}z \in \Lambda$ olmasıdır. Sonuç olarak, kanıt tamamlanır. $\square$

Şimdi aşağıdaki ek koşullar verilsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} = 0 \quad (\text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için}). \quad (4.24)$$

$$\sup_{k, n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} \right| < \infty. \quad (4.25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} \quad (\text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için}). \quad (4.26)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} \right| < \infty. \quad (4.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} = 0. \quad (4.28)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} \text{ mevcut.} \quad (4.29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \left| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} \right| = 0. \quad (4.30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \left| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} \right| = \sum_k \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{M_i}{C_{n+1}} w_{ik} \right|. \quad (4.31)$$

Teorem 4.15. $\Psi \in \{\ell_1, c_0, c, \ell_\infty\}$ ve $\Lambda \in \{c_0(\tilde{C}), c(\tilde{C})\}$ olsun. O zaman, $W = (w_{nk}) \in (\Psi, \Lambda)$ için karakterizasyon, Tablo 5.3 de gözlemlenebilir.

1. (4.24) ve (4.25) geçerlidir.
2. (4.25) ve (4.26) geçerlidir.
3. (4.24) ve (4.27) geçerlidir.
4. (4.26) ve (4.27) geçerlidir.
5. (4.24), (4.27) ve (4.28) geçerlidir.
6. (4.26), (4.27) ve (4.29) geçerlidir.
7. (4.24) ve (4.30) geçerlidir.
8. (4.26) ve (4.31) geçerlidir.

Tablo 4.1. Karakterizasyon

'den	'e			
	l_1	c_0	c	l_∞
$c_0(\tilde{C})$	1	3	5	7
$c(\tilde{C})$	2	4	6	8

Tablo 4.2. Karakterizasyon

'den	'e		
	l_1	c_0	c
$c_0(\tilde{C})$	1	3	5
$c(\tilde{C})$	2	4	6

Tablo 4.3. Karakterizasyon

'den	'e	
	$c_0(\tilde{C})$	$c(\tilde{C})$
l_1	1	2
c_0	3	4
c	5	6
l_∞	7	8

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})$ matrisinin c ve c_0 dizi uzaylarındaki etki alanı kullanılarak $c_0(\tilde{C})$ ve $c(\tilde{C})$ uzayları verildi. Bu uzayların dualleri belirlenip bu uzaylar üzerinde tanımlanan matris dönüşümlerinin bazı sınıfları karakterize edildi.



6. KAYNAKLAR

- Altay, B. and Başar, F. 2007. Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space. *J. Math. Anal. Appl.*, 336: 632–645.
- Altay, B. Başar, F. and Mursaleen, M. 2006. On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I. *Inf. Sci.*, 176(10): 1450–1462.
- Başar, F. 2021. Summability Theory and Its Applications. Bentham Science Publishers, İstanbul.
- Başarır, M. and Kara, E. E. 2011. On compact operators on the Riesz $B(m)$ -difference sequence spaces. *Iran J. Sci. Technol. Trans. A. Sci.*, 35: 279–285.
- Candan, M. 2014. Domain of the double sequential band matrix in the spaces of convergent and null sequences. *Adv. Differ. Equ.* 2014: 163.
- Choudhary B. and Nanda, S. 1989. Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons Inc. New Delhi, India.
- Choudhary, A. Raj K., and Mursaleen, M. 2022. Compact operators on spaces of binomial fractional difference sequences. *Mathematical Sciences*, 16(1): 79–85.
- Cooke R. G. 1950. Infinite Matrices and Sequence Spaces. Macmillan and Co. Limited.
- Dağlı, M. C. 2023. A novel conservative matrix arising from Schröder numbers and its properties. *Linear Multilinear Algebra*, 71(8): 1338–1351.
- Dağlı, M. C. 2022a. A new almost convergent sequence space defined by Schröder matrix. *Linear Multilinear Algebra*, 71(11): 1863–1874.
- Dağlı, M. C. 2022b. Matrix mappings and compact operators for Schröder sequence spaces. *Turkish J. Math.* 46(6): 2304–2320.
- Dağlı, M. C. 2023. On the paranormed sequence space arising from Catalan-Motzkin matrix. *Adv. Oper. Theory*, 8(2): Article no: 33.

