

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**CESÀRO DİZİ UZAYLARI
VE BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ**

Okan DEMİRAY

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hırsı ALTINOK

TEMMUZ-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CESÀRO DİZİ UZAYLARI VE BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Okan DEMİRAY

(131121109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Haziran 2015

Tezin Savunulduğu Tarih : 3 Temmuz 2015

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Hıfı ALTINOK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

: Doç. Dr. Mahmut IŞIK

TEMMUZ-2015

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana her zaman yardımcı olan, bilgilerinden istifade ettiğim sayın hocam Doç.Dr. Hıfı ALTINOK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım. Ayrıca karşılaştığımız problemlerde tartışmalarıyla desteğini bizden esirgemeyen sayın Doç.Dr. Yavuz ALTIN'a teşekkürlerimi sunarım.

Okan DEMİRAY
ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SEMBOLLER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
3. CESÀRO DİZİ UZAYLARI	8
4. ces_p UZAYININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ	14
4.1. ces_1 Uzayı	14
4.2. Bazı Boş (gap) Diziler	14
4.3. Yoğunluk	16
4.4. Tamlık	17
5. BİR MODÜLÜS FONKSİYONU İLE TANIMLANAN CESÀRO DİZİ UZAYI	20
5.1. $ces_p(f)$ Uzayının Lineer Topolojik Yapısı	21
5.2. $ces_p(f)$ Uzayları Arasındaki Kapsama	23
5.3. $ces_p(f^v)$ Dizi Uzayı	24
KAYNAKLAR	27

ÖZET

Cesàro Dizi Uzayları ve Bazı Topolojik Özellikleri

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci ve ikinci bölümde sırasıyla, Cesàro dizi uzayının tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verilmiş ve bu çalışmada gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, Cesàro dizi uzaylarının tanımı verilmiş, bu uzayların bazı özellikleri incelenmiş ve ℓ_p dizi uzayı ile aralarındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, $1 \leq p \leq \infty$ için ces_p uzaylarının yapısı incelenmiş ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, bir modülüs fonksiyonu ile tanımlanan Cesàro dizi uzayı hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cesàro dizi uzayı, ces_p uzayı, ces_∞ uzayı, ℓ_p uzayı, modülüs fonksiyonu.

SUMMARY

Cesàro Sequence Spaces and Some Topological Properties

This study consists of the five chapters.

In Section 1 and 2, we give some informations about the historical development of Cesàro sequence space and introduce some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study, respectively.

In Section 3, we give definitions of Cesàro sequence spaces, examine some properties of this spaces and research the relations between ℓ_p sequence space.

In Section 4, we investigate the structure of ces_p spaces and give some topological properties of this spaces.

In Section 5, we inform about Cesàro sequence space defined by a modulus function.

Keywords: Cesàro sequence space, ces_p space, ces_∞ space, ℓ_p space, modulus function.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışma boyunca kullanılacak olan bazı semboller aşağıda verilmiştir.

- $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi
- $\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
- ces_p : Cesàro dizi uzayı
- ces_∞ : Cesàro dizi uzayı ($p = \infty$)
- ces_1 : Cesàro dizi uzayı ($p = 1$)
- $h.h.k$: hemen hemen her k
- ℓ_p : p -yinci kuvveti yakınsak seriler uzayı
- ℓ_∞ : Sınırlı diziler uzayı
- f : Modülüs fonksiyonu
- $\approx$: Denk küme bağıntısı

1.GİRİŞ

Cesàro fonksiyonu ve dizi uzayları ilk olarak 1968'de dual uzayının gösterimini bulmak için Alman yazarlar topluluğu tarafından bir problem olarak görülmüştür. Daha sonra bu problem 1974'te Jagers [1] tarafından çözülmüştür. Jagers [1] bu çalışmasında $1 \leq p < \infty$ için ces_p uzayının dualinin izometrik tanımını vermiştir. Benzer bir sonuç 1976'da Ng ve Lee [2] tarafından $p = \infty$ durumu için elde edilmiştir. Cesàro dizi ve fonksiyon uzaylarının bazı temel sonuçları 70'li yıllarda Shiue [3],[4], Leibowitz [5], Hassard ve Hussein [6] tarafından elde edilmiştir. Bunun sonrasında Cesàro dizi uzayları, Banach uzayı konusunda çalışan bilim insanları arasında büyük bir önem kazanmıştır. Örneğin 1990'lı yıllarda bu uzayların çeşitli geometrik özellikleri çalışılmıştır. Cui ve Pluciennik [7] Cesàro dizi uzaylarındaki yerel düzgün kareselleşmeme (*local uniform nonsquareness*) özelliği üzerinde çalışmış ve Meng [8] ile birlikte ces_p uzayının Banach-Saks özelliği ve Rolewicz'in (β) özelliğine sahip olduğunu ispatlamıştır. Cui vd.[9] ces_p uzayının sabit nokta özelliğine sahip olduğunu göstermiştir. ces_p uzayındaki diğer bir bakış 2010 yılında Saejung tarafından sunulmuştur [10]. Son on yıl boyunca daha genel uzay olan Cesàro-Orlicz dizi uzayları keşfedilmiştir. Astashkin ve Maligranda'nın Cesàro dizi uzaylarının geometrik ve topolojik özellikleri üzerine yaptığı çalışmalardan sonra Cesàro fonksiyon uzayları daha çok dikkat çekmiştir [11],[12],[13]. Son zamanlarda Bakery [14] Cesàro dizi uzaylarının ideal operatörü üzerine çalışma yapmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve K ise reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki verilen şartları sağlıyorsa, X kümesine K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzay) denir [15].

Her $a, b, c \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

i) $a + b = b + a$

ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$

iii) Her $a \in X$ için $a + \theta = a$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv) Her bir $a \in X$ için $a + (-a) = \theta$ olacak şekilde bir $(-a) \in X$ vardır.

v) $1.a = a$

vi) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

vii) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

viii) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

Tanım 2.2. V bir lineer uzay ve $\emptyset \neq U \subset V$ olsun. Eğer U 'nun kendisi bir lineer uzay ise U 'ya V 'nin bir lineer alt uzayı denir [16].

Tanım 2.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere eğer $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıda verilen şartları sağlarsa g ye bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir [15].

$\forall x, y \in X$ için

i) $g(\theta) = 0$

ii) $g(x) = g(-x)$

iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

iv) $\mu \rightarrow \mu_0, x \rightarrow x_0$ iken $\mu x \rightarrow \mu_0 x_0$

dir. (iv) şartı $\mu \rightarrow \mu_0, g(x - x_0) \rightarrow 0$ iken $g(\mu x - \mu_0 x_0) \rightarrow 0$ şeklinde ifade edilebilir.

Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g ye total paranorm denir.

Tanım 2.4. K cismi üzerinde bir X lineer uzayı verilsin. Buna göre eğer

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ a &\rightarrow \|a\|\end{aligned}$$

dönüşümü aşağıda verilen şartları sağlıyorsa $\|\cdot\|$ dönüşümüne bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir [17].

$\forall a, b \in X$ için

N1) $\|a\| \geq 0$

N2) $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$

N3) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ (λ skaler)

N4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

dir. Eğer (N2) $a = \theta \Rightarrow \|a\| = 0$ şeklinde olursa X' e yarınorm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de yarınormlu uzay adı verilir.

Tanım 2.5. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir. Başka bir deyişle f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az $\delta > 0$ vardır öyleki $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olur [18].

Tanım 2.6. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A 'nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 elamanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonuna E üzerinde artan, $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonuna E üzerinde azalan fonksiyondur denir [18].

Tanım 2.7. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere ω bütün $x = (x_k)$ dizilerinin kümesini gösterebilirsin. α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler çarpma işlemleri altında ω bir lineer uzaydır. Buna göre ω nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [19].

Tanım 2.8. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı varsa (x_k) dizisine bir sınırlı dizi denir [18].

Tanım 2.9. Bir (x_k) dizisi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne (x_k) dizisinin supremumu denir ve $\sup x_k$ ile gösterilir. Benzer şekilde dizi alttan sınırlı ise alt sınırlarının en büyüğüne dizinin infimumu denir ve $\inf x_k$ ile gösterilir [18].

Tanım 2.10. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall k > n_0$ iken

$$\|x_k - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi x 'e yakınsaktır denir. $x = (x_k)$ dizisi x 'e yakınsak ise $\lim_k x_k = x$ veya $x_k \rightarrow x$ şeklinde yazılır [17].

Tanım 2.11. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [17].

Tanım 2.12. X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıda verilen şartları sağlayan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X kümesi üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [17].

$$\text{M1)} \forall a, b \in X \text{ için } d(a, b) \geq 0$$

$$\text{M2)} \forall a, b \in X \text{ için } d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{M3)} \forall a, b \in X \text{ için } d(a, b) = d(b, a)$$

$$\text{M4)} \forall a, b, c \in X \text{ için } d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

Tanım 2.13. X metrik uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsıyorsa X metrik uzayı tamdır denir [17].

Tanım 2.14. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [17].

Tanım 2.15. X boştan farklı bir küme ve τ , X 'in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Buna göre eğer aşağıdaki üç şart sağlanırsa τ sınıfına X kümesi üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir [20].

$$\text{T1)} X, \theta \in \tau$$

T2) $U_{k_1}, U_{k_2}, \dots, U_{k_n} \in \tau$ ise $\bigcap_{j=1}^n U_{k_j} \in \tau$,

T3) Her $j \in I$ için $U_{k_j} \in \tau$ ise $\bigcup_{j \in I} U_{k_j} \in \tau$.

T2 ve T3 şartlarına göre τ sınıfı sırasıyla sonlu kesişime ve sonsuz birleşime göre kapalıdır.

Tanım 2.16. $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $a_k, b_k \geq 0$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir [21].

Tanım 2.17. i) $p \geq 1$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $a_k, b_k \geq 0$ ise

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^n a_k^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n b_k^p \right]^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $0 < p \leq 1$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $a_k, b_k \geq 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \leq \sum_{k=1}^n a_k^p + \sum_{k=1}^n b_k^p$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki eşitsizliğe de Minkowski eşitsizliği denir [21].

Tanım 2.18. Herhangi bir u ve v vektörleri için $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir [22].

Tanım 2.19. (a_n) dizisi verilmiş olsun. Genel terimi $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ şeklinde tanımlanan (s_n) dizisini göz önüne alalım. $((a_n), (s_n))$ ikilisine seri denir. a_n terimine serinin genel terimi, (s_n) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsak ise, yani $\lim s_n = s$ ise $((a_n), (s_n))$ serisine yakınsak ve serinin toplamı s dir denir. Yakınsak olmayan bir seriye ıraksaktır denir [23].

Teorem 2.20. Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ ve $a_k \leq C b_k$ olacak şekilde bir C sabiti mevcut olsun [23]. O halde karşılaştırma testi gereğince

(i) $\sum b_k$ yakınsak ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

(ii) $\sum a_k$ ıraksak ise $\sum b_k$ ıraksaktır.

Tanım 2.21. $S = \emptyset$ veya bir n doğal sayısı için $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ise S kümesi sonludur denir. Sonlu olmayan kümeye sonsuz küme adı verilir. S bir sonlu küme veya $S \approx \mathbb{N}$ ise S 'ye sayılabilir küme denir [18].

Tanım 2.22. (f_n) A üzerinde düzgün sınırlıdır $\Leftrightarrow$ Her $n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x)| \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır [23].

Tanım 2.23. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x + y| \leq |x| + |y|$ eşitsizliğine üçgen eşitsizliği denir [22].

Tanım 2.24. X bir topolojik uzay olsun. Bir $x \in X$ noktasının bir komşuluğu $x \in G$ olacak şekilde X 'deki herhangi bir açık G kümesidir. Bir $F \subset X$ kümesine, eğer tümleyeni açık ise kapalıdır denir. Bir $A \subset X$ kümesinin $\bar{A}$ kapanışı A kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin arakesitidir. Bir A kümesinin A^0 içi A kümesinde kapsanan bütün açık kümelerin birleşimidir [16].

Tanım 2.25. X bir topolojik uzay olsun. Eğer $\bar{A}$ kümesinin içi boş ise $A \subset X$ kümesine hiçbir yerde yoğun değildir denir. Eğer $\bar{A} = X$ ise $A \subset X$ kümesi X 'de yoğundur denir. Eğer X sayılabilir yoğun bir alt küme içeriyorsa X 'e ayrılabilir uzay denir [16].

Tanım 2.26. X bir küme olsun. X in bir A sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu A sınıfına X üzerinde bir cebir denir.

- (i) $\emptyset, X \in A$
- (ii) Her $E \in A$ için $E^c = X - E \in A$
- (iii) $E_k \in A$ ise $\cup_{k=1}^n E_k \in A$

Eğer (iii) de her $k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in A$ iken $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in A$ şartı alınırsa A cebirine bir σ -ceberi denir [24].

Tanım 2.27. X bir küme ve A da X üzerinde bir σ -ceberi olsun. (X, A) ikilisine bir ölçülebilir uzay, A daki herbir kümeye de A -ölçülebilir küme veya ölçülebilir küme denir [24].

Tanım 2.28. (X, A) bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$ olmasıdır [24].

Tanım 2.29. Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Bu dizinin terimleri bir K özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme hariç bütün k lar için sağlarsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için K özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k” şeklinde gösterilir [25].

Tanım 2.30. Tanım bölgesi bir X vektör uzayında, değer bölgesi ise X in bir K cismi içinde bulunan bir f operatörüne fonksiyonel denir [17].

Tanım 2.31. (x_k) kompleks terimli bir dizi olmak üzere kuvvetli $(C, 1)$ –toplanabilir dizilerin veya $L \in \mathbb{R}$ sayısına Cesaro yakınsak dizilerin kümesi

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır [26].

Tanım 2.32. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir [27].

- i) $f(x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$,
- ii) $x, y \geq 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- iii) f artandır,
- iv) f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sağdan süreklidir.

Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x) = x^p, (0 < p \leq 1)$ sınırsız ve $f(x) = \frac{x}{1+x}$ sınırlıdır.

f_1 ve f_2 modülüs fonksiyonları olduğu zaman $f_1 + f_2$ ’nin de bir modülüs fonksiyonu olduğu kolayca görülebilir. Bu yüzden i pozitif tamsayı olmak üzere f fonksiyonu, kendisinin i çarpımıyla bir f modülüs fonksiyonunun birleşimi de ayrıca bir modülüs fonksiyonudur.

3. CESÀRO DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde verilen $\mathbf{ces}_p$ Cesàro dizi uzayı, Shiue [4] tarafından tanımlanmış ve bu uzayın $\mathbf{ces}_\infty$ Cesàro dizi uzayı ile arasındaki bazı ilişkileri incelenmiştir.

Tanım 3.1 $\mathbf{ces}_p$ uzayı, tüm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ reel sayı dizisi ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\mathbf{ces}_p = \left\{ a : (a_k) : \|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad (3.1)$$

ile tanımlanır.[28]

Tanım 3.2 $\mathbf{ces}_p$ uzayı, tüm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ reel sayı dizisi ve $p = \infty$ için

$$\mathbf{ces}_p = \left\{ a = (a_k) : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad (3.2)$$

ile tanımlanır.[28]

Teorem 3.3 $\|a\|_p$ normu ile $\mathbf{ces}_p$ uzayı bir normlu lineer uzaydır.[28]

İspat $a, b \in \mathbf{ces}_p$, ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) + (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots) \\ \alpha a &= \alpha (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \\ &= (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n, \dots) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ile tanımlanır.

$\|a + b\|_p < \infty$ olduğu aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

(3.3) denklemiyle açıktır ki $\mathbf{ces}_p$ uzayı bir lineer uzaydır.

$$\begin{aligned} \|a\|_p &= 0 \implies \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| = 0 \\
&\Rightarrow |a_k| = 0 \\
&\Rightarrow a_k = 0
\end{aligned}$$

diğer yandan eğer $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = 0$ veya $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$ ise $\|a_p\| = 0$ 'dır. Bu gösterir ki $\|a_p\| = 0$ 'dır ancak ve ancak $a = 0$ dır.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned}
\|\alpha a\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\alpha a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \|a\|_p
\end{aligned} \tag{3.5}$$

yazılır. Bu da $\|\alpha a\|_p = |\alpha| \|a\|_p$ olduğunu ispatlar.

$a, b \in \text{ces}_p$ olsun.

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots) \tag{3.6}$$

ise buradan

$$\|a + b\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir veya

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.7}$$

dir.

$$|a'_n| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|$$

olduğundan

$$|a'_n|^p = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p$$

dir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p$$

elde edilir ve

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.8)$$

Benzer şekilde

$$|b'_n| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k|$$

olsun. Böylece

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |b'_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.9)$$

elde edilir. Bu yüzden (3.8) ve (3.9) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b'_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Şimdi, (3.7) denklemi ile üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_n| + |b'_n|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur. Minkowski eşitsizliği ile, (3.11) denklemi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_n| + |b'_n|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_n|)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|b'_n|)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.12)$$

ile gösterilir. (3.11) ve (3.12) denklemlerinden

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_n|)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|b'_n|)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. (3.10) denklemi ile de

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılır. Bu durumda

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

olduğunu ispatlar ve $\|a\|_p, \|b\|_p < \infty$ olduğundan $\|a + b\|_p < \infty$ olduğu açıktır. (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri ile bu teorem ispatlanmıştır. Şimdi her normlu lineer uzayı $\|a - b\|'_p$ ye eşit olan a ve b arasındaki uzaklık ile bir metrik uzay olarak kabul edilebilir. $\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$ olduğundan

$$\|a - b\|_p \leq \|a - c + c - b\|_p \leq \|a - c\|_p + \|c - b\|_p$$

yazılır. Bu " $\|\alpha a\|_p = |\alpha| \|a\|_p$ ve $\|a\|_p = 0$ ancak ve ancak $a = 0$ " ifadesi ile birleştirilerek aşağıdakini ispatlar.

Sonuç 3.4 ces_p uzayı bir metrik uzaydır.

Teorem 3.3 ve Sonuç 3.4'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.5 $\|a\|_p$ normu ile ces_p uzayı bir lineer normlu uzaydır.

Benzer şekilde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.6 $\|a\|_\infty$ normu ile ces_∞ uzayı bir lineer normlu uzaydır.

Maalesef, Hölder eşitsizliği ces_p uzayında sağlanmaz. Aşağıdaki şekilde verilen

$$a = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots \right)$$

reel sayı dizisini inceleyelim. Buradan

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} \right)^p + \left(\frac{1}{4} \right)^p + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)^p + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \right)^p + \dots \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \dots \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{2} (\xi(p))^{\frac{1}{p}} \quad (p > 1) \end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Bu yüzden (3.13) denklemi sonlu ve $p > 1$ için $\|a\|_p < \infty$ dir. Böylece $p > 1$ için $a \in \text{ces}_p$ dir. $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$b = (1, 0, 0, \dots)$$

reel sayı dizisini inceleyelim. Buradan

$$\begin{aligned} \|b\|_q &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |b_k| \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \dots \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\xi(q))^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

yazılır. $q = \frac{p}{p-1} > 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} < \infty$ dur. Böylece (3.14) denkleminde göre $b \in \text{ces}_q$ anlamına gelir. Fakat

$$\begin{aligned} \|ab\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

denklemi dikkate alınırsa $\|ab\|_1$ sonlu değildir. Buradan

$$\|ab\|_1 > \|a\|_p \|b\|_q$$

yazılır. Buradan şu sonuç çıkarılır ki $1 < p < \infty$ için Hölder eşitsizliği ces_p uzayında sağlanmaz.

Tanım 3.7 $1 \leq p \leq \infty$ için ℓ_p uzayı tüm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ reel sayı dizisi ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|a\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile gösterilir.

Önerme 3.8 $a \in \ell_p$ uzayı olsun. Buradan.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

yazılır. Bu ispat [29] referansında bulunabilir.

Teorem 3.9 $p > 1$ için $\ell_p \subset \text{ces}_p$ dir [4].

İspat. Önerme 3.8 ile $a \in \ell_p \implies \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ veya $\frac{p}{p-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ dur. Yani $a \in \text{ces}_p$ dir. Bu soru doğal olarak “ $p = 1$ için Teorem 3.9 doğru mudur?” sorusunu açığa çıkarır.

Cevap olumsuzdur. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.10 $a = (1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ ile verilsin. Buradan $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = 1$ veya $\|a\|_1 < \infty$ dur. Böylece $a \in \ell_1$ dir. Diğer yandan

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

olduğundan $a \notin \text{ces}_1$ dir. Bu sonuç ayrıca aşağıdaki sonucun uygulamasıyla anlaşılır.

Teorem 3.11 Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| > 0$ olmak üzere $a \in \ell_1$ ise $a \notin \text{ces}_1$ dir.

İspat $a \in \ell_1$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ olur ve böylece n 'e göre düzgün sınırlı olarak $\sum_{k=1}^n |a_k| < \infty$ elde edilir. $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|$ olsun. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

yazılır. Böylece

$$\frac{b_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|}{\frac{1}{n}} = \sum_{k=1}^n |a_k| < \infty$$

olduğu görülür. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de ıraksaktır. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ıraksaktır.

4. ces_p UZAYININ BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $1 \leq p < \infty$ için ces_p uzayları ile ilgili olarak Leibowitz [5] tarafından araştırılan bazı kapsama bağıntıları ve topolojik özellikler verilmiştir.

4.1. ces_1 Uzayı

[4] 'de, ℓ_1 in ces_1 uzayına ait tek elemanın sıfır dizisi olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.1 ces_1 uzayı $\{0\}$ aşık uzayıdır.

İspat Farz edelim ki $a = \{a_n\}_1^\infty$ ve en az bir N doğal sayısı için $a_N \neq 0$ olsun.

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|$$

alalım. Her $n \geq N$ için

$$nb_n = \sum_{k=1}^n |a_k| \geq a_N > 0$$

dır. Böylece pozitif seriler için karşılaştırma testi gereğince $\sum_{n=1}^\infty b_n \geq \sum_{n=1}^\infty |a_N| \cdot \frac{1}{n} = \infty$ ve $\sum b_n$ iraksaktır. Bu yüzden $a \notin \text{ces}_1$ dir.

4.2. Bazı Boş (gap) Diziler

Bu kısımda $1 < p \leq \infty$ için ces_p uzayının kesin alt uzayı olarak ℓ_p uzayını içerdigi örnekler gösterilecektir.

Örnek 4.2 $\{a_k\}$ dizisi

$$a_k = \begin{cases} n, & k = n^2 \text{ ise} \\ 0, & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlansın. Açıktır ki $a \notin \ell_\infty$ dur. Diğer yandan , $n^2 < N < (n+1)^2$ için

$$0 < b_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n^2} a_k < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} a_k = b_{n^2} \quad (4.2)$$

ise

$$b_{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} a_k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \leq 1 \quad (4.3)$$

(4.3) yazılabilir. Bu yüzden $b \in \ell_\infty$ dur. Böylece $a, \mathbf{ces}_\infty$ 'a aittir. Sonuç olarak ℓ_∞ uzayının $\mathbf{ces}_\infty$ uzayının kesin alt uzayı olduğu sonucuna varılır.

Örnek 4.3 $1 < p < \infty$ olsun ve $m, \frac{2p}{p-1} = 2 + \frac{2}{p-1}$ den daha büyük bir tamsayı olsun. $k \notin \{n^m : n : 1, 2, \dots\}$ için $a_{n^m} = n, a_k = 0$ tanımlansın ve

$$\beta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n |a_k|, N = 1, 2, \dots,$$

olsun. Açıktır ki eğer $n^m \leq N < (n+1)^m$ ise $\beta_N = \frac{n(n+1)}{2N}$ dir. Böylece

$$\sum_{N=1}^{\infty} \beta_N^p = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{n^m \leq N < (n+1)^m} \left(\frac{n(n+1)}{2N} \right)^p \right) \quad (4.4)$$

yazılır.

Her iç toplamda $\left(\frac{n(n+1)}{2n^m} \right)^p$ den büyük olmayan herhangi bir $(n+1)^m - n^m$ terimi vardır. Bu yüzden

$$\sum_{N=1}^{\infty} \beta_N^p \leq \sum_{N=1}^{\infty} [(n+1)^m - n^m] \left(\frac{n(n+1)}{2n^m} \right)^p. \quad (4.5)$$

$$(n+1)^m - n^m = \sum_{k=1}^m \binom{m}{n} n^{m-k} \leq C n^{m-k}$$

dir. Burada $C = \sum_{k=1}^m \binom{m}{n}$ sayısı herhangi bir m 'ye bağlı olan fakat n 'ye bağlı olmayan bir sabittir ve $n(n+1) \leq 2n^2$ dir. Bu yüzden (4.5) denklemi

$$\sum_{N=1}^{\infty} \beta_N^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} C n^{m-1} \left(\frac{2n^2}{2n^m} \right)^p = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+t}} \quad (4.6)$$

halini alır. Burada

$$t = -m + mp - 2p = m(p-1) - 2p > 0$$

dır. Böylece (4.6) denklemi ile $\{\beta_N\}, \ell_p$ 'ye aittir.

Buna göre ℓ_p uzayının, $\mathbf{ces}_p$ uzayının kesin alt uzayı olduğu sonucuna varılır.

($a = \{a_k\}$ dizisi $\mathbf{ces}_p$ nin bir elemanıdır fakat $a \notin \ell_p$ olduğunda $a \notin \ell_\infty$ dur.)

$p < r$ iken $\ell_p \subset \ell_r$ olduğundan, $p < r$ iken $\mathbf{ces}_p \subset \mathbf{ces}_r$ olduğu görülür. Ayrıca

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

iken $\|a_k\|_{c(r)} \leq \|a_k\|_{c(p)}$ dir. (Bu eşitsizlik tüm $k \in \mathbb{N}$ sayıları için $a_k = 0$ olmadığı sürece değişmezdir.)

Ayrık p için ces_p uzayları ayrıktır. Kabul edelim ki $1 < p < r \leq \infty$ ve $a_n = n^{-\frac{1}{p}}, (n = 1, 2, \dots)$ olsun. Buradan $a = \{a_n\}$ dizisi ℓ_r ye aittir ve bu yüzden ces_r ye aittir. Diğer yandan $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|$ Cesàro ortalamalar dizisinin p . kuvvetten toplanabilir olmadığı gösterilebilir. n bir çift tam sayı ise

$$\sum_{k=1}^n k^{-\frac{1}{p}} > \int_{\frac{n}{2}}^n x^{-\frac{1}{p}} dx = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \left(n^{1 - \frac{1}{p}} - \left(\frac{n}{2}\right)^{1 - \frac{1}{p}} \right) = cn^{1 - \frac{1}{p}} \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada $c = \frac{p}{p-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1 - \frac{1}{p}} \right) > 0$ dir. Bu yüzden de $b_n > cn^{-\frac{1}{p}}$ dir. $\sum n^{-1}$ ıraksak olduğundan $b \notin \ell_p$ dir. Bu yüzden a, ces_p 'ye ait değildir.

4.3. Yoğunluk

Her pozitif k tamsayısı için δ , Kronecker delta olmak üzere $e_k, (e_k)_n = \delta_{kn}$ elemanlı dizi olsun.

Önerme 4.4 Sonlu ve sıfırdan farklı diziler $1 < p < \infty$ için ces_p 'de yoğundur. Gerçekten eğer $a = \{a_n\}_1^\infty$ ise, $n \rightarrow \infty$ iken $\left\| a - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|_{c(p)} \rightarrow 0$ dir.

İspat $\{\sigma_m\}, a$ 'nın mutlak değer dizisi için Cesàro ortalamalar dizisi olsun ve sabit n için $\{\tau_m\}, a - \sum_{k=1}^n a_k e_k = (0, \dots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$ nin mutlak değer dizisi için Cesàro ortalamalar dizisi olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \tau_m &= 0 \quad (1 \leq m \leq n), \\ \tau_{n+k} &= \underbrace{|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|}_{n+k \text{ tane}} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Açıktır ki $\tau_{n+k} \leq \sigma_{n+k}$ dir. Bu yüzden ces_p de $a - \sum_{k=1}^n a_k e_k$ nin normu

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} \tau_{n+\kappa}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} \sigma_{n+\kappa}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \sigma_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.9)$$

şeklinde dir. Bir yakınsak serinin kalan terimleri 0'a yaklaştığından ve $\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^p$ yakınsak olduğundan (4.9) denklemi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| a - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|_{c(p)} = 0 \quad (4.10)$$

halini alır.

Uyarı: Açıktır ki Önerme 4.4'ün ifadesi $p = \infty$ için yanlıştır. Örneğin $(1, 1, 1, \dots)$ dizisi ces_∞ uzayında her sonlu $\sum_{k=1}^n a_k e_k$ toplamından en az 1 birim uzaklıktadır.

Önerme 4.5 Eğer $1 < p < \infty$ ise ces_p ayrılabilirdir.

İspat: Eğer S , skaler bir cismin sayılabilir bir yoğun alt kümesi ise S 'deki sonlu ve sıfırdan farklı diziler, her sonlu $p > 1$ için ces_p nin sayılabilir bir yoğun alt kümesinden oluşur. Bu yüzden ces_p bir ayrılabilir uzaydır.

4.4. Tamlık

Önerme 4.6 $1 < p \leq \infty$ olmak üzere ces_p uzaylarının her biri Banach uzaydır.

İspat. ces_p nin kendi normu ile tanımlı metriğe göre tam olduğunu gösterelim. Verilen bir a dizisi ile tanımlı Cesàro ortalamalar dizisi için $\sigma(a)$ dizisini $\sigma(a)_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j$ şeklinde yazalım.

Farz edelim ki $\{a^{(n)}\}$, ces_p de bir Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ için bir n_0 tamsayısı vardır öyle ki $n, m \geq n_0$ için $\|a^{(n)} - a^{(m)}\|_{c(p)} < \varepsilon$ dır. Yani eğer p sonlu ise

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| \right)^p < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0) \quad (4.11)$$

veya $p = \infty$ için

$$\sup_N \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| \right) < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0) \quad (4.12)$$

yazılır. (4.11) denkleminde

$$\|\sigma(a^{(n)}) - \sigma(a^{(m)})\|_{c(p)} < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0) \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.13) ile $\{\sigma a^{(n)}\}$, ℓ_p 'de bir Cauchy dizisidir. ℓ_p tam olduğundan ℓ_p de

$$\|\sigma(a^{(n)}) - b\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

denklemini sağlayan bir b elemanı vardır. ℓ_p deki yakınsaklık, bileşensel (component-wise) yakınsaklığı ifade eder. Bu yüzden

$$b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(a^{(n)})_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k} a_j^{(n)} \quad (\text{her } k \text{ için}) \quad (4.15)$$

yazılır. (4.15)'i kullanarak her k için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)}$ limitinin mevcut olduğu ve bu limitin $b_0 = 0$ olmak üzere $kb_k - (k-1)b_{k-1}$ 'e eşit olduğunu söyleyebiliriz. $a_k = kb_k - (k-1)b_{k-1}$ olarak bir $a = \{a_k\}$ dizisi tanımlayalım. Buradan

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} \quad (\text{her } k \text{ için}) \quad (4.16)$$

yazılır. Eğer $p = \infty$ ise (4.12) denkleminde, eğer $n, m \geq n_0$ ise her N için $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| < \varepsilon$ olduğu bulunur. $m \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon, \quad N(n, m \geq n_0) \text{ için} \quad (4.17)$$

sonucuna varılır. Böylece her N için

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k| \leq \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)} - a_k| + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)}| \leq \varepsilon + \|a^{(n)}\|_{c(\infty)}$$

dır. Yani a , ces_∞ 'a aittir. (4.17) denkleminde her N üzerinde supremum olarak, her $n \geq n_0$ için $\|a^{(n)} - a\|_{c(\infty)} \leq \varepsilon$ elde edilir. Bu da ces_∞ da $a^{(n)} \rightarrow a$ demektir ve ces_∞ un tamlığını kanıtlar. Eğer $1 < p < \infty$ ise (4.11) denkleminde her pozitif M tamsayısı için

$$\sum_{N=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| \right)^p < \varepsilon^p \quad (n, m \geq n_0). \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) de limit alarak ve (4.16) kullanılarak

$$\sum_{N=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)} - a_k| \right)^p < \varepsilon^p \quad (n \geq n_0) \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) her M için doğru olduğundan

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k^{(n)} - a_k| \right)^p < \varepsilon^p \quad (n \geq n_0) \quad (4.20)$$

bulunur. Fakat (4.20) denklemi iddia eder ki eğer $n \geq n_0$ ise $a^{(N)} - a$ ces_p 'ye aittir ve en çok ε da norma sahiptir. ces_p bir lineer uzay olduğundan $a = a^{(n)} - (a^{(n)} - a)$ nin

$\mathbf{ces}_p$ ye ait olduğu anlaşılır. (4.20) denkleminde $a^{(n)}$ nin $\mathbf{ces}_p$ de a 'ya yakınsak olduğu sonucuna varılır. Bu da $1 < p < \infty$ için $\mathbf{ces}_p$ 'nin tamlığını kanıtlar.

Tamlık ispatının temeli eğer $\mathbf{ces}_p$ uzayında $a^{(n)} \rightarrow a$ ise her k için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k$ olduğunu gözlemlemektir. Bu da koordinat fonksiyonlarının $1 < p < \infty$ için $\mathbf{ces}_p$ üzerinde lineer sürekli fonksiyoneller olduğunu ifade edebilir. [Eğer $a^{(n)} \rightarrow a$ ise ℓ_p de $\sigma(a^{(n)}) \rightarrow \sigma(a)$ dır. Bu yüzden bileşenseldir. Böylece her N için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k^{(n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k$$

dır. Kolay bir tümevarımla her k için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k$ olduğu anlaşılır].

5. BİR MODÜLÜS FONKSİYONU İLE TANIMLANAN CESÀRO DİZİ UZAYI

Bu bölümde f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere Bala [38] tarafından tanımlanan $ces_p(f)$ dizi uzayı verilmiştir. Bu uzayın çeşitli cebirsel ve topolojik özellikleri ve belirli kapsama bağıntıları Shiue [4], Sanhan ve Suantai [31] ve Leibowitz [5]'in çeşitli bilinen sonuçları Bala [38] tarafından geliştirilerek incelenmiştir.

Ruckle [34] FK uzaylarının

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanan bir sınıfını oluşturmak için bir f modülüs fonksiyonunu kullanmıştır. $L(f)$ uzayı, her $x \geq 0$ için $f(x) = x$ alınarak elde edilen ℓ_1 uzayı ile yakından ilişkilidir.

w ve ℓ_0 sırasıyla tüm skaler ve reel dizilerin uzaylarını gösterebilir. $1 < p < \infty$ için, (5.2) ile tanımlı Cesàro ortalamalar dizi uzayı (5.3) normu ile bir Banach uzayıdır.

$$ces_p = \left\{ x \in \ell^0 : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p < \infty \right\} \quad (5.2)$$

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.3)$$

Cesàro ortalamalar dizi uzayı ve ces_p 'nin bazı geometrik özellikleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Sanhan ve Suantai [31], $p = (p_n)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olan bir genelleştirilmiş Cesàro ortalamalar dizisi uzayını çalışmıştır.

f bir modülüs fonksiyonu ve $p = (p_n)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bir f modülüs fonksiyonunu kullanarak, Cesàro ortalamalar dizi uzayı $ces_p(f)$ 'yi

$$ces_p(f) = \left\{ x \in w : \sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} < \infty \right\} \quad (5.4)$$

şeklinde ele alalım. Bazı iyi bilinen uzaylar f ve p nin özelleştirilmesiyle elde edilir.

- (i) Eğer her n için $f(x) = x$, $p_n = p$ ($1 \leq p < \infty$) ise $ces_p(f) = ces_p$ dir [4].
- (ii) Eğer $f(x) = x$ ise $ces_p(f) = ces_p$ dir [31].

Aşağıdaki eşitsizlikler bölüm boyunca gereklidir [15]. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Eğer $H = \sup_k p_k$ ise herhangi bir a_k ve b_k kompleks sayısı için

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq C (|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}), \quad (5.5)$$

sağlanır. Burada $C = \max(1, 2^{H-1})$ 'dir. Ayrıca herhangi λ kompleks sayısı için

$$|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^H). \quad (5.6)$$

dir.

5.1. $\mathbf{ces}_p(f)$ Uzayının Lineer Topolojik Yapısı

Bu kısımda yukarıda tanımlanan dizi uzayının bazı cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir. $\mathbf{ces}_p(f)$ 'nin özelliklerini araştırmak için, (p_n) sınırlı bir dizi kabul edilecektir.

Teorem 5.1. Bir f modülüs fonksiyonu için, $\mathbf{ces}_p(f)$ uzayı kompleks $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır [38].

İspat $x, y \in \mathbf{ces}_p(f)$ olsun. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için M_λ ve N_μ tamsayıları vardır öyleki $|\lambda| \leq M_\lambda$ ve $|\mu| \leq N_\mu$ dır. Modülüs fonksiyonun tanımındaki (ii) ve (iii) şartlarından ve (5.5) ile (5.6)'e eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\lambda x_k + \mu y_k| \right) \right]^{p_n} \\ & \leq \max(1, 2^{H-1}) \max(1, M_\lambda^H) \sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \\ & \quad + \max(1, 2^{H-1}) \max(1, N_\mu^H) \sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k| \right) \right]^{p_n} \end{aligned} \quad (5.7)$$

yazılabilir öyle ki $\lambda x + \mu y \in \mathbf{ces}_p(f)$ 'dır. Bu da $\mathbf{ces}_p(f)$ 'nin $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olduğunu ispatlar.

Teorem 5.2. $H = \sup p_n < \infty$ ve $M = \max(1, H)$ olmak üzere $\mathbf{ces}_p(f)$ uzayı

$$g(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}}, \quad (5.8)$$

ile verilen paranorm ile bir topolojik lineer uzaydır.

Bu ispat standart teknikler kullanılmasıyla yapılabilir ve gerçek şu ki paranormlu uzay bir topolojik lineer uzaydır [39].

Teorem 5.3. $H = \sup p_n < \infty$ ve $M = \max(1, H)$ olmak üzere $\text{ces}_p(f)$ dizi uzayı

$$g(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}}, \quad (5.9)$$

verilen paranorm ile bir Frèchet uzaydır [38].

İspat Teorem 5.2 ye benzer şekilde $\text{ces}_p(f)$ 'nin tamlığı ispatlanabilir. $(x^{(s)})$, $\text{ces}_p(f)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. Buradan $s, t \rightarrow \infty$ iken $g(x^{(s)} - x^{(t)}) \rightarrow 0$ 'dır. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k^{(s)} - x_k^{(t)}| \right) \right]^{p_n} \rightarrow 0 \quad s, t \rightarrow \infty \text{ iken} \quad (5.10)$$

sağlanır. Bu da her sabit k için $s, t \rightarrow \infty$ iken $|x_k^{(s)} - x_k^{(t)}| \rightarrow 0$ anlamındadır ve bu yüzden $(x_k^{(s)})$ her sabit k için $\mathbb{C}$ cisminde bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ cismi tam olduğundan her k için $s \rightarrow \infty$ iken $x_k^{(s)} \rightarrow x_k$ olduğu söylenebilir. (5.10) denkleminde her $\varepsilon > 0$ için bir K doğal sayısı vardır öyleki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k^{(s)} - x_k^{(t)}| \right) \right]^{p_n} < \varepsilon^M \quad s, t > K \text{ için} \quad (5.11)$$

elde edilir. Herhangi sabit bir N doğal sayısı için (5.11) denkleminde

$$\sum_{n=1}^N \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k^{(s)} - x_k^{(t)}| \right) \right]^{p_n} < \varepsilon^M \quad s, t > K \text{ için} \quad (5.12)$$

yazılır. Yukarıdaki ifadede $t \rightarrow \infty$ alınarak

$$\sum_{n=1}^N \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k^{(s)} - x_k| \right) \right]^{p_n} < \varepsilon^M \quad s > K \text{ için} \quad (5.13)$$

bulunur. N keyfi olduğundan $N \rightarrow \infty$ alınmasıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k^{(s)} - x_k| \right) \right]^{p_n} < \varepsilon^M \quad s > K \text{ için} \quad (5.14)$$

elde edilir. Yani $s > K$ için $g(x^{(s)} - x) < \varepsilon$ 'dir.

$x \in \mathbf{ces}_p(f)$ olduğunu göstermek için, sabit bir n_0 ve $t > K$ olsun. $\frac{p_k}{M} \leq 1$ ve $M \geq 1$ olduğundan Minkowski eşitsizliğini ve f 'nin tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n=1}^{n_0} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{n_0} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - x_k^{(t)} + x_k^{(t)}| \right) \right]^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{n_0} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - x_k^{(t)}| \right) + f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k^{(t)}| \right) \right]^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}} \quad (5.15) \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{n_0} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - x_k^{(t)}| \right) \right]^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}} + \left(\sum_{n=1}^{n_0} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k^{(t)}| \right) \right]^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&< \varepsilon + g(x^{(t)}).
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n}$$

yakınsaktır. Bu yüzden $x = (x_k) \in \mathbf{ces}_p(f)$ ve bu uzay tamdır.

5.2. $\mathbf{ces}_p(f)$ Uzayları Arasındaki Kapsama

Burada $\mathbf{ces}_p(f)$ uzayları arasındaki bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Teorem 5.4. Her n için $0 < p_n \leq q_n < \infty$ olmak üzere eğer $p = (p_n)$ ve $q = (q_n)$ pozitif reel sayıların sınırlı dizileri ise herhangi f modülüs fonksiyonu için

$$\mathbf{ces}_p(f) \subseteq \mathbf{ces}_q(f)$$

dır [38].

İspat. $x \in \mathbf{ces}_p(f)$ olsun. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} < \infty$ 'dır. Bu da bazı sabit $n_0 \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ olmak üzere n 'nin yeterince büyük değerleri için $f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \leq 1$ anlamına gelir. f artan ve $p_n \leq q_n$ olduğundan

$$\sum_{n \geq n_0} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{q_n} \leq \sum_{n \geq n_0} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} < \infty$$

yazılabilir. Bu da $x \in \mathbf{ces}_q(f)$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.5. $0 < r_n, t_n < \infty$ ve $p_n = \min(r_n, t_n)$ olmak üzere eğer $r = (r_n)$ ve $t = (t_n)$ pozitif reel sayıların sınırlı dizileri ise herhangi f modülüs fonksiyonu için $\text{ces}_p(f) = \text{ces}_r(f) \cap \text{ces}_t(f)$ dir [38].

İspat Teorem 5.4.'den

$$\text{ces}_p(f) \subseteq \text{ces}_r(f) \cap \text{ces}_t(f)$$

olduğu anlaşılır. Herhangi λ kompleks sayısı için $|\lambda|^{p_n} \leq \max(|\lambda|^{r_n}, |\lambda|^{t_n})$ 'dir. Böylece

$$\text{ces}_r(f) \cap \text{ces}_t(f) \subseteq \text{ces}_p(f)$$

dir. Bu da ispatı tamamlar. Sonuç olarak $\text{ces}_p(f)$ 'nin çarpanlarıyla ilgili bazı bilgiler aşağıda verilmiştir. Herhangi E diziler kümesi için E 'nin çarpanlarının uzayı $M(E)$ ile gösterilir ve

$$M(E) = \{a \in w : ax \in E, \text{ her } x \in E \text{ için}\} \quad (5.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.6. Eğer $H = \sup p_k < \infty$ ise herhangi f modülüs fonksiyonu için $\ell_\infty \subset M(\text{ces}_p(f))$ vardır [38].

İspat $a \in \ell_\infty$ olması her k ve bazı $K > 0$ için $|a_k| < 1 + [K]$ demektir. $x \in \text{ces}_p(f)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k x_k| \right) \right]^{p_n} < (1 + [K])^H \sum_{n=1}^{\infty} \left[f \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \quad (5.17)$$

anlamındadır. Bu da $\ell_\infty \subset M(\text{ces}_p(f))$ 'yi verir.

5.3. $\text{ces}_p(f^v)$ Dizi Uzayı

$\text{ces}_p(f)$ uzayında f 'nin yerine f^v bileşke modülüs fonksiyonunu alarak $\text{ces}_p(f^v)$ bileşke (composite) uzayı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 5.7. Sabit v doğal sayısı için

$$\text{ces}_p(f^v) = \left\{ x \in w : \sum_{n=1}^{\infty} \left[f^v \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k x_k| \right) \right]^{p_n} < \infty \right\}. \quad (5.18)$$

tanımlansın [38].

Teorem 5.8. Herhangi f modülüs fonksiyonu ve $v \in \mathbb{N}$ için

(i) Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise $\mathbf{ces}_p(f^v) \subseteq \mathbf{ces}_p(f)$ 'dir.

(ii) Eğer her $t \geq 0$ için pozitif bir α sabiti vardır öyleki $f(t) \leq \alpha t$ ise $\mathbf{ces}_p(f) \subseteq \mathbf{ces}_p(f^v)$ 'dir [38].

İspat (i) Maddox [33] 'daki Önerme 1'in ispatından

$$\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \inf \left\{ \frac{f(t)}{t} : t > 0 \right\} \quad \text{vardır öyleki } 0 \leq \beta \leq f(1)$$

dir. $\beta > 0$ olsun. β 'nin tanımıyla her $t \geq 0$ için $\beta t \leq f(t)$ vardır. f artan olduğundan $\beta^2 t \leq f^2 t$ 'dir. Bu yüzden kapsama ile $\beta^v t \leq f^v t$ 'dir. $x \in \mathbf{ces}_p(f^v)$ olsun. (5.6) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right]^{p_n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\beta^{-v} f^v \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \\ &\leq \max(1, \beta^{-vH}) \sum_{n=1}^{\infty} \left[f^v \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \end{aligned} \quad (5.19)$$

yazılır. Buradan $x \in \mathbf{ces}_p(f)$ 'dir.

(ii) Her $t \geq 0$ için $f(t) \leq \alpha t$ olduğundan ve f artan bir fonksiyon olduğundan, her $v \in \mathbb{N}$ için $f^v(t) \leq \alpha^v t$ vardır. $x \in \mathbf{ces}_p$ olsun. (5.6) eşitliği kullanılarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f^v \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \leq \max(1, \alpha^{vH}) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right]^{p_n} \quad (5.20)$$

yazılır. Bu yüzden $x \in \mathbf{ces}_p(f^v)$ 'dir.

Örnek 5.9. Her $t \geq 0$ için $f_1(t) = t + t^{\frac{1}{2}}$ ve $f_2(t) = \log(1+t)$ sırasıyla Teorem 5.8 deki (i) ve (ii) ile verilen şartları sağlar [38].

Teorem 5.10. $m, v \in \mathbb{N}$ olsun öyleki $m < v$ dir. Eğer her $t \geq 0$ için bir α pozitif sabiti vardır öyleki $f(t) \leq \alpha t$ ise,

$$\mathbf{ces}_p \subseteq \mathbf{ces}_p(f^m) \subseteq \mathbf{ces}_p(f^v) \quad (5.21)$$

sağlanır [38].

İspat $r = v - m$ olsun. $f(t) \leq \alpha t$ olduğundan, $M = 1 + [\alpha]$ olmak üzere

$$f^v(t) \leq M^r f^m(t) < M^v t$$

yazılır. $x \in \mathbf{ces}_p$ olsun. Yukarıdaki eşitsizlik ile,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[f^v \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} &< M^{rH} \sum_{n=1}^{\infty} \left[f^m \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \right]^{p_n} \\ &< M^{vH} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right]^{p_n} \end{aligned} \quad (5.22)$$

elde edilir ve gerekli kapsama bulunur.

KAYNAKLAR

- [1] Jagers A. A., 1974, A note on Cesàro sequence spaces, *Nieuw Arch. Wisk.* (3) 22, 113–124.
- [2] Ng P. N., Lee P. Y., 1976, On the associate spaces of Cesàro sequence spaces, *Nanta Math.* 9(1976), no. 2, 168–170.
- [3] Shiue, J-S, 1970, A note on Cesàro Function Space, *Tamkang Journal of Mathematics* 1, 91-95.
- [4] Shiue, J-S, 1970, On the Cesàro Sequence Spaces, *Tamkang Journal of Mathematics* 1, 19-25.
- [5] Leibowitz, G. M., 1971, A note on the Cesàro sequence spaces, *Tamkang J. Math.* 2, 151-157.
- [6] Hassard B. D., Hussein D. A., 1973, On Cesàro function spaces, *Tamkang J. Math.* 4 ,19–25.
- [7] Cui Y.A., Pluciennik R., 1997, Local uniform nonsquareness in Cesàro sequence spaces, *Comment.Math. Prace Mat.* 37 , 47–58.
- [8] Cui Y.A., Meng C., Pluciennik R. , 2000, Banach-Saks property and property (β) in Cesàro sequence spaces, *Southeast Asian Bull. Math.* 24 , no. 2, 201–210.
- [9] Cui, Y.A., Hudzik, H. and Pluciennik, R., 1997, Banach-Saks property in some Banach sequence spaces, *Annales Math. Polonici* 65, 193-202
- [10] Saejung S., 2010, Another look at Cesàro sequence spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 366 , no. 2,530–537.
- [11] Astashkin S. V., Maligranda L., 2008, Cesàro function spaces fail the fixed point property, *Proc.Amer. Math. Soc.* 136, no. 12, 4289–4294.
- [12] Astashkin S. V., Maligranda L., 2009, Structure of Cesàro function spaces, *Indag. Math. (N.S.)*20, no. 3, 329–379.

- [13] Astashkin S. V., Maligranda L., 2010, Rademacher functions in Cesàro type spaces, *Studia Math.*198, no. 3, 235–247.
- [14] Awad A. Bakery, 2014, Operator Ideal of Cesàro Type Sequence Spaces Involving Lacunary Sequence, Hindawi Publishing Corporation, 2014,
- [15] Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition, London and New York.
- [16] Soykan, Y.,2008,Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayınları, Ankara.
- [17] Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [18] Balcı, M., 2010. Matematik Analiz 1, Balcı Yayınları,Ankara.3.
- [19] Goes, G. and Goes, S., 1970, Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, *Math. Z.*, 118, 93-102.
- [20] Mucuk, O., 2009. Topoloji, Nobel Yayınları.
- [21] Jain, P.K., Ahuja, O.P. and Ahmad, K., 1995, Functional Analysis, John Wiley & Sons, New York.
- [22] Dernek, A., 2009, Analiz I, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [23] Balcı, M., 2011. Matematik Analiz 2, Balcı Yayınları,Ankara.
- [24] Balcı, M., 2011. Reel Analiz, Balcı Yayınları,Ankara.
- [25] Fridy, J.A., 1985, On the statistical convergence, *Analysis*, 5, 301-313.
- [26] Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., 1978, Some Cesàro- type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 37 (3), 508-520.
- [27] Nakano, H. Concave modulars, 1953, *J. Math. Soc. Japan*, 5, 29–49.
- [28] Orhan, C.1983, Cesàro Sequence Spaces and Related matrix transformations, *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A*, 32, 55-63
- [29] Hardy,G.H.,1952, Inequalities, Cambridge University Press, London.

- [30] Hardy, G. H., Littlewood, J., Polya, G., 1934, *Inequalities*, Cambridge University Press, London.
- [31] Sanhan, W., Suantai, 2003, S., On k -nearly uniform convex property in generalized Cesàro sequence spaces, *Internat. J. Math. Sci.* 57, 3599-3607.
- [32] Maddox, J. I., 1986, Sequence spaces defined by a modulus, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 100, 161-166.
- [33] Maddox, J. I., 1987, Inclusion between FK spaces and Kuttner's theorem, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 100, 523-527.
- [34] Ruckle, W. H., 1973, FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, *Canad. J. Math.*, 25, 973-978.
- [35] Lee, P. Y., 1984, Cesàro sequence spaces, *Math. Chronicle*, 13, 29-45.
- [36] Lui, Y. Q., Wu, B. E., Lee, P. Y., 1996, *Method of sequence spaces*, Guangdong of Science and Technology Press. Chinese.
- [37] Maddox, J. I., 1970, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge Univ. Press, (First edition).
- [38] Bala, I. 2013, On Cesàro Sequence Space Defined By A Modulus Function, *Demonstratio Mathematica*, Vol 46, no.1, 157-163.
- [39] Wilansky, A. 1978, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Konya'nın Seydişehir ilçesinde doğdum. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimimi Konya'da tamamladım. 2004'de Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen-Edebiyat fakültesi, Matematik bölümünü kazandım. 2013 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2012 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir eğitim kurumunda matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.