

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

CEBİRSEL POLİAFİNOR YAPILAR VE LİFTLER

Nejmi CENGİZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ERZURUM

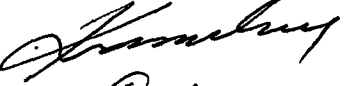
2002

127481

Her hakkı saklıdır

Yrd. Doç. Dr. Abdullah MAŞDENİ danışmanlığında, Nejmi CENGİZ tarafından hazırlanan bu çalışma 04.07.2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

İmza 

Üye: Prof. Dr. Arif SALİMOV

İmza : 

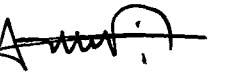
Üye: Prof. Dr. Hüseyin AYDIN

İmza : 

Üye: Yrd. Doç. Dr. Abdullah MAŞDENİ

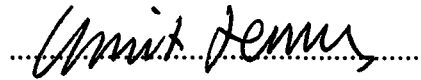
İmza : 

Üye: Yrd. Doç. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza : 

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)



Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

CEBİRSEL POLİAFİNOR YAPILAR VE LİFTLER

Nejmi CENGİZ

Atatürk Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Y.Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN

Bu tezde, Φ -Tachibana operatörü, C^∞ -sınıfından olan M_n manifoldunun invariyan altmanifoldu üzerindeki pür karışık tensörlere uygulandı. Ayrıca, g_{ij} Riemann metrik tensörünün Φ tensörü olması halinde indirgenmiş g_{AB} Riemann metrik tensörünün de Φ -tensör olduğu gösterildi. V_n , Riemann manifoldu olsun. $f : T_q^p(V_n) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ difeomorfizmi olmak üzere ${}^C V_2 = f_* {}^C V_1$ olması için V vektör alanının Kiling vektör alanı olması gerektiği gösterildi. Son olarak, M_n manifoldu üzerinde $\Pi = \{\varphi_j^i\}$ poliafinor yapıları yardımıyla cebirsel yapılar tanımlandı ve genişlemiş $d\mu$ diferensiyelinin ${}^C \Pi$ -yapısına göre hemen hemen holomorf olduğu ispatlandı. Ayrıca, M_n manifoldu üzerindeki (1,1) tensör alanları ile belirlenmiş olan $\mathcal{D}\varphi$ türevi $T_q^p(M_n)$ tensör demetinde incelendi.

2002, 83 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferensiyellenebilir manifold, pür tensör, lift, konneksiyon, eğrilik tensörü.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ALGEBRAIC POLYAFFINOR STRUCTURES AND LIFTS

Nejmi CENGİZ

Atatürk University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN

In this thesis, the Φ -Tachibana operator was applied to the pure mixed tensor on the invariant submanifold of class C^∞ . In addition, it has been shown that, if Riemann metric tensor g_{ij} is Φ -tensor then induced Riemann metric tensor g_{AB} is Φ -tensor. Let V_n be Riemann manifold. Provided that $f : T_q^p(V_n) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ diffeomorphism, it was shown that if ${}^C V_2 = f_* {}^C V_1$ then vector field V must be Killing vector field. Finally, algebraic structures are defined over M_n manifold by $\Pi = \{\varphi_j^i\}$ polyaffinor structure and the expansion of $d\mu$ differential was proved almost holomorphic with respect to algebraic structure ${}^C \Pi$. And it was investigated the prolongations of $\mathcal{D}\varphi$ -derivations in a manifold M_n to its tensor bundle $T_q^p(M_n)$, $\mathcal{D}\varphi$ being a derivation determined by a tensor field of type (1.1).

2002, 83 pages

Keywords: Differentiable manifold, pure tensor, lift, connection, curvature tensor.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Y. Doç. Dr. Abdullah Mağden'e ve değerli fikirlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Arif Salimov, Sayın Y.Doç. Dr. Abdullah Kaplan ve Matematik Bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin Aydın'a en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı eşime ... teşekkürlerimi sunarım.

Nejmi Cengiz

Haziran 2002

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1.Diferensiyellenebilir Manifoldlar.....	3
2.1.1. Diferansiyellenebilir dönüşümler.....	5
2.1.2. Dönüşümün diferensiyeli.....	8
2.1.3. Altmanifoldlar.....	11
2.2. Tensör Alanları.....	12
2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon.....	15
2.3.1. Afin konneksiyonlu uzaylar.....	19
2.3.2. Eğrilik ve burulma tensörleri.....	22
2.3.3. Konneksiyonların dönüşümü.....	24
2.3.4. Burulması sıfır olan uzaylar.....	26
3. METARYAL ve YÖNTEM.....	31
3.1. Cebirlerle Tain Edilen Geometrik Yapılar.....	31
3.1.1 Hiperkomplek cebir.....	31
3.1.2. A-Holomorf manifoldlar.....	37
3.1 3. Pür tensörler.....	39
3.1.4. Cebirsel yapılara göre pür tensörler.....	40
3.1.5. Holomorf tensörlerin realizasyonu.....	45
3.2. Liftler Hakkında Genel Bilgiler.....	47
3.2.1.Tanjant demet.....	47
3.2.2. Kotanjant demet.....	52
3.2.3. Tensör demet.....	54
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	57
4.1. İnvariant Alt Manifold Üzerinde Tachibana Operatörü.....	57
4.2. Riemann Metrik Tensörünün Φ -Tensör Olması.....	59
4.3. Hemen Hemen Holomorf Dönüşüm.....	62
4.3.1. Difeomorfizmlerin özellikleri.....	62
4.4. Tensör Demetde Kesit Boyunca Vektör Alanların Tam Liftinin Taşınması.....	66

4.4.1. Kesit boyunca tam lift.....	66
4.4.2. Killing vektör alanı ve tam liftin taşınması.....	68
4.5. Tensör Demetde Türevlerin Liftleri.....	71
4.5.1. Tensör alanların vertikal lifti ve γ -operatörü.....	71
4.5.2. Türevlerin tam liftleri	73
4.5.3. Lie türevinin tam lifti.....	76
4.5.4. Kovaryant türevin tam lifti.....	77
4.5.5. Eğrilik operatörü ile belirlenmiş türevin tam lifti.....	78
5. SONUÇLAR.....	81
KAYNAKLAR.....	82



SİMGELER DİZİNİ

$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_x(M_n)$	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T_q^p(M_n)$	M_n Manifoldu Üzerinde (p, q) tipli Tensör Demet
$\mathfrak{T}_q^p(M_n)$	(p, q) -tipli Tensör Modülü
$\mathcal{D}$	Türev Operatörü
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovariyant Türev
Γ_{ij}^h	Cristoffel Sembolü
R_{ijk}^h	Eğrilik Tensörü
T_{ij}^h	Afin Deformasyon Tensörü
S_{ij}^h	Burulma Tensörü
π	Tabii İzdüşüm
Φ	Tachibana Operatörü
$\mathcal{C}$	Tam Lift
$\mathcal{V}$	Dikey Lift
$\mathcal{H}$	Yatay Lift

1. GİRİŞ

Diferensiyellenebilir manifoldlar üzerindeki çeşitli geometrik yapıların incelenmesi modern diferensiyel geometrinin önemli konularındandır. Bu konulardan birisi poliafinor yapılarıdır. Özel halde, poliafinor yapılar cebirsel yapılar da olabilirler. Yani manifold üzerindeki poliafinor yapı herhangi sonlu boyutlu birleşmeli, değişmeli ve birim elemanlı cebiri tasvir edebilir. Cebirsel poliafinor yapının integrallenebilir olduğu durumda, bu tür yapıya sahip olan manifold cebir üzerinde kurulmuş manifoldu reellemiş olur.

İki boyutlu cebirin geometride kullanılmaya başlaması 19. yüzyılın sonu ve 20. yüzyılın başlarına raslamaktadır. Bu yıllarından itibaren kompleks sayılar cebiri diferensiyel geometriye uygulanmıştır. Son yıllarda cebiri, diferensiyel geometriye uygulayan geometricilerden bazılarını Vishnevskii, Shirokov, Shurygin (1985), Kruchkovich (1972), Salimov (1992) biçiminde sıralayabiliriz.

Tensör demette geometrik objelerin lift teorisi hızla gelişen geometri alanlarından birisidir. Tanjant demette, lift teorisini ilk olarak çalışmaya başlayan matematikçiler Yano ve Kobayashi (1966) olmuştur. Lift anlamı Yano ve Kobayashi'den daha önce Sasaki (1958)'nin çalışmalarında "devam" adı altında görülmektedir. Kotanjant demette lift teorisi ilk olarak Yano ve Patterson (1967)'un çalışmalarıyla başlamıştır. Bu teori Yano ve Ishihara (1973)'nin çalışmalarıyla geliştirilmiştir.

Tanjant demet, diğer tensör demetlerden daha özeldir. Çünkü, tanjant demet geometrisi, cebir üzerindeki geometri ile doğal olarak ilişkilidir. Tanjant demette doğal olarak integrallenebilir afinor yapı oluşur. Bu yapı dual sayılar cebirinin regüler tasvirini verir. Bu sebepten dolayı, fonksiyonların dual bölgeye holomorf devamı oluşur. Bu özellik tanjant demette lift teorisine yeni bir anlam kazandırmaktadır. Bu tür yeni açıdan bakış lift teorisinin daha da zenginleşmesine sebep olmuştur. Bu bakımdan Shirokov (1985) tarafından verilen sinjektif lift anlamı bu bakışın sonucu olarak ortaya çıkmıştır.

Shirokov, Vishnevskii, Salimov (1990, 1992), çalışmalarında cebirsel yapıların, cebir üzerinde kurulmuş manifold ile ilgisi ve holomorfluk (analitiklik) problemlerini

incelemişlerdir. Bu problemlerin çözümünde çok önemli bir yeri olan Φ -operatör teorisini ise ilk olarak Tachibana (1960, 1962)'da hemen hemen kompleks yapı ve genel afinor yapı için kullanmıştır. Daha sonra bu operatörün uygulaması ile Yano (1965, 1966, 1968, 1973), Koto (1960, 1969), Ako gibi matematikçiler çalışmıştır. Tanjant demette bu operatörü hemen hemen kompleks yapı için Sekizawa (1969) ve Sato (1966) tarafından verilmiştir. Ayrıca Φ -operatörü ile ilgili olarak Shirokov vd (1985), Slebodzinski (1964), Willmore (1968), Salimov (1992) çalışmışlardır.

Sunulan bu tezde ise baz manifold ve baz manifoldun tensör demetlerinde cebirsel yapılar, liftler ve bunlar arasındaki bağlantılar verilmiştir. Bu amaçla ikinci ve üçüncü bölümlerde çalışmamızın anlaşılabilmesi için diferensiyellenebilir manifold, cebirsel yapılar ve tensör demetlerinde liftler hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sırasıyla alt manifold üzerinde Φ -Tachibana operatörü incelenmiş ve hemen hemen holomorf dönüşüm hakkında bir çalışma sunulmuştur. Ayrıca Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan tensör demetlerinin kesitleri boyunca verilen vektör alanlarının tam liftinin taşınması gösterilmiş ve son olarak tensör demette özel tipli türevlerin tam lifti incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

2.1.1. Tanım: X Hausdorff uzay olsun. Herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine;

$$\varphi : U \rightarrow V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu harita veya n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Burada $x^1, \dots, x^n$ reel sayıları φ haritasında x noktasının koordinatlarıdır.

2.1.2. Tanım: X Hausdorff uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad A \text{ indisler kümesi}$$

ise, X 'e n boyutlu topolojik manifold veya sadece n -boyutlu manifold denir.

2.1.3. Tanım: X Hausdorff topolojik uzay ve k ise $0 \leq k \leq \infty$ olacak şekilde bir tam sayı olsun. $\alpha \in A$, $U_\alpha \subset X$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ lokal haritalar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X 'i örter ($X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$), yani X, n boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Buna $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü denir. Burada u_β^i , (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları ve u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatları olmak üzere $u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j)$, $i, j = 1, \dots, n$ yazılır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ olması durumunda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü elde edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasını ifade eder.

2.1.4. Tanım: $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

2.1.5. Tanım: X Hausdorff uzay üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k -yapı denir.

C^k -yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlası maksimal C^k atlas adı verilir. X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k -yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0 yapıya topolojik yapı, C^k , $(1 \leq k \leq \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan düzgün yapılara bakılacaktır.

2.1.6. Tanım: M , Hausdorff ve sayılabilir baza sahip topolojik uzay olsun. Eğer, M üzerinde n -boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmiş ise M uzayına n -boyutlu C^∞

sınıfından diferensiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 1999).

Eğer 2.1.6.Tanımda C^∞ sınıfı yerine C^w sınıfı (analitik fonksiyonlar sınıfı) alınırsa, 2.1.6.Tanım reel analitik manifoldun veya C^w sınıfından olan manifoldun tanımı olur.

2.1.1. Diferensiyellenebilir dönüşümler

X_n ve Y_p sırasıyla C^k ve C^q sınıfından diferensiyellenebilir manifoldlar ve $G \subset X_n$ açık küme olmak üzere sürekli $f : G \rightarrow Y_p$ dönüşümü verilsin. φ , bölgesi $U \subset G$ olan harita, ψ ise bölgesi $V \supset f(U)$ olan harita olsun. Keyfi (U, φ) haritası için

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V), \varphi(U) \subset R^n, \psi(V) \subset R^p$$

dönüşümü C^m sınıfından ise f dönüşümüne C^m ($m \leq \min(k, q)$) sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. $f \in C^m(X_n, Y_p)$ için $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ dönüşümü $\varphi(x) \in \varphi(U) \subset R^n$ noktasını $y \in \psi(V) \subset R^p$ noktasına götürür. Eğer, $\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ (yani x^i , $i = 1, \dots, n$, $x \in U$ noktasının (U, φ) haritasındaki koordinatları) ve $y = (y^1, y^2, \dots, y^p)$ ise, bu taktirde

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n), \alpha = 1, \dots, p$$

olur. Tanıma göre $f \in C^m(X_n, Y_p)$ olması için gerek ve yeter şart $y^\alpha \in C^n(R^n, R^p)$ olmasıdır.

C_x^k , $x \in X_n$ noktasını ihtiva eden $G \subset X_n$ açık kümesinde tayin edilmiş C^k sınıfından f fonksiyonların kümesi olsun. Eğer φ , x noktasındaki harita olmak üzere $\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ise,

$$x = \varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

yazılır ve

$$y = f(x) = f(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)) = f^*(x^1, \dots, x^n)$$

olur. $f^* = f \circ \varphi^{-1}$ biçimindedir.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x = \left. \frac{\partial f^*}{\partial x^i} \right|_{\varphi(x)}$$

olarak tanımlanmış olsun. n sayıda $\xi^i \in R$ sayıları için

$$X(f) = \xi^i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_x, \quad \forall f \in C_x^k$$

biçiminde tanımlanan $X : C_x^k \rightarrow R$ lineer fonksiyonu

$$X = \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$$

şeklinde verilir. Bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesini T_x ile gösterelim. Bu küme üzerinde

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2)(f) &= X_1(f) + X_2(f), \\ (\alpha X)(f) &= \alpha X(f) \end{aligned}$$

biçiminde toplama ve skalerle çarpma işlemini tanımlayalım. Bu işlemlere göre T_x , R üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya M_n manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı, bu uzayın elamanlarına ise M_n manifoldunun x noktasındaki tanjant vektörleri denir.

Böylece M_n manifoldunun $x \in M_n$ noktasında tanjant vektör $X = \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$ fonksiyoneli ile aynılaştırılır ve (U, φ) koordinat komşuluğunda $X \in T_x$ vektörü n sayıda ξ^i sayıları ile tayin edilir.

Eğer $\xi_k^i = \delta_k^i$, $i, k = 1, \dots, n$ ise $X = \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$ eşitliğinden n sayıda

$$X_k^0 = \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_x, \quad k = 1, \dots, n$$

vektörleri bulunur. Bu vektörlerin T_x uzayının bir bazıdır ve $\text{Boy} T_x = n$ olur. Bu baz kısaca ∂_k ile gösterilir.

$f \in C_x^k$ fonksiyonunun x noktasındaki diferensiyeli $df = \left. \frac{\partial f}{\partial x^k} \right|_x dx^k$ biçiminde tanımlanır. C_x^k fonksiyonların x noktasındaki diferensiyeli R üzerinde T_x^* vektör uzayını oluşturur. $x^i \in C_x^k$ için $dx^i \in T_x^*$ olduğu aşıkardır. $\left. \frac{\partial f}{\partial x^k} \right|_x \in R$ olduğundan $df = \left. \frac{\partial f}{\partial x^k} \right|_x dx^k$ eşitliğine göre $\forall df \in T_x^*$ diferensiyeli dx^i diferensiyellerinin lineer

terkibleri olurlar. dx^i ler bağımsız olan x^i ($i = 1, \dots, n$) değişkenlerinin diferensiyelleri olduğundan, bunların dx^i diferensiyelleri de lineer bağımsız olacaktır. Buna göre de $\dim T_x^* = n$ olur, $\{dx^i\}$ ise T_x^* uzayının bazı olur. T_x^* uzayının keyfi df elemanı

$$(df)(X) = X(f), \quad \forall X \in T_x$$

biçiminde verilen $df : T_x \rightarrow R$ lineer dönüşümünü tayin eder.

Eğer $(df)(X) = X(f)$, $\forall X \in T_x$ eşitliğinde $f = x^i$, $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ alınırsa,

$$(dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \delta_k^i$$

bulunur. Dolayısıyla $\{dx^i\}$ bazına karşılık gelen baz ∂_k bazı olduğundan T_x^* , T_x vektör uzayının dual uzayı olur. T_x^* uzayına M_n manifoldunun x noktasındaki kotanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına ise M_n manifoldunun x noktasındaki kovektörleri veya lineer formları denir.

T_x uzayının $\{X_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) bazına M_n manifoldunun x noktasındaki çatı denir. Bu çatıya T_x^* uzayında karşılık gelen $\{\theta^i\}$ bazına, yani

$$\theta^i(X_k) = \delta_k^i$$

şartını sağlayan θ^i kovektörlerine M_n manifoldunun x noktasındaki koçatı (coframe) adı verilir. Özel halde, $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\} \in T_x$ ve $\{dx^i\} \in T_x^*$ çatılarına sırasıyla (U, φ) , $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n)$ haritasındaki standart çatı ve koçatı denir.

2.1.1. Teorem: (U, φ) haritasından (U, ψ) haritasına geçildiğinde T_x uzayının baz vektörleri

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \Big|_x = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Big|_x \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$$

kuralına göre ve T_x^* uzayının baz vektörleri ise

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \Big|_x dx^k$$

kuralına göre dönüşürler (Salimov ve Mağden 1999).

2.1.2. Dönüşümün diferensiyeli

X_n ve Y_p diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. Açık $G \subset X_n$ kümesi ve $f : G \rightarrow Y_p$ diferensiyellenebilir dönüşümü her $x \in G$ noktasında

$$(f_{*x}(X))(g) = X(g \circ f), \quad X \in T_x, \quad g \in C_{f(x)}^k \quad (2.1)$$

biçiminde lineer

$$f_{*x} : T_x \rightarrow T_{f(x)}$$

dönüşümünü tayin eder. Burada T_x , $x \in X_n$ noktasındaki tanjant uzay, $T_{f(x)}$ ise $f(x) \in Y_p$ noktasındaki tanjant uzaydır. (2.1) eşitliği ile tanımlanan f_{*x} dönüşümüne f dönüşümünün x noktasındaki diferensiyeli denir. $g \in C_{f(x)}^k$ olduğundan, $g \circ f \in C_x^k$ olur.

$x \in X_n$ noktasının U komşuluğundaki harita (U, φ) , $y = f(x) \in Y_p$ noktasının V komşuluğundaki harita ise (V, ψ) olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \psi(y) &= (y^1, y^2, \dots, y^p) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$x = \varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

$$y = f(x) = f(\varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)) = (f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n)$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$(y^1, \dots, y^p) = \psi(y) = \psi(f(x)) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n)$$

ve buradan da

$$y^a = y^a(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad a = 1, \dots, p \quad (2.2)$$

yazılır. (2.2) denklemi f dönüşümünün koordinat fonksiyonlarıyla yazılışıdır.

$f_{*x}(X)$, $C_{f(x)}^k$ cebiri üzerinde tayin edilmiş reel değerli lineer dönüşümdür. Buna göre $f_{*x}(X) \in T_{f(x)}$ olur.

$$X = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$$

ve $h = g \circ f$ olsun. $g^* = g \circ \psi^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) = g(y) = (g \circ \psi^{-1})(y^1, \dots, y^p) = g^*(y^1, \dots, y^p) \\ &= g^*(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^p(x^1, \dots, x^n)) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} X(g \circ f) &= \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x (h) = \xi^i \left(\frac{\partial h}{\partial x^i} \right)_x \\ &= \xi^i \left(\frac{\partial h}{\partial y^a} \right)_{f(x)} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right)_x \end{aligned}$$

veya

$$X(g \circ f) = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right)_x \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial y^a} \right)_{f(x)} (h) \quad (2.3)$$

yazılır. (2.1) ve (2.3) eşitliklerinin mukayesesinden $f_{*x}(X)$ vektörünün $\left(\frac{\partial}{\partial y^a} \right)_{f(x)}$ bazında

$$\eta^a = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right)_x \xi^i \quad (2.4)$$

şeklinde koordinatlara sahip olduğu çıkar. $\xi^i, \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$ bazında $X \in T_x$ vektörünün koordinatlarıdır.

Böylece, f dönüşümü koordinatlarla

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : y^a = y^a(x^1, \dots, x^n), \quad a = 1, \dots, p$$

şeklinde verilirse, f_{*x} türevi $\left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right)$ Jacobian matrisi kullanılarak (2.4) biçiminde koordinatlarla verilebilir.

$f : G \rightarrow Y_p$, $G \subset X_n$ dönüşümü, f_{*x} dönüşümünden başka f_{*x} 'in transpoz dönüşümü adı verilen $f_x^* : T_{f(x)}^* \rightarrow T_x^*$ lineer dönüşümü

$$f_x^*(dg) = d(g \circ f)_x, \quad f \in C_x^k, \quad g \in C_{f(x)}^k \quad (2.5)$$

kuralı ile tanımlanır. Burada $dg = (dg)_{f(x)} \in T_{f(x)}^*$ biçimindedir. Ayrıca T_x^* ve $T_{f(x)}^*$ ise sırasıyla $x \in G$ ve $f(x) \in Y_p$ noktalarındaki kovektör uzaylardır.

f dönüşümü koordinatlarla

$$y^a = y^a(x^1, \dots, x^n), \quad a = 1, \dots, p$$

biçiminde ve $g \in C^k_{f(x)}$ fonksiyonu ise

$$g = g^*(y^1, \dots, y^p), \quad g^* = g \circ \psi^{-1}$$

biçiminde olsun. Bu taktirde, $g \circ f \in C^k_x$ dönüşümü

$$g \circ f = g^*(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^p(x^1, \dots, x^n))$$

şeklinde olur. Buradan da,

$$d(g \circ f)_x = \left(\frac{\partial g}{\partial y^a} \right)_{f(x)} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right)_x dx^i, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial y^a} \right|_{f(x)} = \left. \frac{\partial g^*}{\partial y^a} \right|_{\psi(f(x))}$$

yani (2.5) eşitliğine göre

$$f_x^*(dg) = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial y^a} \right)_{f(x)} dx^i \quad (2.6)$$

bulunur. $\{dy^a\}$ koçatısındaki koordinatları

$$\eta_a = \left(\frac{\partial g}{\partial y^a} \right)_{f(x)}$$

olan $dg \in T_{f(x)}^*$ vektörüne f_x^* kodiferensiyeline karşılık gelen $f_x^*(dg) \in T_x^*$ kovektörünün $\{dx^i\}$ koçatısındaki koordinatları

$$\xi_i = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right)_x \eta_a \quad (2.7)$$

biçiminde olur. Bu eşitliğe f_x^* kodiferensiyelinin koordinatlarla ifadesi denir. (2.7) eşitliğinin matris dilinde yazılımı ise (2.4)'ün matris dilinde yazılışının transpozudur. Bu sebepten dolayı f_x^* dönüşümüne f_{*x} dönüşümünün transpoz dönüşümü denir.

$$f : X_n \rightarrow Y_p$$

ve

$$g : Y_p \rightarrow Z_q$$

diferensiyellenebilir dönüşümü verilmiş olsun. Bu durumda

$$f_{*x} : T_x \rightarrow T_{f(x)}$$

ve

$$g_{*f(x)} : T_{f(x)} \rightarrow T_{(g \circ f)_x}$$

dönüşümü elde edilmiş olur. Diğer taraftan $g \circ f$ dönüşümü de $(g \circ f)_{*x} : T_x \rightarrow T_{(g \circ f)_x}$ dönüşümünü oluşturacaktır.

2.1.3. Altmanifoldlar

2.1.7. Tanım: X_n ve Y_p diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. C^k sınıfından diferensiyellenebilir $f : X_n \rightarrow Y_p$ ($n \leq p$) dönüşümünü gözönüne alalım. Eğer $\forall x \in X_n$ için f_{*x} dönüşümünün rankı n ise f dönüşümüne immersiyon denir (Salimov ve Mağden 1999).

2.1.8. Tanım: $f : X_n \rightarrow Y_p$ immersiyonu verilmiş olsun. Eğer, $f : X_n \rightarrow f(X_n) \subset Y_p$ immersiyonu, indirgenmiş topolojiye göre homeomorfizm ise f dönüşümüne imbedding (içine daldırma) denir (Salimov ve Mağden 1999).

Bu tanımdan, imbedding'in bire-bir immersiyon olduğu çıkar. Ama, tersi her zaman doğru değildir. Herbir immersiyon lokal olarak imbeddingdir.

$f : X_n \rightarrow Y_p$ immersiyonu verilmiş olsun. $\forall x \in X_n$ noktasının (U, φ) , $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n)$ haritasını ve $f(x) = y \in Y_p$ noktasının (V, ψ) , $\psi(y) = (y^1, \dots, y^p)$ haritası alınırsa, f immersiyonu koordinatlarla

$$y^a = y^a(x^1, \dots, x^n), a = 1, \dots, p \quad (2.8)$$

biçiminde yazılabilir. Öyle ki, $\forall x \in U$ için $rank(\frac{\partial y^a}{\partial x^i})_{\varphi(x)} = n$ olur. y^a koordinatları içerisinde $\det(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}) \neq 0$ olacak şekilde n tane y^j koordinatları seçilebilir. Bu taktirde, belirli $U_0 \subset U$ komşuluğunda (2.8) eşitliğinin n sayıdaki denklemin x^i değişkenlerine göre çözümü

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \dots, y^n) \quad (2.9)$$

biçiminde yazılır. Burada x^i ler U_0 komşuluğunda C^k sınıfından olan fonksiyonlardır. Böylece, U_0 bölgesinde φ haritasından başka $\bar{\varphi}$ haritası da vardır ve

$$\bar{\varphi}(x) = (y^1, \dots, y^n)$$

olur. (2.9) değeri (2.8) denkleminin kalan denklemlerinde yerine yazarsak,

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \dots, x^n), \quad \alpha = n+1, \dots, p \quad (2.10)$$

bulunur.

Şimdi, $(U_0, \bar{\varphi})$ haritasına geçelim ve y^i yerine x^i alalım. Bu durumda, (2.10) eşitlikleri kullanılırsa, (2.8) eşitliği

$$\begin{cases} y^i = x^i, & i = 1, \dots, n \\ y^\alpha = y^\alpha(x^1, \dots, x^n), & \alpha = n+1, \dots, p \end{cases} \quad (2.11)$$

biçiminde yazılır. Burada $y^\alpha \in C_x^k$ sınıfındandır. Bu yazılışın terside doğrudur. Yani, $\forall x \in X_n$ noktasının herhangi bir komşuluğunda f dönüşümü (2.11) şeklinde gösterilebilirse, f dönüşümü immersiyon olur.

X_n , Y_p diferensiyellenebilir manifoldlar ve $X_n \subset Y_p$ altkümesi olsun. $\iota : X_n \rightarrow Y_p$ içermeye dönüşümü ve ayrıca $e : Y_p \rightarrow Y_p$ özdeşlik dönüşümü olmak üzere $\iota = e|_{X_n}$ olur ve bu dönüşüm birebirdir.

2.1.9. Tanım: X_n ve Y_p diferensiyellenebilir manifoldları verilmiş olsun. $\iota : X_n \rightarrow Y_p$ dönüşümü immersiyon ise X_n manifolduna (Y_p manifolduna) daldırılmış altmanifoldu denir. Eğer ι dönüşümü imbedding ise X_n manifolduna Y_p manifoldunun imbedding altmanifoldu veya sadece altmanifoldu denir (Salimov ve Mağden 1999).

2.2. Tensör Alanları

2.2.1. Tanım: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p , $\forall p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü

karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 1999).

f , M_n manifoldunda bir fonksiyon ise Xf de M_n manifoldunda bir fonksiyon tanımlar. Bu ise

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanır. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i(x^1, \dots, x^n) \quad i = 1, \dots, n$$

olur.

2.2.2. Tanım: B_n bir vektör uzay olsun $w = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{p}{\xi})$ multilineer fonksiyonuna karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times \dots \times B_n}_q \times \overbrace{B_n^* \times \dots \times B_n^*}^p \rightarrow R$$

reel değerli operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir.

M_n , C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall m \in M_n$ noktasındaki her bir (p, q) tipli tensöre için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

2.2.3. Tanım: M_n , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, $\forall m \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p, q) tipli tensör alanı denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Eğer $p = 1$, $q = 0$ ise vektör alanları elde edilir. Yani, $(1, 0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0, 0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall x \in U$ için $df_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan $df : U \rightarrow T_1^0(M_n)$ ifadesi $(0, 1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

$T, (p, q)$ tipli tensör alanı olsun. $\theta_1, \dots, \theta_p$ $(0, 1)$ tipli tensör alanları ve $X_1, \dots, X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)(m) = T_m(\theta_1(m), \dots, \theta_p(m), X_1(m), \dots, X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özellikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q})$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0, 1)$ tipli tensör alanına 1-form (pfaffian form) denir.

(p, q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1, \dots, \theta_p$ 1-formları ve her bir C^∞ sınıfından $X_1, \dots, X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değıştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olurlar. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılığı korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

2.3.1. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $T_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y) : T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \rightarrow T_0^1(M_n)$$

dönüşümü

$$\text{i. } \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad \forall f, g \in F(M_n)$$

$$\text{ii. } \nabla_Z(fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : T_0^1(M_n) \rightarrow T_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovariant diferensiyellenme denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasında a_k^i , $k = 1, \dots, n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $a_k^i(t)$ nin bağımlılığı baz vektörlerin verilmiş eğri boyunca paralel kaydırılması kuralını ifade etsin. Keyfi $v^i = \lambda^k a_k^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k da_k^i \quad (2.12)$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k a_k^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{s}{a}_i v^i \quad (2.13)$$

yazılır. Burada $\overset{s}{a}_i$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{i}{a}_k$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\overset{i}{a}_k \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.13) ifadesi (2.12) de kullanılırsa,

$$dv^i + w_k^i v^k = 0 \quad (2.14)$$

yazılır. (2.14) denkleminde

$$w_i^k = -\overset{s}{a}_i da_s^k \quad (2.15)$$

biçimindedir. (2.14) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.15) biçiminde dahil edilen w_i^k objelerine konneksiyon (bağlantı) formları denir.

2.3.1. Teorem: 1. Konneksiyon formları $\overset{i}{a}_k, k = 1, \dots, n$ bazının seçilişinden bağımsızdır.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmez.

İspat: 1. w_i^k ve $\bar{w}_i^k$ farklı iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$dv^i + w_k^i v^k = 0, \quad (2.16)$$

$$dv^i + \bar{w}_k^i v^k = 0. \quad (2.17)$$

(2.16) ve (2.17) şartlarından, v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $w_k^i = \bar{w}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralını yazalım.

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \overset{i}{a}_k = A_{i'}^i \overset{i'}{a}_k \quad (2.18)$$

Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.18) in ikinci şartından

$$da_k^i = dA_{i'}^i a_k^{i'} + A_{i'}^i da_k^{i'} \quad (2.19)$$

olarak yazarız. (2.15) denkleminde (2.18) in birinci şartını ve (2.19) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$w_j^i = -a_j^k da_k^i = -A_j^{j'} a_{j'}^k (dA_{i'}^i a_k^{i'} + A_{i'}^i da_k^{i'})$$

veya

$$w_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i w_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{i'}^i \quad (2.20)$$

olur. (2.20) eşitliği gösterir ki w_j^i konneksiyon formları tensörün koordinatları olamaz.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

2.3.2. Tanım: w_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa w_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılmıştır denir.

2.3.2. Tanıma göre

$$d(v^i w_i) = dv^i w_i + v^i dw_i = 0 \quad (2.21)$$

olur. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -w_k^i v^k \quad (2.22)$$

yazılır. (2.22) eşitliğini (2.21) ifadesinde kullanırsak,

$$(dw_i - w_i^k w_k) v^i = 0$$

bulunur. v^i vektörünün keyfilikinden dolayı w_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$dw_i - w_i^k w_k = 0 \quad (2.23)$$

biçimindedir. Vektörün ve kovektörün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün paralel kaydırılmasını verebiliriz. (p, q) tipli keyfi tensörün izi ve bu tensörün koordinatları γ

eğrisi boyunca

$$Z = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_{j_1}^{j_1} \dots v_{j_q}^{j_q} w_{i_1}^1 \dots w_{i_p}^p$$

verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ &= dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_{j_1}^{j_1} \dots v_{j_q}^{j_q} w_{i_1}^1 \dots w_{i_p}^p + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} dv_{j_1}^{j_1} \dots v_{j_q}^{j_q} w_{i_1}^1 \dots w_{i_p}^p \\ &+ \dots + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_{j_1}^{j_1} \dots v_{j_q}^{j_q} dw_{i_1}^1 \dots dw_{i_p}^p \\ &= (dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - w_{j_1}^s t_{sj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - w_{j_q}^s t_{sj_2 \dots s}^{i_1 \dots i_p} + w_s^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{si_2 \dots i_p} \\ &+ w_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{si_1 \dots s}) v_{j_1}^{j_1} \dots v_{j_q}^{j_q} w_{i_1}^1 \dots w_{i_p}^p \end{aligned} \quad (2.24)$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - w_{j_1}^s t_{sj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - w_{j_q}^s t_{sj_2 \dots s}^{i_1 \dots i_p} + w_s^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{si_2 \dots i_p} + w_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{si_1 \dots s} \quad (2.25)$$

olarak alınır

$$dZ = \delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_{j_1}^{j_1} \dots v_{j_q}^{j_q} w_{i_1}^1 \dots w_{i_p}^p \quad (2.26)$$

yazılır. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün tipi ile aynı olur, Koordinatları ise (2.25) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörüne $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir. Tensörün mutlak diferensiyeli ile tüm eğri boyunca keyfi noktalarda uygulanmış tensörler arasındaki eşleme (2.26) eşitliği ile verilir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0, \quad \delta w_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta(\delta_i^j) = 0$$

olur.

(2.25) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz.

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,
2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,
3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir,
4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilirler.

2.3.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

2.3.3. Tanım: X_n diferensilelenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyon verilmiş ve aşağıdaki lineerlik şartı sağlanıyorsa X_n diferensiyellenebilir manifolduna n -boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın civarında keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani lineerlik şartı

$$\delta v^i = v_k^i du^k \quad (2.27)$$

olarak yazılır. Burada v_k^i , v^i ye ve noktaya bağlı fonksiyondur. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + w_k^i v^k = \partial_k v^i du^k + w_k^i v^k \quad (2.28)$$

olur. (2.27) ve (2.28) eşitliklerinden

$$w_k^i v^k = (v_s^i - \partial_s v^i) du^s \quad (2.29)$$

ifadesi bulunur. v^k , $\partial_s v^i$ ve v_s^i u^i lerin fonksiyonlarıdır. w_k^i formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından w_k^i formları du^k nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$w_k^i = \Gamma_{sk}^i du^s \quad (2.30)$$

olarak yazılır. Burada Γ_{sk}^i katsayıları afin uzayın noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ_{sk}^i afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.30) eşitliği kullanılarak

$$w_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} A_k^{k'} du^k$$

yazılır. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) du^k \quad (2.31)$$

olduğundan ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğinin ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\begin{aligned} (\partial_k A_j^{j'}) A_{j'}^i + A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) &= 0 \\ \Rightarrow A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) &= -(\partial_k A_j^{j'}) A_{j'}^i \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlik (2.31) denkleminde kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) du^k \quad (2.32)$$

elde edilir. (2.32) , (2.30) ve (2.20) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^i = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{i'} + A_{i'}^i A_{kj}^{j'} \quad (2.33)$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{j'} = \partial_k A_j^{j'}$ biçimindedir.

(2.30) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyel

$$\delta v^i = (\partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s) du^k \quad (2.34)$$

biçiminde olur. (2.34) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s \quad (2.35)$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür. Benzer şekilde w_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k w_j = \partial_k w_j - \Gamma_{kj}^s w_s \quad (2.36)$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür. (2.30) eşitliğinden, (p, q) tipli $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = (\partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{ks}^{\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^s t_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) du^k \quad (2.37)$$

biçiminde olur. (2.37) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{ks}^{\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^s t_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (2.38)$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türev tanımından görülür ki (p, q) tipli tensörün kovaryant türevi $(p, q + 1)$ tipli bir tensördür.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özellikler yazılır:

1. $\nabla_k (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \pm t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \pm \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$
2. $\nabla_k (\lambda t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = (\partial_k \lambda) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \lambda \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, $\lambda \in F$ (F lineer fonksiyonlar kümesi)
3. $\nabla_k (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p}) = (\nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) \otimes g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p} + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes \nabla_k g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p}$
4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile yerleri değişebilirler.

2.3.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f(u^1, \dots, u^n)$ diferensiyellenebilir fonsiyonu verilmiş olsun. Bu fonsiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonsiyonunun du^i vektörünün lineer fonsiyonu olur. Bu lineer fonsiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \quad (2.39)$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonsiyonunun gradienti, f fonsiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonsiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \quad (2.40)$$

olmasıdır (Yano 1965)

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^k V_k \quad (2.41)$$

biçimindedir. (2.41) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.40) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^k V_k \quad (2.42)$$

bulunur. Burada

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k \quad (2.43)$$

olarak verilmiştir. (2.42) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S_{ij}^k kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör ifade eder. (2.43) tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X, Y vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.44)$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X, Y]$ X ve Y vektör alanlarının Lie parantezidir:

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Keyfi v^k vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^i v^m$ kovaryant türevi (1,1) tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^i \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^i v^k) + \Gamma_{rm}^i (\partial_s v^m + \Gamma_{sk}^m v^k) - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \Gamma_{sk}^i \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m v^k - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}^i v^k - 2S_{rs}^k \nabla_k v^i \quad (2.45)$$

denklemini elde edilir. (2.45) denkleminde

$$\begin{aligned}R_{rsk}^i &= \partial_r \Gamma_{sk}^i - \partial_s \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{rk}^m \\ &= 2(\partial_{[r} \Gamma_{s]k}^i + \Gamma_{[r|m}^i \Gamma_{s]k}^m)\end{aligned} \quad (2.46)$$

olarak alınmıştır. (2.45) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R_{rsk}^i ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemann-Christoffel tensörü denir.

(2.45) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılır:

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} w_k = -R_{rsk}^m w_m - 2S_{rs}^m \nabla_m w_k, \quad (2.47)$$

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \varphi_i^j = R_{rsm}^j \varphi_i^m - R_{rsi}^m \varphi_m^j - 2S_{rs}^k \nabla_k \varphi_i^j, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}2\nabla_{[r} \nabla_{s]} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= R_{rsm}^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{mi_2 \dots i_p} + \dots + R_{rsm}^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m} \\ &\quad - R_{rsj_1}^m t_{mj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - R_{rsj_q}^m t_{j_1 \dots m}^{i_1 \dots i_p} - 2S_{rs}^k \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.\end{aligned} \quad (2.49)$$

(2.48) formülüne φ_i^j afinorunun Ricci özdeşliği de denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invariant formda yazılışı ise

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.50)$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.3.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların diffeomorfizmine bakalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme aynı bir X_n diferensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu durumda konneksiyonların birinden diğerine geçmeye konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Bu konneksiyonların katsayılarını Γ_{ij}^k ve $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ ile gösterelim. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^i v^m, \quad \bar{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \bar{\Gamma}_{km}^i v^m$$

biçiminde olur. Sonuncu eşitlikten

$$\bar{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^i v^m \quad (2.51)$$

yazılır. Burada

$$T_{km}^i = \bar{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i \quad (2.52)$$

biçimindedir. (2.51) eşitliği ile verilen T_{km}^i , (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon tensörü denir.

2.3.2. Teorem : (1,2) tipli T_{km}^i tensörü ve Γ_{km}^i ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.52) eşitliği ile verilen $\bar{\Gamma}_{km}^i$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat : (2.52) eşitliğinden

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k$$

yazılır. Γ_{ij}^k için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} (\bar{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'}) + A_{k'}^k A_{ij}^{k'} \quad (2.53)$$

olur. Burada T_{ij}^k tensör olduğundan,

$$T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} T_{i'j'}^{k'} \quad (2.54)$$

yazılır. (2.54) eşitliği (2.53) de kullanılırsa

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} \bar{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^k A_{ij}^{k'}$$

olduğu bulunur. Yani $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ 'ler konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi kuralına göre değişir. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim.

Sonuç 1. $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ ve $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaleri için

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\bar{\Gamma}_{ij}^k + \lambda \bar{\Gamma}_{ij}^k}{1 + \lambda} \quad (2.55)$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.55) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k + \frac{\lambda}{1 + \lambda} (\bar{\Gamma}_{ij}^k - \bar{\Gamma}_{ij}^k) \quad (2.56)$$

biçiminde yazılabilir. (2.56) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan 2.3.2. Teoreme göre Γ_{ij}^k afin konneksiyon olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\bar{\Gamma}_{ij}^k + \bar{\Gamma}_{ij}^k}{2} \quad (2.57)$$

buluruz. $\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyonuna $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ ve $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ_{ij}^k afin konneksiyon verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^k = \Gamma_{ji}^k + 2S_{ij}^k, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \quad (2.58)$$

yazılır. 2.3.2. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}_{ji}^k$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}_{ji}^k$ ve Γ_{ji}^k konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyonlar denir.

2.3.4. Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}^1, \dots, \overset{\circ}{u}^n$ olan $O(\overset{\circ}{u}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta_k^{i'}$ kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta_k^{i'} \{ (u^k - \overset{\circ}{u}^k) + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Gamma}_{pq}^k (u^p - \overset{\circ}{u}^p) (u^q - \overset{\circ}{u}^q) \} \quad (2.59)$$

biçimde yeni koordinatları tanımlayalım. (2.59) dönüşümü diferensiyellenebilir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} + \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ip}^k (u^p - \overset{\circ}{u}^p), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k \quad (2.60)$$

biçiminde yazılır. (2.60) eşitliği O noktasında ve civarında $\det(A_i^{i'}) \neq 0$ şartını sağlar. Ayrıca (2.59) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.60) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k \quad (2.61)$$

olur. Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.61) ve (2.33) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = \delta_j^j \delta_k^{k'} \delta_i^i \overset{\circ}{\Gamma}_{j'k'}^{i'} + \delta_i^i \delta_l^{l'} \overset{\circ}{\Gamma}_{kj}^l$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{k'j'}^{i'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.59) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(rs)k}^i = 0$,
2. $R_{[rsk]}^i = 0$,
3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}^i = 0$ (Bianci-Padov eşitliği)

Bu eşitliklerin her üçünün invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \quad (2.62)$$

olarak gösterilsin. (2.62) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\begin{aligned} \partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^m a_{mj} - \Gamma_{kj}^m a_{mi} &= \nabla_k a_{ij}, \\ \partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^m a_{mk} - \Gamma_{ik}^m a_{jm} &= \nabla_i a_{jk}, \\ \partial_j a_{ki} - \Gamma_{jk}^m a_{mi} - \Gamma_{ji}^m a_{km} &= \nabla_j a_{ki}. \end{aligned}$$

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma_{ij}^m a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}) \quad (2.63)$$

bulunur. (2.63) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ij}^r = \{r_{ij}\} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}) \quad (2.64)$$

olur. Burada

$$\{r_{ij}\} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}) \quad (2.65)$$

biçimindedir. (2.65) ifadesine a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

2.3.4. Tanım : Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} \pm e & e_s \neq e_n \\ 0 & e_s = e_n \end{cases}$ n -vektörü olmak üzere $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \dots i_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_n^{i_n} \quad (2.66)$$

olsun. $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.66) denklemden

$$\delta e_{i_1 \dots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0 \quad (2.67)$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.67) denklemiyle belirlenir. (2.67) şartı

$$\partial_k e_{i_1 \dots i_n} - \Gamma_{k i_1}^s e_{s i_2 \dots i_n} - \dots - \Gamma_{k i_n}^s e_{i_1 \dots s} = 0 \quad (2.68)$$

biçiminde yazılır. n -vektörün antisimetrikliğine göre (2.67) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12 \dots n} - \Gamma_{k1}^s e_{s2 \dots n} - \dots - \Gamma_{kn}^s e_{12 \dots s} = 0 \quad (2.69)$$

denklemine denk olur. $e_{12 \dots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.69) eşitliğinden

$$\Gamma_{ks}^s = \partial_k \ln e \quad (2.70)$$

yazılır. (2.70) eşitliği eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ_{ks}^s toplamı gradyentdir. Bu gradyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}^k = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^k \quad (2.71)$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonunu

$$R_{ij} = R_{ji} \quad (2.72)$$

şartı ile de karakterize edebiliriz.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}^i = 0$, $R_{(rs)k}^i = 0$ şartlarını sağladığı gözönüne alınırsa

$$R_{rsk}^k = R_{rs} - R_{sr} \quad (2.73)$$

yazılır. (2.72) ve (2.73) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}^k = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceğini gösterir.

2.3.5. Tanım: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörü tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaylara metrik uzay denir. Burada simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör de denir.

2.3.6. Tanım: Metrik uzayın g_{ij} metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ oluyorsa böyle uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

2.3.7. Tanım: Eğer Weyl uzayı eş-afin uzay olursa bu uzaya Riemann uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemann uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemann konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad (2.74)$$

şartı ile karakterize edilir. V_n Riemann uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^k = \{^k_{ij}\} = \frac{1}{2} g^{kr} (\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij}) \quad (2.75)$$

biçiminde verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g_{ij} tensörünün Christoffel sembolleriyle çıkarılır. (2.75) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemann konneksiyonu

veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemann manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlarda vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemann uzayında $R_{jkl}^s g_{si} = R_{jkl i}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(ij)kl} = 0$
2. $R_{[ijk]l} = 0$
3. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$
4. $R_{ij(kl)} = 0$
5. $R_{ijkl} = R_{klij}$.



3. METERYAL ve YÖNTEM

3.1. Cebirlerle Tayin Edilen Geometrik Yapılar

3.1.1. Hiperkompleks Cebir

A , $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $boy A = m$ olmak üzere sonlu boyutlu birleşmeli, değişmeli, birimli bir cebir olsun. Bu cebiri A_m ile gösterelim. Bu cebirin keyfi bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olmak üzere

$$e_\alpha e_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m)$$

yazılır. Bu $C_{\alpha\beta}^\gamma \in \mathbb{R}$ katsayılarına A_m cebirinin yapı sabitleri denir. Bu yapı sabitleri cebirin taşıyıcısı olan lineer uzayda (1,2) tipli tensörün bileşenleridir.

A_m cebirindeki birleşme işleminin tensör dilinde yazılışı

$$(\vec{e}_i \vec{e}_j) \vec{e}_k = \vec{e}_i (\vec{e}_j \vec{e}_k) \quad \vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k \in A_m$$

$$C_{ij}^s \vec{e}_s \vec{e}_k = \vec{e}_i C_{jk}^t \vec{e}_t$$

$$C_{ij}^s C_{sk}^l \vec{e}_l = C_{jk}^t C_{it}^l \vec{e}_l$$

$$C_{ij}^s C_{sk}^l = C_{jk}^t C_{it}^l \quad (3.1)$$

biçimindedir. Bu kuralın matris dilinde yazılışı ise

$$C_i = (C_{ij}^k), \quad \tilde{C}_j = (C_{ij}^k)$$

olmak üzere

$$C_i \tilde{C}_k = \tilde{C}_k C_i \quad (3.2)$$

eşitliği ile gösterilir. Ayrıca cebirde değişme kuralı

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \vec{e}_j \vec{e}_i$$

olduğundan bu kuralın tensör gösterimi ise

$$C_{ij}^k = C_{ji}^k$$

biçiminde, matris gösterimi ise

$$C_i = \tilde{C}_i \quad (3.3)$$

olur. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$C_i C_j = C_{ij}^s C_s \quad (3.4)$$

veya C' , C matrisinin transpozu olmak üzere

$$\tilde{C}_j' \tilde{C}_k' = C_{jk}^t \tilde{C}_t \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır.

A_m cebirinin birim elamanı $1 = \xi^i \vec{e}_i \in A_m$ olmak üzere, birim elamanın tanımından hareket edilerek

$$\vec{e}_k = 1 \vec{e}_k = \xi^i \vec{e}_i \vec{e}_k = \xi^i C_{ik}^s \vec{e}_s$$

ifadesi elde edilir. $\vec{e}_k = \delta_k^s \vec{e}_s$ olduğundan dolayı

$$C_{ik}^s \xi^i = \delta_k^s \quad (3.6)$$

eşitliği bulunur.

A_m cebirinin m boyutlu matrisler cebirine izomorf olarak karşılık getiren

$$A_m \ni a = a^\sigma e_\sigma \leftrightarrow a^\sigma C_\sigma = C(a) \in C(A_m) \quad (3.7)$$

$$A_m \ni a = a^\sigma e_\sigma \leftrightarrow a^\sigma \tilde{C}_\sigma' = \tilde{C}'(a) \in \tilde{C}'(A_m) \quad (3.8)$$

dönüşümlerini gözönüne alalım. (3.7) ve (3.8) izomorfizmlerine A_m cebirinin birinci ve ikinci çeşit regüler dönüşümleri adı verilir. Birinci çeşit regüler dönüşüme sadece regüler dönüşüm de denir.

3.1.1.Teorem: Herhangi bir afinorun regüler dönüşüm olması için gerek ve yeter şart afinorun regüler dönüşüm operatörleriyle değişme şartını sağlamasıdır.

İspat: φ afinoru regüler dönüşüm olsun. Öncelikle matrisler için birleşme özelliği

$$C_\alpha \tilde{C}_\beta = \tilde{C}_\beta C_\alpha$$

olduğu biliniyor. O halde eşitlik a^α ile çarpılır ve $\vec{a} = a^\alpha e_\alpha \leftrightarrow a^\alpha C_\alpha$ olduğu dikkate alınır

$$a^\alpha C_\alpha \tilde{C}_\beta = \tilde{C}_\beta a^\alpha C_\alpha$$

eşitliği yazılır. Burada $\varphi = a^\alpha C_\alpha$ olduğundan dolayı istenen şart sağlanmış olur.

Diğer taraftan $\varphi C_\alpha = C_\alpha \varphi$ olsun. φ afinorunun regüler olduğunu gösterelim.

$C_\alpha = C_{\alpha\beta}^\gamma$ olduğundan dolayı

$$\varphi_\sigma^\varepsilon C_{\alpha\varepsilon}^\gamma = \varphi_\sigma^\gamma C_{\alpha\beta}^\varepsilon$$

olarak yazılır. (3.6) denklem dikkate alınarak son eşitlik ξ^β ile çarpılırsa,

$$\varphi_\sigma^\varepsilon \xi^\beta C_{\alpha\varepsilon}^\gamma = \varphi_\sigma^\gamma \xi^\beta$$

denklemini bulunur. $\tau^\varepsilon = \varphi_\sigma^\varepsilon \xi^\beta$ olmak üzere

$$\varphi_\sigma^\gamma = \tau^\varepsilon C_{\alpha\varepsilon}^\gamma = \tau^\varepsilon C_{\varepsilon\alpha}^\gamma = \tau^\varepsilon C_\varepsilon$$

eşitliği yazılır. Bu da regüler tasfir olduğunu gösterir.

3.1.2.Tanım: A_m cebiri birleşmeli, değişmeli ve birimli cebir olsun. $C_{\alpha\beta}^\gamma$ yapı sabitleri olmak üzere, eğer A_m taşıyıcı uzayda P_γ kovektörü için

$$(C_{\alpha\beta}^\gamma P_\gamma) = (C_{\alpha\beta}) \quad (3.9)$$

matrisi regüler ise yani determinantı sıfırdan farklı ise böyle cebirlere Frobenius cebir denir (Kruchkovich 1972).

İki tensörün çarpımının sonucu yine bir tensör olduğu (3.9) eşitliğinden görülür. (3.9) ifadesi A_m cebirinin lineer uzayında (0,2) tipli simetrik tensör tayin edecektir. Bu tensöre Frobenius metrik tensörü denir ve $q_{\alpha\beta}$ şeklinde gösterilir. Bu metrik tensörün $q^{\alpha\beta}$ şeklinde bir tersi olduğundan dolayı, özel halde,

$$e^\beta = q^{\beta\alpha} e_\alpha$$

elemanları A_m cebirinde yeni bir baz tayin eder. Bu baza $\{e_\alpha\}, (\alpha = 1, \dots, m)$ bazına karşılık gelen baz denir.

3.1.3.Tanım : φ, M_n manifoldu üzerinde $(1, 1)$ tipli tensör alanları olmak üzere $\Pi = \{\varphi\}$ kümesinin meydana getirdiği yapıya Π -poliafinor yapı denir.

Eğer M_n manifoldu, her bir lokal haritasında φ afinorları sabit bileşenli olduğu bir atlasa sahip ise bu Π -poliafinor yapısı integrallenebilirdir denir (Salimov 1992). Bu durumda bahsedilen haritalar ve bu haritaların meydana getirdiği atlas Π -yapısına göre adapte olmuştur denir.

3.1.4.Tanım: Eğer Π -yapısı için $\Pi \leftrightarrow A_m$ izomorfizmi varsa Π -yapısına hiperkompleks (veya cebirsel) Π -yapısı denir. Burada, A_m birleşmeli, değişmeli, birimli ve sonlu boyutlu cebirdir.

Eğer hiperkompleks Π -yapısının E_α afinorları ($E_\alpha \leftrightarrow e_\alpha$)

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} C_\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & C_\alpha \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

şeklinde olursa (köşegen üzerindeki C_α ların sayısı r dir), bu taktirde Π -yapısına r -regüler Π -yapısı veya sadece regüler Π -yapısı denir.

M_n manifoldu üzerinde r -regüler Π -yapısı verilmiş olsun. M_n üzerinde her tür yapının varlığı için

$$n = mr, \quad (n = \dim M_n, m = \dim A_m)$$

olması gerektiği görülür. Buradan, 1 den n kadar değer olan i indisini

$$i = (u - 1)m + \alpha, \quad (u = 1, \dots, r, \alpha = 1, \dots, m)$$

biçiminde gösterebiliriz. Böylece i indisinin herbir değeri (u, α) çifti ile ifade edilebilir. Buna göre de,

$$i = u\alpha, j = v\beta, k = w\gamma, \dots u, v, w, \dots = 1, \dots, r$$

biçiminde indisler kullanılabilir. Bu indislere iki kat indisler veya çift indisler adı verilir (Kruchkovich 1972).

Regüler II-yapısının bir adapte olmuş çatısından diğerine geçişe onun mümkün olan dönüşümü denir. X_i bazının

$$X_{i'} = A_{i'}^i X_i \quad (\det A_{i'}^i \neq 0) \quad (3.11)$$

dönüşümünün mümkün olan dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $(A_{i'}^i)$ matrisinin (3.10) matrisleri ile değişmeli olmasıdır. Bu ise $(A_{i'}^i)$ matrisinin her bir m -boyutlu bloku C_α matrisleri cinsinden yazılması, yani

$$A_{i'}^i = A_{u'\alpha}^{u\sigma} = \Delta_{u'}^{u\sigma} C_{\sigma\alpha}^\alpha \quad (3.12)$$

olması demektir. Burada $\Delta_{u'}^{u\sigma}$ adapte olmuş bölgede $\det(A_{i'}^i) \neq 0$ şartını sağlayan keyfi fonksiyonlardır. Benzer olarak, (3.11) dönüşümünün tersine karşılık gelen matris

$$A_i^{i'} = A_{u\alpha}^{u'\alpha'} = \Delta_u^{u'\sigma} C_{\sigma\alpha}^{\alpha'} \quad (3.13)$$

biçiminde olur. Şimdi $A_i^{i'}$ ve $A_{i'}^i$ matrislerine karşı A_m cebirinden olan

$$S_{u'}^u = \Delta_{u'}^{u\sigma} e_\sigma, \quad S_u^{u'} = \Delta_u^{u'\sigma} e_\sigma \quad (3.14)$$

matrisleri karşılık getirelim. (3.12) ve (3.13) eşitliklerinden

$$A_i^{i'} A_{i'}^j = \delta_i^j = \delta_{u\alpha}^{v\beta} = A_{u\alpha}^{u'\alpha'} A_{u'\alpha'}^{v\beta} = \Delta_u^{u'\sigma} C_{\sigma\alpha}^{\alpha'} \Delta_{u'}^{v\hat{\sigma}} C_{\hat{\sigma}\alpha'}^\beta$$

olarak yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \delta_u^{v\sigma} C_{\sigma\alpha}^\beta &= \Delta_u^{u'\sigma} C_{\sigma\alpha}^{\alpha'} \Delta_{u'}^{v\hat{\sigma}} C_{\hat{\sigma}\alpha'}^\beta \quad / \xi^\alpha \\ \delta_u^{v\beta} &= \Delta_u^{u'\alpha'} \Delta_{u'}^{v\hat{\sigma}} C_{\hat{\sigma}\alpha'}^\beta \quad / e_\beta \\ \delta_u^v &= \Delta_u^{u'\alpha'} \Delta_{u'}^{v\hat{\sigma}} e_{\hat{\sigma}} e_{\alpha'} \\ \delta_u^v &= S_u^{u'} S_{u'}^v \end{aligned} \quad (3.15)$$

bulunur. Benzer şekilde $S_{u'}^u S_u^{v'} = \delta_{u'}^{v'}$ yazılır. Yani $S_u^{u'}$ ve $S_{u'}^v$ matrisleri ters matrislerdir. Buradan δ_u^v , $\delta_{u'}^{v'}$ elemanları A_m cebirinden olan birim matrislerdir.

$U \subset M_n$ bölgesinde adapte olmuş baza nazaran vektörün koordinatı

$$\zeta^i = \zeta^{u\alpha} \rightarrow \zeta^u = \zeta^{u\alpha} e_\alpha$$

eşitliği ile verilir. ζ^i birleşenlerinin başka bir adapte olmuş baza geçişte tensör dönüşüm kuralına göre

$$\zeta^{i'} = A_i^{i'} \zeta^i$$

yazılır. (3.12) denklemi yardımıyla çift katlı indislere geçildiğinde

$$\zeta^{u'\alpha'} = A_{u\alpha}^{u'\alpha'} \zeta^{u\alpha} = \Delta_u^{u'\sigma} C_{\sigma\alpha}^{\alpha'} \zeta^{u\alpha} / e_{\alpha'}$$

$$\begin{aligned} \zeta^{u'\alpha'} e_{\alpha'} &= \Delta_u^{u'\sigma} C_{\sigma\alpha}^{\alpha'} \zeta^{u\alpha} e_{\alpha'} \\ &= \Delta_u^{u'\sigma} \zeta^{u\alpha} e_\sigma e_\alpha \\ &= \Delta_u^{u'\sigma} \zeta^u e_\sigma \\ &= S_u^{u'} \zeta^u \end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitliği bulunur. Bu ise A_m cebirinde tensörün dönüşüm kanunudur.

Kabul edelimki $\varphi \in \Pi$ r -regüler Π yapısının bir afinoru olsun. Bu afinorlar endomorfizim olduğundan

$$\eta^i = \varphi_j^i \zeta^j$$

olarak yazılır. Ayrıca

$$\vec{a} = a^\alpha e_\alpha \mapsto a^\sigma \varphi_\varphi = a^\sigma \varphi_\varphi^i = a^\sigma \varphi_\varphi^{u\alpha} = a^\sigma \delta_v^u C_{\sigma\beta}^\alpha$$

olduğundan adapte olmuş çatıda

$$\eta^{u\alpha} = \varphi_{v\beta}^{u\alpha} \zeta^{v\beta} = a^\sigma \delta_v^u C_{\sigma\beta}^\alpha \zeta^{v\beta} = a^\sigma C_{\sigma\beta}^\alpha \zeta^{u\beta}$$

eşitliği bulmuş olur. Bu son ifadeyi e_α ile çarparsak

$$\eta^u = a^\sigma e_\sigma e_\beta \zeta^{u\beta} = a \zeta^u$$

olur. Yani $\forall a \in A_m$ için

$$\eta^u = a \zeta^u \tag{3.17}$$

bulunur.

3.1.2. A-Holomorf manifoldlar

3.1.2. Teorem: M_n ($n = mr$) Reel manifoldunun A -holomorf manifold olması için gerek ve yeter şart M_n manifoldu üzerinde integrallenebilir r -regüler Π -yapısının verilmesidir.

İspat: M_n manifoldu üzerinde integrallenen r -regüler Π -yapısı verilmiş olsun. U_p ($p \in M_n$) komşuluğunda $x^i = x^{u\alpha}$ ve $x^{i'} = x^{u'\alpha'}$ adapte olmuş lokal kordinatlarını alalım. Bu koordinatlarda E_α afinorları (3.10) şeklinde sabit koordinatlara sahip olacaktır. Bu halde, bir koordinat sisteminden diğerine geçiş mümkün olduğuna göre (3.11), (3.12) ve (3.13) şartları sağlanmalıdır. Yapı integrallenen yapı olduğuna göre adapte olmuş baz standart baz olur ve mümkün dönüşüm matrisi $A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ şeklini alır. Dönüşüm mümkün olan dönüşüm olduğuna göre u ve u' indislerinin keyfi verilen değerlerinde $A_i^{i'}$ matrisinin uygun m -boyutlu blokları, C_α matrisleri ile komütatif olmalıdır. Bu ise $Z^{u'} = x^{u'\alpha'} e_{\alpha'}$ şeklinde A -koordinatların $Z^u = x^{u\alpha} e_\alpha$ şeklinde A -koordinatlara göre holomorfluk şartlarıdır. Holomorfluk şartlarında cebirin birim elamanı ξ^σ koordinatları çarpılırsa A -holomorf fonksiyonun türevi

$$w'(z) = \xi^\sigma \partial_\beta y^\alpha e_\alpha \quad (3.18)$$

biçiminde buluruz. (3.13), (3.14) ve (3.15) eşitliklerinden istifade edilerek

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z^u}{\partial Z^{u'}} &= \xi^{\alpha'} \frac{\partial x^{u\alpha}}{\partial x^{u'\alpha'}} e_\alpha \\ &= \xi^{\alpha'} \Delta_{u'}^{u\sigma} C_{\sigma\alpha'}^\alpha e_\alpha \\ &= \xi^{\alpha'} \Delta_{u'}^{u\sigma} e_\sigma e_{\alpha'} \\ &= \Delta_{u'}^{u\sigma} e_\sigma \\ &= S_{u'}^u \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{\partial Z^{u'}}{\partial Z^u} = S_u^{u'} \quad (3.20)$$

eşitliği bulunur.

Böylece (3.19) ve (3.20) eşitlikleri gösterir ki, eğer M_n manifoldu üzerinde integrallenen r -regüler Π -yapısı verilmiş ise bu taktirde, manifoldun adapte olmuş

atlasını teşkil eden lokal haritalar birbiriyle A -holomorf geçiş fonksiyonları ile bağlıdır. Yani, M_n manifoldu A -holomorf manifold olur.

Şimdi ise, M_n nin A -holomorf manifold olduğunu kabul edelim. Diferensiyellenebilir M_n manifoldu, A -holomorf atlasını teşkil eden lokal haritaların dönüşümünün Jakobi matrisinin (3.10) ile değişmesi demektir. Buna göre de bu haritaların her birinde (3.10) matrisleri ile E_α ($\alpha = 1, \dots, m$) afinorlarını gözönüne alınırsa, M_n manifoldunun bütün noktalarında belirlenen E_α afinorlarını alınır. Buradan, $A = a^\alpha E_\alpha$ ($a_\alpha \in R$) afinorlarının hepsi M_n üzerinde r -regüler integrallenen Π -yapısını tayin eder. Bu da teoremi ispatlamış olur.

A -holomorf manifoldunun Z^u ($u = 1, \dots, r$) A -koordinatlarının sayısını gösteren r değerlerine A -holomorf manifoldun cebirsel boyutu veya sadece boyutu denir. r boyutlu A -holomorf manifoldu bazen $M_r(A)$ biçiminde gösterilir. $n = mr$ boyutlu M_n reel manifolduna A -holomorf manifoldun realizasyonu denir.

A_m , R reel sayılar üzerinde birleşmeli, değişmeli, birimli ve sonlu m boyutlu cebir olsun. $x = x^\alpha \vec{e}_\alpha \in A_m$ ($x^\alpha \in R$) elemanı olmak üzere reel değişkenli m sayıda fonksiyonları

$$f^\beta(x^\alpha) = \begin{cases} f^1(x^1, \dots, x^m) \\ \vdots \\ f^m(x^1, \dots, x^m) \end{cases}$$

verilsin. A_m cebirinden

$$F = f^\beta(x^\alpha) \vec{e}_\beta \in A_m$$

fonksiyonu yazılır. Bu $F = F(x)$ fonksiyonunun diferensiyeli

$$dF = df^\alpha \vec{e}_\alpha = (\partial_\beta f^\alpha) dx^\beta \vec{e}_\alpha, \quad dx = dx^\alpha \vec{e}_\alpha$$

olmak üzere eğer $F = F(x)$ fonksiyonunun için

$$dF = F'(x) dx$$

oluyor ise bu F fonksiyonuna holomorf fonksiyon denir (Salimov 1992)

$F = F(x)$ fonksiyonunun holomorf olması için gerek ve yeter şart

$$S_\alpha A = A S_\alpha ; A = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right), S_\alpha = (C_{\alpha\beta}^\gamma)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitliğe Scheffers şartları denir (Kruchkovich 1972).

3.1.3. Pür tensörler

3.1.5.Tanım: M_n manifoldu üzerinde Π -yapısı verilmiş olsun. Eğer $t \in T_q^p(M_n)$ tensör alanı $\forall \varphi \in \Pi$ için

$$t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_m^{i_a} = t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_b}^m = t_{j_1 \dots j_q}^{*i_1 \dots i_p}, a = 1, \dots, p, b = 1, \dots, q \quad (3.21)$$

şartlarını sağlıyorsa, t ye Π -yapısına göre pür tensör alanı denir.

Vektörler ve kovektörler pür tensör olarak kabul edilir.

Pür tensörler aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

- a. δ_j^i birim tensörü keyfi yapıya göre pür tensördür,
- b. Pür tensörlerin toplamı pür tensördür,
- c. Pür tensörlerin skalerle çarpımı pür tensör olur,
- d. Pür tensörlerin simetrikleştirme ve alterneleştirme işlemleri neticesinde bulunan tensörler de pür tensörlerdir,
- e. Pür tensörün asıl indislerine göre kontraksiyon işlemi yine pür tensör verir.

Diğer taraftan, t ve g pür tensörlerse, $t \otimes g$ çarpımı pür tensör olmayabilir. ($t \rightarrow (0, 0)$ tipli ise pür olur.) Eğer bu çarpımda kontraksiyon varsa sonuç pür tensördür. Örneğin t_{ij} $(0, 2)$ ve g^{ks} , $(2, 0)$ tipli tensörlerini alalım. Kontarksiyon sonucu

$$(t_{ik} g^{ks}) \varphi_j^i = (t_{ji} g^{ks}) \varphi_k^i = (t_{ji} g^{ik}) \varphi_k^s = (t_{jk} g^{ki}) \varphi_i^s$$

olarak bulunur yani pür tensördür.

f. Cebirsel Π -yapısının afinorları

$$\varphi_{\alpha}^i \varphi_{\beta}^m = \varphi_{\beta}^i \varphi_{\alpha}^m = \varphi_{\alpha}^m \varphi_{\beta}^i$$

pür tensörlerdir.

3.1.4. Cebirsel yapılara göre pür tensörler

$M_{n=mr}$ manifoldu üzerinde r -regüler Π yapısı verilmiş olsun. Pür $t \in \mathfrak{T}_1^*(M_n)$ tensör alanı için,

$$t_j^m \varphi_{\sigma}^i = t_m^i \varphi_{\sigma}^m \quad (3.22)$$

yazılır. $i = u\alpha$, $j = v\beta$ ve $m = k\theta$ olmak üzere

$$\varphi_{\sigma}^i = \varphi_{\sigma}^{u\alpha} = \delta_k^u C_{\sigma\theta}^{\alpha}$$

olarak yazıldığından (3.22) eşitliği,

$$\begin{aligned} t_{v\beta}^{k\theta} \varphi_{\sigma}^{u\alpha} &= t_{k\theta}^{u\alpha} \varphi_{v\beta}^{k\theta} \Rightarrow \\ t_{v\beta}^{k\theta} \delta_k^u C_{\sigma\theta}^{\alpha} &= t_{k\theta}^{u\alpha} \delta_v^k C_{\sigma\beta}^{\theta} \Rightarrow \\ t_{v\beta}^{u\theta} C_{\sigma\theta}^{\alpha} &= t_{v\theta}^{u\alpha} C_{\sigma\beta}^{\theta} \end{aligned} \quad (3.23)$$

olur. (3.23) eşitliği ξ^{β} ile kontraksiyon yapılırsa

$$\xi^{\beta} t_{v\beta}^{u\theta} C_{\sigma\theta}^{\alpha} = t_{v\sigma}^{u\alpha}$$

elde edilir. Burada, $T_v^{u\theta} = \xi^{\beta} t_{v\beta}^{u\theta}$ ile gösterilirse

$$t_{v\sigma}^{u\alpha} = T_v^{u\theta} C_{\sigma\theta}^{\alpha} \Rightarrow t_{v\beta}^{u\alpha} = T_v^{u\theta} C_{\beta\theta}^{\alpha} = T_v^{u\theta} C_{\theta\beta}^{\alpha}$$

veya

$$t_{v\beta}^{u\alpha} = T_v^{u\theta} C_{\theta\beta}^{\alpha} \quad (3.24)$$

bulunur.

Aynı şekilde pür $t \in \mathfrak{T}_0^*(M_n)$ tensör alanı için

$$t^{mj} \varphi_{\sigma}^i = t^{im} \varphi_{\sigma}^j$$

yazılır. Bu denklem çift katlı indislerle yazılacak olunursa

$$t^{k\theta v\beta} \varphi_{\sigma}^{u\alpha} = t^{u\alpha k\theta} \varphi_{\sigma}^{v\beta} \Rightarrow$$

$$t^{k\theta v\beta} \delta_k^u C_{\sigma\theta}^{\alpha} = t^{u\alpha k\theta} \delta_k^v C_{\sigma\theta}^{\beta} \Rightarrow$$

$$t^{u\theta v\beta} C_{\sigma\theta}^{\alpha} = t^{u\alpha v\theta} C_{\sigma\theta}^{\beta}$$

olur. Bu eşitliğin λ_{β} ile kontraksiyon yapılır ve $T^{uv\theta} = t^{u\theta v\beta} \lambda_{\beta}$ olarak alınır,sa,

$$T^{uv\theta} C_{\sigma\theta}^{\alpha} = t^{u\alpha v\theta} \varphi_{\sigma\theta} \Rightarrow$$

$$T^{uv\theta} C_{\sigma\theta}^{\alpha} \varphi^{\sigma\epsilon} = t^{u\alpha v\theta} \delta_{\theta}^{\epsilon} = t^{u\alpha v\epsilon} \quad (3.25)$$

eşitliği bulunur. Burada cebirin Frobenius olması gerekir.

Daha yüksek dereceli pür tensörlerin teşkilini vermeden önce

$$B_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha} = C_{\beta_1 \sigma_1}^{\alpha} C_{\beta_2 \sigma_2}^{\sigma_1} \dots C_{\beta_{p-1} \beta_p}^{\sigma_{p-2}} \quad (p > 2) \quad (3.26)$$

$$B_{\beta\gamma}^{\alpha} = C_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad B_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (3.27)$$

gösterimlerini yazalım. Bu şekilde ifade ettiğimiz tensörler cebirin taşıyıcı lineer uzayındaki tensörlerdir. Eğer $\mathcal{A}_m$ Frobenius cebiri ise, böyle cebire karşılık gelen uzay da keyfi kovaryant indisli tensörleri tayin eder. Bu tensörler, Frobenius metrik tensörü vasıtasıyla

$$B_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = B_{\beta_1 \dots \beta_s \lambda_1 \dots \lambda_{q-1}}^{\alpha_q} \varphi^{\lambda_1 \alpha_1} \dots \varphi^{\lambda_{q-1} \alpha_{q-1}}, \quad (3.28)$$

$$B_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\sigma} = B_{\beta_1 \dots \beta_{s-1}}^{\sigma} \varphi_{\sigma \beta_s} \quad (3.29)$$

olarak yazılır. Bu $(0, s)$ tipinde bir tensördür. Benzer şekilde,

$$B^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = B_{\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}}^{\alpha_q} \varphi^{\lambda_1 \alpha_1} \dots \varphi^{\lambda_{q-1} \alpha_{q-1}} \quad (3.30)$$

biçiminde yazılabilir. Bu tensörlerin bazı özelliklerini belirtecek olursak,

a. Bu tensörler hem alt hem de üst indislerine göre simetriktirler.Çünkü, özel halde

$$\mathcal{B}_{\beta\gamma}^{\alpha} = C_{\beta\gamma}^{\alpha} = C_{\gamma\beta}^{\alpha} = \mathcal{B}_{\gamma\beta}^{\alpha}$$

olduğundan simetriktir. Ayrıca,

$$\mathcal{B}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{\beta_1} = C_{\alpha_1\sigma_1}^{\beta_1} C_{\alpha_2\alpha_3}^{\sigma_1}$$

olduğundan

$$\mathcal{B}_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3}^{\beta_1} = C_{\alpha_2\sigma_1}^{\beta_1} C_{\alpha_1\alpha_3}^{\sigma_1} = C_{\alpha_1\sigma_1}^{\beta_1} C_{\alpha_2\alpha_3}^{\sigma_1} = \mathcal{B}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{\beta_1} \quad (3.31)$$

olur.

b.

$$\begin{aligned} C_{\sigma\mu}^{\lambda} \mathcal{B}_{\beta_1\ldots}^{\sigma\alpha_1\ldots} &= C_{\sigma\mu}^{\lambda} \mathcal{B}_{\beta_1\ldots}^{\sigma} \varphi^{\beta_1\alpha_1} \ldots \\ &= C_{\sigma\mu}^{\lambda} C_{\beta_1\sigma_1}^{\sigma} C_{\beta_2\sigma_2}^{\sigma_1} \ldots \varphi^{\beta_1\alpha_1} \ldots \\ &= C_{\mu\sigma}^{\lambda} C_{\beta_1\sigma_1}^{\sigma} C_{\beta_2\sigma_2}^{\sigma_1} \ldots \varphi^{\beta_1\alpha_1} \ldots \\ &= \mathcal{B}_{\mu\beta_1\beta_2\ldots}^{\lambda} \varphi^{\beta_1\alpha_1} \ldots \\ &= \mathcal{B}_{\mu\beta_1\ldots}^{\lambda\alpha_1\ldots} \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Yani

$$C_{\sigma\mu}^{\lambda} \mathcal{B}_{\beta_1\ldots}^{\sigma\alpha_1\ldots} = \mathcal{B}_{\mu\beta_1\ldots}^{\lambda\alpha_1\ldots} \quad (3.32)$$

yazılır. Aynı şekilde

$$C_{\lambda\mu}^{\sigma} \mathcal{B}_{\sigma\beta_1\ldots}^{\alpha_1\ldots} = \mathcal{B}_{\lambda\mu\beta_1\ldots}^{\alpha_1\ldots} \quad (3.33)$$

eşitliği yazılabilir.

c. Diğer bir özelliği ise

$$\mathcal{B}_{\beta_1\ldots\beta_s}^{\sigma\alpha_1\ldots\alpha_q} \lambda_{\sigma} = \mathcal{B}_{\sigma\beta_1\ldots\beta_s}^{\alpha_1\ldots\alpha_q} \xi^{\sigma} = \mathcal{B}_{\beta_1\ldots\beta_s}^{\alpha_1\ldots\alpha_q} \quad (3.34)$$

olmasıdır. Örneğin,

$$\mathcal{B}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{\beta_1} = C_{\alpha_1\sigma_1}^{\beta_1} C_{\alpha_2\alpha_3}^{\sigma_1}$$

denklemini λ_{β_1} ile çarparsak

$$\begin{aligned}
\lambda_{\beta_1} \mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{\beta_1} &= C_{\alpha_1 \sigma_1}^{\beta_1} C_{\alpha_2 \alpha_3}^{\sigma_1} \lambda_{\beta_1} \\
&= \varphi_{\alpha_1 \sigma_1} C_{\alpha_2 \alpha_3}^{\sigma_1} \\
&= \mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}
\end{aligned}$$

sonucu bulunur.

Şimdi iki dereceli pür tensörleri oluştururken ifade ettiğimiz metoda benzer olan metodla keyfi dereceli pür tensörün r -regüler Frobenius Π -yapısına nazaran teşkilini

$$t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = t_{v_1 \beta_1 \dots v_q \beta_q}^{u_1 \alpha_1 \dots u_p \alpha_p} = \tau_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p \sigma} \mathcal{B}_{\sigma \beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (3.35)$$

biçiminde verebiliriz. Burada τ fonksiyonları adapte olmuş bölgede tayin edilen keyfi fonksiyonlardır. $q = 1$ ve $q = 0$ olduğunda (3.35) eşitliği Frobenius olmayan Π -yapıları için de sağlanır. (3.35) denklemini pür tensörler için yazılır. Bu pür tensöre, A_m cebirsel manifoldunda

$${}^* t_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p} = t_{v_1 \beta_1 \dots v_q \beta_q}^{u_1 \alpha_1 \dots u_p \alpha_p} \varepsilon^{\beta_1} \dots \varepsilon^{\beta_q} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_{p-1}} e_{\alpha_p} = \tau_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p \sigma} e_{\sigma} \quad (3.36)$$

cebirsel kemiyetleri karşılık gelir. (cebirsel olduğunu belirtmek için * ile gösterelim). Özel bir hal olan vektör için

$${}^* t^u = \tau^{u\sigma} e_{\sigma}$$

olarak yazılır. Diğer taraftan

$$A_{i'}^i = A_{u'\alpha'}^{u\alpha} = S_{u'}^{u\sigma} C_{\sigma\alpha'}^{\alpha} \quad \text{ve} \quad S_{u'}^u = S_{u'}^{u\sigma} e_{\sigma}$$

olmak üzere $t^{i'}$ tensörü dönüşüm kuralına göre

$$t^{i'} = A_{i'}^{i'} t^i$$

olarak yazılır. Buradan çift katlı indislere geçilirse,

$$t^{u'\alpha'} = A_{u\alpha}^{u'\alpha'} t^{u\alpha} = S_u^{u'\sigma} C_{\sigma\alpha}^{\alpha'} t^{u\alpha} \quad (3.37)$$

olur. (3.37) ifadesi $e_{\alpha'}$ ile kontraksiyon yapılırsa

$$e_{\alpha'} t^{u'\alpha'} = A_{u\alpha}^{u'\alpha'} t^{u\alpha} = S_u^{u'\sigma} C_{\sigma\alpha}^{\alpha'} t^{u\alpha} e_{\alpha'}$$

$${}^* t^{u'} = S_u^{u'\sigma} e_{\sigma} e_{\alpha} t^{u\alpha}$$

$${}^*t^{u'} = S_u^{u'} {}^*t^u \quad (3.38)$$

denklemini bulunur.

Şimdi, (1,1) tipindeki $t_{j'}^{i'}$ tensörünü alalım. Tensör dönüşüm kanununa göre $t_{j'}^{i'} = A_{j'}^j A_i^{i'} t_j^i$ olarak yazılır. Bu dönüşüm çift katlı indislerle

$$\begin{aligned} t_{v'\beta'}^{u'\alpha'} &= A_{v'\beta'}^{v\beta} A_{u\alpha}^{u'\alpha'} t_{v\beta}^{u\alpha} \\ &= S_{v'}^{v\sigma} C_{\sigma\beta'}^\beta S_u^{u'\sigma'} C_{\sigma'\alpha}^{\alpha'} t_{v\beta}^{u\sigma} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Frobenius cebirinde $t_{v\beta}^{u\alpha} = \tau_v^{u\sigma} C_{\sigma\beta}^\alpha$ ve $t_{v'\beta'}^{u'\alpha'} = \tau_{v'}^{u'\sigma'} C_{\sigma'\beta'}^{\alpha'}$ olduğundan son eşitlik

$$\tau_{v'}^{u'\sigma'} C_{\sigma'\beta'}^{\alpha'} = S_{v'}^{v\sigma} C_{\sigma\beta'}^\beta S_u^{u'\sigma'} C_{\sigma'\alpha}^{\alpha'} \tau_v^{u\sigma} C_{\sigma\beta}^\alpha$$

biçiminde olur. Bu eşitlik e_α ile kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned} \tau_{v'}^{u'\sigma'} e_{\sigma'} e_{\beta'} &= S_{v'}^{v\sigma} C_{\sigma\beta'}^\beta S_u^{u'\sigma'} e_{\sigma'} e_\alpha \tau_v^{u\sigma} C_{\sigma\beta}^\alpha \\ {}^*t_{v'}^{u'} e_{\beta'} &= S_{v'}^{v\sigma} C_{\sigma\beta'}^\beta S_u^{u'} \tau_v^{u\sigma} C_{\sigma\beta}^\alpha e_\alpha \\ &= S_{v'}^{v\sigma} C_{\sigma\beta'}^\beta S_u^{u'} \tau_v^{u\sigma} e_\sigma e_\beta \\ &= S_{v'}^{v\sigma} e_\sigma e_{\beta'} S_u^{u'} {}^*t_v^u \\ &= S_{v'}^{v\sigma} e_{\beta'} S_u^{u'} {}^*t_v^u \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$${}^*t_{v'}^{u'} = S_{v'}^{v\sigma} S_u^{u'} {}^*t_v^u \quad (3.39)$$

yazılır. Benzer muhakeme ile (q, s) tipli tensörler için

$${}^*t_{v_1' \dots v_s'}^{u_1' \dots u_q'} = S_{u_1'}^{u_1} S_{v_1'}^{v_1} \dots S_{u_q'}^{u_q} S_{v_s'}^{v_s} {}^*t_{v_1 \dots v_s}^{u_1 \dots u_q} \quad (3.40)$$

formülü elde edilmiş olur.

Böylece, r -regüler Frobenius ($q = 1$ olduğunda Frobenius olmayan) Π -yapısına göre $t_{j_1' \dots j_q'}^{i_1' \dots i_p'}$ tensörü, mümkün olmayan dönüşümler kümesine nazaran (3.36) eşitliği ile tayin edilen cebirsel tensörler tayin eder. Aksine, (3.40) kuralına göre dönüşen cebirsel tensörler M_n üzerinde (3.35) eşitliği ile pür tensörler tayin eder. Eğer r -regüler Π -yapısı integrallenebilir ise M_n ye aynı zamanda A -holomorf manifold olarak bakılabileceğini

ve buna göre de pür tensörler A -holomorf manifoldun tensörleri ile bire bir eşleneceği gösterilmiş olur. Bu halde, bazen pür tensörlere A -holomorf manifoldunun tensörlerinin reelleştirilmesi de denir. Pür tensörlere karşılık gelen A -holomorf manifoldunun tensörlerinin genel halde A -holomorf tensörler olmayacağı aşıkardır (Salimov 1992).

3.1.5. Holomorf tensörlerin realizasyonu

M_n ($n = mr$) manifoldu üzerinde integrallenebilir r -regüler Frobenüs Π -yapısı verilsin. Π -yapısına göre pür (p, q) tipli tensörünü alalım. Bu tensör üzerinde

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}^k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= \varphi_{\alpha}^m \partial_m t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \partial_k^* t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\mu=1}^q \partial_{j_{\mu}} \varphi_{\alpha}^m t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \\ &+ \sum_{\lambda=1}^p (\partial_k \varphi_{\alpha}^{i_{\lambda}} - \partial_m \varphi_{\alpha}^{i_{\lambda}}) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$(\varphi_{\alpha}^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{m \dots i_p} = \dots = \varphi_{\alpha}^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m} = \dots = t_{\alpha}^{* i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q}, \forall \varphi \in \Pi.)$$

biçiminde tanımlanan Φ -operatörüne Tachibana operatörü denir (Tachibana 1960).

Eğer Φ operatörü komütatif Π -yapısının ψ_j^i afinoruna uygulanırsa, bu taktirde

$$\begin{aligned} \Phi_k \psi_j^i &= \varphi_k^m \partial_m \psi_j^i - \partial_k (\psi_j^m \varphi_m^i) + \partial_j \varphi_k^m \psi_m^i + (\partial_k \varphi_m^i - \partial_m \varphi_k^i) \psi_j^m \\ &= \varphi_k^m \partial_m \psi_j^i - \varphi_m^i \partial_k \psi_j^m + \psi_m^i \partial_j \varphi_k^m - \psi_j^m \partial_m \varphi_k^i \\ &= N_{kj}^i \end{aligned} \quad (3.42)$$

tensörünü bulunur. (3.42) tensörüne Nijenhuis-Shirokov tensörü adı verilir.

3.1.3. Teorem: M_n manifoldu üzerinde integrallenen r -regüler Frobenius Π -yapısı verilmiş olsun. Pür (p, q) tipli $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün holomorf olması için gerek ve yeter şart keyfi lokal koordinatlarda

$$\Phi_{\alpha}^k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0 \quad (3.43)$$

olmasıdır.

İspat: Adapte olmuş lokal koordinatlarda

$$\varphi_{\alpha}^m = \varphi_{t\varepsilon}^{s\theta} = \delta_t^s C_{\alpha\varepsilon}$$

olarak yazılır. (3.41) denklemi ile verilen Φ operatörünün toplam kısımları sabit olduğundan bunların türevi sıfır olur. O halde (3.43) şartını adapte olmuş koordinatlarda yazacak olursak,

$$\delta_t^s C_{\sigma\varepsilon}^{\theta} \partial_{s\theta} t_{v_1\beta_1\dots v_q\beta_q}^{u_1\alpha_1\dots u_p\alpha_p} - \partial_{t\varepsilon} \left(\varphi_{\sigma}^{u_1\alpha_1} t_{v_1\beta_1\dots v_q\beta_q}^{s\dots u_p\alpha_p} \right) = 0$$

olur. Bu da sadeleştirme sonucu

$$C_{\sigma\varepsilon}^{\theta} \partial_{t\theta} \left(\tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p w} \mathcal{B}_{w\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p} \right) - \partial_{t\varepsilon} \left(\delta_s^{u_1} C_{\sigma\theta}^{\alpha_1} t_{v_1\beta_1\dots v_q\beta_q}^{u_2\alpha_2\dots u_p\alpha_p} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$C_{\sigma\varepsilon}^{\theta} \partial_{t\theta} \left(\tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p w} \mathcal{B}_{w\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p} \right) - \partial_{t\varepsilon} \left(C_{\sigma\theta}^{\alpha_1} \tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p w} \mathcal{B}_{w\beta_1\dots\beta_q}^{\theta\alpha_2\dots\alpha_p} \right) = 0$$

şeklinde yazılır. Buradan da

$$C_{\sigma\varepsilon}^{\theta} \partial_{t\theta} \left(\tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p w} \mathcal{B}_{w\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p} \right) - C_{\lambda\sigma}^w \partial_{t\varepsilon} \left(\tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p \lambda} \mathcal{B}_{w\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p} \right) = 0 \quad (3.44)$$

bulunur. (3.44) ifadesi düzenlenirse

$$\left(C_{\sigma\varepsilon}^{\theta} \partial_{t\theta} \tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p w} - C_{\lambda\sigma}^w \partial_{t\varepsilon} \tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p \lambda} \right) \mathcal{B}_{w\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p} = 0 \quad (3.45)$$

sonucu bulunur. $\mathcal{B}_{w\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p}$ ifadesini Frobenius cebirinin birimleriyle kontraksiyon yapılırsa

$$\mathcal{B}_{w\beta_1}^{\alpha_1} = C_{w\beta_1}^{\alpha_1} \lambda_{\alpha_1} = \varphi_{w\beta_1}$$

olur. $\text{Det}\varphi \neq 0$ olduğundan dolayı (3.34) denkleminde parantezin içi sıfır olur. Yani,

$$C_{\sigma\varepsilon}^{\theta} \partial_{t\theta} \tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p w} = C_{\lambda\sigma}^w \partial_{t\varepsilon} \tau_{v_1\dots v_q}^{u_1\dots u_p \lambda} \quad (3.46)$$

yazılır.

3.2. Liftler Hakkında Genel Bilgiler

3.2.1. Tanjant demet

M_n , C^∞ sınıfından n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \quad (3.47)$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir (Yano and Ishihara 1973)

$T(M_n)$ ' nin herhangi bir $\tilde{p}$ noktası, yani $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \rightarrow M_n$ demet izdüşümü $\tilde{p} \mapsto p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = T_p(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının p noktasındaki fibre (lif) denir. için $\pi \circ f = id_{M_n}$ olacak şekilde $f : M_n \rightarrow T(M_n)$ dönüşümüne $T(M_n)$ tanjant demetin sıfır kesiti denir. Burada id_{M_n} M_n manifoldunda özdeşlik dönüşümüdür. Buradan açıktır ki, $T(M_n)$ tanjant demetde kesit M_n manifoldu üzerinde vektör alanı demektir. f sıfır kesiti M_n de sıfır vektör alanı demektir. f sıfır kesiti M_n baz uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldunun kendisi $T(M_n)$ 'de diferensiyellenebilir imbedding (daldırılmış) altmanifoldudur.

M_n taban uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü farzedelim. Burada (x^h) , U komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. R^n , R üzerinde n -boyutlu vektör uzayı olmak üzere $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizimdir. $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ ($p \in U$) noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri, $\{\partial_h\}$ ($\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}$) doğal bazına göre $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\tilde{p}$ nin $(y^h) = (x^{\bar{h}}) \bar{h} = n+1, \dots, 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi(\tilde{p})$ nin koordinatları (x^h) $h = 1, \dots, n$ ile gösterilirse $\tilde{p}$ noktası uygun $(x^h, x^{\bar{h}}) \mapsto \tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Dolayısıyla $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemi elde edilmiş olur. Burada $(x^h, x^{\bar{h}})$ ya (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p = \pi(\tilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ olsun. $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu $\tilde{p}$ ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U')$ komşuluğuna göre $\tilde{p}$ 'nın indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, x^{\bar{h}'})$ olur. Buradan

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x), \\ x^{\bar{h}'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{\bar{h}}} x^{\bar{h}}, \end{cases} \quad (3.48)$$

olarak verilir. $x^{h'}(x)$, p noktasındaki $x^1, x^2, \dots, x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (3.48) denklemi genelde

$$x^{p'} = x^{p'}(x). \quad (3.49)$$

olarak gösterilir. (3.48) denkleminin Jacobian matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^{\bar{h}}} x^{\bar{h}} & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{\bar{h}}} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

matrisi ile verilir. (3.48) dönüşümünün ters dönüşümü ise

$$\begin{cases} x^h = x^h(x'), \\ x^{\bar{h}} = \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \quad (3.51)$$

veya

$$x^p = x^p(x'), \quad (3.52)$$

olarak yazılır. (3.51) denklemin Jacobian matrisi ise

$$\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{h'} \partial x^{\bar{h}'}} x^{\bar{h}'} & \frac{\partial x^h}{\partial x^{\bar{h}'}} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

olur. (3.50) ve (3.53) denklemlerinden $\det\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\right) = (\det\left(\frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}}\right))^2 > 0$ olduğundan dolayı $T(M_n)$ tanjant demeti daima yönlendirilebilirdir.

M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfından (r, s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $T_s^r(M_n)$ ile ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini ise $\mathcal{T}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(M_n)$ ile gösterilir. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümeleri ise sırasıyla $T_s^r(T(M_n))$ ve $\mathcal{T}(T(M_n))$ biçiminde gösterilir.

3.2.1. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \rightarrow R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\pi : T(M_n) \rightarrow M_n$ izdüşümü olmak üzere

$${}^V f = f \circ \pi \quad (3.54)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demetde dikey (vertical) lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunun U koordinat komşuluğunda lokal olarak $w = w_i dx^i$ ile w , 1-formu verilmişse tanjant demetde $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda ιw ile gösterilen

$$\iota w = w_i y^i \quad (3.55)$$

fonksiyonu tanımlanır. Bu tanıma göre eğer f , M_n manifoldu üzerinde bir fonksiyon ise $\iota(df)$ fonksiyonu $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda lokal olarak

$$\iota(df) = (\partial_i f) y^i \quad (3.56)$$

yazılır.

3.2.2. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $X \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ uzayında

$${}^V X(\iota w) = {}^V(w(X)) \quad (3.57)$$

ile tanımlanan ${}^V X$ vektör alanına X vektör alanının dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.57) denkleminde X vektör alanının dikey lifti, $T(M_n)$ tanjant demetde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$${}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

biçiminde olur. (3.58) eşliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$${}^V\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = {}^V(\partial_i) = \frac{\partial}{\partial y^i} = \partial_i \quad (3.59)$$

olarak bulunur.

3.2.3. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $w \in \mathfrak{T}_1^0(M_n)$ 1-formu verilmiş olsun. $T(M_n)$ uzayında

$${}^V w = {}^V(w_i){}^V(dx^i) \quad (3.60)$$

ile tanımlanan ${}^V w \in \mathfrak{T}_1^0(T(M_n))$ 1-formuna w 1-formunun dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.60) denkleminde w 1-formunun dikey lifti, $T(M_n)$ tanjant demetde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$${}^V w = (w_i, 0) \quad (3.61)$$

biçiminde olur. (3.58) eşliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$${}^V(dx^h) = dx^h \quad (3.62)$$

olarak bulunur.

M_n manifoldu üzerinde S tensör alanı

$$S = S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \quad (3.63)$$

olarak verilmiş olsun. $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $(x^h, \bar{x}^h)$ indirgenmiş koordinatlarına göre $\gamma_X S$ ve γS tensör alanları sırasıyla

$$\gamma_X S = (X^l S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \quad (3.64)$$

ve

$$\gamma S = (y^l S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \quad (3.65)$$

ile tanımlanır (Yano and Ishihara 1973). Eğer S bir fonksiyon ise $\gamma_X S$ ve γS sıfır olur.

Keyfi $X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $S \in \mathfrak{T}_s^0(M_n)$ veya $S \in \mathfrak{T}_s^1(M_n)$ için (3.64) denkleminde

$$\gamma_X S = {}^V(S_X) \quad (3.66)$$

elde edilir. Burada $S_X \in \mathfrak{T}_{s-1}^0(M_n)$ veya $S_X \in \mathfrak{T}_{s-1}^1(M_n)$

$$S_X(X_{s-1}, \dots, X_1) = S(X, X_{s-1}, \dots, X_1) \quad (3.67)$$

ile tanımlanmıştır (Yano and Ishihara 1973).

3.2.4. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \rightarrow R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetde

$${}^C f = \iota(df) \quad (3.68)$$

ile tanımlanan ${}^C f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tam(complete) lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

3.2.5. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $X \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. f, M_n manifoldu üzerinde keyfi bir fonksiyon olmak üzere, $T(M_n)$ uzayında

$${}^C X {}^C f = {}^C (Xf) \quad (3.69)$$

ile tanımlanan ${}^C X \in \mathfrak{X}_0^1(T(M_n))$ vektör alanına X vektör alanının tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.69) denkleminde X vektör alanının tam liftinin $T(M_n)$ tanjant demetde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$${}^C X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

olur. (3.70) eşliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$${}^C (\partial_i) = \partial_i \quad (3.71)$$

olarak bulunur.

3.2.6. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $w \in \mathfrak{X}_1^0(M_n)$ 1-formu verilmiş olsun. $T(M_n)$ uzayında

$${}^C w({}^C X) = {}^C (w(X)) \quad (3.72)$$

ile tanımlanan ${}^C w$, 1-formuna $w \in \mathfrak{X}_1^0(M_n)$ 1-formunun tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.72) denkleminde w 1-formunun tam lifti $T(M_n)$ tanjant demetde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$${}^C w = (y^s \partial_s w_i, w_i) \quad (3.73)$$

biçimindedir. (3.73) eşliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$${}^C(dx^h) = dy^h = dx^{\bar{h}} \quad (3.74)$$

olarak bulunur.

3.2.7. Tanım: M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ afin koneksiyonu verilmiş olsun. $X \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$${}^H X = {}^C X - \nabla_\gamma X \quad (3.75)$$

ile tanımlanan ${}^H X \in \mathfrak{X}^1(T(M_n))$ vektör alanına, X vektör alanının yatay (horizontal) lifti denir. Burada $\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X)$ olarak gösterilmiştir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerinde X vektör alanının lokal birleşenleri X^h olsun. (3.70) denklemi ve $\nabla_\gamma X$ 'in $T(M_n)$ tanjant demetdeki $(x^h, x^{\bar{h}})$ indirgenmiş koordinatlara göre lokal bileşenleri

$$\nabla_\gamma X = \begin{pmatrix} 0 \\ y^j \nabla_j X^h \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı $T(M_n)$ tanjant demetde indirgenmiş koordinatlara göre X vektör alanının ${}^H X$ yatay liftinin bileşenleri

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^j \Gamma_{ji}^h X^i \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

biçimindedir.

3.2.2. Kotanjant demet

3.2.8. Tanım: M_n diferensiyellenebilir n boyutlu manifold ve $T_P^*(M_n)$ ise $P \in M_n$ noktasındaki kotanjant uzay olsun. Yani P noktasındaki $T_P(M_n)$ tanjant uzayının dual uzayı olsun.

$$T^*(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P^*(M_n)$$

kümesine kotanjant demet denir.

M_n taban uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü farzedelim. Burada (x^h) , U komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. R^n, R üzerinde n -boyutlu vektör uzayı olmak üzere $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizmdir. $\tilde{P} \in T_P^*(M_n)$ ($P \in U$) noktası (P, p) sıralı çifti ile gösterilir ve $p \in R^n$ kovektörünün bileşenleri $T_P^*(M_n)$ kotanjant uzayında dx^h doğal koçatıya göre $\tilde{P}$ nın (p_i) birleşenleri ile verilir. U komşuluğunda $P = \pi(\tilde{P})$ noktasının koordinatları (x^h) $h = 1, \dots, n$ ile gösterilirse $\tilde{P}$ noktası uygun $(x^h, p_i) \mapsto \tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Dolayısıyla $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M_n)$ açık kümesinde (x^h, p_i) lokal koordinatlar sistemini elde edilmiş olur. Burada (x^h, p_i) lokal koordinatlar sistemine (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda koordinatlar denir.

$p = p_i dx^i$ 1-formuna $T^*(M_n)$ kotanjant uzayın temel 1-formu denir. p temel 1-formunun dp dış diferensiyeli 2-formdur ve $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda

$$dp = dp_i \wedge dx^i \quad (3.77)$$

olarak yazılır. Bu nedenle

$$dp = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{CB} dx^C \wedge dx^B \quad (3.78)$$

yazılırsa

$$(\mathcal{L}_{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

elde edilir. (3.79) matrisi regüler olduğundan $\mathcal{L}^{BA} \mathcal{L}_{CB} = \delta_C^A$ olacak şekilde $\mathcal{L}^{BA}$ ters matrisi vardır ve bu

$$(\mathcal{L}^{BA}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^h \\ \delta_h^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

biçimindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.2.9. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \rightarrow R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\pi : T^*(M_n) \rightarrow M_n$ izdüşümü olmak üzere

$${}^V f = f \circ \pi \quad (3.81)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun kotanjant demetde dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

Böylece tanımdan $\tilde{P} \in T_P^*(M_n)$ olmak üzere

$${}^V f(\tilde{P}) = f(P)$$

elde edilir.

3.2.10. Tanım: $w \in \mathfrak{T}_1^0(M_n)$ olmak üzere lokal birleşenleri

$$\tilde{w}^A = \tilde{w}_B \mathfrak{L}^{BA} \quad (3.82)$$

olan $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde vektör alanı elde edilir. Bu vektör alanına M_n manifoldunda w 1-formunun dikey lifti denir ve ${}^V w$ ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

${}^V w$ dikey lifti $T^*(M_n)$ kotanjant demetde indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^V w = \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

birleşenlerine sahiptir. Açıkça ${}^V w$ bir dikey vektör alanıdır.

3.2.3. Tensör demet

M_n , C^∞ sınıfından n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun Q noktasındaki (p, q) tipli tensör uzay $T_q^p(Q)$ olsun.

$$T_q^p(M_n) = \bigcup_{Q \in M_n} T_q^p(Q) \quad (3.84)$$

ile tanımlanan $T_q^p(M_n)$ kümesine tensör demet denir.

M_n manifoldu üzerinde $\pi : T_q^p(M_n) \rightarrow M_n$ tabii izdüşümü verilsin. M_n manifoldunun bir Q noktasının U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatları x^j , $j = 1, \dots, n$ olarak verilir. $Q \in M_n$ noktasındaki $T_q^p(M_n)$ nin bir elemanı olan (p, q) tipli t tensörünün lokal ifadesi

$$(x^j, t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = (x^j, x^{\bar{j}}), \quad x^{\bar{j}} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad \bar{j} = n+1, \dots, n+n^{p+q}$$

biçimindedir. Burada $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, t tensörünün ∂_j tabii çatısına göre bileşenleridir. $T_q^p(M_n)$ nin $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olarak $(x^j, x^{\bar{j}})$ ifadesini alabiliriz.

M_n manifoldu üzerindeki koordinat dönüşümü $M_n : x^{\bar{j}} = x^j(x^j)$ biçiminde olduğundan $T_q^p(M_n)$ demetinde karşılık gelen koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{\bar{j}} = x^j(x^j), \\ x^{\bar{j}} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{i_1}^{i'_1} \dots A_{i_p}^{i'_p} A_{j_1}^{j_1} \dots A_{j_q}^{j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{(i)}^{(i')} A_{(j)}^{(j)} x^{\bar{j}}, \end{cases} \quad (3.85)$$

biçiminde olur. Burada $A_{(i)}^{(i')} A_{(j)}^{(j)} = A_{i_1}^{i'_1} \dots A_{i_p}^{i'_p} A_{j_1}^{j_1} \dots A_{j_q}^{j_q}$, $A_{i'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $A_{j'}^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}$ olarak alınmıştır. $J = (j, \bar{j})$, $J = 1, \dots, n + n^{p+q}$, $t_{(k)}^{(i)} = t_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p}$ olmak üzere, (3.85) denkleminin jacobiyen matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{J'}}{\partial x^J} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} & \frac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^j} \\ \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\bar{j}}} & \frac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^{\bar{j}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j^{j'} & 0 \\ t_{(k)}^{(i)} \partial_j (A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(j)}) & A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(j)} \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

olarak verilir.

$F(M_n)$, M_n manifoldu üzerinde C^∞ sınıfından reel değerli fonksiyonların halkası olmak üzere, C^∞ sınıfından (p, q) tipli tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülünü $\mathfrak{T}_q^p(M_n)$ ile gösterilir.

Eğer $\alpha \in \mathfrak{T}_p^q(M_n)$ ise kontraksiyonla $T_q^p(M_n)$ uzayında $\iota\alpha$ fonksiyonunu tanımlanır. $U(x^i) \subset M_n$ koordinat komşuluğunda α nın lokal ifadesi

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_q} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$$

biçimde ise $\iota\alpha$, $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğundaki $(x^i, x^{\bar{i}})$ koordinatlara göre lokal ifadesi

$$\iota\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

olur.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. İnvaryant Alt Manifold Üzerinde Tachibana Operatörü

M_n manifoldu üzerinde Π - yapısı verilmiş olsun. M_k alt manifoldunun

$$x^i = x^i(u^A) \quad i = 1, \dots, n; \quad A = 1, \dots, k, \quad \text{rank} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^A} \right) = k$$

eşitlikleri ile verildiğini kabul edelim. Herbir $x \in M_k$ noktadaki k -boyutlu B_k teğet düzlemindeki vektörler

$$T_A^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A}, \quad A = 1, \dots, k$$

şeklinde ifade edilir. M_k manifoldu invariant altmanifold ise, bu durumda B_k teğet düzlemi,

$$v^i \mapsto {}^*v^i = \varphi_m^i v^m, \quad \forall \varphi \in \Pi$$

dönüşümüne göre invaryant kalmış olur. Bu ise,

$${}^*v_A^i = \varphi_m^i T_A^m \in B_k, \quad \forall \varphi \in \Pi$$

şeklinde gösterilir (Tachibana ve Kato 1962). Bu da

$$\varphi_m^i T_A^m = \varphi_A^C T_C^i, \quad \forall \varphi \in \Pi \quad (4.1)$$

olmasına denktir.

φ_A^C afinoru, M_k altmanifoldu üzerinde yeni bir poliafinor yapısı oluşturur. Bunu $\Pi_u = \{\varphi_A^C\}$ şeklinde gösterelim. Bu yeni yapıya verilen Π -yapısına nazaran indirgenmiş yapı denir.

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \in T(M_n), \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r \in T(M_k), \xi_1, \dots, \xi_q \in T^*(M_n), \eta_1, \dots, \eta_s \in T^*(M_k)$ olmak üzere

$$Z = t(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r, \xi_1, \dots, \xi_q, \eta_1, \dots, \eta_s)$$

multilineer fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen t

tensörüne $(q, p; s, r)$ tipli karışık tensör veya bağlayıcı tensör denir (Salimov ve Mağden 1999).

M_k invaryant alt manifoldunda $t_{j_1 \dots j_q B_1 \dots B_s}^{i_1 \dots i_p A_1 \dots A_r}$, $(p, q; r, s)$ tipindeki karışık tensörünün $(j_\mu, B_{\mu'})$ çifti için

$$\varphi_{j_\mu}^m t_{j_1 \dots m \dots j_q B_1 \dots B_s}^{i_1 \dots i_p A_1 \dots A_r} = \varphi_{B_{\mu'}}^E t_{j_1 \dots j_q B_1 \dots E \dots B_s}^{i_1 \dots i_p A_1 \dots A_r} = t_{(j)(B)}^{*(i)(A)}, \forall \varphi \in \Pi.$$

şartı sağlanırsa bu $t_{(j)(B)}^{(i)(A)}$ tensörüne bu çifte göre pür denir. Eğer $t_{(j)(B)}^{(i)(A)}$ karışık tensörü tüm çiftlere göre pür ise bu tensöre pür tensör denir. O halde T_A^i tensörünün pür tensör olduğu (4.1) eşitliğinden görülür.

Pür karışık tensörün $\mathfrak{T}_{q,s}^{*p,r}(M_k)$ modülü üzerindeki Tachibana operatörü

$$\begin{aligned} \Phi_K t_{(j)(B)}^{(i)(A)} &= \varphi_K^E \partial_E t_{(j)(B)}^{(i)(A)} - \partial_K t_{(j)(B)}^{*(i)(A)} + \sum_{\mu=1}^q (\partial_{j_\mu} \varphi_l^m) T_K^l t_{j_1 \dots m \dots j_q(B)}^{(i)(A)} \\ &+ \sum_{\lambda=1}^p (\partial_l \varphi_m^{i_\lambda} - \partial_m \varphi_l^{i_\lambda}) T_K^l t_{(j)(B)}^{i_1 \dots m \dots i_p(A)} + \sum_{\mu'=1}^s (\partial_{B_{\mu'}} \varphi_K^E) t_{(j)B_1 \dots E \dots B_s}^{(i)(A)} \\ &+ \sum_{\lambda'=1}^r (\partial_K \varphi_E^{A_{\lambda'}} - \partial_E \varphi_K^{A_{\lambda'}}) t_{(j)(B)}^{(i)A_1 \dots E \dots A_r} \end{aligned} \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlanır (Tachibana 1960). Bu operatör ile tayin edilen tensör $(p, q; r, s+1)$ tipindedir. Özel halde $k = n$ olduğunda (4.2) ile verilen operatör M_n manifoldu üzerinde Tachibana operatörü olur.

Şimdi,

$$\Phi_K (t_{(j)(B)}^{a(i)(A)} t'_{a(j)(B)}^{(i)(A)}) = (\Phi_K t_{(j)(B)}^{a(i)(A)}) t'_{a(j)(B)}^{(i)(A)} + t_{(j)(B)}^{a(i)(A)} (\Phi_K t'_{a(j)(B)}^{(i)(A)}) \quad (4.3)$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. Hesaplamanın kolaylığı için $t \in \mathfrak{T}_{0,1}^{*1,0}(M_n)$, $t' \in \mathfrak{T}_{1,1}^{*0,0}(M_n)$ alalım. (4.1) eşitliğinden

$$t_A^a t'_{aB} \varphi_C^B = t_A^a t'_{bC} \varphi_a^b = t_B^b t'_{bC} \varphi_A^B$$

yani,

$$t_A^a t'_{aB} \in \mathfrak{T}_{0,2}^{*,0}(M_n)$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \Phi_K(t_A^a t'_{aB}) &= \varphi_K^E \partial_E(t_A^a t'_{aB}) - \partial_K(\varphi_A^E t_E^a t'_{aB}) \\ &\quad + (\partial_A \varphi_K^E) t_E^a t'_{aB} + (\partial_B \varphi_K^E) t_A^a t'_{aE} \end{aligned} \quad (4.4)$$

olduğunu (4.2) eşitliğinden yazılır. (4.4) ifadesinin sağ tarafındaki terimler

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi_K^E \partial_E(t_A^a t'_{aB}) = \varphi_K^E (\partial_E t_A^a) t'_{aB} + \varphi_K^E t_A^a \partial_E t'_{aB} \\ a_2 &= -\partial_K(\varphi_A^E t_E^a t'_{aB}) = -(\partial_K t_A^a) t'_{aB} - \varphi_A^E t_E^a \partial_K t'_{aB} \\ &= -(\partial_K t_A^a) t'_{aB} - \varphi_b^a t_A^b \partial_K t'_{aB} \\ &= -(\partial_K t_A^a) t'_{aB} - t_A^b \partial_K t'_{bB} + (\partial_K \varphi_b^a) t_A^b t'_{aB}, \\ a_3 &= (\partial_A \varphi_K^E) t_E^a t'_{aB} + (\partial_B \varphi_K^E) t_A^a t'_{aE} = (\partial_A \varphi_K^E) t_E^a t'_{aB} \\ &\quad + (\partial_l \varphi_m^a - \partial_m \varphi_l^a) T_K^l t_A^m t'_{aB} - (\partial_l \varphi_m^a - \partial_m \varphi_l^a) T_K^l t_A^m t'_{aB} \\ &\quad + (\partial_B \varphi_K^E) t_A^a t'_{aE} = (\partial_A \varphi_K^E) t_E^a t'_{aB} + (\partial_l \varphi_m^a - \partial_m \varphi_l^a) T_K^l t_A^m t'_{aB} \\ &\quad + t_A^a (\partial_a \varphi_l^m) T_K^l t'_{mB} + t_A^a (\partial_B \varphi_K^E) t'_{aE} - (\partial_K \varphi_m^a) t_A^m t'_{aB}, \end{aligned}$$

biçiminde gösterilir ve bu değerler toplanırsa,

$$\Phi_K(t_A^a t'_{aB}) = (\Phi_K t_A^a) t'_{aB} + t_A^a (\Phi_K t'_{aB})$$

eşitliği elde edilir.

4.2. Riemann Metrik Tensörünün Φ -Tensör Olması Şartı

(V_n, g) Riemann manifoldu ve g , $\Phi_K g_{ij} = 0$ şartını sağlayan pür esas tensör olsun. $\Phi_K g_{ij} = 0$ şartını sağlayan g tensörüne (V_n, g) Riemann manifoldunda Φ -tensörü denir (Tachibana 1960). Bu manifoldun invariant alt manifoldu olarak $V_k \subset V_n$ alalım. V_k alt manifoldu üzerinde

$$g_{AB} = T_A^i T_B^j g_{ij}, \quad T_A^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A}$$

eşitliğine göre g_{AB} Riemann metrik tensörü indirgenmiş olur. Şimdi g_{AB} tensörünün

$\Pi_u = \{\varphi_B^A\}$ yapısına göre pür olduğunu gösterelim. (4.1) eşitliği ve g_{ij} tensörünün pür olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}\varphi_A^K g_{KB} &= \varphi_A^K T_K^i T_B^j g_{ij} = \varphi_m^i T_A^m T_B^j g_{ij} \\ &= \varphi_j^i T_A^m T_B^j g_{mi} = \varphi_B^K T_A^m T_K^i g_{mi} \\ &= \varphi_B^K g_{AK}\end{aligned}\quad (4.5)$$

bulunur. Bu da V_k altmanifoldu üzerinde alınan g_{AB} tensörünün pür olmasını gösterir. (4.2) denkleminde verilen Tachibana operatörü g_{ij} tensörüne uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\Phi_K g_{ij} &= \varphi_K^E \partial_E g_{ij} - \partial_K g_{ij}^* + (\partial_i \varphi_l^m) T_K^l g_{mj} + (\partial_j \varphi_l^m) T_K^l g_{im} \\ &= \varphi_K^E T_E^l \partial_l g_{ij} - T_K^l \partial_l g_{ij}^* + (\partial_i \varphi_l^m) T_K^l g_{mj} + (\partial_j \varphi_l^m) T_K^l g_{im} \\ &= \varphi_l^m T_K^l \partial_m g_{ij} - T_K^l \partial_l g_{ij}^* + (\partial_i \varphi_l^m) T_K^l g_{mj} + (\partial_j \varphi_l^m) T_K^l g_{im} \\ &= T_K^l \Phi_l g_{ij}\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Buradan da

$$\Phi_K g_{ij} = T_K^l \Phi_l g_{ij} \quad (4.6)$$

bulunur. $\Phi_l g_{ij}$ operatörü V_n manifoldunda Tachibana operatörüdür. Ayrıca T_A^i tensörü pür tensör ve

$$\partial_E T_A^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^E \partial u^A} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^A \partial u^E} = \partial_A T_E^i$$

olduğundan, (4.2) eşitliğine göre Φ -operatörünü, T_A^i tensörüne uygulayanacak olursa

$$\left. \begin{aligned}\Phi_K T_A^i &= \varphi_K^E \partial_E T_A^i - \partial_K (\varphi_A^E T_E^i) + (\partial_A \varphi_K^E) T_E^i + (\partial_l \varphi_m^i - \partial_m \varphi_l^i) T_K^l T_A^m \\ &= \partial_A (\varphi_K^E T_E^i) - \partial_K (\varphi_A^E T_E^i) + (\partial_l \varphi_m^i - \partial_m \varphi_l^i) T_K^l T_A^m\end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

yazılır. $\varphi_K^E T_E^i = \varphi_j^i T_K^j$ şartın dikkate alınarak u^A ya göre diferansiyeli alınır,

$$\partial_A (\varphi_K^E T_E^i) = \partial_A (\varphi_j^i T_K^j) = (\partial_A \varphi_j^i) T_K^j + \varphi_j^i \partial_A T_K^j = (\partial_l \varphi_j^i) T_K^j T_A^l + \varphi_j^i \partial_A T_K^j$$

veya

$$\partial_A (\varphi_K^E T_E^i) - (\partial_l \varphi_j^i) T_K^j T_A^l = \varphi_j^i \partial_A T_K^j \quad (4.8)$$

bulunur. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$\Phi_K T_A^i = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir.

4.2.1. Teorem: (V_n, g) Riemann manifoldu üzerinde Π -yapısı verilmiş olsun. g esas metrik tensörü bu yapıya göre Φ -tensör ise bu manifoldun bir Riemann altmanifoldunun esas metrik tensörü de Φ -tensörüdür.

İspat: g_{ij} metrik tensörü için $\Phi_l g_{ij} = 0$ olduğunu kabul edelim. (4.3), (4.5), (4.6) ve (4.7) formüllerini kullanırsak

$$\begin{aligned}\Phi_K g_{AB} &= \Phi_K(T_A^i T_B^j g_{ij}) \\ &= (\Phi_K T_A^i) T_B^j g_{ij} + T_A^i (\Phi_K T_B^j) g_{ij} + T_A^i T_B^j (\Phi_K g_{ij}) \\ &= T_A^i T_B^j (\Phi_K g_{ij}) \\ &= T_A^i T_B^j T_K^l \Phi_l g_{ij} \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur.

$M_k \subset M_n$ manifoldunun altmanifoldu, invariant altmanifold $(\varphi_m^i T_A^m = \varphi_A^C T_C^i)$ ise

$$(\varphi_m^i T_C^m) \varphi_A^C = \varphi_m^i (T_C^m \varphi_A^C) = \varphi_m^i \varphi_j^m T_A^j = \varphi_j^m \varphi_m^i T_A^j = (\varphi_m^k T_A^m) \varphi_k^i$$

yani, $\varphi_m^i T_A^m$ (veya $\varphi_A^C T_C^i$) tensörlerin pür tensörler oldukları kolayca görülür.

(4.6) denkleminde benzer olarak

$$\Phi_K \varphi_j^i = T_K^l \Phi_l \varphi_j^i = T_K^l N_{lj}^i \quad (4.10)$$

yazılır. Burada N_{lj}^i -tensörü Nijenhuis tensörüdür (Kruchkovich 1972).

(4.2) operatörü $\varphi_m^i T_A^m$ pür tensörüne uygulanırsa, (4.3), (4.9) ve (4.10) denklemlerinden

$$\Phi_K(\varphi_m^i T_A^m) = \Phi_K(\varphi_A^C T_C^i)$$

veya

$$T_A^m T_K^l N_{lm}^i = T_C^i N_{KA}^C \quad (4.11)$$

olduğu bulunur. (4.11) deki N_{KA}^C tensörü Π_u -yapısı için Nijenhuis tensörüdür. Dolayısıyla (4.11) eşitliğinden şu sonuç çıkar:

4.2.2. Sonuç: M_k, M_n nin invariant altmanifoldu olsun. Eğer N_{lj}^i Nijenhuis tensörü sıfır ise N_{KA}^C tensörü de sıfır olur.

4.3. Hemen Hemen Holomorf Dönüşüm

4.3.1. Diffeomorfizmlerin özellikleri

M_n, C^∞ sınıfından n boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. $T_Q, Q \in M_n$ manifoldu üzerinde $(1, q)$ tipli tensör uzayı olmak üzere

$$T_q^1(M_n) = \bigcup_{Q \in M_n} T_Q$$

kümesine M_n manifoldu üzerinde $(1, q)$ tipli tensör demeti denir. Bu demetin tabii izdüşümü $\pi : T_q^1(M_n) \rightarrow M_n$ ile gösterilir.

$\mu : M_n \rightarrow M_n$ dönüşümü (diffeomorfizmi)

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i)$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşümün $d\mu$ diferensiyeli $\mu^* : T(M_n) \rightarrow T(M_n)$ ile gösterilir. Bilindiği gibi μ^* dönüşümünü lokal koordinatlarda $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ Jakobiyen matrisi ile ifade edilir. Diğer taraftan μ^* , 'ın tensör demetlere genişlemesi adlandırılan dönüşümü de μ^* ile gösterelim. Bu genişlenmiş dönüşümün yardımıyla

$$(\mu^* S)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{i_q}} S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

olmak üzere (p, q) tipli $S \in T_q^p(M_n)$ tensör alanından, yeni bir aynı tipli $\mu^* S \in T_q^p(M_n)$ tensör alanı bulunur. Bazen $\mu^* S$ 'ye S tensör alanının μ diffeomorfizminin yardımıyla taşınması da denir. Böylece genişlenmiş μ^* dönüşümü

$$\mu^* : T_q^p(M_n) \rightarrow T_q^p(M_n)$$

olur. Bu çalışmada $p = 1$ kabul edilmiştir. $\mu^* : T_q^1(M_n) \rightarrow T_q^1(M_n)$ dönüşümünün $d\mu^* : T(T_q^1(M_n)) \rightarrow T(T_q^1(M_n))$ diferensiyelini $(\mu^*)^*$ ile göstereceğiz.

$\mu^* : T_q^1(M_n) \rightarrow T_q^1(M_n)$ dönüşümü lokal olarak

$$\mu^* : \begin{cases} x^{i'} = x^i(x^i) \\ x^{j'} = t_{i_1' \dots i_q'}^{j'}(t_{i_1 \dots i_q}^{j'}) = t_{i_1' \dots i_q'}^{j'}(x^{i'}) \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. μ^* dönüşümünün Jakobiyen matrisi ise

$$(A_{I'}^I) = \left(\frac{\partial x^I}{\partial x^{I'}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} & \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \\ \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} & \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere açık şekilde

$$\begin{cases} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} & \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = 0 \\ \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = x^{i'} \partial_{i'} (A_{i_1'}^{i_1} A_{i_2'}^{i_2} \dots A_{i_q'}^{i_q}) & \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = A_{i_1'}^{i_1} A_{i_2'}^{i_2} \dots A_{i_q'}^{i_q} \end{cases} \quad (4.12)$$

biçiminde yazılır.

Her bir $\varphi \in T_1^1(M_n)$ (1, 1) tipli tensör (afinor) alanı kullanılarak

$$(\mu^* \varphi)_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \varphi_j^i \quad (4.13)$$

yeni bir (1,1) tipli $\mu^* \varphi \in T_1^1(M_n)$ afinor elde edilmiş olur. Eğer cebirsel Π -yapısının $\forall \varphi \in \Pi$ afinoru için

$$(\mu^* \varphi)_{j'}^{i'} = \varphi_j^i$$

ise, yani (4.13) eşitliğine göre

$$\varphi A = A \varphi, \quad A = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right), \quad \varphi = (\varphi_j^i)$$

oluyor ise, başka bir ifade ile Scheffers şartları sağlanıyor ise, bu μ dönüşümüne Π -yapısına göre hemen hemen holomorf dönüşüm denir.

4.3.1. Teorem : M_n diferensiyellenebilir manifold üzerinde $\mu : M_n \rightarrow M_n$ diffeomorfizmi verilmiş olsun. $\varphi \in T_1^1(M_n)$ olmak üzere

$$(\mu^*)^* C \varphi = C (\mu^* \varphi) \quad (4.14)$$

olur.

İspat: İspat için

$$((\mu^*)^* C \varphi)_{J'}^{I'} = A_I^{I'} A_{J'}^J C \varphi_J^I = C(\mu^* \varphi)_{J'}^{I'}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\varphi \in \mathcal{T}_1^1(M_n)$ tensör alanının pür alt demet boyunca tam lifti,

$${}^C \varphi_j^{\bar{i}} = (\partial_k \varphi_r^{j_1}) t_{i_1 \dots i_q}^r - \sum_{a=1}^q (\partial_{i_a} \varphi_k^r) t_{i_1 \dots r \dots i_q}^{j_1} - (\partial_k \varphi_r^{j_1} - \partial_r \varphi_k^{j_1}) t_{i_1 \dots i_q}^r$$

olmak üzere

$$({}^C \varphi_J^I) = \begin{pmatrix} {}^C \varphi_j^i & {}^C \varphi_j^{\bar{i}} \\ {}^C \varphi_j^{\bar{i}} & {}^C \varphi_j^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_j^i & 0 \\ {}^C \varphi_j^{\bar{i}} & \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_q}^{j_q} \varphi_{l_1}^j \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

olarak yazılır (Salimov 1994). $((\mu^*)^* C \varphi)_{J'}^{I'}$ ifadesi açık bir şekilde yazılırsa,

$$((\mu^*)^* C \varphi)_{J'}^{I'} = ((\mu^*)^* C \varphi)_{j'}^{\bar{i}'} + ((\mu^*)^* C \varphi)_{j'}^{\bar{i}'} + ((\mu^*)^* C \varphi)_{j'}^{\bar{i}'} + ((\mu^*)^* C \varphi)_{j'}^{\bar{i}'}^{\bar{j}'}$$

olur. (4.12) ve (4.15) denklemleri dikkate alınarak, bu tam liftin terimleri ayrı ayrı incelenirse;

$$((\mu^*)^* C \varphi)_{j'}^{\bar{i}'} = C(\mu^* \varphi)_{j'}^{\bar{i}'}$$

$$((\mu^*)^* C \varphi)_{j'}^{\bar{i}'} = 0$$

$$((\mu^*)^* C \varphi)_{j'}^{\bar{i}'} = C(\mu^* \varphi)_{j'}^{\bar{i}'}$$

eşitlikleri bulunur. Son olarak

$$((\mu^*)^* C \varphi)_{j'}^{\bar{i}'} = A_{i_1}^{\bar{j}'} A_{j'}^j C \varphi_j^i + A_{i_1}^{\bar{j}'} A_{j'}^{\bar{j}} C \varphi_j^{\bar{i}} + A_{i_1}^{\bar{j}'} A_{j'}^j C \varphi_j^{\bar{i}} + A_{i_1}^{\bar{j}'} A_{j'}^{\bar{j}} C \varphi_j^{\bar{i}}$$

ifadesinin terimlerini ayrı ayrı yazalım. Kolaylık açısından özel olarak (1, 1) tipli tensör demet için gösterilecek olunursa

$$\begin{aligned} a_{11} &= t_{i_1}^h (\partial_i A_{i_1}^{i_1}) A_h^{h'} A_{j_1}^j \varphi_j^i, & a_{12} &= t_{i_1}^h (\partial_i A_h^{h'}) A_{i_1}^{i_1} A_{j_1}^j \varphi_j^i \\ a_{21} &= A_{j_1}^j A_h^{h'} A_{i_1}^{i_1} t_{i_1}^a \partial_a \varphi_j^h, & a_{22} &= -A_{j_1}^j A_h^{h'} A_{i_1}^{i_1} t_a^h \partial_{i_1} \varphi_j^a \\ a_{31} &= A_h^{h'} A_{i_1}^{i_1} A_{j_1}^{j_1} t_{j_1}^{l_1} (\partial_j A_{l_1}^{l_1}) \delta_{i_1}^{j_1} \varphi_l^h, & a_{32} &= A_h^{h'} A_{i_1}^{i_1} A_{l_1}^{l_1} t_{j_1}^{l_1} (\partial_j A_{j_1}^{j_1}) \delta_{i_1}^{j_1} \varphi_l^h \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Diğer taraftan,

$${}^C(\mu^*\varphi)_{j'}^i = t_{i_1'}^{a'} \partial_{a'} \varphi_{j'}^{h'} - t_{a'}^{h'} \partial_{i_1'} \varphi_{j'}^{a'}$$

yazılır. Terimler ayrı ayrı düzenlenirse,

$$\begin{aligned} b_{11} &= (\partial_{a'} A_h^{h'}) A_{j'}^j \varphi_j^h t_{i_1'}^{a'}, \quad b_{12} = (\partial_{a'} A_{j'}^j) A_h^{h'} \varphi_j^h t_{i_1'}^{a'}, \quad b_{13} = (\partial_{a'} \varphi_j^h) A_h^{h'} A_{j'}^j t_{i_1'}^{a'} \\ b_{21} &= -(\partial_{i_1'} A_a^{a'}) A_{j'}^j \varphi_j^a t_{a'}^{h'}, \quad b_{22} = -(\partial_{i_1'} A_{j'}^j) A_a^{a'} \varphi_j^a t_{a'}^{h'}, \quad b_{23} = -(\partial_{i_1'} \varphi_j^a) A_{j'}^j A_a^{a'} t_{a'}^{h'} \end{aligned}$$

olur. Bazı hesaplamalardan sonra aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\begin{cases} a_{21} = b_{13}, & a_{22} = b_{33}, & a_{12} = b_{11} \\ a_{32} = b_{22}, & a_{31} = b_{12}, & a_{11} = b_{21} \end{cases} \quad (4.16)$$

Örneğin aşağıda $a_{11} = b_{21}$ olduğu gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} a_{11} &= t_{i_1'}^h (\partial_i A_{i_1'}^{i_1}) A_h^{h'} A_{j'}^j \varphi_j^i \\ &= t_{a'}^{h'} A_{i_1'}^{a'} A_i^a (\partial_a A_{i_1'}^{i_1}) A_{j'}^j A_a^i \varphi_j^a \\ &= -t_{a'}^{h'} A_{i_1'}^{i_1} (\partial_a A_{i_1'}^{a'}) A_{j'}^j \varphi_j^a \\ &= -t_{a'}^{h'} A_{i_1'}^{i_1} (\partial_{i_1'} A_a^{a'}) A_{j'}^j \varphi_j^a \\ &= -(\partial_{i_1'} A_a^{a'}) A_{j'}^j \varphi_j^a t_{a'}^{h'} \\ &= b_{21} \end{aligned}$$

Bu sonuçlarda teoremi ispatlamış olur.

4.3.2. Teorem: M_n manifoldu üzerinde cebirsel Π -yapısı verilmiş olsun. $\mu : M_n \rightarrow M_n$ diffeomorfizmi Π -yapısına göre hemen hemen holomorf ise genişlemiş μ^* dönüşümü $T_q^1(M_n)$ manifoldunda ${}^C\Pi$ -yapısına göre hemen hemen holomorf dönüşümdür.

İspat: Cebirsel Π -yapısıyla M_n manifoldu üzerinde $\mu : M_n \rightarrow M_n$ hemen hemen holomorf dönüşümü verilmiş olduğunu kabul edelim. Yani

$$\mu^* \varphi = \varphi \quad (4.17)$$

olsun. 4.3.1. Teorem ve (4.17) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned} (\mu^*)^* {}^C \varphi &= {}^C (\mu^* \varphi) \\ &= {}^C \varphi \end{aligned}$$

yazılır. Diğer taraftan, ${}^C\Pi = \{{}^C\varphi_\alpha\}$ yapısı $T_q^1(M_n)$ tensör demetinde pür alt demet boyunca cebirsel yapı tayin eder (Salimov 1996). Dolayısıyla, $T_q^1(M_n)$ tensör demetinde μ^* genişlemiş dönüşümü ${}^C\Pi$ -yapısına göre $T_q^1(M_n)$ manifoldunda hemen hemen holomorf dönüşüm olur.

4.4. Tensör Demetde Kesit Boyunca Vektör Alanının Tam Liftinin Taşınması

4.4.1. Kesit boyunca tam lift

M_n manifoldu üzerinde $\xi \in T_q^p(M_n)$ tensör alanı verilmiş olsun. $\pi \circ \sigma_\xi = id_{M_n}$ olacak şekilde $\sigma_\xi : M_n \mapsto T_q^p(M_n)$ dönüşümüne ξ ile verilmiş kesit denir. Burada π tabii izdüşümdür.

σ_ξ dönüşümü, $p \in M_n$ noktasına $p \mapsto \xi_p$ tensörünü karşılık getirir. $\sigma_\xi(M_n)$ kesiti, $T_q^p(M_n)$ nin n -boyutlu bir altmanifoldudur. Diğer taraftan ξ tensör alanı $\xi_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p}(x^k)$ lokal birleşenlerine sahipse, $T_q^p(M_n)$ tensör demetin $\sigma_\xi(M_n)$ kesiti $(x^k, x^{\bar{k}})$ koordinatlarına göre lokal olarak

$$\begin{cases} x^k = x^k \\ x^{\bar{k}} = \xi_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p}(x^k) \end{cases} \quad (4.18)$$

biçiminde ifade edilir. (4.18) denkleminin x^j ye göre diferensiyeli, $\sigma_\xi(M_n)$ kesiti B_j ile gösterilir ve n -tanjant vektör alanını verir. B_j vektör alanı, $T_q^p(M_n)$ demetde $\{\partial_k, \partial_{\bar{k}}\}$ tabii çatıya göre

$$(B_j^K) = \left(\frac{\partial x^K}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} \delta_j^k \\ \partial_j \xi_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

bileşenlerine sahiptir.

Diğer taraftan fibre, lokal olarak

$$\begin{cases} x^k = \text{sabit} \\ t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} = t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} \end{cases} \quad (4.20)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p}$ parametreler olarak gözönüne alınmıştır. Böylece (4.20) denkleminin $x^{\bar{j}} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ye göre diferensiyeli, fibrenin $C_{\bar{j}}$ ile gösterilen n^{p+q} -tanjanant vektör alanını verir ve $T_q^p(M_n)$ demetde $\{\partial_k, \partial_{\bar{k}}\}$ tabii çatıya göre bileşenleri

$$(C_{\bar{j}}^K) = \left(\frac{\partial x^K}{\partial x^{\bar{j}}} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{i_1}^{l_1} \dots \delta_{i_p}^{l_p} \delta_{k_1}^{j_1} \dots \delta_{k_q}^{j_q} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

biçiminde olur.

$\pi^{-1}(U) \subset T_q^p(M_n)$ komşuluğunda $\sigma_{\xi}(M_n)$ kesiti boyunca B_j ve $C_{\bar{j}}$, $n + n^{p+q}$ -lokal vektör alanlarını gözönüne alalım. Bu vektör alanları $\sigma_{\xi}(M_n)$ kesiti boyunca $\{B_j, C_{\bar{j}}\}$ ile gösterilen lokal bir çatı ailesi oluşturur. Bu çatıya $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda adapte olmuş (B, C) -çatısı denir.

$V \subset T_q^p(M_n)$ vektör alanının (p, q) tipli tensör demetinin $\sigma_{\xi}(M_n) \subset T_q^p(M_n)$ kesiti boyunca $T_q^p(M_n)$ demetine ${}^C V$ tam liftinin $\{B, C\}$ çatısındaki koordinatlarının

$${}^C V = (V^i, -L_V \xi_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}) \quad (4.22)$$

biçiminde olduğunu gösterelim. Burada L_V , V vektör alanı boyunca Lie diferensiyelleme operatörüdür. $i = 1, \dots, n$, $\bar{i} = n + 1, \dots, n + n^{p+q}$ olmak üzere $\{\partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$ doğal çatısında $V \in T_0^1(M_n)$ vektör alanının $T_q^p(M_n)$ demetine $\sigma_{\xi}(M_n) \subset T_q^p(M_n)$ kesiti boyunca tam lifti

$${}^C V^A = ({}^C V^h, {}^C V^{\bar{h}}) = (V^h, \sum_{\lambda=1}^p \xi_{h_1 \dots h_q}^{l_1 \dots l_p} \partial_m V^{l_\lambda} - \sum_{\mu=1}^q \xi_{h_1 \dots m \dots h_q}^{l_1 \dots l_p} \partial_{h_\mu} V^m) \quad (4.23)$$

biçimindedir (Salimov 1994). (B, C) çatısında ${}^C V$ tam lifti

$${}^C V^A = {}^C \tilde{V}^i B_i^A + {}^C \tilde{V}^{\bar{i}} C_{\bar{i}}^A \quad (4.24)$$

olarak yazılır. (4.24) eşitliğinde $A = h$ alındığında,

$${}^C V^h = {}^C \tilde{V}^i \delta_i^h = {}^C \tilde{V}^h$$

olur. (4.23) eşitliğinden ${}^C \tilde{V}^{\bar{h}} = V^{\bar{h}}$ bulunur. $A = \bar{h}$ alındığında ise

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^p \xi_{h_1 \dots h_q}^{l_1 \dots m \dots l_p} \partial_m V^{l_\lambda} - \sum_{\mu=1}^q \xi_{h_1 \dots m \dots h_q}^{l_1 \dots l_p} \partial_{h_\mu} V^m &= {}^C \tilde{V}^i B_i^{\bar{h}} + {}^C \tilde{V}^{\bar{i}} C_i^{\bar{h}} \\ &= V^i \partial_i \xi_{h_1 \dots h_q}^{l_1 \dots l_p} + {}^C \tilde{V}^{\bar{h}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$${}^C \tilde{V}^{\bar{h}} = -L_V \xi_{h_1 \dots h_q}^{l_1 \dots l_p}$$

bulunur. Böylece ${}^C V$ tam lifti

$${}^C V = V^i B_i + (-L_V \xi_{h_1 \dots h_q}^{l_1 \dots l_p}) C_i^{\bar{h}}$$

biçiminde yazılır.

4.4.2. Killing vektör alanı ve tam liftin taşınması

V_n , n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. V_n üzerindeki $T_q^p(V_n)$ ve $T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ tensör demetlerinin

$$f : T_q^p(V_n) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V_n), (y^I = y^I(x^K); I, K = 1, \dots, n + n^{p+q})$$

diffeomorfizmini

$$\begin{cases} y^i = x^i = \delta_k^i x^k \\ y^{\bar{i}} = t_{ij_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = g_{il_1} t_{j_1 \dots j_q}^{l_1 i_2 \dots i_p} = g_{il_1} t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 l_2 \dots l_p} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_q}^{k_q} \\ \quad = g_{il_1} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_q}^{k_q} x^{\bar{k}} \end{cases} \quad (4.25)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada "." işareti indisin g_{ij} metrik tensörü yardımıyla indirilmesini ve $x^{\bar{k}} = t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p}$ kısa yazılışını ifade eder. $p = 1, q = 0$ ve $p = 0, q = 1$ özel hallerinde (4.25) ile verilen diffeomorfizmi tanjant ve kotanjant demetlerin diffeomorfizmi olur.

(4.25) eşitliğinden,

$$\frac{\partial y^{\bar{i}}}{\partial x^{\bar{k}}} = g_{il_1} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_q}^{k_q},$$

$$0 = \frac{\partial y^{\bar{i}}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{il_1} t_{j_1 \dots j_q}^{l_1 i_2 \dots i_p}) = \partial_k g_{il_1} t_{j_1 \dots j_q}^{l_1 i_2 \dots i_p}$$

olduğundan dolayı (4.25) dönüşümünün Jakoniye matrisi

$$\begin{aligned} A = \left(\frac{\partial y^I}{\partial x^K} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} & \frac{\partial y^{\bar{i}}}{\partial x^k} \\ \frac{\partial y^{\bar{i}}}{\partial x^k} & \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta_k^i & 0 \\ 0 & g_{il_1} \delta_{l_2}^{i_2} \dots \delta_{l_p}^{i_p} \delta_{j_1}^{k_1} \dots \delta_{j_q}^{k_q} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak yazılır.

4.4.1. Teorem: V_n Riemann manifoldu olmak üzere $f : T_q^p(V_n) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ diffeomorfizmi verilmiş olsun. $V \in T_0^1(V_n)$ vektör alanının f diffeomorfizmine karşılık gelen $T_q^p(V_n)$ 'de kesit boyunca tam liftleri ${}^C V_1$ ve $T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ 'de ki kesit boyunca tam lifti ${}^C V_2$ olsun. ${}^C V_2 = f_* {}^C V_1$ (yani ${}^C V_2$, ${}^C V_1$ liftinin f yardımıyla taşınması) olması için gerek ve yeter şart V vektör alanının Killing vektör alanı olmasıdır.

İspat: $V = (V^i) \in T_0^1(V_n)$ vektör alanı

$$L_V g_{ij} = V^a \partial_a g_{ij} + g_{aj} \partial_i V^a + g_{ia} \partial_j V^a = 0$$

veya

$$V^a \nabla_a g_{ij} + g_{aj} \nabla_i V^a + g_{ia} \nabla_j V^a = \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa Killing vektör alanı adını alır (Yano 1965). Burada ∇_k , Riemann konneksiyonda kovaryant türevidir.

$$\xi_{ij_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = g_{ii_1} \xi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

(f diffeomorfizminde $T_q^p(V_n)$ demetinin $\xi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ kesitine karşılık gelen $T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ demetinin $\xi_{ij_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p}$ kesiti) için (4.22) formülü kullanılarak,

$${}^C V_2 = (V^i, -L_V \xi_{ij_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p}) \quad (4.26)$$

yazılır. Lie türevinin özelliklerine göre,

$$L_V \xi_{ij_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = g_{im} L_V \xi_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p} + (L_V g_{im}) \xi_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p}$$

olur. Bu değeri (4.26) formülünde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}^C V_2 &= (V^i, -g_{im} L_V \xi_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p} - (L_V g_{im}) \xi_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p}) \\ &= (V^i, -g_{im} L_V \xi_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p}) + (0, - (L_V g_{im}) \xi_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p}) \\ &= f_* {}^C V_1 + (0, - (L_V g_{im}) \xi_{j_1 \dots j_q}^{m i_2 \dots i_p}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

bulunur. Lokal koordinatlarda f_* diferensiyeli $(\frac{\partial y^I}{\partial x^K})$ Jakobiyeen matrisi ile verilir. V vektör alanı Killing vektörü ise, yani $L_V g_{ij} = 0$ ise (4.27) eşitliğinden

$${}^C V_2 = f_* {}^C V_1$$

olarak yazılır. Tersine ${}^C V_2 = f_* {}^C V_1$ ise (4.27) eşitliğinden Killing vektör alanı olduğu görülür.

Ayrıca, (4.22) ve

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

formülü (Kobayashi 1963) kullanılarak,

$${}^C [X, Y] = [{}^C X, {}^C Y], \quad \forall X, Y \in T_0^1(V_n) \quad (4.28)$$

eşitliği yazılır. $\iota(V_n)$, V_n üzerindeki Killing vektör alanlarının Lie cebiri (Kobayashi 1963) olmak üzere $V, W \in \iota(V_n)$ elamanları verilmiş olsun. 4.4.1. Teorem'e göre

$$\begin{aligned} {}^C V_2 &= f_* {}^C V_1 \\ {}^C W_2 &= f_* {}^C W_1 \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$[{}^C V_2, {}^C W_2] = f_* [{}^C V_1, {}^C W_1]$$

olacağı aşıkardır (Kobayashi 1963). (4.26) eşitliği gözönüne alınarak

$$[{}^C V_1, {}^C W_1] = {}^C [V, W]_1$$

ve

$$[{}^C V_2, {}^C W_2] = {}^C [V, W]_2$$

yazılır. Buradan $\forall V, W \in \iota(V_n)$ için

$${}^C [V, W]_2 = f_* {}^C [V, W]_1 \quad (4.29)$$

formülü elde edilir.

4.5. Tensör Demette Türevlerin Liftleri

4.5.1. Tensör alanların vertikal lifti ve γ -operatörü

4.5.1. Yardımcı Teorem: $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_q^p(M_n)$ olsun. Her $\alpha \in \mathfrak{T}_p^q(M_n)$ olmak üzere $\tilde{X}(\iota\alpha) = \tilde{Y}(\iota\alpha)$ ise $\tilde{X} = \tilde{Y}$ olur.

İspat: Eğer $\tilde{Z}(\iota\alpha) = (\tilde{X} - \tilde{Y})(\iota\alpha) = 0$ olarak yazılırsa $\tilde{Z} = 0$ olduğunu göstermek yeterli olur. $\tilde{Z}$ nın $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\tilde{Z}^j$ bileşenleri

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(\iota\alpha) &= \tilde{Z}^j \partial_j (\alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) + \tilde{Z}^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}} (\alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) \\ &= \tilde{Z}^j t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_j \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \tilde{Z}^{\bar{j}} \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = 0\end{aligned}\quad (4.29)$$

olarak elde edilir. $\alpha \in \mathfrak{T}_p^q(M_n)$ keyfi olarak alındığından dolayı (4.29) (homojen lineer denklem sistemi) eşitliğinden

$$\tilde{Z}^j t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0, \quad \tilde{Z}^{\bar{j}} = 0 \quad (4.30)$$

yazılır. (4.30) nin ilk denkleminde eğer $T_q^p(M_n)$ demetinin tüm noktalarında $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ nin tüm bileşenleri sıfır olmayacağından ve $\tilde{Z}$ bileşenleri sürekli olmasından dolayı M_n baz manifoldu üzerinde $\tilde{Z}^j = 0$ olur. Böylece $\pi^{-1}(U)$ nun tüm noktalarında $\tilde{Z}^j = 0$ yazılır. (4.30) denkleminin ikincisi de dikkate alındığında $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $\tilde{Z} = 0$ olduğu bulunur. Böylece $T_q^p(M_n)$ demetinde $\tilde{Z} = 0$ yazılır.

$A \in \mathfrak{T}_q^p(M_n)$ olsun. $\alpha \in \mathfrak{T}_p^q(M_n)$ olmak üzere

$${}^V A(\iota\alpha) = \alpha(A) \circ \pi = {}^V(\alpha(A)) \quad (4.31)$$

eşitliğini sağlayan ${}^V A \in \mathfrak{T}_0^1(T_q^p(M_n))$ vektör alanına A vektör alanının $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey lifti denir (Ledger ve Yano 1967). Burada ${}^V(\alpha(A))$ ifadesi $\alpha(A) \in F(M_n)$ fonksiyonunun dikey liftidir. Diğer taraftan $f \in F(M_n)$ keyfi fonksiyonunun ${}^V f = f \circ \pi$ dikey lifti $\pi^{-1}(p) = T_q^p(p)$ fibresi boyunca sabittir.

${}^V A = {}^V A^k \partial_k + {}^V A^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}}$ olarak yazılırsa, $x^{\bar{k}} = t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p}$ olmak üzere (4.31) eşitliğinden

$${}^V A^k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_k \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + {}^V A^{\bar{k}} \alpha_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} = \alpha_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} A_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p}$$

sonucu elde edilir. 4.5.1.Yardımcı Teorem'in ispatında kullanılan benzer yöntemle $T_q^p(M_n)$ nin $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre ${}^V A$ vertikal liftinin bileşenleri

$${}^V A = \begin{pmatrix} {}^V A^j \\ {}^V A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

olarak elde edilir.

$\varphi \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ ve $\xi \in \mathfrak{T}_q^p(M_n)$ tensör alanlarının lokal koordinatlarla ifadesi

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j, \\ \xi &= \xi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \end{aligned}$$

olarak verilmiş olsun. $T_q^p(M_n)$ tensör demetde $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\gamma_\xi \varphi$ ve $\gamma \varphi$ vektör alanlarını sırasıyla

$$\begin{cases} \gamma_\xi \varphi = \left(\sum_{\lambda=1}^p \xi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, & (p \geq 1, q \geq 0), \\ \tilde{\gamma}_\xi \varphi = \left(\sum_{\mu=1}^q \xi_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_\mu}^m \right) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}, & (p \geq 0, q \geq 1) \end{cases} \quad (4.33)$$

ve

$$\begin{cases} \gamma \varphi = \left(\sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}, & (p \geq 1, q \geq 0), \\ \tilde{\gamma} \varphi = \left(\sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_\mu}^m \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, & (p \geq 0, q \geq 1) \end{cases} \quad (4.34)$$

olarak tanımlayalım.

(4.32) ve (4.33) denklemlerinden

$$\gamma_\xi \varphi = {}^V(\varphi_\xi) \quad (\tilde{\gamma}_\xi \varphi = {}^V(\tilde{\varphi}_\xi)), \quad (4.35)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\varphi_\xi \in \mathfrak{T}_q^p(M_n)$ ve $\tilde{\varphi}_\xi \in \mathfrak{T}_q^p(M_n)$ tensör alanlarının $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunda x^j koordinatlarına göre lokal ifadesi sırasıyla,

$$\begin{aligned}\varphi_\xi &= \left(\sum_{\lambda=1}^p \xi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}, \\ \tilde{\varphi}_\xi &= \left(\sum_{\mu=1}^q \xi_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_\mu}^m \right) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}\end{aligned}$$

biçimindedir.

(4.33) ve (4.34) denklemlerinden, $\pi^{-1}(U) \in T_q^p(M_n)$ koordinat komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\gamma_\xi \varphi$, $\tilde{\gamma}_\xi \varphi$ ve $\gamma \varphi$, $\tilde{\gamma} \varphi$ ifadelerinin bileşenlerini sırasıyla

$$\gamma_\xi \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^p \xi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\tilde{\gamma}_\xi \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu=1}^q \xi_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_\mu}^m \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\gamma \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

$$\tilde{\gamma} \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_\mu}^m \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

olarak bulunur.

4.5.2. Türevlerin tam liftleri

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm tensör modüllerinin direkt toplamını $\mathfrak{T}(M_n) = \sum_{p,q=1}^{\infty} \mathfrak{T}_q^p(M_n)$ ile gösterelim. Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\mathcal{D} : \mathfrak{T}(M_n) \rightarrow \mathfrak{T}(M_n)$$

dönüşümüne M_n manifoldu üzerinde türev operatörü denir:

- a) $\mathcal{D}(aS + bT) = a\mathcal{D}S + b\mathcal{D}T$, $\forall S, T \in T_q^p(M_n)$, $a, b \in R$,
- b) $\mathcal{D}$ tensör alanının tipini korur,
- c) $\mathcal{D}(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{D}T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{D}T_2)$, $\forall T_1, T_2 \in \mathfrak{T}(M_n)$,
- d) $\mathcal{D}(cT) = c\mathcal{D}T$, c -kontraksiyon.

Tensör türevinin tanımından, M_n üzerindeki (1,1) tipli $I = (\delta_j^i)$ birim tensör alanı için

$$\mathcal{D}I = 0 \quad (4.40)$$

bulunur.

M_n manifoldunda $\mathcal{D}$ operatörü için,

$$pf = \mathcal{D}f, \quad f \in F(M_n) \quad (4.41)$$

olacak şekilde bir p vektör alanı mevcuttur.

Eğer M_n nin herhangi bir U koordinat komşuluğunda

$$\mathcal{D}(\partial_i) = \mathcal{Q}_i^h \partial_h \quad (4.42)$$

olarak alınırsa (4.40) eşitliğinden ve $(dx^i)(\partial_j) = \delta_j^i$ olmasından dolayı

$$\mathcal{D}(dx^h) = -\mathcal{Q}_i^h dx^i \quad (4.43)$$

yazılır.

$\mathfrak{T}_p^q(M_n)$ modülünün α elamanı $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_q} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$ biçiminde ifade edilmiş olsun (4.42) ve (4.43) denklemlerinden $\mathcal{D}\alpha$ nın bileşenleri

$$\mathcal{D}\alpha : (p^m \partial_m \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \sum_{\mu=1}^q \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots m \dots j_q} \mathcal{Q}_m^{j_\mu} - \sum_{\lambda=1}^p \alpha_{i_1 \dots m \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \mathcal{Q}_{i_\lambda}^m) \quad (4.44)$$

olarak elde edilir. Burada p^h , (4.41) ile verilen $p \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ 'nin bileşenleri olur. $(p^h, \mathcal{Q}_i^h)$ çiftine ise U koordinat komşuluğunda $\mathcal{D}$ türevinin birleşenleri denir (Yano ve Ishihara 1973).

$\mathcal{D}$, M_n manifoldunda türev operatörü olmak üzere $\alpha \in \mathfrak{T}_p^q(M_n)$ için 4.5.1 Yardımcı Teoreme göre

$${}^C\mathcal{D}(\iota\alpha) = \iota(\mathcal{D}\alpha) \quad (4.45)$$

olacak şekilde bir tek ${}^C\mathcal{D} \in \mathfrak{T}_0^1(T_q^p(M_n))$ vektör alanı vardır. ${}^C\mathcal{D}$ vektör alanına $T_q^p(M_n)$ tensör demetinde $\mathcal{D}$ nin tam lifti denir (Ledger ve Yano 1967).

Şimdi ${}^C\mathcal{D}$ vektör alanının bileşenlerini bulalım:

(4.44) ve (4.45) eşliklerinden

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}^j \partial_j (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) + {}^C\mathcal{D}^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}} (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) &= t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (p^m \partial_m \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \\ &+ \sum_{\mu=1}^q \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots m \dots j_q} \mathcal{Q}_{j_\mu}^m - \sum_{\lambda=1}^p \alpha_{i_1 \dots m \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \mathcal{Q}_{i_\lambda}^m) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}^j (\partial_j \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + {}^C\mathcal{D}^{\bar{j}} \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} &= t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} p^m \partial_m \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \\ &+ \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \left(\sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mathcal{Q}_{j_\mu}^m - \sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \mathcal{Q}_{i_\lambda}^m \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir. 4.5.1. Yardımcı Teorem'in ispatındakine benzer yolla ve (4.46) denkleminin yardımıyla ${}^C\mathcal{D}$ nin birleşenlerini $T_q^p(M_n)$ 'de $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre

$${}^C\mathcal{D} = \left(\begin{array}{c} p^j \\ \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mathcal{Q}_{j_\mu}^m - \sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \mathcal{Q}_{i_\lambda}^m \end{array} \right) \quad (4.47)$$

olarak bulunur.

M_n manifoldu üzerinde $\mathcal{D}$ türev operatörü her $f \in F(M_n)$ için $\mathcal{D}f = 0$ şartını sağlamış olsun. $\mathcal{D}$ türevini $\forall X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $\varphi \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ için $\mathcal{D}X = \varphi X$ ile tanımlanan türeve φ ile tayin edilmiş türev denir ve $\mathcal{D}_\varphi$ ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973). $\mathcal{D}_\varphi f = 0$ ve $\mathcal{D}_\varphi X = \varphi X$ eşitliklerinden $\mathcal{D}_\varphi$ türevinin bileşenleri

$$\mathcal{D}_\varphi : (0, \varphi_i^h), p^h = 0, \mathcal{Q}_i^h = \varphi_i^h \quad (4.48)$$

ile verilir. Burada φ_i^h , M_n manifoldunda φ nin lokal birleşenleridir.

${}^C\mathcal{D}_\varphi$ 'nin tam lifti, (4.38), (4.39), (4.47) ve (4.48) denklemlerinden

$${}^C(\mathcal{D}_\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_\mu}^m - \sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \end{pmatrix} = \tilde{\gamma}\varphi - \gamma\varphi$$

veya

$${}^C(\mathcal{D}_\varphi) = \tilde{\gamma}\varphi - \gamma\varphi \quad (4.49)$$

biçiminde elde edilir.

$t_q^p(M_n)$, $\varphi \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ tensörüne göre

$$\varphi_{j_1}^r t_{r j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \dots = \varphi_{j_q}^r t_{j_1 \dots r}^{i_1 \dots i_p} = \varphi_r^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{r i_2 \dots i_p} = \dots \varphi_r^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots r} = (t(\varphi))_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

pür tensör altdemeti olsun (Salimov 1992, 1994). (4.49) eşitliğinden ${}^C(\mathcal{D}_\varphi)$ pür tensör altdemeti boyunca

$${}^C(\mathcal{D}_\varphi) = (q - p)^V(t(\varphi)) \quad (4.50)$$

biçiminde yazılır.

Sonuç: $p \neq q$ olmak üzere ${}^C(\mathcal{D}_\varphi)$ pür tensör altdemeti boyunca ${}^C(\mathcal{D}_\varphi) = 0$ olması için gerek ve yeter şart M_n manifoldunda $\varphi = 0$ olmasıdır.

4.5.3. Lie türevinin tam lifti

$V \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ olsun. $T_q^p(M_n)$ tensör demetde V vektör alanının ${}^C V$ tam liftinin bileşenleri

$${}^C V = \begin{pmatrix} V^j \\ \sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_m V^{i_\lambda} - \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{j_\mu} V^m \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

biçiminde verilmiştir (Salimov 1994).

L_V , V vektör alanına göre Lie türevi olsun. L_V ,

$$\begin{aligned} L_V f &= Vf, \quad \forall f \in F(M_n) \\ L_V W &= [V, W], \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}_0^1(M_n) \end{aligned}$$

özelliklerini sağlar. Burada $[V, W]$, V ve W vektör alanlarının Lie parantezidir. $[V, W]^h = V^i \partial_i W^h - W^i \partial_i V^h$ olduğu gözönüne alınarak Lie türevi koordinatlarla

$$L_V = (V^h, -\partial_i V^h) \quad (4.52)$$

biçiminde yazılır.

L_V 'nin tam lifti ise (4.47), (4.51) ve (4.52) eşitliklerinden

$${}^C(L_V) = {}^C V$$

biçiminde elde edilir.

4.5.4. Kovaryant türevin tam lifti

M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu ve V vektör alanına göre ∇_V kovaryant türevi tanımlanmış olsun. ∇_V

$$\begin{aligned} \nabla_V f &= Vf \\ \nabla_{fV+gW} X &= f \nabla_V X + g \nabla_W X, \quad \forall f, g \in F(M_n), \forall V, W, X \in \mathfrak{X}_0^1(M_n) \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan bir tensör türevdir. ∇_V kovaryant türevi M_n manifoldu üzerinde

$$\nabla_V = (V^h, V^j \Gamma_{ji}^h) \quad (4.53)$$

birleşenlerine sahiptir. (4.47) ve (4.53) kullanılarak ${}^C(\nabla_V)$ tam liftinin birleşenleri

$${}^C(\nabla_V) = \begin{pmatrix} V^j \\ -\sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} V^j \Gamma_{jm}^{i_\lambda} + \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} V^j \Gamma_{jj_\mu}^m \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi M_n manifoldu üzerinde yeni bir $\overset{\vee}{\nabla}$ afin koneksiyonunun

$$\begin{aligned}\overset{\vee}{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - S(X, Y) = \nabla_X Y - (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\ &= \nabla_Y X + [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)\end{aligned}\quad (4.55)$$

denklemleriyle verildiğini farzedelim. Burada $S(X, Y)$, ∇ afin koneksiyonun verilmiş burulma tensörüdür. (4.55) eşitliğinden

$$\overset{\vee}{\Gamma}_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h \quad (4.56)$$

elde edilir. Burada $\overset{\vee}{\Gamma}_{ji}^h$, $\overset{\vee}{\nabla}$ yeni afi koneksiyonunun bileşenleridir.

(4.47), (4.52), (4.54) ve (4.56) formüllerinden

$$\begin{aligned}C_V - C(\nabla_V) &= \left(\begin{array}{c} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} (\partial_m V^{i_\lambda} + \Gamma_{jm}^{i_\lambda} V^j) - \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\partial_{j_\mu} V^m + \Gamma_{j\mu}^m V^j) \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} (\partial_m V^{i_\lambda} + \overset{\vee}{\Gamma}_{mj}^{i_\lambda} V^j) - \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\partial_{j_\mu} V^m + \overset{\vee}{\Gamma}_{j\mu}^m V^j) \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^p t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \overset{\vee}{\nabla}_m V^{i_\lambda} - \sum_{\mu=1}^q t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \overset{\vee}{\nabla}_{j_\mu} V^m \end{array} \right) \\ &= \gamma(\overset{\vee}{\nabla} V) - \tilde{\gamma}(\overset{\vee}{\nabla} V)\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Böylece

$$C(\nabla_V) = C_V - \gamma(\overset{\vee}{\nabla} V) + \tilde{\gamma}(\overset{\vee}{\nabla} V) \quad (4.57)$$

elde edilir. (4.57) denkleminde eğer $\overset{\vee}{\nabla} V = 0$ ise

$$C(\nabla_V) = C_V = C(L_V)$$

bulunur.

4.4.5. Eğrilik operatörü ile belirlenmiş türevin tam lifti

∇ simetrik afin koneksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde $\overset{\vee}{\nabla} V = \nabla V$ olur. (4.57) denkleminde

$$\begin{aligned}
{}^C(\nabla_V) &= {}^C V - \gamma(\nabla V) + \tilde{\gamma}(\nabla V) \\
&= \left(V^s \left(\sum_{\mu=1}^q \Gamma_{sj_\mu}^m t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{sm}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} \right) \right) \\
&= {}^H V
\end{aligned} \tag{4.58}$$

eşitliği elde edilir. Burada ${}^H V$, $T_q^p(M_n)$ tensör demetde V vektör alanının yatay liftidir (Salimov 1994).

M_n manifoldu üzerinde $\mathcal{D}_1$ ve $\mathcal{D}_2$ türevleri verilmiş olsun. (4.45) kullanılarak

$$\begin{aligned}
[{}^C \mathcal{D}_1, {}^C \mathcal{D}_2](\iota \alpha) &= {}^C \mathcal{D}_1 {}^C \mathcal{D}_2(\iota \alpha) - {}^C \mathcal{D}_2 {}^C \mathcal{D}_1(\iota \alpha) \\
&= {}^C \mathcal{D}_1 \iota(\mathcal{D}_2 \alpha) - {}^C \mathcal{D}_2 \iota(\mathcal{D}_1 \alpha) \\
&= \iota(\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \alpha - \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \alpha) \\
&= \iota([\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \alpha) \\
&= {}^C[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](\iota \alpha)
\end{aligned}$$

bulunur. 4.4.1. Yardımcı Teorem'den dolayı

$$[{}^C \mathcal{D}_1, {}^C \mathcal{D}_2] = {}^C[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \tag{4.59}$$

elde edilir.

$R \in \mathfrak{T}_3^1(M_n)$ ile ∇ eğrilik tensörünü verilsin. $R(X, Y)$ tensörü

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$$

olacak şekilde $\mathfrak{T}_1^1(M_n)$ 'nin bir elemanıdır. Şimdi $\varphi = R(X, Y)$ olmak üzere

$$\mathcal{D}_{R(X, Y)} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \tag{4.60}$$

$\mathcal{D}_\varphi$ türevi verilmiş olsun. Eğer (4.60) eşitliğinin heriki tarafının tam lifti alınırsa (4.49) denkleminde

$$\tilde{\gamma}R(X, Y) - \gamma R(X, Y) = {}^C(\mathcal{D}_{R(X, Y)}) = {}^C[\nabla_X, \nabla_Y] - {}^C(\nabla_{[X, Y]}) \tag{4.61}$$

eşitliği elde edilir. (4.59) eşitliğinden dolayı (4.61) denklemi düzenlenirse

$$\tilde{\gamma}R(X, Y) - \gamma R(X, Y) = [{}^C(\nabla_X), {}^C(\nabla_Y)] - {}^C(\nabla_{[X, Y]}) \tag{4.62}$$

olur. (4.58) ve (4.62) kullanılarak

$$[{}^H X, {}^H Y] = {}^H[X, Y] + \tilde{\gamma}R(X, Y) - \gamma R(X, Y) \quad (4.63)$$

sonucu elde edilir.

$p = q$ ve $R(X, Y)$ tensörüne göre $t_p^p(M_n)$ pür tensör altdemeti olsun. (4.50) ve (4.63) eşitliklerinden dolayı

$$[{}^H X, {}^H Y] = {}^H[X, Y] \quad (4.64)$$

elde edilir.



5. SONUÇLAR

Sunulan bu tezde baz manifold ve baz manifoldun tensör demetlerinde cebirsel yapılar, liftler ve bunlar arasındaki bağlantılar verilmiştir.

Bu çalışmada ilk olarak Φ -Tachibana operatörü C^∞ sınıfından olan M_n manifoldunun invariant alt manifoldu üzerindeki pür karışık tensörlere uygulandı. Ayrıca, g_{ij} Riemann metrik tensörünün Φ -tensörü olması halinde indirgenmiş g_{AB} Riemann metrik tensörünün de Φ -tensör olduğu gösterilmiştir.

İkinci olarak M_n diferensiyellenebilir manifold üzerinde $\mu : M_n \rightarrow M_n$ diffeomorfizm olmak üzere $\varphi \in T_1^1(M_n)$ afinoru için

$$(\mu^*)^* {}^C\varphi = {}^C(\mu^*\varphi)$$

olduğu ve ayrıca M_n manifoldu üzerinde $\mu : M_n \rightarrow M_n$ diffeomorfizmi Π -yapısına göre almost holomorf ise genişlemiş μ^* dönüşümü $T_q^1(M_n)$ manifoldunda ${}^C\Pi$ -yapısına göre almost holomorf dönüşüm olduğu ispatlanmıştır.

Üçüncü olarak ise V_n Rieman manifoldu üzerinde sırasıyla $T_q^p(V_n)$ ve $T_{q+1}^{p-1}(V_n)$ tensör demetleri, ${}^C V_1$ ve ${}^C V_2$ ise bu tensör demetlerin kesiti boyunca (B, C) çatısında $V \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ vektör alanının

$${}^C V_1 = (V^i, L_V \xi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}),$$

$${}^C V_2 = (V^i, L_V \xi_{j_1 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_{p-1}})$$

tam liftleri olsun.

$$f : T_q^p(V_n) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V_n)$$

diffeomorfizm olmak üzere, ${}^C V_2 = f_* {}^C V_1$ olması için gerek ve yeter şartın V vektör alanının Kiling vektör alanı olması gerektiği bulunmuştur.

Son olarak M_n manifoldu üzerinde Lie, kovaryant ve (1,1) tipli tensör alanıyla tayin edilmiş olan türevlerin $T_q^p(M_n)$ tensör demete tam lift formülleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Bishop, R.L., Goldberg, S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, New York.
- Kobayashi, S., Nomizu, K., 1963. Foundations of Differential Geometry I. Willy (Interscience), New York-London.
- Koto, S., 1960. Curvatures in Hermitian spaces. Mem. of the Fac. Ed. Niigata Univ., 2, 15-25.
- Koto, S., 1960. Some theorems on almost Kahlerian space. J. Math. Soc. Japan, 12, 422-433.
- Kruchkovich G. I., 1972. Hypercomplex structures on manifolds. I. Trudy Sem. Vektor, Tensor annal, Russian, 16, 174-201.
- Kruchkovich, G.I., 1972. Trudy. Sem. Vektor. Tenzor. Anal. Vyp. 16, 174-201 (Russian)
- Ledger A., Yano K., 1967. Almost complex structures on tensor bundles. J. Dif. Geom., 1, 355-368.
- Mağden, A., Salimov, A.A., 1997. Afinorun tensör demete kesit boyunca yatay lifti. Sakarya Matematik Sempozyumu.
- Salimov, A.A., 1990. Hybrid tensors on invariant submanifolds. IZV. AN Azerb. Semphys. Tech. Math. Science, 4-5 .
- Salimov, A.A., 1992. Almost ψ -holomorphic tensors and their properties. Russian Acad. Sci. Dokl. Math., Trans. Amer. Math Soc. 45(3), 602-605.
- Salimov A.A., 1994. A new method in theory of lifts of tensor fields to a tensor bundle. Izv. Vuz. Mathematica, 38(3), 69-75.
- Salimov, A.A., 1994. The Generalized Yano-Ako operator and the complete lift of tensor fields. Tensor N.S. Japan, 55(2), 142-146.
- Salimov A.A., 1996. The lifts of Polyaffinor structures on the pure sections of a Tensor Bundle. Russian math. (JZV. Vuz), 40(10), 55-62, (Trans. Amer. Soc.).
- Salimov, A.A., Mağden, A., 1999. Diferensiyel Geometriye Giriş, Erzurum.
- Sasaki S., 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. Jour., 10, 238-354.
- Sato I., 1966. Almost analytic tensor field in complex manifolds. Tensor, 17, 105-119.
- Sekizawa M., 1969. A note on the complete lift of Φ -tensors to tangent bundle, TRU Math., 5, 43-45.

- Slebodzinski W., 1964. Contribution a la geometrie differentielle d'un tenseur mixte de valence deux. Collog. Math., 13, 49-54.
- Tachibana, S., 1960. Analytic tensor and its generalization. Tohoku Math. J., 13, 208-221.
- Tachibana, S., Koto, S., 1962. On almost-analytic functions, tensors and invariant subspaces, Tohoku Math. Jour., 15 (2), 176-186.
- Vishnevskii V.V., Shirokov A.P., Shurygin V.V., 1985, Spaces over algebras, Kazan Univ. Press.
- Willmore T.J., 1968. Note on slebodzinski tensor of an almost complex structure. J. London Math. Soc., 43, 321-322.
- Yano, K., Bochner, S., 1953. Curvature and Betti numbers. Annals Math. Studies, 32.
- Yano K., Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Dekker Inc., New York.
- Yano K., Kobayashi S., 1966. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles, I. General Theory, Jour. Math. Soc. Japan, 18, 194-210
- Yano K., Patterson E.M., 1967. Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundle, Jour. Math. Soc. Japan, 19, 91-113
- Yano, K., 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces. The Macmillan Company, New York.
- Yano, K., 1968, On Walker differentiation in almost product or almost complex spaces, Indag. Math., 20, 573-580.

ÖZGEÇMİŞ

Erzurum'un Ilıca ilçesine bağlı Ömertepe köyünde 1968 yılında doğdu. İlkokulu Ömertepe köyünde, orta ve lise öğrenimini Ilıca Lisesin'de tamamladı. 1985 yılında Atatürk Üniversitesi Meslek Yüksek Okulunu kazandı ve 1987 yılında mezun oldu. 1989 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 1993 yılında mezun oldu. 1995-1998 yılları arasında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

1994 yılından beri Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.