- Dağlı, M. C., and Yaying, T. 2023. Some new paranormed sequence spaces derived by regular Tribonacci matrix. *J. Anal.*, 31: 109–127.
- Ercan, S., and Bektaş, C. A. 2017. Some topological and geometric properties of a new BK-space derived by using regular matrix of Fibonacci numbers. *Linear Multilinear Algebra*, 65(5): 909–921.
- İlkan, M. 2020a. Matrix domain of a regular matrix derived by Euler totient function in the spaces c_0 and c . *Mediterr. J. Math.*, 17(1): 27.
- İlkan, M. 2020b. A new conservative matrix derived by Catalan numbers and its matrix domain in the spaces c and c_0 . *Linear Multilinear Algebra*, 68(2): 417–434.
- İlkan, M., and Kara, E. E. 2019. A new Banach space defined by Euler totient matrix operator. *Oper. Matrices*, 13(2): 527–544.
- İlkan, M. Kara, E. E., and Usta, F. 2020. Compact operators on the Jordan totient sequence spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, 44(9): 7666–7675.
- İlkan, M. Şimşek, N., and Kara, E. E. 2020. A new regular infinite matrix defined by Jordan totient function and its matrix domain in ℓ_p . *Math. Methods Appl. Sci.*, 44(9): 7622–7633.
- Kara, E. E. 2013. Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces. *J. Inequal. Appl.*, 2013: 38.
- Kara, E. E., and Başarır, M. 2011. On some Euler $B^{(m)}$ difference sequence spaces and compact operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 379: 499–511.
- Kara, E. E., and İlkan, M. 2016. Some properties of generalized Fibonacci sequence spaces. *Linear Multilinear Algebra*, 64(11): 2208–2223.
- Kara, M. İ., and Kara, E. E. 2021. Matrix transformations and compact operators on Catalan sequence spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 498(1): Article no: 124925.
- Karakaş, M. 2023. On the sequence spaces involving bell numbers. *Linear Multilinear Algebra*, 71(14): 2298–2309.

- Karakaş, M., and Dağlı, M. C. 2023. Some topologic and geometric properties of new Catalan sequence spaces. *Adv. Oper. Theory*, 8(1): Article number: 14.
- Kirişçi, M., and Başar, F. 2010. Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix. *Comput. Math. Appl.*, 60: 1299–1309.
- Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.*, John Wiley & Sons.
- Malkowsky E. 2001. FK spaces, matrix transformations and the Hausdorff measure of noncompactness. Seminar, Van.
- Malkowsky E., and Pawan K. J. 1999. *Sequence Spaces and Applications.* Narosa Publishing House, New Delhi, India.
- Malkowsky E., and Rakocevic V. 2000. An Introduction into The Theory of Sequence Spaces and Measures of Noncompactness. *Zb. Rad.*, 17(9): 143–234.
- Mursaleen, M., and Başar, F. 2020. *Sequence spaces: Topic in modern summability theory.* CRC Press, Taylor & Francis Group, Series: Mathematics and its applications, Boca Raton, London, New York.
- Mursaleen, M., and Noman, A. K. 2010. On some new difference sequence spaces of non-absolute type. *Math. Comput. Model.*, 52(3–4): 603–617.
- Sarigöz Oktar, B., and Dağlı, M. C. 2024. New sequence spaces derived from Catalan-Motzkin matrix and related matrix transformations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 76(10): 1505–1515.
- Stanley, R. P. 2015. *Catalan Numbers.* Cambridge University Press, New York.
- Stieglitz, M., and Tietz, H. 1977. Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht. *Math Z.* 154: 1–16.
- Wilansky, A. 1984. *Summability through Functional Analysis.* North-Holland Mathematics Studies 85. Amsterdam-New York-Oxford.

- Yaying, T., and Hazarika, B. 2020. On sequence spaces defined by the domain of a regular Tribonacci matrix. *Math. Slovaca*, 70(3): 697–706.
- Yaying, T., and Kara, M. İ. 2021. On sequence spaces defined by the domain of tribonacci matrix in c_0 and c . *Korean J. Math.*, 29(1): 25–40.
- Yaying, T. Kara, M. İ. Hazarika, B., and Kara, E. E. 2023. A study on q -analogue of Catalan sequence spaces. *Filomat*, 37(3): 839–850.



ÖZGEÇMİŞ

Büşra SARIGÖZ OKTAR

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2022-2025	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans:	Gazi Üniversitesi
2016-2020	Polatlı Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara