

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇEKİRDEĞİ GÖZENEKLİ KİRİŞ YAPILARININ DİFERANSİYEL
DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet Gökay ÖZTÜRK

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

ARALIK 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇEKİRDEĞİ GÖZENEKLİ KİRİŞ YAPILARININ DİFERANSİYEL
DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ahmet Gökay ÖZTÜRK
(511111154)**

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL

ARALIK 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 511111154 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Ahmet Gökay ÖZTÜRK, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**ÇEKİRDEĞİ GÖZENEKLİ KİRİŞ YAPILARININ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Erol UZAL**
İstanbul Üniversitesi

Doç. Dr. Aytaç ARIKOĞLU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **17 Aralık 2015**
Savunma Tarihi : **25 Aralık 2015**

Aileme,

ÖNSÖZ

Tez danışmanlığımı kabul eden, tez konumun seçiminde bana yol gösteren ve tez aşamasında desteğini hiç eksik etmeyen Sn. Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL hocama tüm samimiyetimle teşekkür ederim. Tez çalışmam sırasında bana öneriler sunan hocalarım Sn. Doç. Dr. Aytaç ARIKOĞLU ve Sn. Doç. Dr. Güven KÖMÜRGÖZ KIRIŞ’a bilimsel ve manevi destekleri için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Aralık 2015

Ahmet Gökay Öztürk
(Makina Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET.....	xix
SUMMARY.....	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1 Sandviç Yapıların Tarihçesi ve Kullanım Alanları	1
1.2 Literatür Araştırması	8
2. KİRİŞ TEORİLERİ.....	13
2.1 Timoshenko Kiriş Teorisi.....	13
2.2 Sınır Şartları	19
2.2.1 İki ucu ankastre mesnetli durum	19
2.2.2 İki ucu basit mesnetli durum	19
2.2.3 Bir ucu serbest diğer ucu ankastre mesnetli durum	20
2.3 Kayma Kiriş Teorisi	21
3. SANDVIÇ YAPILARDA TEMEL KAVRAMLAR	27
3.1 Eğilme Rijitliği	27
3.2 Normal ve Kayma Gerilmesi.....	31
3.3 Atalet Kuvvetleri	34
3.3.1 Düşey hareketin ataleti.....	34
3.3.2 Dönel atalet	34
3.4 Çekirdeği Gözenekli Malzemeler.....	35
4. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU	39
4.1 Timoshenko Kiriş Teorisi İçin Diferansiyel Dönüşüm Metodu.....	40
4.2 Timoshenko Kiriş Teorisi İçin Sınır Şartları	41
4.2.1 Basit mesnet için diferansiyel dönüşüm metodu.....	41
4.2.2 Ankastre mesnet için diferansiyel dönüşüm metodu	41
4.2.3 Serbest durum için diferansiyel dönüşüm metodu	42
4.3 Kayma Kiriş Teorisi İçin Diferansiyel Dönüşüm Metodu	43
5. SAYISAL UYGULAMALAR.....	45
5.1 Timoshenko ve Kayma Kiriş Teorilerinin Analitik Çözümlerinin Karşılaştırılması	45
5.2 Malzeme ve Geometrik Özelliklerin Doğal Frekansa Etkisi.....	47
5.3 Gözenekli Çekirdeğe Sahip Sandviç Kirişinin İncelemesi	53
5.4 Diferansiyel Dönüşüm Metodu Kullanılarak Doğal Frekansın Elde Edilmesi	57

6. SONUÇLAR ve YORUMLAR.....	61
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ.....	69

KISALTMALAR

DDM	: Diferansiyel Dönüşüm Metodu
FEM	: Sonlu Elemanlar Yöntemi
SHM	: Structural Health Monitor
TKT	: Timoshenko Kiriş Teorisi
KKT	: Kayma Kiriş Teorisi

SEMBOLLER

A	: Kesit Alanı (m^2)
b	: Kirişin Genişliği (m)
D	: Eğilme Rijitliği (Nm^2)
D₀	: Yüzeylerin Kirişin Doğal Eksenine Göre Eğilme Rijitliği (Nm^2)
d	: Yüzey ile Çekirdeğin Merkezleri Arasındaki Uzaklık (m)
E	: Elastisite Modülü (N/m^2)
E_f	: Yüzeyin Elastisite Modülü (N/m^2)
E_c	: Çekirdeğin Elastisite Modülü (N/m^2)
ε	: Gerinim
f	: Dikey Atalet
G_c	: Çekirdeğin Kayma Modülü (N/m^2)
I	: Atalet Momenti (m^4)
M_R	: Dönme Momenti (Nm)
N_x	: Normal Kuvvet (N)
R	: Dönme Ataleti
S	: Kayma Rijitliği (N/m)
t	: Zaman (s)
T_x	: Kesme Kuvveti (N)
v	: Poisson Oranı
ρ*	: Birim Uzunluk Başına Düşen Kütle Yoğunluğu (kg/m^2)
ρ_f	: Yüzey yoğunluğu (kg/m^3)
ρ_c	: Çekirdek Yoğunluğu (kg/m^3)
w	: Toplam deformasyon
w_b	: Eğilme Deformasyonu
w_s	: Kayma deformasyonu
ω	: Doğal Frekans (rad/s)

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : Bazı fonksiyonların diferensiyel dönüşüm metodu uygulanmış karşılıkları.....	39
Çizelge 4.2 : Sınır şartlarının diferensiyel dönüşümü.....	40
Çizelge 4.3 : Basit mesnet için sınır şartları.....	41
Çizelge 4.4 : Ankastre mesnet için sınır şartları.....	42
Çizelge 4.5 : Serbest durum için sınır şartları.....	42
Çizelge 4.6 : Kayma kirişi için sınır şartlarının diferansiyel dönüşümü.....	43
Çizelge 5.1 : Sandviç kirişin özellikleri.....	45
Çizelge 5.2 : Bir ucu serbest diğer ucu ankastre mesnetli durum	46
Çizelge 5.3 : İki ucu ankastre mesnetli durum	46
Çizelge 5.4 : Sandviç kirişin özellikleri	47
Çizelge 5.5 : DDM ile bulunan doğal frekans sonuçları.....	58
Çizelge 5.6 : DDM ile bulunan doğal frekans sonuçları.....	58
Çizelge 5.7 : DDM’da kullanılan terim sayısı.....	59

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Sandviç yapıyı oluşturan katmanlar.....	2
Şekil 1.2 : Mosquito uçağındaki uçak yapıları.....	3
Şekil 1.3 : Airbus A380 modelindeki kompozit yapılar.....	6
Şekil 1.4 : A1 jet ykıtının yıllara göre fiyat grafiğı.....	8
Şekil 2.1 : Timoshenko kirişinde kayma ve eğilme deformasyonu.....	13
Şekil 2.2 : Kayma deformasyon kabulü.....	14
Şekil 2.3 : Saf kayma deformasyonu.....	21
Şekil 3.1 : Çekirdek kalınlığına bağılı olarak sandviç yapılardaki özelliklerin değişimi.....	27
Şekil 3.2 : Bir sandviç kirişinin geometrik yapısı.....	28
Şekil 3.3 : Sandviç kirişte ince yüzey yaklaşımı.....	29
Şekil 3.4 : Simetrik olmayan sandviç kiriş yapısı	30
Şekil 3.5 : Sandviç kirişte normal ve kayma gerilmesi dağılımı.....	32
Şekil 3.6 : Sandviç kirişte deformasyona neden olan yükler.....	32
Şekil 3.7 : Sandviç kirişlerde eğilme ve kayma deformasyonu.....	33
Şekil 3.8 : Saf kaymaya maruz sandviç kiriş.....	33
Şekil 3.9 : Deformasyona maruz kirişin eğimi.....	35
Şekil 3.10 : Açık hücreli metal köpükler.....	36
Şekil 3.11 : Kapalı hücreli metal köpükler.....	37
Şekil 5.1 : Yüzey malzemesinin elastisite modülünün değişiminin yapının doğal frekansına etkisi.....	48
Şekil 5.2 : Çekirdek kayma modülünün değişiminin doğal frekansa etkisi.....	49
Şekil 5.3 : Yüzey katmanının kalınlığının doğal frekansa etkisi.....	50
Şekil 5.4 : Çekirdek katmanının kalınlığının doğal frekansa etkisi.....	51
Şekil 5.5 : Yüzey malzemesinin özkütlesinin değişiminin doğal frekansa etkisi.....	52
Şekil 5.6 : Çekirdek malzemesinin özkütlesinin değişiminin doğal frekansa etkisi.....	53

Şekil 5.7 : Çekirdek malzemesinin gözeneklilik oranının değişiminin yapının kütlesine etkisi.....	54
Şekil 5.8 : Çekirdek malzemesinin gözeneklilik oranının değişiminin yapının eğilme rijitliğine etkisi.....	55
Şekil 5.9 : Çekirdek malzemesinin gözeneklilik oranının değişiminin yapının doğal frekansına etkisi	55
Şekil 5.10 : Gözenekli ve katı çekirdeğe sahip kirişin doğal frekans kütle oranları..	56
Şekil 5.11 : Gözenekli çekirdeğe sahip yapının katı çekirdeğe sahip yapıya doğal frekanslarının oranı.....	57

ÇEKİRDEĞİ GÖZENEKLİ KİRİŞ YAPILARININ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Günümüz ihtiyaçlarını karşılamakta zorlanan geleneksek yapılar yerine kompozit yapıların kullanımı gün geçtikçe artmaktadır. Özellikle havacılık sektöründe, uçak iskeletinin ağırlığı direk olarak taşınacak yolcu sayısı ve yakıt tüketimi gibi işletme kalemlerini etkilemektedir, bu durum kompozit kullanımını zorun haline getirmiştir.

Sürekli dinamik yükler altında zorunda olan tüm yapılarda olduğu gibi hava taşıtlarında da titreşim analizi uçak tasarımının önemli bir aşamasıdır. Bu yükler altında uçak yapılarının yorulma ömürlerini arttırmak, rezonansı engellemek ve hangi frekansta yapının ne gibi tepki göstereceğini öngörebilmek için dikkatle üzerinde durulmalıdır.

Sandviç kirişlerin titreşim özelliklerini incelemekten önce, sandviç yapıları anlamak adına geniş bir araştırma yapılmıştır. Öncelikle sandviç kirişlerin ne olduğuna ve neden sandviç kullanılması gerektiğine değinilmiştir. Hangi sektörlerde, hangi amaçlarla kullanıldığından, avantajlarından ve dezavantajlarından bahsedilmiştir.

Sandviç kirişler yapısı gereği kayma gerilmelerinden oldukça etkilenmektedir. Bunun için bu çalışmada yapılan analizler için kayma deformasyonu kabulünü yapan Kayma ve Timoshenko kiriş teorilerinden yararlanılmıştır. Çeşitli varsayımlara dayanarak geliştirilen bu teoriler yardımıyla çeşitli sınır koşullarına sahip sandviç kirişlerin doğal frekanslarının nasıl bulunacağı formüller halinde ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Elde edilen formülasyonlar Mathematica paket programı yardımıyla çözümlü listelenmiştir.

Analitik çözüme ek olarak lineer ve nonlinear adi diferansiyel denklemler ile kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan Diferansiyel Dönüşüm Metodu kullanılmıştır. Bu yöntem diferansiyel denklemlerin Taylor seri çözümündeki katsayıların farklı biçimde hesaplanmasını içermektedir. Taylor serisi çözümünde yüksek mertebeden türevlerin hesaplanması uzun ve zor

süreçtir ancak diferansiyel dönüşüm metodu diferansiyel denklemleri cebirsel ifadelerle dönüştürmekte böylece hızlı ve kolay çözüm elde edilmesini sağlamaktadır.

Bu tez çalışmasında sandviç kirişlerin serbest titreşim özellikleri çeşitli sınır koşulları altında numerik ve analitik çözümleri incelenerek karşılaştırılmıştır. Numerik ve analitik çözümlerle sandviç kirişin farklı malzeme ve geometrik özelliklere sahipken doğal frekansları elde edilmiş, tablo ve grafikler halinde sunularak karşılaştırılmıştır. Sonuç bölümünde tüm hesaplamalar ve analizler yorumlanmıştır.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FOAM CORE BEAM STRUCTURES VIA DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

SUMMARY

Traditional structures unable to meet the needs of today. The use of composite structure instead of the traditional is increasing day by day. Especially in the aviation sector, to the weight of the airframe is affected the number of passengers will be transported directly and the business items such as fuel consumption. As a result of this the use of composite has become a necessity.

Sandwich structures can be classed as composite materials. A comparatively thick and light core, also has decent stiffness in a perpendicular direction to the panel faces, is enclosed by two facings. Lots of alternative forms of sandwich structure might be attained by associating distinct facing and core materials. Steel, aluminium, wood, fiber-reinforced plastic or concrete might make up the facings. And cork, balsa wood, rubber, solid plastic material, rigid foam material, mineral wool plates or honeycombs of metal might make up the core.

There are variety of composite sandwich structures in aircraft applications. Aerodynamic fairings, covers, doors, radomes, leading and trailing edge fairings, engine cowlings and landing gear doors are typical examples of sandwich structures on aircrafts. In addition to this, there are composite sandwich control surfaces in Airbus fleet, such as rudder, aileron, spoiler. In the passenger compartment, fairings and floor panels are examples of the sandwich structures inside the aircraft.

There are so different necessities to use composite sandwich structures in commercial aircraft. Large scale of working temperature and high aerodynamic forces affect on the external structures. External structures, such as Radomes and leading edge fairings, are affected by swarm of bird and atmospheric phenomena. Furthermore requirement of electromagnetic transmission of radar and avionics is so important. One of the main threat on the lower side of the aircraft is runway debris causing foreign object damage. The strength of the floor panels needs to be reinforced to compensate transverse, discrete loads caused by passengers. Therefore it is clearly seen from the examples, how many diversity and environmental necessities of different sandwich applications.

So, being familiar with the different necessities as possible as early in the designing takes more advanced and proper structure.

Vibration analysis in aircraft as well as in the entire structure which must under continuous dynamic loading is an important phase of aircraft design. To increase the fatigue life of aircraft structures under these loads, to prevent resonance and to anticipate the frequency and structure relation should be considered carefully. For this reason dynamic behaviour of sandwich structures is investigated more than half century. The sandwich structures offer the designers higher strength to weight ratio, and this is one of the main reasons that the research are conducted in this area. In aerospace application without compromising the strength, weight saving is an important part of design period. The literature on the free vibration analysis of sandwich structures are mainly about the three-layered elastic beams which are homogeneous and isotropic, but joined together rigidly, and the top and bottom layers are mostly made of strong materials such as aluminium and steel. The middle layer is relatively soft, for instance, rubber or honeycomb structures, in order to provide enough damping and good energy absorption characteristics.

Before examining the vibration characteristics of the sandwich beams, extensive research has been done in order to understand the sandwich structures. First it is mentioned about definition of the sandwich beams and reason for the usage of sandwich structures. Sector based application areas, the reason of deciding sandwich structure, the advantages and disadvantages are discussed.

Due to the its structure sandwich beams is effected to much by the shear stress. The analysis used in this study is utilized from Shear and Timoshenko beam theory which based on shear deformation. With the help of this theories It is described in detailed way how to find the natural frequency of the sandwich beams with various boundary conditions. The resulting formulations are listed and dissolved by using Mathematica program.

In addition to analytical solution, linear and nonlinear ordinary differential equations are obtained by differential transform method which is used for obtaining the solution of partial differential equations. This method involves coefficient calculated differently that used in Taylor series solutions of differential equations. Calculation of high order derivatives in the Taylor series solution is a long and difficult process,

but differential conversion method provides to convert differential equations into algebraic expressions so that finding solution will be quick and easy. Differential transformation method which obtains the approximate solutions like other numerical methods has a simpler procedure when compared to other methods. This feature makes it easier to solve the computer-aided solution to linear, nonlinear partial differential equations and also expanding the application areas.

This thesis free vibration characteristics of the sandwich beams is compared examining the numerical and analytical solutions work under various boundary conditions. The natural frequencies of the sandwich beams which has different materials and geometric features is obtained by numerical and analytical solutions. Results are presented comparatively in tables and graphs. At results section all calculations and analysis are reviewed.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada çekirdeği gözenekli kiriş yapıları, Timoshenko ve Kayma Kirişi Teorilerine uygun şekilde, sandviç yapı konfigürasyonu kullanılarak serbest titreşim analizi yapılacaktır.

Bu bölümde sandviç kirişlerin kullanım alanları ve gelişimi hakkında detaylı bilgiler verilecek ve literatür çalışmalarından bahsedilecektir.

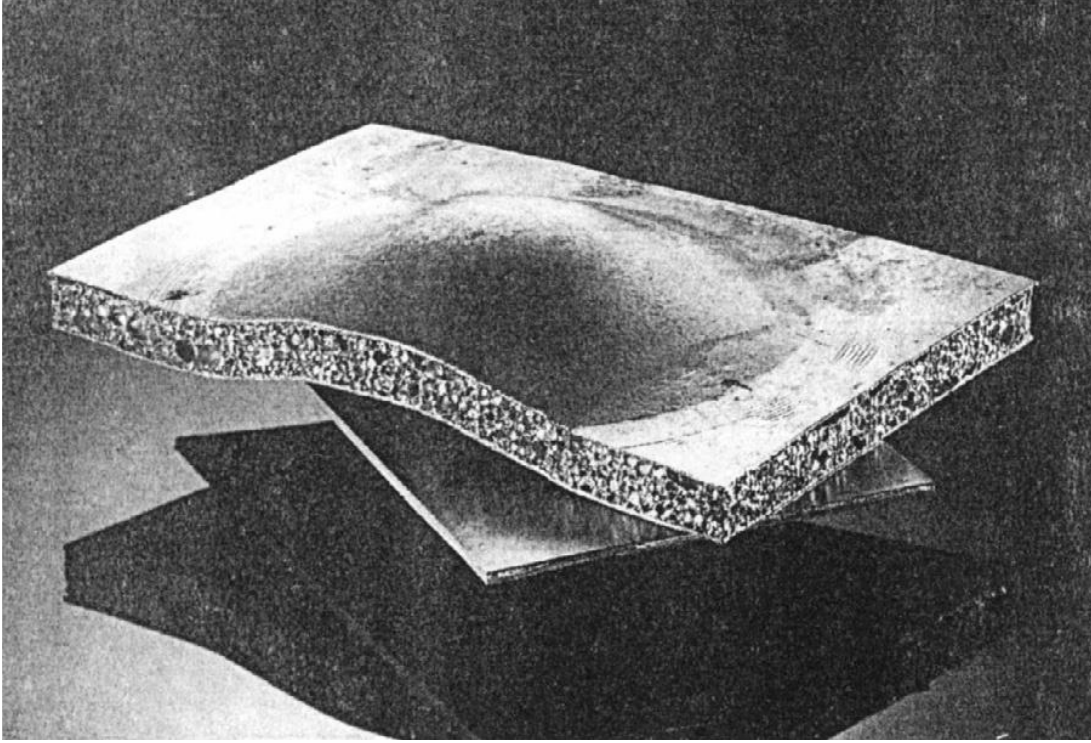
1.1 Sandviç Yapıların Tarihçesi ve Kullanım Alanları

Sandviç kompozitler, yüksek eğilme rijitliği/ağırlık ve yüksek mukavemet/ağırlık oranlarına sahip olmaları sebebiyle, son yıllarda başlıca hava ve deniz endüstrisi olmak üzere birçok endüstriyel uygulamada yer almaktadır [1]. Sandviç yapıların yaygınlaşmasının en büyük nedeni özgül mekanik özelliklerinin iyi olması nedeniyle düşük deformasyon, yüksek eğilme ve burkulma direnci gibi özellikler sağlamasıdır.

Özellikle sivil havacılıkta paralı yük/ağırlık oranı ve yakıt tüketimi kriterleri önem arz ettiğinden monokok yapılar yerine hava taşıtlarında kompozit yapıların kullanımı gün geçtikçe artmaktadır. Sandviç yapıları aynı ağırlığa sahip yüzey malzemesinden üretilmiş monokok yapılarla kıyasladığımızda monokok yapılara göre çok yüksek rijitliğe ve eğilme dayanımına sahiptirler.

Sandviç yapılar temel olarak yüzey, çekirdek ve yapıştırıcı olmak üzere 3 ana elemandan oluşur. En dışta birbirinden belli bir mesafe ile ayrılmış alt ve üst yüzeyler, bu yüzeylerin arasında da çekirdek kısmı bulunur. Yüzeylerle çekirdek arasında bulunan yapıştırıcı (adhesive) da çekirdek ile alt ve üst yüzeyler arasında bağlantı sağlar. Sandviç yapılarda kullanılan yüzey malzemeleri ince fakat oldukça sağlam bir yapıya sahiptir. Çekirdek malzemesi ise kalın nispeten düşük mekanik özelliklere sahip ve olabildiğince hafif bir yapıdan oluşur. Ara yüz olarak kullanılan yapıştırıcı, kesme kuvvetleri ve eksenel yükleri yüzeylerden çekirdeğe ve çekirdekten yüzeylere aktarabilecek özellikte seçilir. Burada amaç mekanik özellikleri birbirinden farklı olan katmanların birlikte amaca uygun hareket etmesini sağlamaktır. Bu geometrik

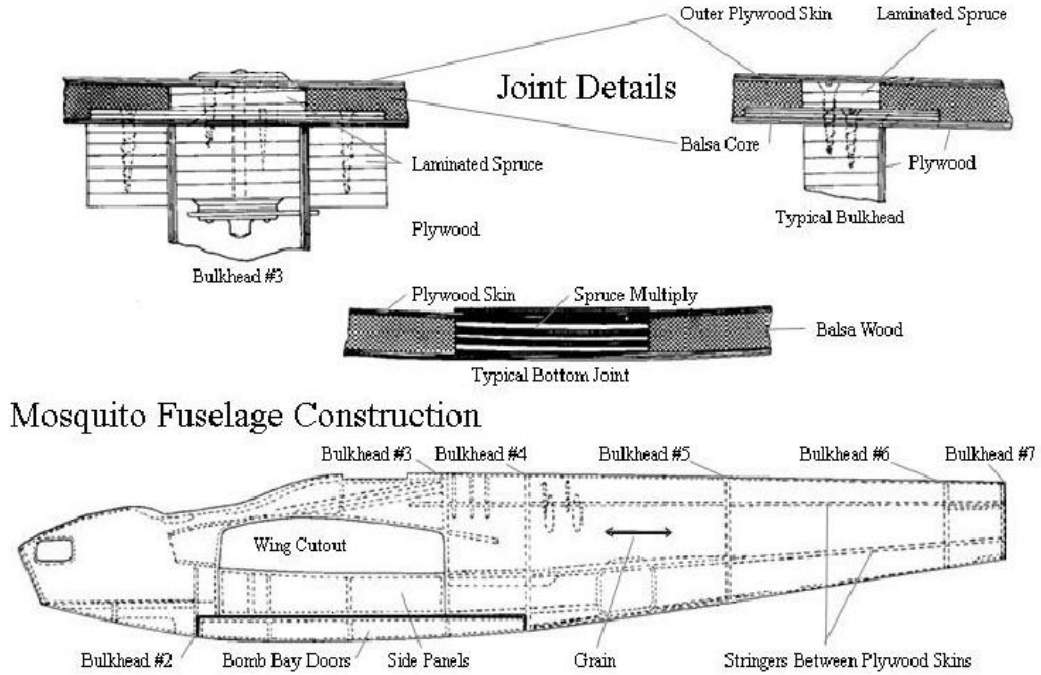
özellikleriyle sandviç yapılar I-profillerle benzer özellik göstermektedir. I-profiller tarafsız eksenden mümkün oldukça uzak mesafede mümkün olan en fazla malzemeyi flanşlara taşıyarak daha yüksek dayanım/ağırlık oranı sağlar.



Şekil 1.1 : Sandviç yapıyı oluşturan katmanlar

Birbirinden belli bir mesafe ile ayrılmış yüzeylerin getirdiği avantajlar ilk olarak 1820 yılında Duleau tarafından tartışmaya açılmıştır. Sandviç yapıların bilinen ilk kullanımı Britanya Köprüsündedir. Sandviç yapıların temelleriyle alakalı ilk bilimsel çalışma 1849 da Fairbairn tarafından köprü'nün dizayn aşamasındaki kazanımlardan ortaya çıkmıştır. Köprü'nün yapımından ancak 100 yıl sonra sandviç yapıların kullanımına başlanmıştır [2].

Sandviç yapıların ilk kullanımlarında yüzey malzemesi olarak demir kullanılırken çekirdek malzemesi olarak ağaç türleri kullanılmaktaydı. Yapıştırıcıların yetersiz performansı yüzünden bu yapılar yüzey ve çekirdek malzemelerinin bir bütün halinde çalışabilmesi için bu katmanlar birbirlerine perçinlenerek kullanılmıştır. 1930 larda yeni nesil yapıştırıcıların icadı ve bu yeni nesil yapıştırıcıların geniş bir kabul, sandviç yapılarada etki etmiş ve katmanlar artık perçinlenmek yerine birbirine yapıştırılarak birleştirilmeye başlanmıştır[3, 4].



Şekil 1.2 : Mosquito uçağındaki uçak yapıları

von Karman ve S.E. Mautner kanat kısmında sandviç yapıda elemanlar bulunan bir uçak tasarlamışlardır[5]. 1924 yılında, T. von Karman ve P. Stock sandviç yapıların planörlerde kullanımıyla ilgili patent almışlardır. Motorlu hava araçlarında sandviç yapılar ilk olarak De Havilland firmasının baş tasarımcısı E. Bishop tarafından kullanılmıştır. E. Bishop. De Havilland “Comet Racer” modelinin gövdesinde “Albatros” ve 2. Dünya savaşında önemli bir yere sahip “Mosquito” modellerinin kanat ve gövdelerinde sandviç yapılar kullanmıştır. “Mosquito” modeli sandviç yapıların ilk kez seri üretimde kullanıldığı modeldir[6].

1940 larda sandviç yapılar hakkında ilk teorik çalışmalar ortaya çıkmış ancak sandviç teorisiyle ilgili kayda değer çalışmalar Gough, Elam ve de Bruyne[7] ve Williams, Leggett ve Hopkins [8] tarafından ortaya konulmuştur. 1940 lı yıllarda kısıtlı alanlarda kullanılan sandviç yapılar, 1960 lara gelindiğinde inşaat sektörü, ısıtma-soğutma sistemleri, otomotiv endüstrisi, denizcilik sektörü gibi geniş alanlara yayılmıştır[3, 4].

Balsa ilk kullanılan çekirdek malzemelerinden biridir. Hala ağırlığın çok kritik olmadığı alanlarda kullanımına rastlanmaktadır. 1940’lardan sonra sandviç yapıların ağırlıklarını azaltmak için çalışmalara önem verilmiştir. Bu çalışmalar 1940’ların sonlarına doğru havacılık endüstrisi için geliştirilen bal peteği çekirdek malzemelere

doğru kaymıştır. Bal peteği yapılar kayma dayanımı ve rijitlik bakımından yüksek performansa sahip olsa da çekirdek ve yüzeyin yapışmasında problemlerle karşılaşmıştır. 1950'lerin sonunda PVC ve poliüretan çekirdek malzemeleri kullanılmaya başlanmış ve günümüzde de hala düşük maliyetli uygulamalarda kullanılmaktadır. Günümüzde çekirdek malzemeleri çekirdek ve yüzey malzemesinin yapıştırılabilirliği göz önünde bulunarak geliştirilmektedir.

Sandviç yapılar hakkında teorik çalışmalar ikinci Dünya Savaşı sonrasında yoğunluk kazanmıştır. Bu yıllarda yapılan ilk çalışmalar daha çok yüzey çekirdek arasındaki yapışma problemi, yüksek mekanik performanslı çekirdekler ve sandviç yapıların bakım ve hasar tespiti prosedürleri üzerinedir. Bu problemler günümüzde hala uçak yapılarında sandviç yapıların kullanımını kısıtlamaktadır. Bu dönemde sandviç plakların diferensiyel denklemleri elde edilmiştir. Bu yapılan çalışmalar 1960'larda yayınlanan iki kitabın temelleri olmuştur.[9-11].

Günümüzde teorik çalışmalar bu yapıların optimizasyonu üzerine yoğunlaşmıştır. Sandviç yapıların kompleks özelliklerinden dolayı gerekli denklemlerin çıkarılması zordur ve çözümlerinde hatalar oluşmaktadır. Yapılan kabuller her ne kadar pratikte ihmal edilebilir olsada yinede dikkate alınması gereken durumlarla karşılaşmaktadır. Sonlu elemanlar metodunun gelişmesiyle sandviç yapıların analizini kolaylaştırmıştır ve sonlu elemanlar metodu var olan bir çok analitik çözümden daha iyi sonuçlar vermektedir. Bu gelişmelerle birlikte son yıllarda yapılan çalışmalar, havacılık endüstrisinin en büyük problemleri olan darbe dayanımı, kırılma ve yorulma analizleri üzerine yoğunlaşmıştır.

Bitzer 1992 yılında bal peteği yapılar ve uygulama alanları hakkında bir çalışma yayınlamıştır. Bu çalışmada iki ve daha çok motorlu uçaklarda sandviç yapıların uygulama alanlarını incelemiştir. Çalışmasında boeing 707 de ıslak yüzey alanlarının sadece %8'i sandviç yapılardan oluşurken boeing 757/767 de bu oranın ıslak yüzeylerde %46'ya ulaştığını vurgulamıştır. The beech starship bal peteği ve kevlar yüzeylerden oluşan tümüyle kompozit malzemeden üretilmiş ilk uçaktır. Aynı zamanda uzay mekiklerinin büyük bir kısmı da kompozit yüzey ve bal peteği çekirdeğe sahip yapılardan oluşmaktadır. 1969 yılında Apollo Uzay Aracının aya başarılı bir şekilde iniş yapması sandviç yapıların havacılık sektöründe gün geçtikçe önem kazanacağını gösteriydi. Uyduların ise neredeyse tamamı sandviç yapılar barındırmaktadır[12].

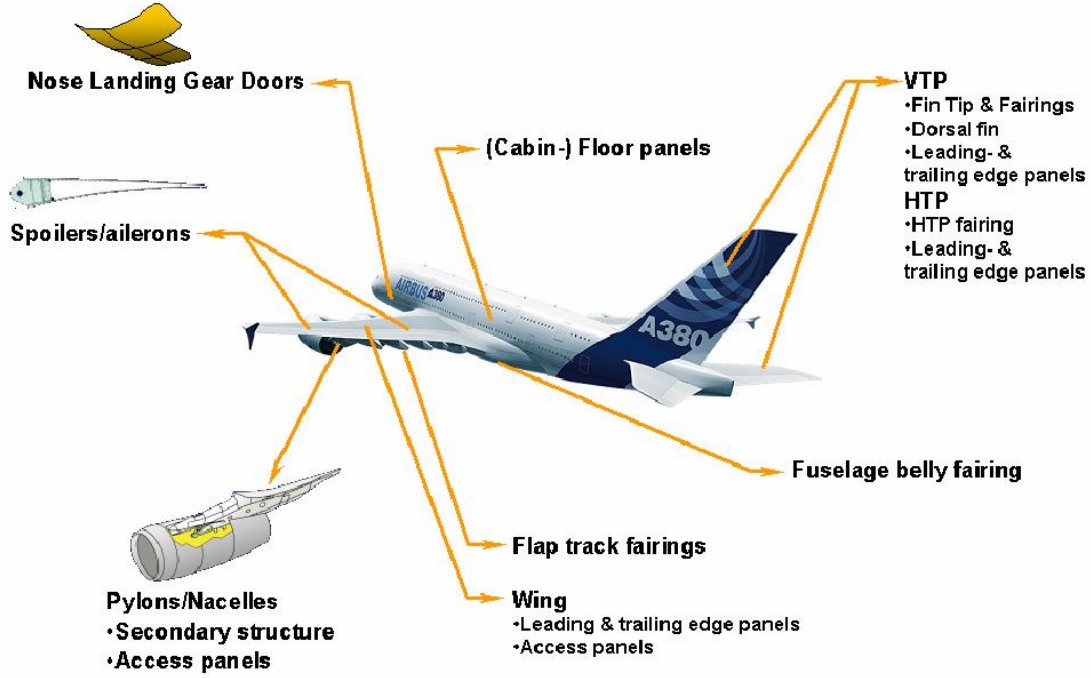
Bal peteği yapılar enerji sönümlemesi ve ses yalıtımı bakımından yüksek performans göstermektedir. Aynı zamanda ısı transferi yada ısı yalıtımı uygulamalarında kullanılmaktadır. İsveç kraliyet donanması 20 yıldan uzun süredir fiberglass ve grafit kompozit yapıları kullanmaktadır. İsveç donanmasına ait YP2000 VİSBY grafit/epoksi kompozit ve balpeteği yapı kullanılarak radar kesiti %99 oramında düşürülmüş bir gemidir[13].1995te Kimpara grafit kompozit yapıların geleneksel yapılara göre %70 ağırlık azaltabildiğini bildirmiştir[14]. Kujala ve Tuhkari oluklu çekirdeğe sahip sandviç panellerin hem analitik hem deneysel incelemesini yapmıştır ve çalışmaları sonucunda sandviç yapıların geleneksel çelik yapılardan %40-%50 daha hafif olduğunu bulmuştur[1, 15].

İlk uçaktan beri metaller uçak yapıları içinde önemli bir yere sahiptir. Bu sebepten metal uçak yapıların uzun yıllar optimizasyonu üzerine çalışılmıştır ancak artık bu yapılarının optimizasyonunda kayda değeri ilerleme sağlamak neredeyse imkansız hale gelmiştir. Geleneksel metal yapılar yerine geniş bir mekanik özellik yelpazesine sahip, yeni teknolojiler ve üretim metotlarına açık, daha iyi optimize edilebilir kompozit/sandviç yapılara yönelmek, dayanıklı, hafif ve daha ucuz yapılar elde edilebilmesi için gereklidir.

Hava taşıtlarında dış yüzeyde kalan parçaların çalışmak zorunda olduğu sıcaklık aralığının çok yüksek olması, yüksek aerodinamik kuvvetlere, kuş çarpması yada inişte meydana gelen ani kuvvetlere maruz kalması, termal ve ses yalıtım problemleri gibi birçok neden hava taşıtlarında kompozit yapıların kullanılmasını zorunlu kılmıştır.

Hava taşıtlarının maruz kaldığı bu koşullar hava taşıtlarının ağırlıklarına büyük ölçüde etki etmektedir. Özellikle sivil havacılık sektöründe ağırlık ve yakıt tüketiminin önem arz ettiği göz önünde bulundurulursa, uçak üreticilerinin daha yüksek performanslı aynı zamanda daha hafif malzemelere yoğunlaşması kaçınılmazdı. Boeing 787 Dreamliner modelinde tamamıyla kompozit gövde gövde kullanma kararı almıştır. Uçuş konforu açısından gürültü, sıcaklık değışimleri ve sarsıntılar önemli sorunlar teşkil etmektedir. Sandviç yapılar mükemmel enerji sönümleme kabiliyeti, termal ve ses yalıtımı özellikleriyle uçak gövdelerinde sıkça tercih edilmektedir. Kompozit yapıların yoğun olarak kullanıldığı Boeing 787 Dreamliner gibi modellerde hem uçuş konforu hem uçak seçiminde büyük öneme sahip performans kriterleri artmaktadır. Bu modelde kompozit kullanım oranı hacimsel olarak %80 ağırlık olarak olarak uçağın

tümünün %50 sini oluşturmaktadır. Yoğun kompozit kullanımı yakıt ekonomisine önemli katkıda bulunmuş ve yakıt sarfiyatını %20 oranında azaltmıştır.



Şekil 1.3 : Airbus A380 modelindeki kompozit yapılar

Her ne kadar yüksek oranda kompozit kullanımına sahip hava taşıtları olmasına rağmen sivil havacılıkta henüz kompozit malzemeler tam potansiyeline ulaşamamıştır. Kompozit malzemelerin sağladığı avantajlardan yararlanmak için malzeme, tasarım ve üretim alanlarında yoğun çalışmalar devam etmektedir.

Sandviç/kompozit yapıların hava araçlarında kullanım oranının hala ilk sırada olmamasının yapının hasara ne zaman ve ne şekilde uğrayacağını güvenilir bir şekilde kestirilememesidir. Özellikle çekirdek malzemesinde meydana gelebilecek hasarlar kestirilememekte ve var olan SHM (structural health monitoring) sistemleri çekirdek malzemeleri gibi karmaşık davranış gösteren malzemelerin hasar tespitini istenen güvenilirlikte yapamamaktadır. Kompozit yapılarda oluşabilecek bir hasar diğer hasar kriterlerini de tetiklemekte, havacılık sektörünü gibi güvenliğin ilk kriter olduğu alanlarda kompozit yapıların bu özelliği tasarımcıları kısıtlamakta, yüksek emniyet katsayıları kullanarak dizayn yapma durumunda bırakmaktadır. Bu durum kompozitlerin malzemelerin en önemli karakteristiği olan özgül dayanım özelliğinden istenilen ölçüde faydalanılmasını engellemektedir.

Kompozit yapı kullanımı kısıtlayan diğerk bir faktörde kompozitlerin bakım/onarım zorluklarıdır. Kompozitlerin bakım/onarımının hızlı ve efektif bir şekilde yapılamaması zaman kaybına yol açmaktadır, ayrıca kompozit yapıların bakım/onarımını gerçekleştirebilecek vasıflı elemanlar gerekmektedir. Bazı durumlarda kompozit yapıların onarımı sırasında bağlantı elemanlarının sökülmesi gerekmektedir. Sökülen bağlantı elemanı bağlantı yuvalarında hasara yol açmakta böylece onarım zamanını uzamakta ve onarım için ekstra alet gereksinimi yaratmaktadır. Bu durum özellikle kısıtlı filolarla uçmaya çalışan havayolu şirketleri büyük maliyetlere yol açmaktadır. Günümüzde yoğunluğu gittikçe artan teorik ve deneysel çalışmalarla birlikte var olan belirsizliklerin sınırları daraltılacak ve kompozit malzemeler için daha güvenilir hasar kriterleri belirlenebilecek ve kompozit yapıların daha efektif kullanılabilmesi sağlanacaktır[16].

Kompozit yapıların önem kazandığı birçok uygulama alanı vardır. Bu yapıların en ön planda olduğu uygulamalar hava, kara ve deniz taşıtlarıdır. Bir taşıtın daha hafif üretilmesi taşıtın hareketi için gerekli enerji miktarını azaltmaktadır. Azalan enerji ihtiyacı sınırlı motor gücüne sahip araçların daha performanslı çalışmasına olanak sağlayıp, aynı zamanda yakıt tüketimini azaltacaktır. Ağırlıktan sağlanan bu tasarruf sadece yakıt ekonomisine fayda sağlamakta kalmayıp, taşıtların yorulma ömürlerini arttırarak servis maliyetlerini azaltacaktır. Hafif yapıların yoğun kullanımına rastlanan motor sporları gibi alanlarda, bu yapılar aynı zamanda taşıtların ağırlık merkezlerinin ayarlanmasında kullanılmakta ve aracın daha kararlı bir yol tutuşa sahip olmasını sağlamaktadır.

Hava taşıtlarındada artan rekabet havayolu firmalarını maliyet düşürmeye zorlamaktadır. İşletme maliyetlerinin bu rakabet içerisinde kritik rol oynamaktadır, bu maliyetlerin önemli ve tasarruf edilebilir kısmını yakıt giderleri oluşturmaktadır.

A1 jet yakıtının 2000-2010 yılları arasında ki Amerikan Doları bazlı değişimi şekilde gösterilmektedir. Grafikten görülebileceği gibi bu 10 yıllık periyotta yakıt fiyatlarında %600 oranında bir değişim görülmektedir. 2008 yılından sonra yakıt fiyatlarında bir düzeltme olsada 2000 yılındaki fiyatının 2 katından fazla bir değere sahiptir. Havayolları şirketleri filoları kurarken uzun vadeli planlar yapmak işletme giderlerini uzun vadeli olarak hesaplamak zorundadırlar. Yakıt fiyatlarındaki uzun vadede tahmin edilemeyecek değişimler şirketlerin var olan maliyet analizlerini etkilemekte ve stratejilerini değiştirmek zorunda bırakmaktadır. Yakıt tüketim maliyetlerin daha

tutarlı, değişimlerinden daha az etkilenebilecek şekilde hesaplanabilmesi için mümkün olduğunca yakıt tüketim değerlerinin düşürülmesi gerekmektedir. Piyasadan gelen bu talep üzerine uçak üreticileri, uçak tasarımlarında yakıt ekonomisi ön planda tutacak tasarımlara yönelmek zorunda kalmışlardır.



Şekil 1.4 : A1 jet yakıtının yıllara göre fiyat grafiği

Uçak ağırlıklarının yakıt maliyetine etkisi, uçağın işletme zamanı boyunca harcadığı toplam yakıt tüketimi hesaplanarak tahmin edilebilir. Kaufmann[17] çalışmasında Scandinavian hava yollarının verilerine dayarak, 260 koltuklu A330 model 233 ton kalkış ağırlığına sahip bir uçağın ortalama tüketimi 0.035 lt/koltuk/km olduğunu uçağın ömrü boyunca 100.000.000 km uçuş yapabileceği varsayılırsa ömrü boyunca tüketeceği yakıtın 1500-2000€/kg olacağını söylemiştir.

Uçak iskeletinde yapılabilecek ağırlık optimizasyonu sadece o parçalardan elde edilen ağırlık kazanımıyla kalmayıp tüm tasarıma etki edecek ve yapılan ağırlık tasarruf miktarına göre daha ufak kanatların daha küçük motorların tercih edilmesine neden olacaktır. Sonuç olarak uçağın toplam boş ağırlığında sağlanacak tasarruf, parça bazlı elde edilen ağırlık tasarrufundan daha fazla olacaktır.

1.2 Literatür Araştırması

Birçok sandviç yapı çekirdek malzemesi olarak gözenekli yapılar içermektedir. Yüzey ve çekirdek malzemesinin farklı mekanik özelliklere sahip olması lokal yükler altında alt ve üst yüzeylerin farklı davranışlar göstermesine neden olmaktadır. Lokal yükler sandviç yapıların hasara uğramasındaki en önemli etkidir. Bunun nedeni sandviç

yapılarda alt ve üst yüzey katmanlarının monokok yapılara kıyasla daha ince olmasından kaynaklanmaktadır. Yüke maruz yüzeyler elastik zemin üzerindeki kiriş, plak, ya da kabuk gibi davranır. Yapının bu davranışı büyük lokal deformasyonlara neden olmaktadır. Oluşan bu lokal deformasyonlar yapıda genel hasar oluşturmaya bile, yapının erken hasara uğramasına neden olmaktadır.

1940 larda sandviç yapılar hakkında ilk teorik çalışmalar ortaya çıkmış ancak sandviç teorisiyle ilgili kayda değer çalışmalar Gough, Elam ve de Bruyne[7] ve Williams, Leggett ve Hopkins [8] tarafından ortaya konulmuştur.

Sandviç yapılar hakkında teorik çalışmalar ikinci Dünya Savaşı sonrasında yoğunluk kazanmıştır. Bu yıllarda yapılan ilk çalışmalar daha çok yüzey çekirdek arasındaki yapışma problemi, yüksek mekanik performanslı çekirdekler ve sandviç yapıların bakım ve hasar tespiti prosedürleri üzerinedir. Bu problemler günümüzde hala uçak yapılarında sandviç yapıların kullanımını kısıtlamaktadır. Bu dönemde sandviç plakların diferensiyel denklemleri elde edilmiştir. Bu yapılan çalışmalar 1960'larda yayınlanan iki kitabın temelleri olmuştur[9-11].

Yukarıda bahsedilen nedenler sandviç yapılarda yüksek mertebeden teorilerin kullanılması zorunluluğunu doğurmuştur. Araştırmacılar 1990'lı yıllarda bu probleme yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalarda, çeşitli yükleme durumlarında geçerli, geometri ve yükleme durumundaki süreksizliklerinde hesaba katıldığı yüksek mertebeden tutarlı teoriler geliştirmişlerdir. Frostig yüzeylerin metal yada kompozit katmanlardan nispeten daha rijit, çekirdek malzemesinin düşük yoğunluklu, düşük dayanımlı gözenekli yada balpeteği yapılardan oluşan sandviç kirişlerin eğilme davranışlarının yüksek mertebeden sandviç teorisiyle incelendiği bir çalışma yayınlamıştır[18]. Yayınladığı diğer çalışmalar titreşim, burkulma ve delaminasyon gibi problemde deneysel sonuçlarla yüksek doğruluk göstermişlerdir [19, 20].

Thomsen ve Vinson iç basınca maruz dairesel olmayan uçak gövdelerinin yüksek mertebeden sandviç teorileriyle tasarlanması hakkında çalışmalar yapmışlardır. Birçok sandviç yapı yüzey malzemesine nazaran daha yumuşak gözenekli malzeme kullanılmış çekirdek katmanı içermektedir[21]. Kullanılan bu çekirdek malzemeleri yapıda alt ve üst yüzeylerin farklı deformasyon davranışları göstermesine neden olmaktadır. Frostig ve çalışma arkadaşları Baruch [22] , Peled [23], Shenhar [24] , ve

Thomsen [20] bu durumun dikkate alındığı titreşim, burkulma ve delaminasyon problemleri üzeri çalışmalar yapmışlardır.

Plaklarda kayma deformasyonlarının hesaba katan ilk çalışmalar Reisner ve Mindlin tarafından ortaya konulmuştur[25, 26]. Sandviç yapılar elastik zemine oturan kiriş, plak yada kabuklar gibi modellenenmektedir. Kerr yaptığı çalışmada elastik ve viskoelastik zemin modellerini oluşturmuştur[27]. Monokok plakların çözüm metotları değişik sınır şartlarına, yük dağılımlarına ve malzeme özelliklerine göre Timoshenko ve Krieger tarafından kataloglanmış bu çözüm yöntemleri daha sonra sandviç yapıların çözümündede kullanılmıştır [28]. Dobyns kayma deformasyonu kabulü yapan basit mesnetlenmiş sandviç plaklarının çeşitli dinamik yükler altında çözümlerini yapmıştır[29]. Pagano birçok çalışma tarafından referans alınan makalesinde sandviç plakların tam çözümü yayınlamıştır [30].Gorfaninejad ve Bert sandviç kirişlerin eğilme davranışlarını yüksek mertebeden sandviç kiriş teorisi kullanarak incelemişlerdir[31]. Hyer ve arkadaşları viskoelastik çekirdeğe sahip sandviç kirişlerin lineer olmayan titreşimleri üzerine çalışmışlardır[32]. Frostig, Baruch, Vilnay, and Sheinman asimetric sandviç kirişlerin davranışlarını incelemişlerdir[33].

Yu çalışmalarında sandviç plakların hareket denklemlerini çıkarmış lineer ve lineer olmayan titreşimlerini incelemiştir[34, 35]. Yu daha sonraki çalışmalarında büyük deformasyona maruz kalmış piezoelektrik katmana sahip sandviç plakları incelemiştir[36].

Allen ve Shenoi [37, 38] çalışmalarında sandviç yapıların eğilme kaynaklı yorulma davranışlarını incelemişlerdir. Burman ve Zenkert farklı malzemeler kullanarak çekirdeği gözenekli sandviç kirişlerin yorulma davranışlarını incelemişlerdir[39-43].

Banerjee ve Sobey üç katmanlı elastik çekirdek yapılı sandviç kirişlerde serbest titreşim analizleri yapmışlardır [44]. Sakiyama, Matsuda ve Morita, elastik ve viscoelastik çekirdek yapılı 3 katmanlı sürekli sandviç kirişlerin serbest titreşim özelliklerini çeşitli sınır şartlarında incelemişlerdir[45]. Khalili 2010 yılında dinamik katılık metodu kullanarak serbest titreşim analizlerini yapmış[46] ve 2012 yılında bu metodu yüksek mertebeden sandviç teorisine uygulamıştır[47].

Bilasse, Daya ve Azrar, viscoelastik yapıdaki sandviç kirişlerin lineer ve nonlinear titreşim özellikleri üzerine çalışma yürütmüşlerdir[48]. Hashemi ve Adique, yaptıkları

Çalışmalarda 3 katmanlı sandviç kirişlerin serbest titreşim özelliklerini incelemişlerdir[49].

Silverman yaptığı çalışmayla sandviç kirişe etki eden kayma deformasyonu ve dönme ataletinin kirişin doğal frekansına olan etkisini incelemiştir[50]. Birman çalışmasında kayma düzeltme faktörü üstüne diğer yaklaşımlarını kendi yaklaşımıyla karşılaştırmıştır[51].

Wang ve Yang bal peteği sandviç malzemelerde çekirdeğin içine konan sönümleyici malzemeler aracılığıyla sandviç panellerin sönüm davranışını incelemiştir[52].

Jack R. Vinson kitabında izotropik ve kompozit yapılı sandviç panellerin titreşim özelliklerini incelemiş, enerji metodu yardımıyla sandviç kirişlerde doğal frekans analizi yapmıştır[53]. D. Zenkert el kitabında sandviç yapıların dizaynında kullanılan malzemelerin özelliklerini incelemiş ve hasar analizleri yapmıştır[4].

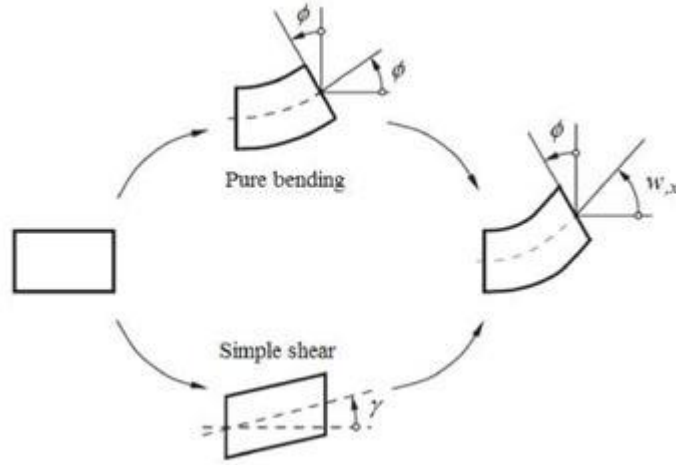
Raville 1961 yılında iki tarafı ankastre mesnetlenmiş sandviç kirişin enerji metodu kullanarak incelemesini yapmış ve sonuçlarını deneysel olarak karşılaştırmıştır[54]. Skolinsky 2004 yılındaki çalışmasında sandviç kirişlerin serbest titreşimini analitik ve deneysel olarak incelemiştir[55].

2. KİRİŞ TEORİLERİ

Bu bölümde Timoshenko ve Kayma Kiriş Teorilerinde yapılan kabullerden bahsedilecek bu kabullere uygun yönetici denklemler elde edilecek, elde edilen sınır şartları uygulanıp frekans denklemleri çıkarılacaktır.

2.1 Timoshenko Kiriş Teorisi

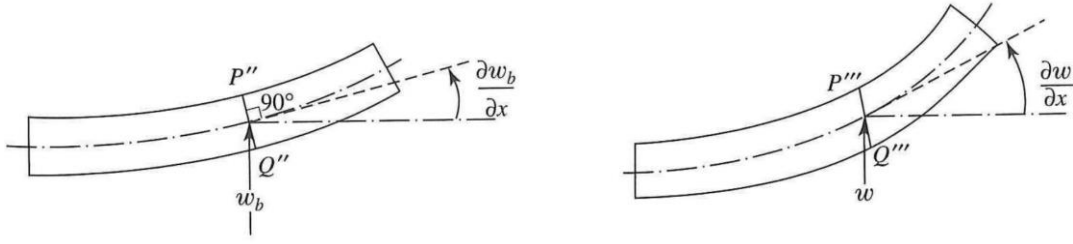
Timoshenko kayma kirişinin aksine dönel ataletin etkilerini yok saymaz. Aşağıdaki şekillerde saf kayma deformasyonu ve toplam deformasyonlar gösterilmiştir.



Şekil 2.1 : Timoshenko kirişinde kayma ve eğilme deformasyonu

Kesitin deformasyondan sonra yatay eksenle yaptığı açı kayma açısı ve eğilme açısının toplamına eşittir.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma + \phi \quad (2.1)$$



Şekil 2.2 : Kayma deformasyon kabulü

Timoshenko kiriş denkleminde normal ve kayma deformasyonlarından oluşan iki tip gerinim enerjisi vardır. Normal gerinim eğilme momentinden kaynaklı deformasyonun fonksiyonudur.

$$\varepsilon = -z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$V_{eğilme} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dV \quad (2.3)$$

$$V_{kayma} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dV = \frac{1}{2} \int_0^\ell kGA \gamma^2 dx \quad (2.4)$$

Kirişin toplam potansiyel enerjisi (2.3) ve (2.4) denklemlerinin toplamına eşittir.

$$V = V_{eğilme} + V_{kayma} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_A \left[Ez^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \kappa G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

Yukarıdaki denklemde elastisite modülü, atalet momenti, kayma düzeltme faktörü, kayma modülü, kayma açısı sırasıyla E, I, κ, G, γ dir.

Timoshenko kiriş teorisinde kirişin toplam kinetik enerjisi kirişin dikey ve dönel ataletinin toplamına eşittir.

$$T = T_{kütle} + T_{atalet} \quad (2.7)$$

$$T_{kütlet} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.8)$$

$$T_{atalet} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.9)$$

(2.8) ve (2.9) denklemleri toplanırrsa toplam kinetik enerji aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (2.10)$$

Dış yükler tarafından yapılan,

$$W = \int_0^\ell f w dx \quad (2.11)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - (U + W)] dt \quad (2.12)$$

(2.12) denkleminine Hamilton Varyasyon Yöntemi uygulanırssa.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^\ell \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \phi - \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - f \delta w \right] dx \right\} dt \quad (2.13)$$

(2.13) denklemin açılımı aşağıda gösterilmiştir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi \right]_0^\ell - \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi \right) dx \right] dt \quad (2.14)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left[\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \right]_0^\ell - \int_0^\ell \kappa AG \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w dx \right] dt \quad (2.15)$$

Denklem (2.14) ve (2.15), denklem (2.13)'te yerine konulup düzenlenirse.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \right]_0^\ell + \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi \right]_0^\ell \right. \\ \left. + \left[- \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - f \right) \delta w \, dx \right] \right. \\ \left. + \int_0^\ell \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] \delta \phi \, dx \right\} dt \quad (2.16)$$

(2.16) denkleminde genel sınır şartları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left[\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \right]_0^\ell = 0 \quad \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi \right]_0^\ell = 0 \quad (2.17)$$

(2.16) denklemi çökme ve dönme fonksiyonlarına göre ayrılırsa,

$$\kappa AG \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad "w" \quad (2.18)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad "\phi" \quad (2.19)$$

Buradan kesme kuvveti ve eğilme momenti aşağıdaki gibi bulunur ;

$$Q = kGA\gamma = kGA \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right] \quad (2.20)$$

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = EI \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma \right] \quad (2.21)$$

(2.18) denklemi düzenlenirse,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{kG} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{f}{kGA} \quad (2.22)$$

$$\kappa AG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

(2.19) denklemi x 'e göre türevlenirse;

$$-EI \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \kappa AG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \rho I \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^2 \partial x} = 0 \quad (2.24)$$

(2.22) ve (2.23) denklemleri (2.24) denkleminde yerine konulursa;

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \quad (2.25)$$

Aynı işlemler tekrarlanırsa;

$$EI \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} \quad (2.26)$$

Serbest titreşim analizi için deplasman fonksiyonları $w(x, t)$ ve $\phi(x, t)$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega t} \quad (2.27)$$

$$\phi(x, t) = \Phi(x) e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

(2.27) ve (2.28) denklemlerinde W ve Φ , w ve ϕ fonksiyonlarının genlikleri, ω kirişin doğal frekansı ve $i = \sqrt{-1}$

(2.27) ve (2.28) denklemleri, (2.25) ve (2.26) denklemlerinde yerine konulursa,

$$EI W'''' + \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \omega^2 W'' - \left(\rho A \omega^2 - \frac{\rho^2 I}{kG} \omega^4 \right) W = 0 \quad (2.29)$$

$$EI \Phi'''' + \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \omega^2 \Phi'' - \left(\rho A \omega^2 - \frac{\rho^2 I}{kG} \omega^4 \right) \Phi = 0 \quad (2.30)$$

Aşağıdaki kabulü yapalım,

$$a = \frac{\rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \omega^2}{EI} \quad (2.31)$$

$$b^4 = \frac{\rho A \omega^2 - \frac{\rho^2 I}{kG} \omega^4}{EI} \quad (2.32)$$

(2.29) ve (2.30) denklemlerinin genel çözümü aşağıdaki gibidir;

$$W = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x \quad (2.33)$$

$$\Phi = D_1 \cosh \alpha x + D_2 \sinh \alpha x + D_3 \cos \beta x + D_4 \sin \beta x \quad (2.34)$$

Burada ;

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{a^2 + 4b^4} \right)} \quad (2.35)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + 4b^4} \right)} \quad (2.36)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 düşey yer değıştirme fonksiyonu W keyfi sabitleridir. Aynı şekilde D_1, D_2, D_3, D_4 katsayıları Φ fonksiyonun W fonksiyonuna bağı keyfi sabitleridir. Bu sabitler arasındaki bağıntı aşığıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} D_1 &= mC_2 \\ D_2 &= mC_1 \\ D_3 &= nC_4 \\ D_4 &= -nC_3 \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$m = \frac{kGA\alpha}{-EI\alpha^2 - \rho I\omega^2 + kGA} \quad (2.38)$$

$$n = \frac{kGA\beta}{-EI\beta^2 - \rho I\omega^2 + kGA} \quad (2.39)$$

Yer değıştirme fonksiyonları tekrar yazılırsa;

$$W = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x \quad (2.40)$$

$$\Phi = mC_1 \sinh \alpha x + mC_2 \cosh \alpha x - nC_3 \sin \beta x + nC_4 \cos \beta x \quad (2.41)$$

İleriki bölümlerde mesnetsiz uçlardaki kesme kuvvetinin sıfıra eşit olduğı sınır şartını daha rahat inceleyebilmek için aşığıdaki denklemleri tanımlayalım;

$$\Gamma(x) = W'(x) - \Phi(x) \quad (2.42)$$

$$\Gamma = dC_1 \sinh \alpha x + dC_2 \cosh \alpha x - eC_3 \sin \beta x + eC_4 \cos \beta x \quad (2.43)$$

Bu denklemde;

$$d = \alpha - m \quad (2.44)$$

$$e = \beta - n \quad (2.45)$$

2.2 Sınır Şartları

2.2.1 İki ucu ankastre mesnetli durum

İki ucu ankastre olan kirişlerde sınır koşullarını belirlerken çökme ve dönme açısından yararlanılır. Bilindiği üzere kirişin ankastre mesnetli noktalarında çökme oluşmaz ve kiriş kesitinin yatay eksenle yaptığı açı sıfır olarak alınır. Böylece sınır koşulları;

$$W(0) = 0 \quad (2.46)$$

$$W(L) = 0 \quad (2.47)$$

$$\Phi(0) = 0 \quad (2.48)$$

$$\Phi(L) = 0 \quad (2.49)$$

Daha önce bulduğumuz (2.40) ve (2.41) nolu denklemlerde sınır şartları yerine konursa;

$$W(0) = C_1 + C_3 \quad (2.50)$$

$$\Phi(0) = mC_2 + nC_4 \quad (2.51)$$

$$W(L) = C_1 \cosh \alpha L + C_2 \sinh \alpha L + C_3 \cos \beta L + C_4 \sin \beta L \quad (2.52)$$

$$\Phi(L) = mC_1 \sinh \alpha L + mC_2 \cosh \alpha L - nC_3 \sin \beta L + nC_4 \cos \beta L \quad (2.53)$$

Sistemin doğal frekansının bulunabilmesi için denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenip kirişin frekans denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & n \\ \cosh \alpha L & \sinh \alpha L & \cos \beta L & \sin \beta L \\ m \sinh \alpha L & m \cosh \alpha L & -n \sin \beta L & n \cos \beta L \end{vmatrix} = 0 \quad (2.54)$$

2.2.2 İki ucu basit mesnetli durum

İki ucu sabit mesnetli kirişin iki ucunda da çökme oluşmaz ve eğilme momenti uç noktalarda sıfıra eşittir. Böylece sınır koşulları;

$$W(0) = 0 \quad (2.55)$$

$$W(L) = 0 \quad (2.56)$$

$$\Phi'(0) = 0 \quad (2.57)$$

$$\Phi'(L) = 0 \quad (2.58)$$

Daha önce bulduğumuz (2.40) ve (2.41) nolu denklemlerde sınır şartları yerine konursa;

$$W(0) = C_1 + C_3 \quad (2.59)$$

$$\Phi'(0) = m\alpha C_2 - n\beta C_4 \quad (2.60)$$

$$W(L) = C_1 \cosh \alpha L + C_2 \sinh \alpha L + C_3 \cos \beta L + C_4 \sin \beta L \quad (2.61)$$

$$\Phi'(L) = m\alpha C_1 \cosh \alpha L + m\alpha C_2 \sinh \alpha L - n\beta C_3 \cos \beta L - n\beta C_4 \sin \beta L \quad (2.62)$$

Sistemin doğal frekansının bulunabilmesi için denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenip kirişin frekans denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ m\alpha & 0 & -n\beta & 0 \\ \cosh \alpha L & \sinh \alpha L & \cos \beta L & \sin \beta L \\ m\alpha \cosh \delta L & m\alpha \sinh \delta L & -n\beta \cos \varepsilon L & -n\beta \sin \varepsilon L \end{vmatrix} = 0 \quad (2.63)$$

2.2.3 Bir ucu serbest diğer ucu ankastre mesnetli durum

Ankastre durumdaki sınır koşulları (2.46) ve (2.48) denkleminde verilmişti. Serbest uç için serbest uçta kesme kuvveti ve moment değeri sıfıra eşittir. Böylece sınır koşulları;

$$W(0) = 0 \quad (2.64)$$

$$\Phi(0) = 0 \quad (2.65)$$

$$\Phi'(L) = 0 \quad (2.66)$$

$$\Gamma(L) = 0 \quad (2.67)$$

(2.40), (2.41) ve (2.43) denklemlerinde sınır şartları yerine konulursa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$W(0) = C_1 + C_3 \quad (2.68)$$

$$\Phi(0) = mC_2 + nC_4 \quad (2.69)$$

$$\Phi'(L) = m\alpha C_1 \cosh \alpha L + m\alpha C_2 \sinh \alpha L - n\beta C_3 \cos \beta L - n\beta C_4 \sin \beta L \quad (2.70)$$

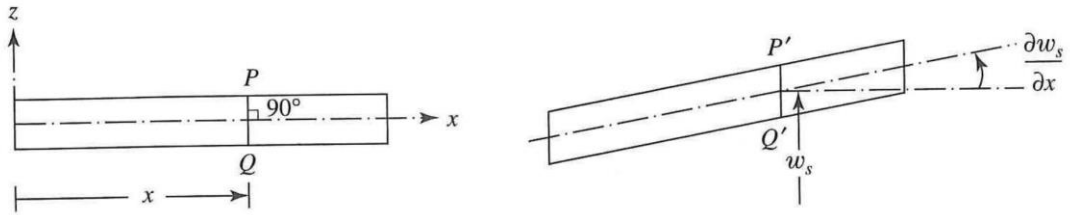
$$\Gamma(L) = dC_1 \sinh \alpha L + dC_2 \cosh \alpha L - eC_3 \sin \beta L + eC_4 \cos \beta L \quad (2.71)$$

Sistemin doğal frekansının bulunabilmesi için denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenip kirişin frekans denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & n \\ m\alpha \cosh \alpha L & m\alpha \sinh \alpha L & -n\beta \cos \beta L & -n\beta \sin \beta L \\ d \sinh \alpha L & d \cosh \alpha L & -e \sin \beta L & e \cos \beta L \end{vmatrix} = 0 \quad (2.72)$$

2.3 Kayma Kiriş Teorisi

Kayma kirişinde, klasik (Euler) kiriş teorisine ek olarak kayma gerilmesinden kaynaklanan deformasyonları da göz önüne alır. Ancak Timoshenko kirişinin aksine dönel ataletin etkilerin ihmal edilir. Bu etkinin ihmal edilmesinin sebebi dönel ataletin kirişe katkısının diğer etkilerden görece olarak çok daha küçük olmasıdır.



Şekil 2.3 : Saf kayma deformasyonu

Kayma kiriş teorisinde kesit tarafsız eksene olan dikliğini korumaz. Kesitin deformasyondan sonra kirişin eğimi kayma açısı ve eğilme açısının toplamına eşittir.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma + \phi \quad (2.73)$$

Kayma kirişinde kesit boyunca gerinim dağılımı aşağıdaki gibi kabul edilir.

$$\varepsilon = -z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.74)$$

(2.74) denkleminde ε, z ve ϕ sırasıyla gerinim, tarafsız eksene uzaklık ve kirişin eğilme momentinden kaynaklı eğimini temsil etmektedir.

Kirişin eğilme momentinden kaynaklı potansiyel enerjisi,

$$V_{eğilme} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dV \quad (2.75)$$

Kirişin kesme kuvvetlerinden kaynaklı potansiyel enerjisi,

$$V_{kayma} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dV = \frac{1}{2} \int_0^\ell kGA \gamma^2 dx \quad (2.76)$$

Kirişin toplam potansiyel enerjisi (2.75) ve (2.76) denklemlerinin toplamına eşittir.

$$V = V_{eğilme} + V_{kayma} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_A \left[Ez^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \kappa G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.78)$$

Yukarıdaki denklemde elastisite modülü, atalet momenti, kayma düzeltme faktörü, kayma modülü, kayma açısı sırasıyla E, I, κ, G, γ 'dır.

Yukarıda bahsedildiği gibi kayma kirişinde dönel atalet etkisi yok sayılmaktadır böylece kirişin kinetik enerjisi sadece kirişin kütesinden kaynaklı olacaktır.

$$T = T_{küttele} \quad (2.79)$$

Kütlenin düşey yer değiştirmesinden kaynaklı kinetik enerjisi;

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (2.80)$$

Dış kuvvetler tarafından yapılan iş;

$$W = \int_0^{\ell} f w dx \quad (2.81)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - (U + W)] dt \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{\ell} \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx \right. \\ & \left. - \int_0^{\ell} \left[-\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \phi \right] dx - \int_0^{\ell} \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] dx - \int_0^{\ell} f \delta w dx \right\} dt \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi \right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi \right) dx \right] dt \quad (2.84)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left[\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \kappa AG \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w dx \right] dt \quad (2.85)$$

(2.84) ve (2.85) denklemleri (2.82) da yerine konulursa;

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \right]_0^{\ell} + \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi \right]_0^{\ell} \right. \\ & + \left[- \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right) + \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - f \right] \delta w dx \\ & \left. + \int_0^{\ell} \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right] \delta \phi dx \right\} dt \end{aligned} \quad (2.86)$$

(2.86) denklemden genel sınır şartları Timoshenko kirişiyle aynı bulunur.

$$\left[\kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \right]_0^{\ell} = 0 \quad (2.87)$$

$$\left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi \right]_0^\ell = 0 \quad (2.88)$$

(2.86) denklemi çökme ve dönme fonksiyonlarına göre ayrılırsa,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa AG \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = f \quad "w" \quad (2.89)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \kappa AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right] = 0 \quad "\phi" \quad (2.90)$$

(2.89) ve (2.90) denklemleri düzenlenirse;

$$-\kappa AG \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \kappa AG \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (2.91)$$

$$-EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - kGA \frac{\partial w}{\partial x} + kGA \phi = 0 \quad (2.92)$$

Timoshenko Kirişinde uyguladığımız işlemleri burada da uygularsak kayma kirişinin hareket denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho EI}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (2.93)$$

$$EI \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho EI}{kG} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (2.94)$$

Benzer şekilde (2.27) ve (2.28) denklemleri kullanılırsa;

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega t} \quad (2.95)$$

$$\phi(x, t) = \Phi(x) e^{i\omega t} \quad (2.96)$$

(2.95) ve (2.96) denklemleri (2.93) ve (2.94) denklemlerine yerleştirilirse;

$$EI W'''' + \left(\frac{\rho EI}{kG} \right) \omega^2 W'' - \rho A \omega^2 W = 0 \quad (2.97)$$

$$EI \Phi'''' + \left(\frac{\rho EI}{kG} \right) \omega^2 \Phi'' - \rho A \omega^2 \Phi = 0 \quad (2.98)$$

Daha önce Timoshenko kirişinde yaptığımız kabule benzer kabuller yapalım.

$$a = \frac{\left(\frac{\rho EI}{kG} \right) \omega^2}{EI} \quad (2.99)$$

$$b^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (2.100)$$

Böylece Kayma kiriş denkleminin genel çözümü;

$$W = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x \quad (2.101)$$

$$\Phi = D_1 \cosh \alpha + D_2 \sinh \alpha x + D_3 \cos \beta x + D_4 \sin \beta x \quad (2.102)$$

Burada;

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{a^2 + 4b^4} \right)} \quad (2.103)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + 4b^4} \right)} \quad (2.104)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 Düşey yer değiştirme fonksiyonu W keyfi sabitleridir. Aynı şekilde D_1, D_2, D_3, D_4 katsayıları Φ fonksiyonun W fonksiyonuna bağlı keyfi sabitleridir. Bu sabitler arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} D_1 &= mC_2 \\ D_2 &= mC_1 \\ D_3 &= nC_4 \\ D_4 &= -nC_3 \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$m = \frac{kGA\alpha}{-EI\alpha^2 + kGA} \quad (2.106)$$

$$n = \frac{kGA\beta}{EI\beta^2 + kGA} \quad (2.107)$$

Yer değiştirme fonksiyonları tekrar yazılırsa;

$$W = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x \quad (2.108)$$

$$\Phi = mC_1 \sinh \alpha x + mC_2 \cosh \alpha x - nC_3 \sin \beta x + nC_4 \cos \beta x \quad (2.109)$$

İleriki bölümlerde mesnetsiz uçlardaki kesme kuvvetinin sıfıra eşit olduğu sınır şartını daha rahat inceleyebilmek için aşağıdaki denklemleri tanımlayalım;

$$\Gamma(x) = W'(x) - \Phi(x) \quad (2.110)$$

$$\Gamma = dC_1 \sinh \alpha x + dC_2 \cosh \alpha x - eC_3 \sin \beta x + eC_4 \cos \beta x \quad (2.111)$$

Bu denklemde;

$$d = \alpha - m \quad (2.112)$$

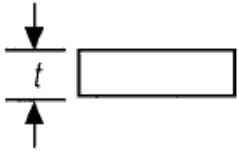
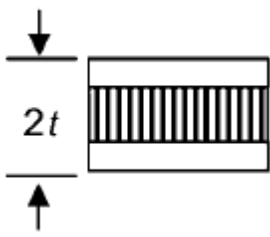
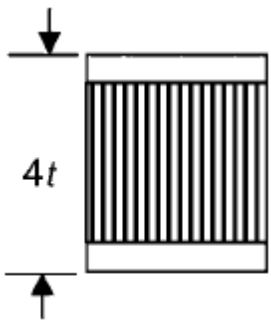
$$e = \beta - n \quad (2.113)$$

Timohenko kirişi gibi kayma kirişine de sınır şartları uygulanırsa frekans denklemleri Timoshenko kirişiyle aynı bulunur. Burada sadece dikkat edilmesi gereken durum kayma kirişi için tanımlanan bazı sabitler Timoshenko kirişinden farklıdır.

3. SANDVIÇ YAPILARDA TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Eğilme Rijitliği

Eğilme rijitliği bir yapının yüke yada kendi ağırlığına maruz kaldığında eğilme davranışına olan direncidir. Eğilme rijitliği, elastisite modülünün yapının atalet momentiyile çarpımına eşittir. Eğilme rijitliğini arttırabilmek için ya yüksek elastisite modülüne sahip malzeme kullanılması ya da yüksek atalet momentine sahip profil yapıdaki kirişler kullanılması gerekmektedir. Sandviç yapıdaki kirişler bu bakımdan profil kirişlerle benzer özellikler göstermekte ek olarak düşük yoğunluklu çekirdek malzemesi kullanılabilmesi sebebiyle yüksek eğilme rijitliği/ağırlık oranı sunmaktadır.

			
Rijitlik	1.0	7.0	37.0
Eğilme Dayanımı	1.0	3.5	9.2
Ağırlık	1.0	1.03	1.06

Şekil 3.1 : Çekirdek kalınlığına bağlı olarak sandviç yapılardaki özelliklerin değişimi

Şekilde görüldüğü gibi yapının ağırlığı homojen kiriş durumundan sandviç kiriş yapısına değiştirildiğinde ilk duruma göre ağırlık değişimi çok küçük olmasına rağmen yükselen atalet momenti nedeniyle bize oldukça yüksek eğilme rijitliği ve eğilme dayanımı sunmaktadır.

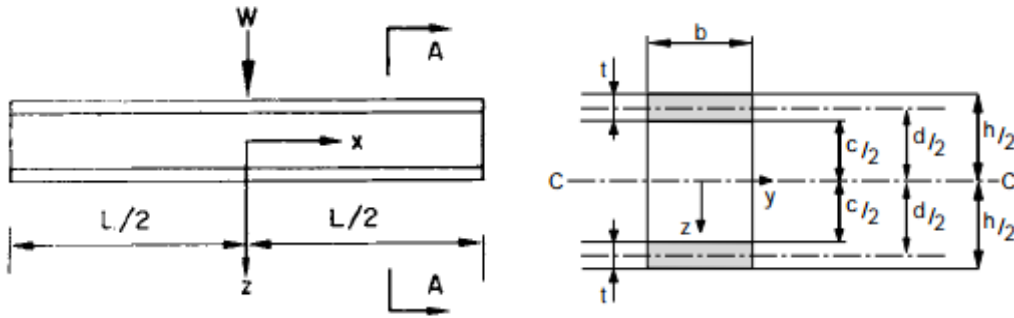
Sabit bir eğilme momentine maruz kirişin eğriliği ve kirişin z eksenine boyunca liflerinde oluşan gerinim lineer değişimi aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$\varepsilon_x = \kappa_x z \quad (3.1)$$

Eğilme momenti eğrilik ilişkisinden yararlanılarak

$$M_x = \int \sigma_x z dz = \int \frac{Ez^2}{R_x} dz = \kappa_x \int Ez^2 dz = \frac{EI}{R_x} \quad (3.2)$$

$$EI = \int Ez^2 dz = D \quad (3.3)$$



Şekil 3.2 : Bir sandviç kirişin geometrik yapısı

(3.2) denkleminde EI malzemenin elastisite modülünün yapının atalet momentiyile çarpımından oluşan eğilme rijitliğini vermektedir. Bu durum homojen kirişlerde uygulanabilir ancak sandviç kirişler gibi yapının homojen olmadığı elastisite modülünün kesit boyunca değişim gösterdiği durumlarda kesit boyunca katmanların eğilme rijitliklerinin toplamına eşittir.

Simetrik sandviç kirişler için bu durum aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E_x I = (E_x I)_{\text{yüzey}} + (E_x I)_{\text{çekirdek}} \quad (3.4)$$

$\frac{E_x I}{b}$ sandviç kirişler için birim genişlik başına düşen eğilme rijitliğini ifade eder ve

D harfi ile gösterilir.

$$D = 2D_f + D_0 + D_c \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_x I}{b} = D &= \int E z^2 dz \\ &= \left(\frac{E_f t_f^3}{12} + E_f t_f \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right)_{\text{üst}} + \left(\frac{E_f t_f^3}{12} + E_f t_f \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right)_{\text{alt}} + \left(\frac{E_c t_c^3}{12} \right)_{\text{çekirdek}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Denklemleri daha sade hale getirirsek;

$$D = \frac{E_f t_f^3}{6} + E_f t_f \frac{d^2}{2} + \frac{E_c t_c^3}{12} \quad (3.7)$$

D_f : alt ve üst yüzeyin kendi tarafsız eksenlerine göre eğilme rijitliği

D_0 : alt ve üst yüzeyin kirişin tarafsız eksenine göre eğilme rijitliği

D_c : çekirdeğin eğilme rijitliği

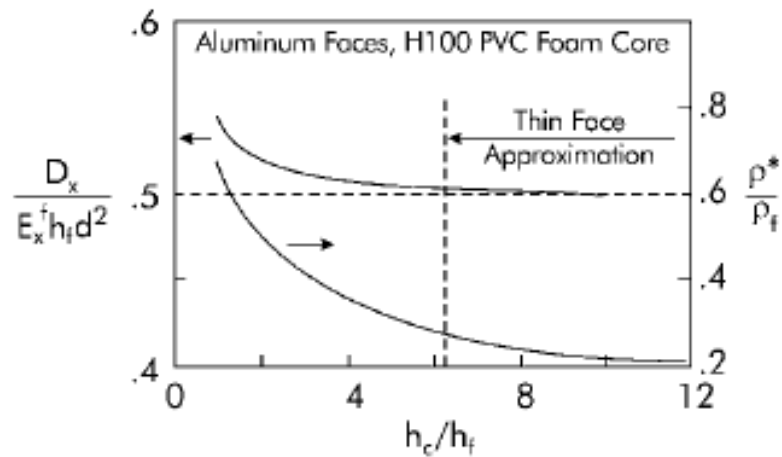
E_f : alt ve üst yüzeyin elastik modülü

E_c : çekirdeğin elastik modülü

t_f : yüzey kalınlığı

t_c : çekirdek kalınlığı

d : yüzey ile çekirdeğin merkezleri arasındaki uzaklık, $d = t_f + t_c$



Şekil 3.3 : Sandviç kirişte ince yüzey yaklaşımı

İşlem kolaylıkları olsun diye hesaplamalarda bazı yaklaşımlar uygulanır:

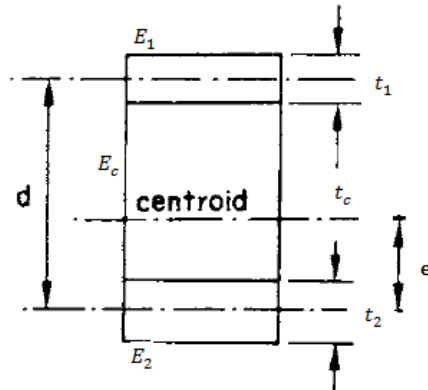
- Eğer $\frac{2D_f}{D_0} < 0.01$ yani
- $\frac{d}{t_f} < 5.777$ ise ince yüzey yaklaşımı
- Eğer $\frac{D_c}{D_0} < 0.01$ ise zayıf çekirdek yaklaşımı

Şekil 3.3 te, yüzey malzemesi olarak kullanılan alüminyum ve çekirdek malzemesi olarak kullanılan PVC köpük ile oluşturulmuş sandviç kiriş için malzeme değerlerinin girilmesiyle elde edilen kalınlığa göre rijitlik ve yoğunluk değerleri gösterilmiştir. Buradan da anlaşıldığı üzere çekirdek kalınlığının yüzey kalınlığına oranı belli bir değerden sonra rijitliğe etki etmemektedir. Bu yüzden ince yüzey yaklaşımı sandviç kirişlerde uygulanabilir.

Bu iki yaklaşımlar uygulandığında sandviç kirişin eğilme rijitliği:

$$D = E_f t_f \frac{d^2}{2} \quad (3.8)$$

Simetrik olmayan sandviç kirişlere baktığımızda kirişin yüzey katmanlarında farklı malzeme kullanılması yada farklı kalınlarda malzeme kullanılması yüzey katmanlarında farklı eğilme rijitlerine sahip olmasına neden olacak ve kirişin asal ekseninin kirişin tam orta eksenine göre bir miktar eksantrikliğe sahip olmasına neden olacaktır.



Şekil 3.4 : Simetrik olmayan sandviç kiriş yapısı

Simetrik olmayan kirişlerde eğilme rijitliğini hesaplayabilmek için öncelikle tarafsız eksenini belirlememiz gerekir. Tarafsız eksen ile tarafsız eksene yakın olan yüzeyin merkezi arasındaki uzaklığı e ile gösterirsek eğilme rijitliği;

$$E_1 t_1 \left(\frac{t_1}{2} + t_c + \frac{t_2}{2} \right) + E_c t_c \left(\frac{t_c}{2} + \frac{t_2}{2} \right) = e (E_1 t_1 + E_c t_c + E_2 t_2) \quad (3.9)$$

$$d = \frac{t_1}{2} + t_c + \frac{t_2}{2} \quad (3.10)$$

Simetrik olmayan sandviç kirişlerde asal ekseninde bulunmasıyla yapının eğilme rijitliğini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$D = \frac{E_1 t_1^3}{12} + \frac{E_2 t_2^3}{12} + \frac{E_c t_c^3}{12} + E_1 t_1 (d - e)^2 + E_2 t_2 e^2 + E_c t_c \left(\frac{t_c + t_2}{2} - e \right)^2 \quad (3.11)$$

3.2 Normal ve Kayma Gerilmesi

Sandviç yapılarda uygulanan eğilme momenti sebebiyle normal gerilmeler oluşur. Katmanların farklı elastisite modülüne sahip olması nedeniyle çekirdek ve yüzey katmanlarında farklı gerilmeler oluşacaktır.

$$\sigma_f = \frac{M_x z E_f}{D} \quad (3.12)$$

$$\sigma_c = \frac{M_x z E_c}{D} \quad (3.13)$$

Burada

σ_f yüzeylerde oluşan gerilmeyi,

σ_c çekirdekte oluşan gerilmeyi gösterir.

M_x yük etkisiyle oluşan eğilme momentidir.

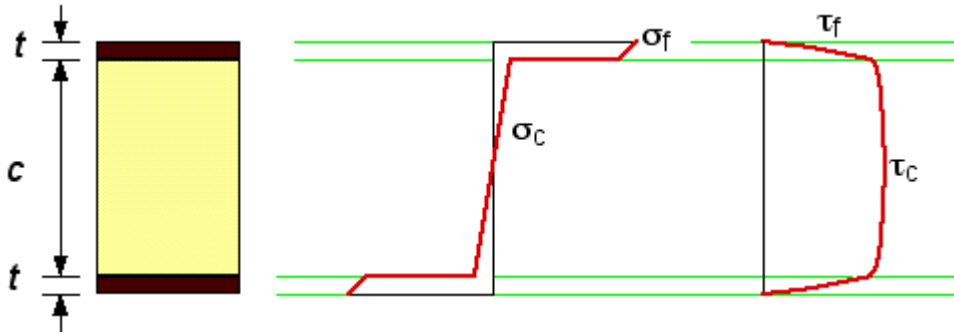
D eğilme rijitliğini, z yüzey ve çekirdeğin tarafsız eksenlerden uzaklığını gösterir. Bu uzaklık arttıkça normal gerilme değeri artar, minimum değeri $z = 0$ eksenindedir.

Kesme kuvvetlerinin etkisiyle çekirdekte de kayma gerilmesi oluşur:

$$\tau_c = \frac{T_x}{D} \left(E_f t_f \frac{d}{2} + \frac{E_c}{2} \left(\frac{t_c^2}{4} - z^2 \right) \right) \quad (3.14)$$

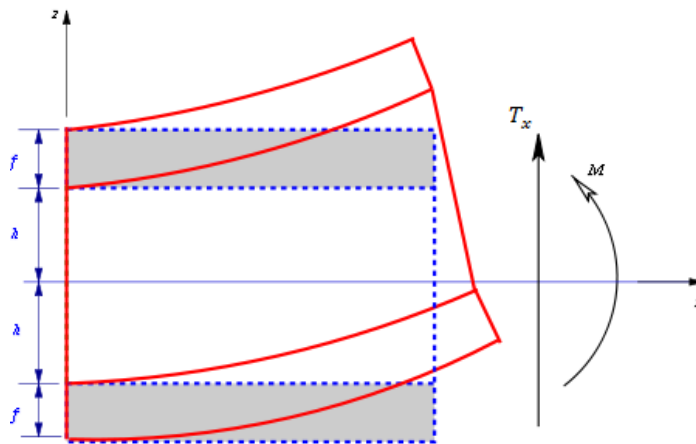
Denklemden görüldüğü üzere $z = 0$ ise çekirdekdeki kayma gerilmesi maksimum değerine ulaşır, yüzeye yaklaştıkça kayma gerilmesi azalır.

Sandviç kirişlerde yüzeyin yapıya gelen doğrudan gerilmeleri (basma ve çekme), çekirdeğin de kirişe gelen kayma gerilmelerini taşıdığından söz etmiştik. Aşağıdaki şekilde sandviç kirişlere gelen gerilmelerin dağılımı gösterilmiştir;

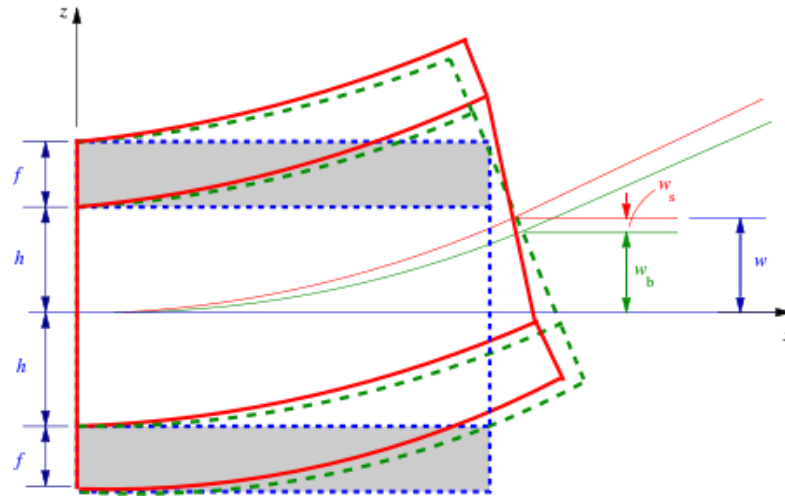


Şekil 3.5 : Sandviç kirişte normal ve kayma gerilmesi dağılımı

Sandviç yapıdaki kirişlerde, kesme kuvvetleri ve eğilme momentlerinden dolayı bazı deformasyonlar oluşur. Şekil 3.6 ve Şekil 3.7’de bu gerilmelerden dolayı kirişin kesitinde oluşan deformasyon gösterilmiştir.



Şekil 3.6 : Sandviç kirişte deformasyona neden olan yükler



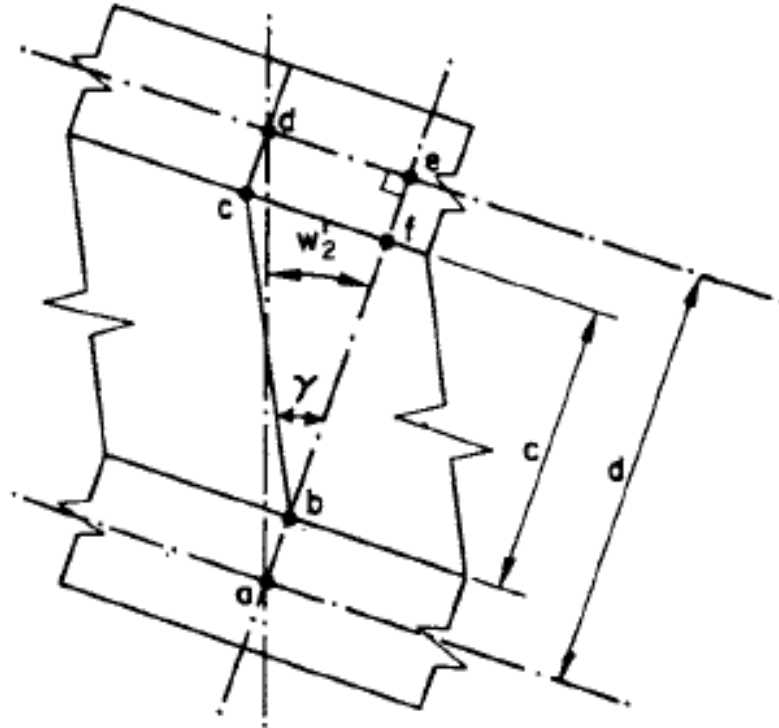
Şekil 3.7 : Sandviç kirişlerde eğilme ve kayma deformasyonu

w_b : Eğilme momentinden dolayı oluşan eğilme deformasyonu

w_s : Kesme kuvvetinden dolayı oluşan kayma deformasyonu

w : Kirişteki toplam deformasyon,

$$w = w_b + w_s \quad (3.15)$$



Şekil 3.8 : Saf kaymaya maruz sandviç kiriş

$$\frac{dw_s}{dx} = \gamma_{xz} \frac{t_c}{d} = \frac{T_x}{Gbd} \frac{t_c}{d} = \frac{T_x}{AG} \quad (3.16)$$

AG çarpanı kirişin kayma rijitliği olarak bilinir ve S harfi ile gösterilir.

İnce yüzey ($t_f \ll t_c$) ve zayıf çekirdek ($E_c \ll E_f$) yaklaşımı yapılırsa;

$$S = \frac{G_c d^2}{t_c} \quad (3.17)$$

3.3 Atalet Kuvvetleri

3.3.1 Düşey hareketin ataleti

Dikey atalet, kirişin kendi konumunu korumak istemesi sonucu yani herhangi bir ivmelenmeye maruz kalması ile oluşan kuvvetlerdir. Kirişin toplam çökmesini w olarak tanımlarsak kirişte oluşan ivme $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ olur. Dikey atalet;

$$f = \int \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz = -\rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

f = dikey atalet

ρ^* = birim uzunluk başına düşen kütle

$$\rho^* = \int \rho dz = (\rho_f t_f)_{üst} + (\rho_f t_f)_{alt} + \rho_c t_c \quad (3.19)$$

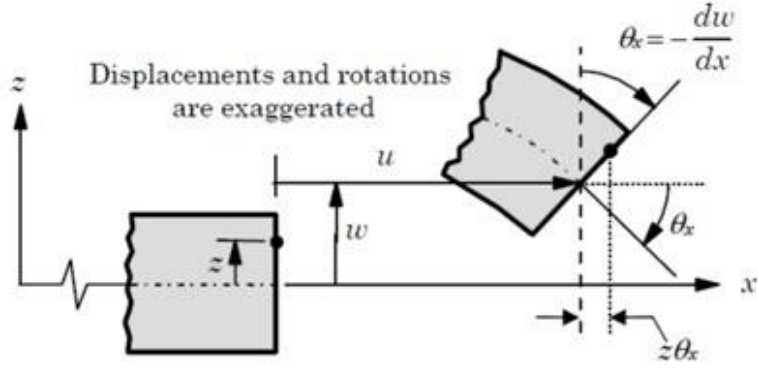
simetrik sandviç kirişlerde alt ve üst yüzeyler tamamen aynı özellikte ve kalınlıkta olduğundan;

$$\rho^* = 2\rho_f t_f + \rho_c t_c \quad (3.20)$$

3.3.2 Dönel atalet

Kirişlerin kesit alanına baktığımızda maruz kaldıkları kuvvetler sebebiyle eğilmeler ve bunun sonucunda da kesitlerinde dönmeler oluşur. Bu dönme kirişte dönme momentleri oluşturur. x yönünde oluşan yer değiştirme u olarak tanımlarsak bu yönde

oluşan ivmelenme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ olur.



Şekil 3.9 : Deformasyona maruz kirişin eğimi

Eksenel uzama ve kirişim eğimi aşağıdaki gibi tanımlanırsa ;

$$\theta_x = \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (3.21)$$

$$u = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (3.22)$$

$$M_R = -\int \rho z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz = \int \rho z^2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dz = R \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \quad (3.23)$$

Simetrik sandviç kiriş için dönme ataleti;

$$R = \frac{\rho_f t_f^3}{6} + \rho_f t_f \frac{d^2}{2} + \frac{\rho_c t_c^3}{12} \quad (3.24)$$

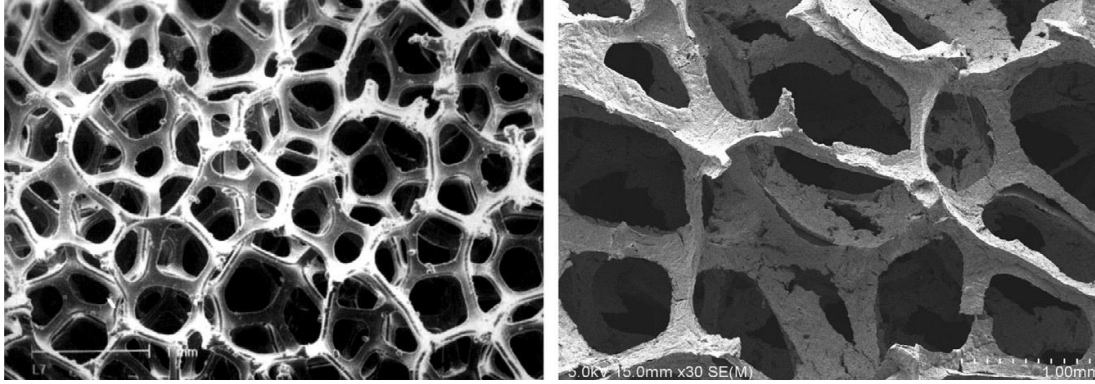
Simetrik olmayan sandviç kirişler için dönme ataleti, kirişin eğilme rijitliğini hesapladığımız yöntemle hesaplanabilir.

3.4 Çekirdeği Gözenekli Malzemeler

Metal köpükler son yıllarda kullanımı yaygınlaşan düşük yoğunluklu, farklı mekanik, elektrik, termal ve akustik özelliklere sahip yeni malzemelerdir. Metal köpükler ağırlık/rijitlik oranında önemli kazançlar sunmaktadır, ayrıca yüksek enerji absorpsiyonu, ısıl izolasyon ve titreşim sönümleme gibi özellikler sunmaktadır.

Metal köpükler yoğunluklarına oranla sağladıkları yüksek elastisite modülü ve akma dayanımı sayesinde özellikle sandviç yapılarda önemli bir çekirdek malzemesi olarak tercih edilmektedir. Polimer esaslı çekirdek malzemeleri sahip olduğu belirsizlikler,

mekanik özelliklerinin zayıf olması ve ısıf farklardan çabuk etkilenmeleri nedeniyle metal köpüklerin gerisinde kalmaktadır.



Şekil 3.10 : Açık hücreli metal köpükler

Metal köpüklerin mekanik özellikleri hücre yapısına, boyutuna, homojenliğine ve en önemlisi nispi yoğunluğuna bağılı olarak değışikliklik göstermektedir.

Bu çalışmada Ashby ve Gibson'ın yaklaşımları kullanılarak gözeneklilik oranına göre metal köpüklerin mekanik özellikleri kullanılacaktır. Açık hücreli metal köpükler için bu eşitlik aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$E = C_1 E_s \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 \quad (3.25)$$

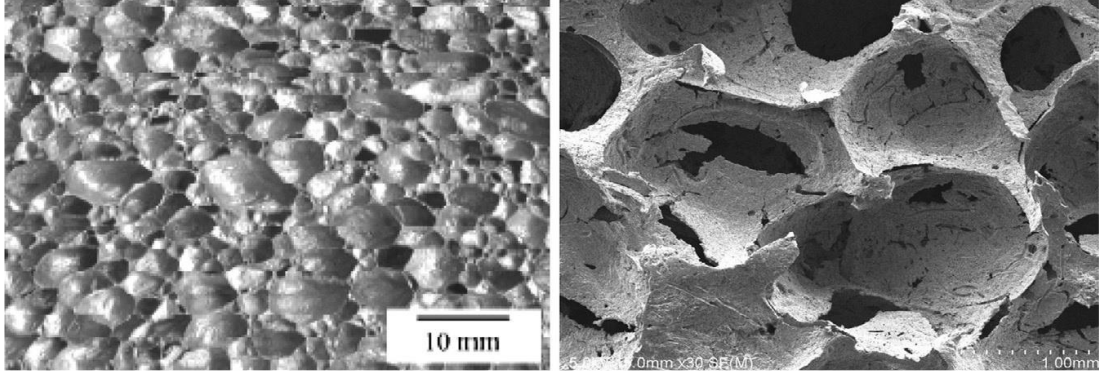
Bu denklemler E metal köpük malzemenin elastisite modülü, E_s katı malzemenin elastisite modülü, ρ^* metal köpük malzemenin özkütlesi, ρ katı malzemenin özkütlesi ve C_1 malzemenin karakterizasyonuna bağılı sabit. C_1 açık hücreli metal köpükler için yaklaşık olarak $C_1 \approx 1$ olarak kabul edilebilir.

Kayma modülü açık hücreli metal köpükler için homojen izotropik malzemelerle benzer özellikler gösterir ve G^* olarak gösterilmektedir.

$$G^* \approx \frac{3}{8} E_s \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 \quad (3.26)$$

Benzer yaklaşımlar kapalı hücreli metal köpükler içinde geliştirilmiştir. Ashby ve Gibson tarafından sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak geliştirilen yaklaşım aşağıdaki gibidir.

$$\frac{E^*}{E_s} = 0,32 \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 + 0,32 \left(\frac{\rho^*}{\rho} \right) \quad (3.27)$$



Şekil 3.11 : Kapalı hücreli metal köpükler

4. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Lineer ve nonlinear adi diferansiyel denklemler ile kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan metot 1986 yılında Zhou tarafından elektrik devrelerine uygulanmıştır. Bu yöntem diferansiyel denklemlerin Taylor seri çözümündeki katsayıların farklı biçimde hesaplanmasını içermektedir. Taylor serisi çözümünden yüksek mertebeden türevlerin hesaplanması uzun ve zor süreçtir ancak diferansiyel dönüşüm metodu diferansiyel denklemleri cebirsel ifadelerle dönüştürmekte böylece hızlı ve kolay çözüm elde edilmesini sağlamaktadır. Diferansiyel dönüşüm metodu diğer numerik yöntemler gibi yaklaşık çözümler verse de, diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında daha kolay bir prosedüre sahiptir. Bu özelliğiyle bilgisayar destekli çözüm yapılabilmesini kolaylaştırmakta, ayrıca lineer, nonlinear ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilmesiyle uygulama alanlarını da genişletmektedir.

Çizelge 4.1 : Bazı fonksiyonların diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış karşılıkları

Orjinal Fonksiyon	Diferansiyel Transform
$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
$w(x) = cu(x), c \in \mathbb{R}$	$W(k) = cU(k), c \in \mathbb{R}$
$w(x) = \frac{d}{dx}u(x)$	$W(k) = (k+1)U(k+1) = \frac{(k+1)!}{k!}U(k+1)$
$w(x) = \frac{d^r}{dx^r}u(x)$	$W(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)U(k+r) = \frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$
$w(x) = u(x)v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$
$w(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$W(k) = \delta(k)$
$w(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$W(k) = a\delta(k-1)$

4.1 Timoshenko Kiriş Teorisi İçin Diferansiyel Dönüşüm Metodu

2. bölümde Timoshenko kirişi için elde edilen yönetici diferansiyel denklemler bulunmuştu. Bu denklem sistemine yukarıda bahsettiğimiz diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa denklem sistemi aşağıdaki hali alır.

$$W[k+2] = \frac{S^*(k+1)(k+2) * \Phi[k+1] - \rho^* \omega^2 * W[k]}{S^*(k+1)(k+2)} \quad (4.1)$$

$$\Phi[k+2] = \frac{(S - R\omega^2) * \Phi[k] - S^*(k+1) * W[k+1]}{D^*(k+1)(k+2)} \quad (4.2)$$

Elde edilen diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış denklemlerin çözümü için sınır koşullarından yararlanılır. Kirişin bir ucu için sınır koşulları diferansiyel dönüşüm metodu uygulanarak Çizelge 4.2'deki gibi bulunur.

Çizelge 4.2 : Sınır şartlarının diferansiyel dönüşümü

	x=0	x=L
$w(x)$	$W[0]$	$\sum_{k=0}^n W[k] * L^k$
$w'(x)$	$W[1]$	$\sum_{k=0}^n k * W[k] * L^{k-1}$
$\Phi(x)$	$\Phi[0]$	$\sum_{k=0}^n \Phi[k] * L^k$
$\Phi'(x)$	$\Phi[1]$	$\sum_{k=0}^n k * \Phi[k] * L^{k-1}$

Burada n değeri hesaplanan terim sayısını vermektedir. DDM uygulanmış denklem sisteminin özdeğer problemine dönüştürülebilmesi için bilinmeyen sınır şartlarına keyfi sabitler atanır problem aşağıdaki hale dönüşür.

$$\begin{bmatrix} M_{11}(w) & M_{12}(w) \\ M_{21}(w) & M_{22}(w) \end{bmatrix} * C = 0 \quad (4.3)$$

Burada C, x=0 daki bilinmeyen sınır şartlarının oluşturduğu keyfi sabitlerdir. Problemin aşikar olmayan çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenir.

$$\begin{vmatrix} M_{11}(w) & M_{12}(w) \\ M_{21}(w) & M_{22}(w) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

Bundan sonra determinantı sıfır yapan kökler bulunur ve w değerleri çekilerek serbest titreşim analizi için kirişin doğal frekansları bulunur.

4.2 Timoshenko Kiriş Teorisi İçin Sınır Şartları

4.2.1 Basit mesnet için diferansiyel dönüşüm metodu

Basit mesnetli durumda mesnetin bulunduğu noktadaki yer değişme ve moment değeri sifıra eşittir. Bu durum için orijinal ve diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış sınır şartları Çizelge 4.3'deki gibi bulunur.

Çizelge 4.3 : Basit mesnet için sınır şartları

Orijinal Sınır Şartı	Diferansiyel Dönüşüm
$w(0) = 0$	$W[0] = 0$
$\Phi'(0) = 0$	$\Phi[1] = 0$
$w(L) = 0$	$\sum_{k=0}^n W[k] * L^k$
$\Phi'(L) = 0$	$\sum_{k=0}^n k * \Phi[k] * L^{k-1}$

4.2.2 Ankastre mesnet için diferansiyel dönüşüm metodu

Ankastre mesnetli durumda mesnetin bulunduğu noktadaki yer değişme ve dönme açısı değeri sifıra eşittir. Bu durum için orijinal ve diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış sınır şartları Çizelge 4.4'deki gibi bulunur.

Çizelge 4.4 : Ankastre mesnet için sınır şartları

Orijinal Sınır Şartı	Diferansiyel Dönüşüm
$w(0) = 0$	$W[0] = 0$
$\Phi(0) = 0$	$\Phi[0] = 0$
$w(L) = 0$	$\sum_{k=0}^n W[k] * L^k$
$\Phi(L) = 0$	$\sum_{k=0}^n \Phi[k] * L^{k-1}$

4.2.3 Serbest durum için diferansiyel dönüşüm metodu

Bir ucu serbest durumda serbest uçta kesme kuvveti ve moment değeri sıfıra eşittir. Bu durum için orijinal ve diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış sınır şartları Çizelge 4.5'deki gibi bulunur.

Çizelge 4.5 : Serbest durum için sınır şartları

Orijinal Sınır Şartı	Diferansiyel Dönüşüm
$w'(0) - \Phi(0) = 0$	$W[1] - \Phi[0] = 0$
$\Phi'(0) = 0$	$\Phi[1] = 0$
$w'(L) - \Phi(L) = 0$	$\sum_{k=0}^n k * W[k] * L^{k-1} - \sum_{k=0}^n \Phi[k] * L^k$
$\Phi'(L) = 0$	$\sum_{k=0}^n k * \Phi[k] * L^{k-1}$

4.3 Kayma Kiriş Teorisi İçin Diferansiyel Dönüşüm Metodu

2. bölümde Timoshenko kirişi için elde edilen yönetici diferansiyel denklemler bulunmuştu. Bu denklem sistemine yukarıda bahsettiğimiz diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa denklem sistemi aşağıdaki hali alır.

$$W[k+2] = \frac{S^*(k+1)(k+2) * \Phi[k+1] - \rho \omega^2 * W[k]}{S^*(k+1)(k+2)} \quad (4.5)$$

$$\Phi[k+2] = \frac{S^* \Phi[k] - S^*(k+1) - W[k+1]}{D^*(k+1) * (k+2)} \quad (4.6)$$

Elde edilen diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış denklemlerin çözümü için sınır koşullarından yararlanılır. Kirişin bir ucu için sınır koşulları diferansiyel dönüşüm metodu uygulanarak Çizelge 4.6'daki gibi bulunur.

Çizelge 4.6 : Kayma kirişi için sınır şartlarının diferansiyel dönüşümü

	x=0	x=L
$w(x)$	$W[0]$	$\sum_{k=0}^n W[k] * L^k$
$w'(x)$	$W[1]$	$\sum_{k=0}^n k * W[k] * L^{k-1}$
$\Phi(x)$	$\Phi[0]$	$\sum_{k=0}^n \Phi[k] * L^k$
$\Phi'(x)$	$\Phi[1]$	$\sum_{k=0}^n k * \Phi[k] * L^{k-1}$

Kayma kirişi için sınır şartları Timoshenko kirişi için bulunanlarla aynıdır. Çözümün elde edilebilmesi için Timoshenko kirişindeki yol izlenir.

5. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde sandviç kirişin serbest titreşim analizinin referans makalelerle Timoshenko ve Kayma kiriş teorileri karşılaştırılacaktır. Bu kiriş yapılarına malzemelerin mekanik özelliklerinin ve yapının geometrik etkileri incelenecektir. Son olarak yapılan analitik çözümler Diferansiyel Dönüşüm Metodu kullanılarak, bu yöntemin doğruluğu ve analitik çözüme yakınsama değerlerine bakılacaktır.

5.1 Timoshenko ve Kayma Kiriş Teorilerinin Analitik Çözümlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde referans [46] makalesindeki sayısal değerler göz önüne alınarak iki kiriş teorisi referans makalede yer alan modellerle karşılaştırılacaktır. İki teori birbirine çok yakın sonuçlar vermektedir. Timoshenko kirişi, Kayma kirişinden farklı olarak dönel ataletin etkilerini de göz önünde bulundurmaktadır, ancak bu etkinin kirişin doğal frekansına etkisinin ihmal edilebilecek düzeyde olduğu görülmektedir. Aşağıdaki çizelgelerde bu değerler karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.1 : Sandviç kirişin özellikleri

$L(mm)$	$h_f(mm)$	$h_c(mm)$	$E_f\left(\frac{N}{m^2}\right)$	$G_c\left(\frac{N}{m^2}\right)$	$\rho_f\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	$\rho_c\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
711.2	0.4572	12.7	68.9×10^9	82.68×10^6	2680	32.8
1218.7	0.4062	6.35	68.9×10^9	68.9×10^6	2687.3	119.7

Çizelge 5.2 ve 5.3 'te görüldüğü üzer her iki farklı sınır koşulu altında Timoshenko ve Kayma kiriş teorilerinden elde edilen sonuçlar birbirine çok yakındır. Bunun nedeni olarak dönel atalet etkisinin çok zayıf olmasından kaynaklı olduğundan bahsedilmişti.

Çizelge 5.2 : Bir ucu serbest diğer ucu ankastre mesnetli durum

Mod	1	2	3	4	5
Timoshenko Kirişi	33.7378	198.168	510.908	903.897	1343.76
Kayma Kirişi	33.7436	198.892	511.841	906.074	1347.35
Khalili DSM	33,7455	198,7881	511,3739	905,1199	1346,06
Khalili FEM	33,7457	198,7932	511,4013	905,1938	1346,2006

Çizelge 5.3 : İki ucu ankastre mesnetli durum

Mod	1	2	3	4	5
Kayma Kirişi	34.5832	93.0486	177.017	282.488	405.777
Timoshenko Kirişi	34.582	93.0371	176.975	282.386	405.58
Khalili DSM	34.6062	93.1172	177.166	282.7644	406.2429
Khalili FEM	34.6065	93.1188	177.1712	282.7763	406.2653

Elde ettiğimiz sonuçlar bu etkinin gerçekten çok zayıf olduğunu ve kayma kirişi yaklaşımının, Timoshenko kirişi yerine kullanılabileceğini göstermektedir. Ayrıca referans makalede Timoshenko ve Kayma kirişlerine sandviç kiriş konfigürasyonu uygulamak yerine sandviç yapıya daha uygun bir model oluşturulmuştur ve oluşturulan bu model iki farklı yöntemle çözülmüştür. Elde edilen sonuçlarda referans makaledeki model ile Timoshenko ve Kayma kirişine uygulanan yaklaşım benzer sonuçlar vermiştir. Sandviç yapılara uygun oluşturulmuş olan modellerin çözümü

Timoshenko ve Kayma kiriş teorisinde daha uzundur, eğer ki serbest titreşim analizi yapılacak ise Timoshenko ve Kayma kiriş teorileri hızlı ve doğru sonuçların elde edilebilmesini sağlamaktadır.

5.2 Malzeme ve Geometrik Özelliklerin Doğal Frekansa Etkisi

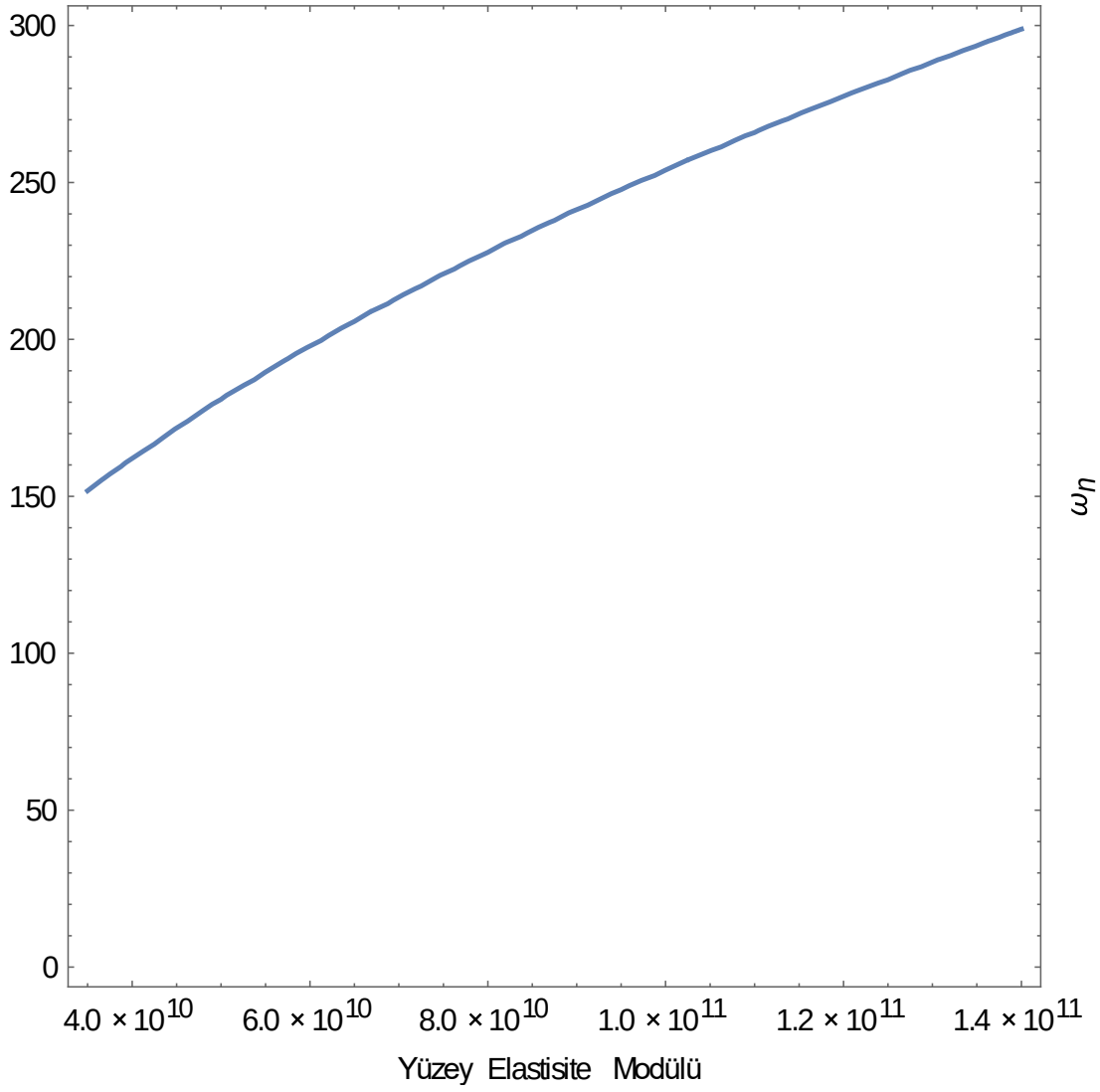
Bu bölümde referans makaledeki bazı malzeme ve geometrik özellik değişiminin etkileri karşılaştırılacaktır. Yapının ilk aşamada malzeme ve geometrik özellikleri aşağıdaki gibidir. Burada bulunan değer 0.5-2 katı arasında yapının doğal frekansının değişimi incelenecektir.

Çizelge 5.4 : Sandviç kirişin özellikleri

$L(mm)$	$h_f(mm)$	$h_c(mm)$	$E_f\left(\frac{N}{m^2}\right)$	$G_c\left(\frac{N}{m^2}\right)$	$\rho_f\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	$\rho_c\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
711.2	0.4572	12.7	68.9×10^9	82.68×10^6	2680	32.8

İlk olarak yüzey malzemesinin elastisite modülünün değişiminin yapının doğal frekansına etkisi incelenecektir.

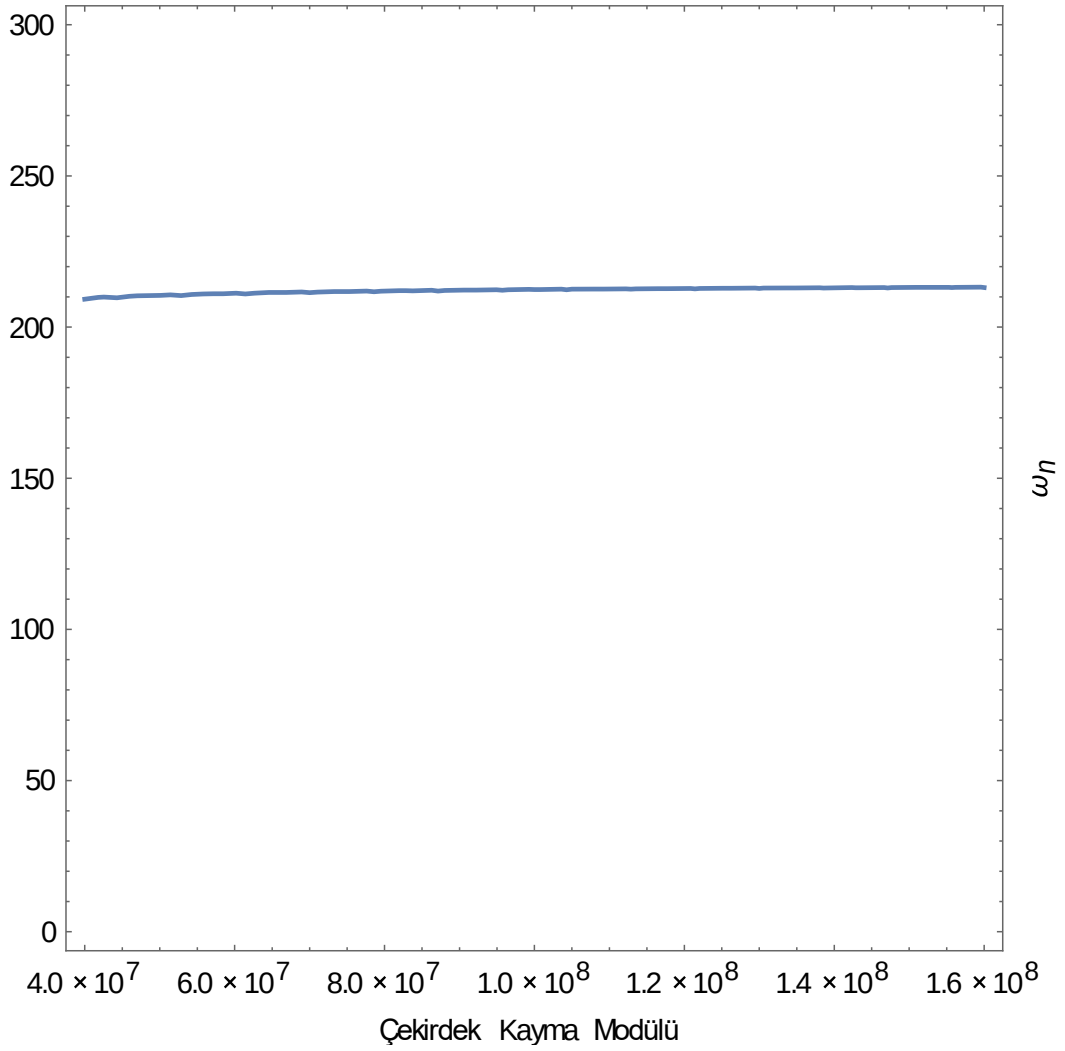
Yüzey malzemesinin elastisite modülünün yüksek olması yapının daha rijit davranış göstermesini sağlamaktadır. Aynı zamanda doğal frekans üzerinde hatırı sayılır bir fark yaratmaktadır. Yüzey malzemesi maliyetin ve ağırlığın azaltılmasına yardımcı olmak için mümkün olduğunca ince bir katmandan oluşsa da, mekanik özellikleri yüksek bir malzeme seçiminin maliyet üzerine etkisi göz önünde bulundurulmalıdır.



Şekil 5.1 : Yüzey malzemesinin elastisite modülünün değişiminin yapının doğal frekansına etkisi

Şekil 5.1’de görüldüğü üzere sandviç kirişlerde, yüzey malzemesinin elastisite modülü arttıkça kirişin doğal frekansı da artmaktadır. Diğer bir deyişle yüzeyin elastisite modülünü artırırsak kirişin eğilme rijitliğini artırdığımızdan doğal frekansı da arttırmış oluruz.

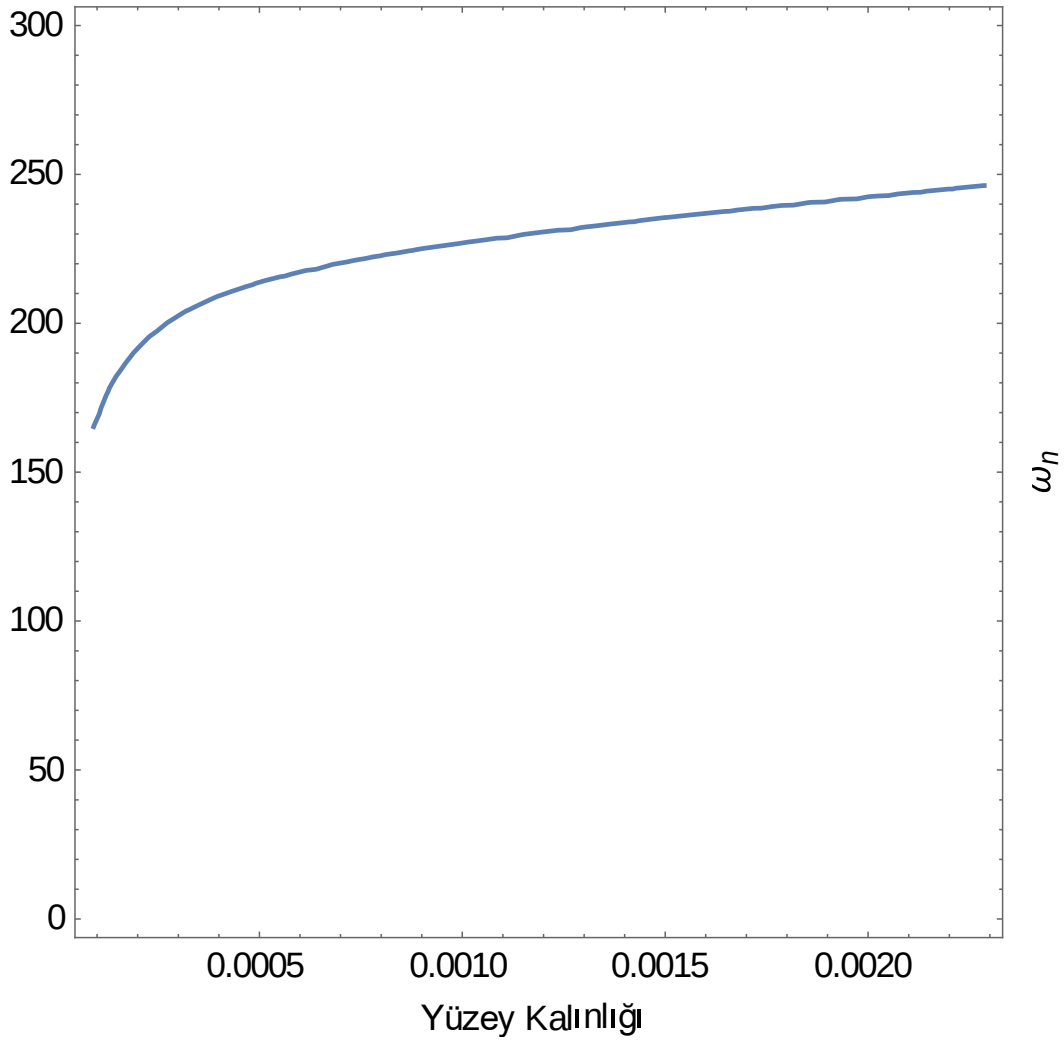
Sandviç yapılarda kayma gerilmenin önemli bir kısmını çekirdek malzemesi karşılamaktadır. Bu yüzden çekirdek katmanı yüzey katmanlarına nazaran daha kalın bir yapıdadır. Dolayısıyla çekirdek katmanı yapıda daha fazla hacim kaplayacağından maliyet için mümkün olduğunca ucuz ve ağırlık için mümkün olduğunca hafif bir malzeme seçilmelidir.



Şekil 5.2 : Çekirdek kayma modülünün değişiminin doğal frekansa etkisi

Şekil 5.2’de görüldüğü üzere kayma modülünün değişiminin doğal frekansa etkisi oldukça azdır. Bu aslında sandviç yapılarda titreşime dayalı tasarım yapıldığında avantaj sağlamaktadır. Çekirdek malzemesinin mekanik özelliklerin oldukça zayıf olması dahi doğal frekansı önemli ölçüde etkilememektedir. Böylece bize tasarım aşamasında hafif, mekanik özellikleri zayıf ancak oldukça ucuz malzemeler kullanabilme imkanı sunmaktadır. Kayma gerilmelerini karşılayabilecek uygun bir malzeme seçimi doğal frekans üzerinde etki edecek bir değere sahip olmayacaktır.

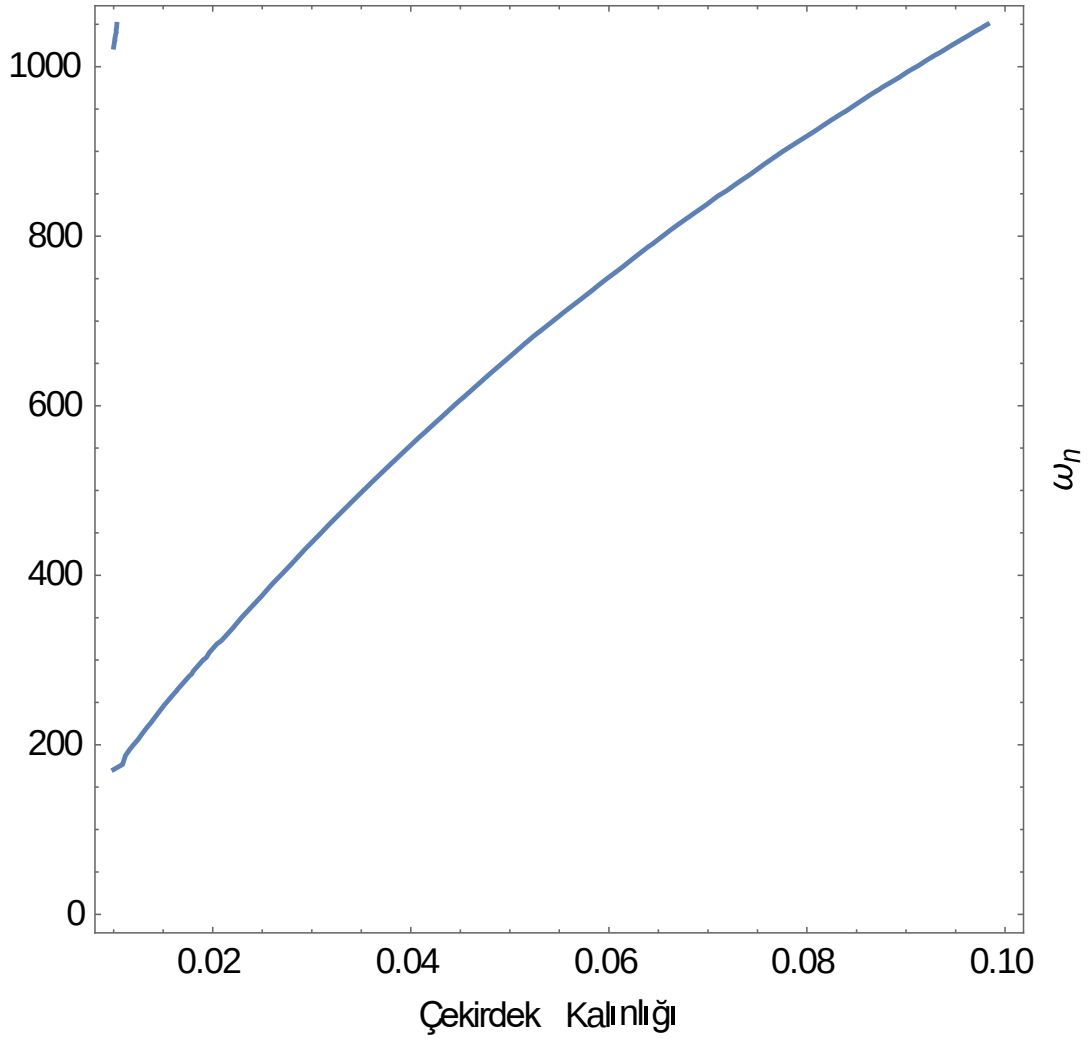
Yüzey malzemesi mekanik özellikleri bakımından çekirdek malzemesinden daha iyi mekanik özelliklere sahiptir ancak çekirdek malzemesine nazaran oldukça ince bir katmandan oluşmaktadır. Yüksek mekanik özelliklere sahip malzemelerin seçilmesi maliyetin artışına neden olacaktır.



Şekil 5.3 : Yüzey katmanının kalınlığının doğal frekansa etkisi

Şekil 5.3'te yüzey katmanının kalınlığının doğal frekansa etkisi incelenmiştir. Yüzey kalınlığını arttırmak eğilme rijitliğinde artmasına neden olacaktır. Böylece yapının doğal frekansının artmasına neden olacaktır. Bu durum grafiklerden de görüldüğü gibi, tabakaların kalınlıklarını artırdığımızda kirişin doğal frekansında da artış olur. Çekirdek malzemesinin kalınlığında meydana gelen değişimin doğal frekansı daha çok etkilediğini görmekteyiz.

Çekirdek malzemesinin kalınlığı aslında sandviç kirişleri homojen kirişlerden ayıran önemli durumlardan biridir. Çekirdek kalınlığı arttıkça değişen eğilme rijitliği ve eğilme dayanımından daha önce bahsedilmiştir.

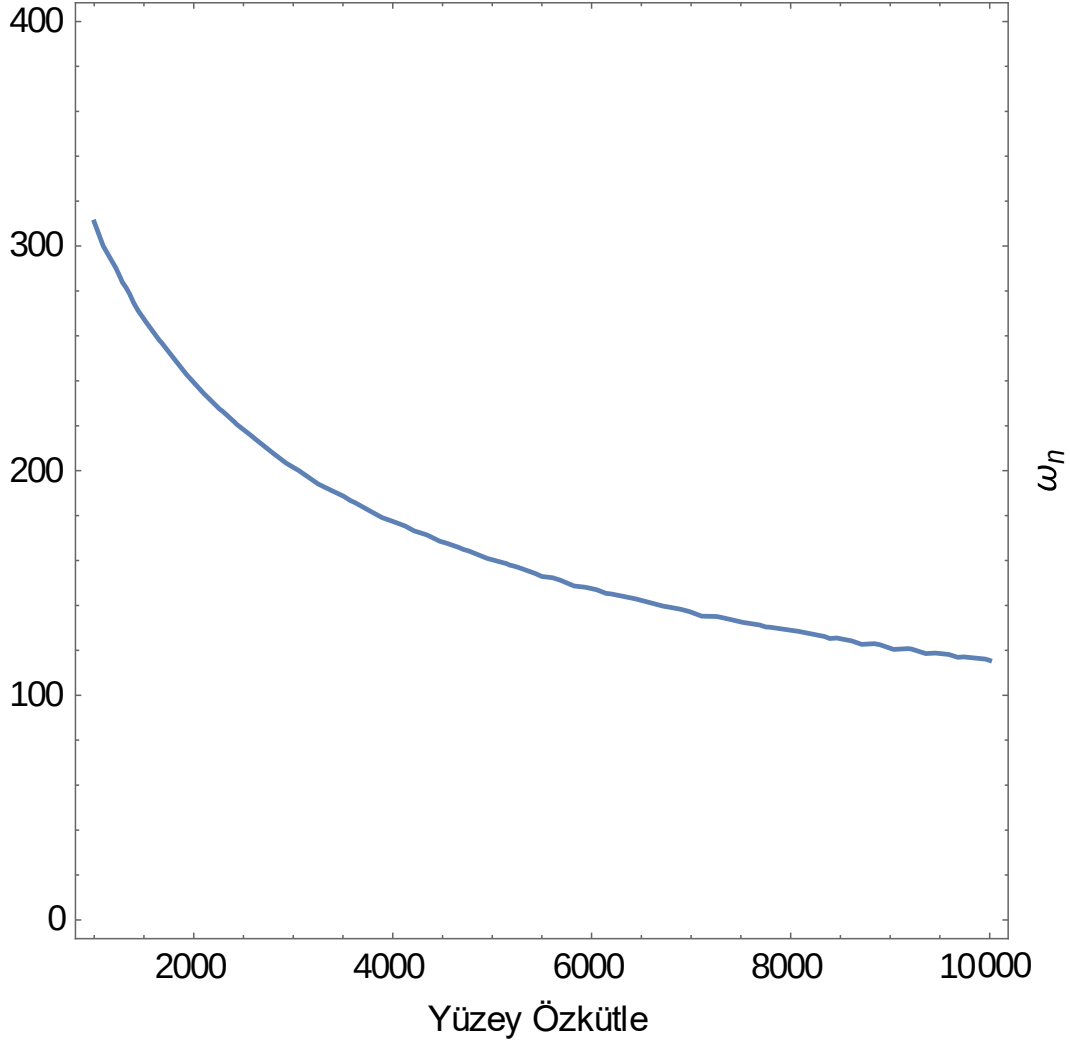


Şekil 5.4 : Çekirdek katmanının kalınlığının doğal frekansa etkisi

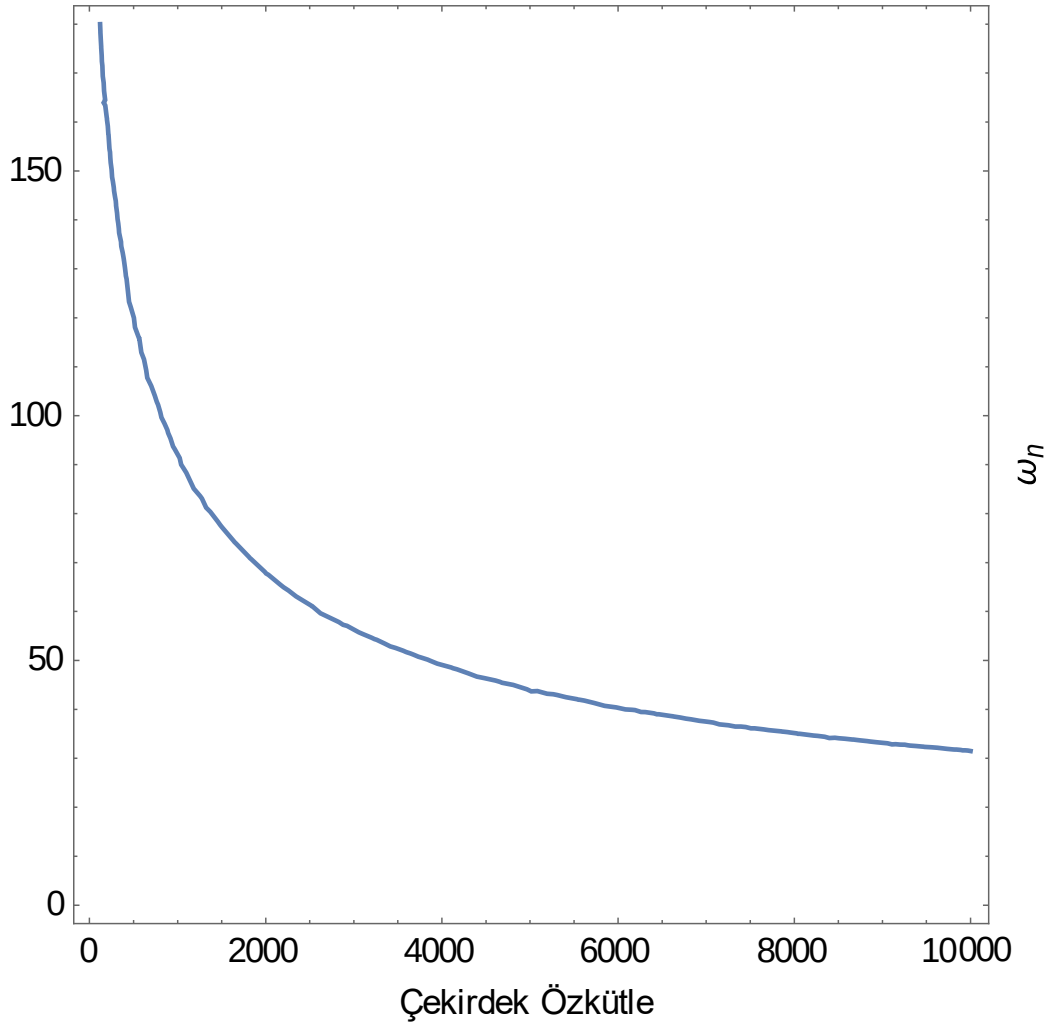
Bu durum grafiklerden de görüldüğü gibi, tabakaların kalınlıklarını artırdığımızda kirişin doğal frekansında da artış olur. Çekirdek malzemesinin kalınlığında meydana gelen değişimin doğal frekansı daha çok etkilediğini görmekteyiz. Örnekte çekirdek ve yüzey kalınlıkları artırıldığında doğal frekanstaki değişimi gördük. Fakat bu kalınlıklar artırıldığında kirişin kalınlığının ($h = 2t_f + t_c$) da arttığını göz ardı etmemek gerekir. Uygulamada, sandviç kirişlerin yüksekliğinin değiştirilemeyeceği durumlar olacaktır. Bu durumlarda kirişin doğal frekansını değiştirebilmemiz için yüksekliğini artırmadan çekirdek kalınlığı/yüzey kalınlığı oranı değiştirilerek istenilen frekans değerine ulaşılabilir.

Günümüz koşullarında ağırlık son derece kritik bir öneme sahiptir. Ağırlığın mümkün olduğunca azaltılması maliyet, fonksiyonellik, yakıt ekonomisi gibi özellikleri etkilemektedir. Burada çekirdek ve yüzey katmanlarının farklı özkütlere bağlı doğal frekans grafikleri verilmiştir. Şekil 5.5 ve 5.6'da görüldüğü üzere katmanların

özkütlerinin artması doğal frekansı azaltmaktadır. Ancak çekirdek malzemesindeki artış doğal frekansa yüzey malzemesinden daha fazla etkimektedir. Önceki özelliklerde değindiğimiz mekanik özellikleri zayıf ve hafif çekirdek malzemesi seçimini bu grafiklerin sonucu olarak onaylayabiliriz.



Şekil 5.5 : Yüzey malzemesinin özkütlesinin değişiminin doğal frekansa etkisi

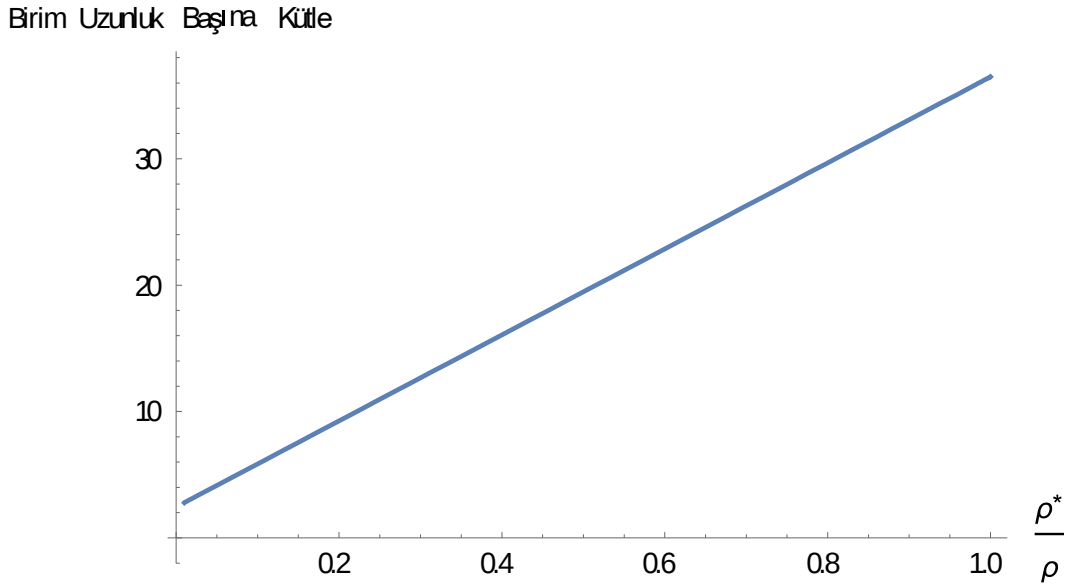


Şekil 5.6 : Çekirdek malzemesinin özkütlesinin değişiminin doğal frekansa etkisi

5.3 Gözenekli Çekirdeğe Sahip Sandviç Kirişinin İncelemesi

Daha önce köpük metallerin sandviç yapılarda kullanımından bahsedilmişti. Bu bölümde gözeneklilik oranının yapının doğal frekansına, rijitliğine ve kütlesine etkileri incelenecektir. Sandviç yapılarda hafif bir yapı elde edebilmek için çekirdek malzemesinin özkütlesinin mümkün olduğunca düşük olması istenmektedir. Metal köpükler çeşitli gözeneklilik oranlarıyla bize ağırlığın optimize edilmesine olanak vermektedir.

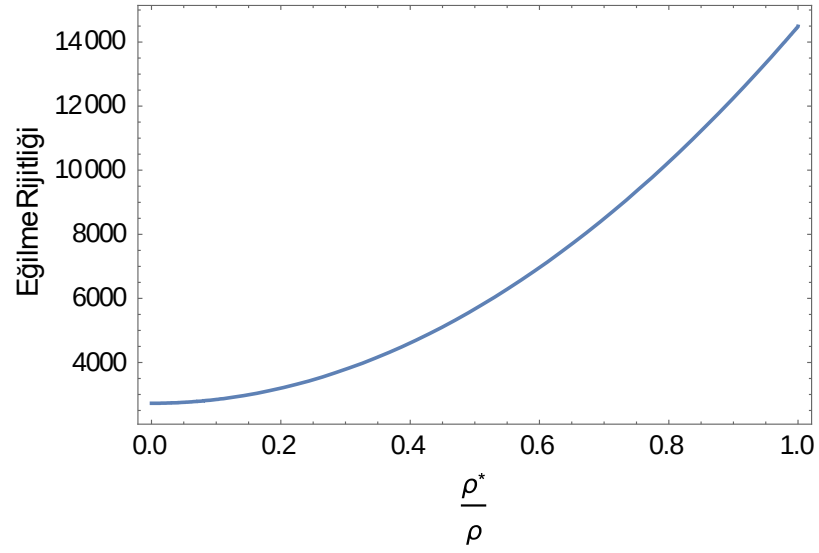
Aldığımız referans makalesi sandviç yapıların genel kullanımına güzel bir örnektir. Çalışmada yüzey malzemesi olabildiğince ince çekirdek malzemesi ise ucuz ve hafif olmasından dolayı mümkün olduğunca kalın tutulmuştur. Ancak bu örnekte çekirdek malzemesi referans alınan makaleye göre değiştirilip açık hücreli metal köpük kullanımı durumunda yapının serbest titreşim analizi yapılacaktır.



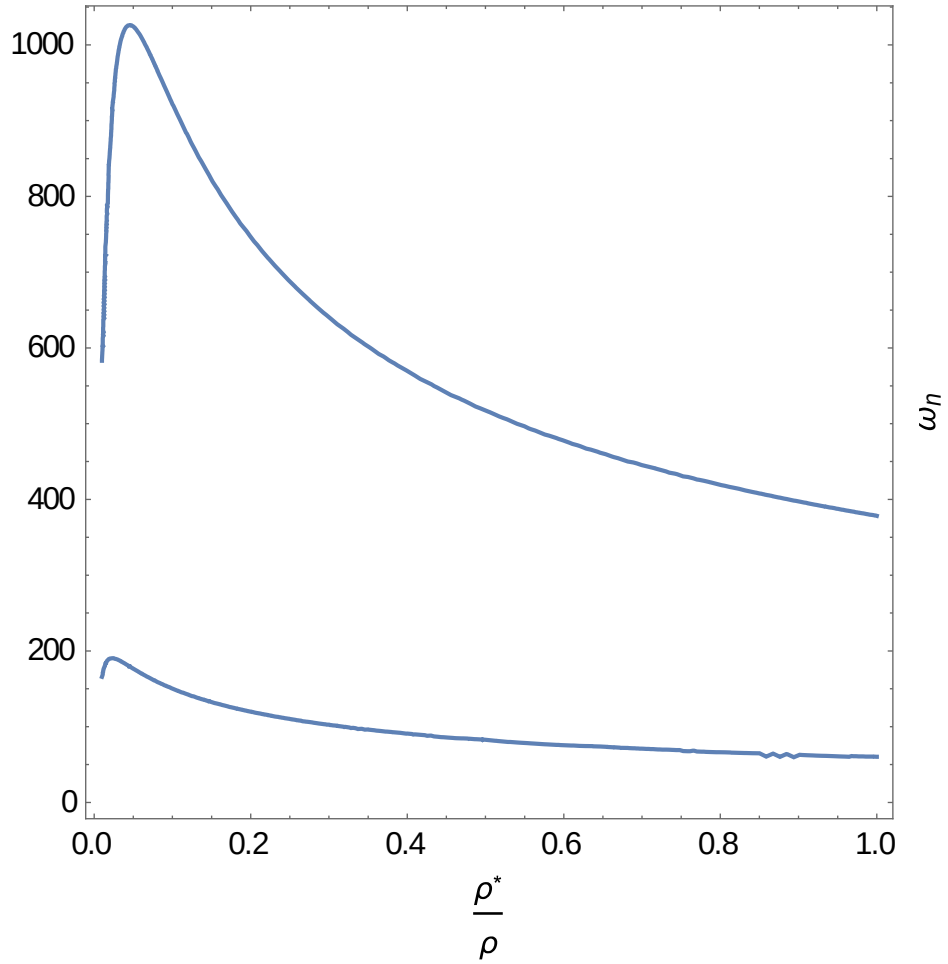
Şekil 5.7 : Çekirdek malzemesinin gözeneklilik oranının değişiminin yapının kütlesine etkisi

Şekil 5.7’den görüldüğü üzere yapıdaki metal köpük malzemesinin özkütlesinin katı metal özkütlesine yaklaşması durumunda yapının ağırlığı lineer bir şekilde artmaktadır. Ancak unutulmamalıdır ki köpük malzemesinin elastisite modülü köpük malzemenin katı malzemeye oranının karesi ile orantılıdır. Bu durumda diğer bir önemli kriter olan eğilme rijitliğinin değişiminde önem arz etmektedir. Aşağıdaki grafikte eğilme rijitliğinin metal köpük malzemesinin özkütlesinin katı metal özkütlesine oranına göre değişimi gösterilmiştir.

Eğilme rijitliği köpük malzemedeki gözeneklilik oranı azaldıkça parabolik bir şekilde artış göstermektedir. Daha öncede bahsedildiği gibi ağırlığın artması doğal frekansın azalmasına yol açarken, eğilme ve kayma rijitliğinin artması doğal frekansın artmasını sağlamaktaydı. Gözeneklilik oranının değişimiyle bu üç parametre sandviç yapı için farklı değerler alacaktır. Tüm bu parametrelerin ankastre kiriş için ilk iki modu için doğal frekansa etkisi aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



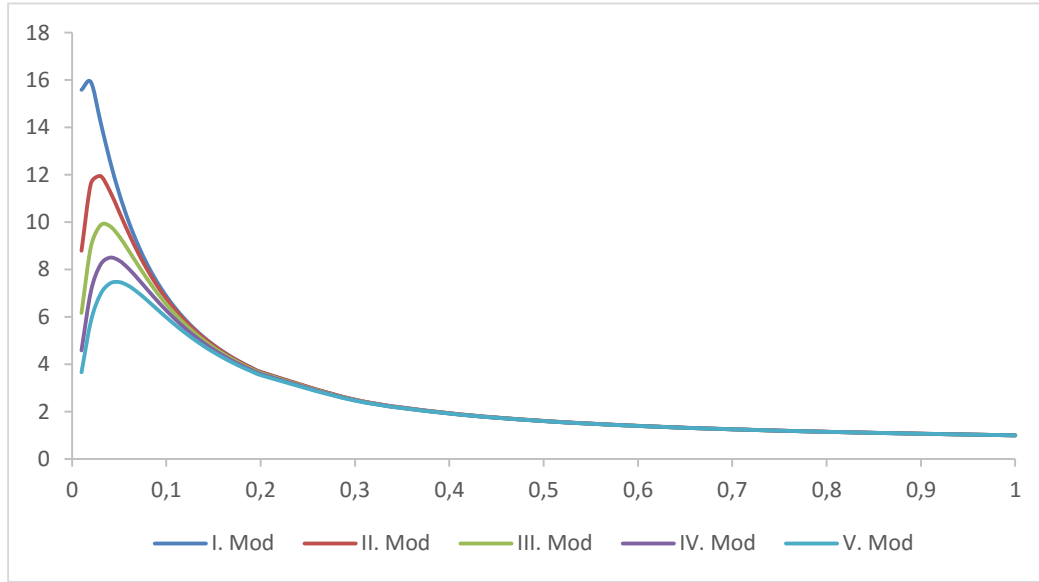
Şekil 5.8 : Çekirdek malzemesinin gözeneklilik oranının değişiminin yapının eğilme rijitliğine etkisi



Şekil 5.9 : Çekirdek malzemesinin gözeneklilik oranının değişiminin yapının doğal frekansına etkisi

Şekil 5.9 ve 5.10’da görüldüğü üzere yüksek gözeneklilik oranlarında yapının doğal frekansı maksimuma ulaşmaktadır. Metal köpükler genel olarak %80 üzeri bir gözeneklilik oranına sahip olduğundan doğal frekansta artış gözlenmesi için katı malzemeye tercih edilmesi uygun gözükmemektedir. Aynı zamanda yüksek gözeneklilik oranı bize ağırlıktan da kazanç sağlayacağı için daha hafif yapılarla yüksek frekansta rezonansın engellenmesine olanak sağlayacaktır. Aşağıdaki grafikte çekirdeğinde metal köpük malzeme kullanılan sandviç yapının çekirdeğinde katı metal kullanılan

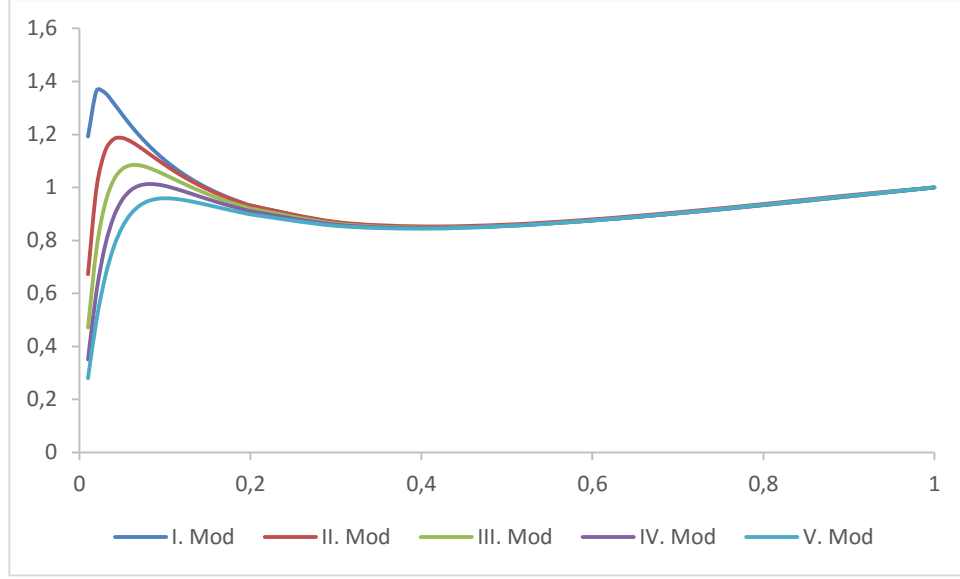
sandviç yapıda doğal frekansın kütle oranı olan $\left(\frac{\omega_{nfoam}}{m_{foam}} \right) / \left(\frac{\omega_{nsolid}}{m_{solid}} \right)$ grafiği verilmiştir.



Şekil 5.10 : Gözenekli ve katı çekirdeğe sahip kirişin doğal frekans kütle oranları

Şekil 5.11’de görüldüğü üzere çekirdeğinde metal köpük malzeme kullanılan yapı çekirdeğinde katı malzeme kullanılan yapıya göre kütle başına daha yüksek doğal frekans değerleri elde edilmesini sağlamaktadır. Ancak bu avantaj doğal frekansın çekirdeğinde katı malzemeden daha fazla olduğu anlamına gelmemektedir. Çekirdeğinde metal köpük malzeme kullanılan yapının çekirdeğinde katı malzeme

kullanılan yapıya göre doğal frekanslarının oranı $\left(\frac{\omega_{nfoam}}{\omega_{nsolid}} \right)$ aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 5.11 : Gözenekli çekirdeğe sahip yapının katı çekirdeğe sahip yapıya doğal frekanslarının oranı

5.4 Diferansiyel Dönüşüm Metodu Kullanılarak Doğal Frekansın Elde Edilmesi

Diferansiyel dönüşüm metodu diferansiyel denklemleri cebirsel ifadelerle dönüştürmekte böylece hızlı ve kolay çözüm elde edilmesini sağlamaktadır. Diferansiyel dönüşüm metodu diğer numerik yöntemler gibi yaklaşık çözümler versede, diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında daha kolay bir prosedüre sahiptir. Bu bölümde diferansiyel dönüşüm metodunun analitik sonuçlarla kıyaslaması yapılacaktır. Ayrıca diferansiyel dönüşüm metodunda ki terim sayısının yakınsamaya etkisi gösterilecektir. Daha önce Çizelge 5.2’de te elde ettiğimiz analitik sonuçlar diferansiyel dönüşüm metoduyla elde edilenlerde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.5 ve 5.6’da iki farklı sınır şartının hem analitik hem diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmış çözümleri gözükmemektedir. Diferansiyel dönüşüm metodu analitik sonuçlara bire bir yakınsayan bir çözüm yönetmidir. Yeterli terim sayısı kullanıldığından analitik sonuçlarla aynı sonuçlara ulaşılmaktadır. Ayrıca analitik çözümün mümkün olmadığı yada zor olduğu durumlarda hızlı ve güvenilir bir araçtır.

Çizelge 5.5 : DDM ile bulunan doğal frekans sonuçları

Mod	1	2	3	4	5
DTM T.K.T.	33.7448	198.688	510.908	903.897	1343.76
T.K.T.	33.7378	198.668	510.908	903.897	1343.76
DTM K.K.T.	33.7436	198.892	511.841	906.074	1347.35
Analitik K.K.T	33.7436	198.892	511.841	906.074	1347.35
Khalili DSM	33,7455	198,7881	511,3739	905,1199	1346,06
Khalili FEM	33,7457	198,7932	511,4013	905,1938	1346,2006

Çizelge 5.6 : DDM ile bulunan doğal frekans sonuçları

Mod	1	2	3	4	5
DTM K.K.T	34.5832	93.0486	177.017	282.488	405.776
K.K.T	34.5832	93.0486	177.017	282.488	405.777
DTM T.K.T	34.582	93.0371	176.975	282.386	405.579
T.K.T.	34.582	93.0371	176.975	282.386	405.58
Khalili DSM	34.6062	93.1172	177.166	282.7644	406.2429
Khalili FEM	34.6065	93.1188	177.1712	282.7763	406.2653

Çizelge 5.6 : DDM’da kullanılan terim sayısı

Terim Sayısı	10	20	30	40	50	100
1. Mod	33.6845	33.7378	33.7378	33.7378	33.7378	33.7378
2. Mod	187.118	198.342	198.688	198.688	198.688	198.688
3. Mod	-		509.801	510.909	510.908	510.908
4. Mod	-			899.691	903.897	903.897

Çizelge 5.7’de terim sayısına bağlı olarak diferansiyel dönüşüm metodunun bulduğu doğal frekanslar gösterilmiştir. Yeterli terim sayısına sahip olmadığında bu metot yüksek modların çözümünü yapamamakta yada yeteri kadar yakınsayamamaktadır. Ancak kullanılan terim sayısı bilgisayar destekli çözüm için oldukça az ve çözüme ulaşma süresi oldukça kısadır. Çözümün doğruluğuda yeterli terim sayısına sahipken analitik çözüm ile aynı sonuçları vermektedir. Diferansiyel dönüşüm metodu bu özellikleriyle hızlı, kolay ve güvenilir bir araç olarak diferansiyel denklemlerin çözümün rahatlıkla kullanılabilir.

6. SONUÇLAR ve YORUMLAR

Sandviç kirişler yapısı gereği kayma gerilmelerinden oldukça etkilenmektedir. Bunun için bu çalışmada yapılan analizlerde kayma deformasyonu kabulünü yapan Kayma ve Timoshenko kiriş teorilerinden yararlanılmıştır. Çeşitli varsayımlara dayanarak geliştirilen bu teoriler yardımıyla çeşitli sınır koşullarına sahip sandviç kirişlerin doğal frekanslarının nasıl bulunacağı formüller halinde ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Sandviç kirişler için her ne kadar daha karmaşık modeller üretilmiş olsa da tez kapsamında Timoshenko ve Kayma Kiriş Teorisine uygun olarak modellenmiş ve diğer yüksek mertebeden modellerle elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır. Elde edilen formülasyonlar Mathematica paket programı yardımıyla çözümlenip listelenmiştir. Sonuçların yüksek mertebeden sandviç kiriş teorileriyle tutarlı olduğu görülmüştür.

Bazı mühendislik problemlerinin çözümü için numerik yöntemler gerekmektedir. Lineer yada nonlinear mühendislik problemlerinin çözümü için Sonlu Elemanlar, Sonlu Farklar gibi farklı numerik yöntemler geliştirilmiştir. Ancak bu yöntemlerin uygulanması aşamasında çeşitli yaklaşım sorunları ortaya çıkmakta, hassas sonuçlar elde edebilmek için çok sayıda iterasyona ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durum problemin çözümü için gereken süreyi arttırabilmektedir. Bu olumsuzlukları ortadan kaldıracak bir diğer metot ise Diferansiyel Dönüşüm Metodudur.

Çalışmada sandviç kirişlerin doğal frekansları bulunmuş ve bulunan bu değerler DDM uygulanan çözüm ile kıyaslanmıştır. Diferansiyel Dönüşüm Metodu terim sayısına bağlı olarak analitik çözüme çok yakın sonuçlar vermiştir. Terim sayısının arttırılması bulunan mod değerlerinin analitik çözüme yakınsamasını sağladığı görülmüştür. Terim sayısının yeterli olmaması bulunan sonuçların hatalı olmasına yol açmaktadır. Bu çalışmada yapılan uygulamalarda yüksek mod değerlerinin bulunması düşük terim sayılarının yeterli olmadığı görülmüştür. Başka bir deyişle yüksek mod değerlerinin bulunması içinde terim sayısının arttırılması gerekmektedir.

Bu çalışmada sadece sandviç kirişlerin serbest titreşim analizi yapılmıştır. Ancak DDM daha bir çok kısmi türevli diferansiyel denkleme uygulanabilir özellikler analitik çözümün zor yada imkansız olduğu problemlerin çözümü için uygulanabilir. Diğer numerik yöntemlere nazaran hızlı ve hassas bir çözüm yöntemi olmasıyla, hata payı en aza indirilmiş kullanışlı bir araç olabilir ve n -değişkenli lineer ve nonlineer denklemlerde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Vinson, J.R.**, (2001). Sandwich Structures. *Applied Mechanics Reviews*, **54**(3): 201-214.
- [2] **Fairbairn, W.**, (1849). An account of the construction of the Britannia and Conway tubular bridges.
- [3] **Zenkert, D.**, (1997). An introduction to sandwich construction. Engineering materials advisory services.
- [4] **Zenkert, D. and N. Industrifond**, (1997). The handbook of sandwich construction. Engineering Materials Advisory Services Limited (EMAS).
- [5] **Van Tooren, M.J.L.**, (1998). Sandwich fuselage design. TU Delft, *Delft University of Technology*.
- [6] **Herrmann, A.S., P.C. Zahlen, and I. Zuardy**, (2005). Sandwich structures technology in commercial aviation, in *Sandwich Structures 7: Advancing with sandwich structures and materials*. Springer. 13-26.
- [7] **Gough, E., De Bruyne.** (1940). Wrinkling of a Thin Sheet by a Continuous Supporting Medium. *J. Royal Aero. Soc.* **44**: 12-43.
- [8] **Williams, D., D. Leggett, and H.G. Hopkins**, (1941). Flat sandwich panels under compressive end loads. *HM Stationery Office*.
- [9] **Plantema, F.J.**, (1966). Sandwich construction. *Wiley, New York*.
- [10] **Plantema, F.J.**, (1966). Sandwich construction: the bending and buckling of sandwich beams, plates, and shells. *Wiley*.
- [11] **Allen, H.**, (1969). Analysis and design of structural sandwich panels, *Robert Maxwell, MC, MP*.
- [12] **Bitzer**, (1992). T. Recent honeycomb core developments. In *Proceedings of the Second*.
- [13] **Lonno, A. and S. Hellbratt**, (1996). Use of carbon fibre in a 63M high speed vessel. YS2000, for the Swedish Navy Sandwich Constructions-3, *EMAS Publ, UK*, 3-13.
- [14] **Kimpara, I.**, (1989). et al., Design and evaluation of advanced composite honeycomb sandwich structures for marine uses. *EMAS Ltd, Solihull*, 37-46.
- [15] **Kujala, K. and J. Tuhkari**, (1989). All-steel corrugated-core sandwich panels for ship structures. *EMAS, Ltd, Solihull*, 411-422.

- [16] **Armstrong, K.B., L.G. Bevan, and W.F. Cole**, (2005). Care and repair of advanced composites. Society of Automotive Engineers.
- [17] **Kaufmann, M.**, (2009). Cost Optimization of Aircraft Structures.
- [18] **Frostig, Y., et al.**, (1992). High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core. *Journal of Engineering Mechanics*, **118**(5): 1026-1043.
- [19] **Frostig, Y.**, (1999). Bending of curved sandwich panels with a transversely flexible core-closed-form high-order theory. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **1**(1): 4-41.
- [20] **Thomsen, O.T. and Y. Frostig**, (1997). Localized bending effects in sandwich panels: photoelastic investigation versus high-order sandwich theory results. *Composite Structures*, **37**(1): 97-108.
- [21] **Thomsen, O.T. and J. Vinson**, (2000). Design study of non-circular pressurized sandwich fuselage section using a high-order sandwich theory formulation. Design Study of Non-Circular Pressurized Sandwich Fuselage Section using a High-Order Sandwich Theory Formulation, 3-14.
- [22] **Frostig, Y. and M. Baruch**, (1996). Localized load effects in higher order bending of sandwich panels with transversely flexible core. *JASCE Eng Mech Div*, **122**(11): 1069.
- [23] **Frostig, Y. and D. Peled**, (1995). High-order bending of piecewise uniform sandwich beams with a tapered transition zone and a transversely flexible core. *Composite structures*, **31**(2): 151-162.
- [24] **Frostig, Y. and Y. Shenhar**, (1995). High-order bending of sandwich beams with a transversely flexible core and unsymmetrical laminated composite skins. *Composites Engineering*, **5**(4): 405-414.
- [25] **Mindlin, R.D.**, (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates.
- [26] **Reissner, E.**, (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.
- [27] **Kerr, A.D.**, (1964). Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, **31**(3): 491-498.
- [28] **Timoshenko, S., S. Woinowsky-Krieger, and S. Woinowsky-Krieger**, (1959). *Theory of plates and shells*. Vol. 2. McGraw-hill New York.
- [29] **Dobyns, A.**, (1981). Analysis of simply-supported orthotropic plates subject to static and dynamic loads. *AIAA Journal*, **19**(5): 642-650.
- [30] **Pagano, N.**, (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of composite materials*, **4**(1): 20-34.
- [31] **Gordaninejad, F. and C.W. Bert**, (1989). A new theory for bending of thick sandwich beams. *International journal of mechanical sciences*, **31**(11): 925-934.

- [32] **Hyer, M., W.J. Anderson, and R. Scott**, (1976). Non-linear vibrations of three-layer beams with viscoelastic cores I. *Theory. Journal of Sound and Vibration*, **46**(1): 121-136.
- [33] **Frostig, Y., et al.**, (1991). Sandwich beams with unsymmetrical skins and a flexible core-bending behavior. *J. Engrg. Mech., ASCE*, **117**(9): 1931-1952.
- [34] **Yu, Y.-Y.**, (1958). A New Theory of Elastic Sandwich Plates:-One-dimensional Case. *United States Air Force, Office of Scientific Research*.
- [35] **Yu, Y.-Y.**, (1996). Vibration of Elastic Plates: Linear and Nonlinear Dynamical Modelling of Sandwiches, Laminated Composites and Piezoelectric Layers. *Springer, Berlin/New York*.
- [36] **Yu, Y.**, (1997). Dynamics for large deflections of a sandwich plate with thin piezoelectric face layers. Analysis and design issues for modern aerospace vehicles- 285-292.
- [37] **Allen, H. and R. Shenoj**, (1992). Flexural fatigue tests on sandwich structures. *Sandwich Constructions 2.*, **2**: 499-517.
- [38] **Shenoj, R., S. Clark, and H. Allen**, (1995). Fatigue behaviour of polymer composite sandwich beams. *Journal of Composite Materials*, **29**(18): 2423-2445.
- [39] **Zenkert, D., A. Shipsha, and M. Burman**, (2006). Fatigue of closed cell foams. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **8**(6): 517-538.
- [40] **Burman, M. and D. Zenkert**, (1997). Fatigue of foam core sandwich beams—1: undamaged specimens. *International journal of fatigue*, **19**(7): 551-561.
- [41] **Burman, M. and D. Zenkert**, (1997). Fatigue of foam core sandwich beams—2: effect of initial damage. *International journal of fatigue*, **19**(7): 563-578.
- [42] **Burman, M. and D. Zenkert**, (2000). Fatigue of undamaged and damaged honeycomb sandwich beams. *Journal of sandwich structures and materials*, **2**(1): 50-74.
- [43] **Zenkert, D. and M. Burman**, Tension, compression and shear fatigue of a closed cell polymer foam. *Composites Science and Technology*, **69**(6): 785-792.
- [44] **Banerjee, J. and A. Sobey**, (2005). Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a three-layered sandwich beam. *International journal of solids and structures*, **42**(8): 2181-2197.
- [45] **Sakiyama, T., H. Matsuda, and C. Morita**, Free vibration analysis of continuous sandwich beams with elastic or viscoelastic cores by applying the discrete Green function. *Journal of sound and vibration*, **198**(4): 439-454.
- [46] **Khalili, S., et al.**, (2010). Free vibration analysis of sandwich beams using improved dynamic stiffness method. *Composite Structures*, **92**(2): 387-394.

- [47] **Damanpack, A. and S. Khalili**, High-order free vibration analysis of sandwich beams with a flexible core using dynamic stiffness method. *Composite Structures*, **94**(5): 1503-1514.
- [48] **Bilasse, M., E. Daya, and L. Azrar**, (2010). Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams. *Journal of Sound and vibration*, **329**(23): 4950-4969.
- [49] **Hashemi, S.M. and E.J. Adique**, (2011). Free Vibration Analysis of Curved Sandwich Beams: A Dynamic Finite Element. *INTECH Open Access Publisher*.
- [50] **Silverman, I.**, (1995). Natural frequencies of sandwich beams including shear and rotary effects. *Journal of sound and vibration*, **183**(3): 547-561.
- [51] **Birman, V. and C.W. Bert**, (2002). On the choice of shear correction factor in sandwich structures. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **4**(1): 83-95.
- [52] **Wang, B. and M. Yang**, Damping of honeycomb sandwich beams. *Journal of Materials Processing Technology*, **105**(1): 67-72.
- [53] **Vinson, J.R.**, (2006). Plate and panel structures of isotropic, composite and piezoelectric materials, including sandwich construction. Vol. 120. 2006: Springer Science & Business Media.
- [54] **Raville, M., E.-S. Ueng, and M.-M. Lei**, (1961). Natural frequencies of vibration of fixed-fixed sandwich beams. *Journal of Applied Mechanics*, **28**(3): 367-371.
- [55] **Sokolinsky, V.S., et al.**, (2004). Analytical and experimental study of free vibration response of soft-core sandwich beams. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **6**(3): 239-261.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ahmet Gökay ÖZTÜRK
Doğum Tarihi ve Yeri : 1987/İSTANBUL
E-posta : ozturkah@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2012, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Makine Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2016, İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı, , Uçak ve Uzay Mühendisliği