

KARADENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MERKEZ	
Deni. No :	105184
Flatt :	100

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

TEZ NO :
Genel :
Anabilim Dalı :
Program :

CESARO ORTALAMALARI

Ayşe ALACA

Yönetici: Doç.Dr. Hüsnü KIZMAZ

Ocak, 1987 TRABZON

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ	1
1. BÖLÜM	
ÖN BİLGİLER	9
2. BÖLÜM	
TOEPLITZ VE SCHUR TEOREMLERİ	23
3. BÖLÜM	
CESÀRO ORTALAMALARI	43
A) C_1 -METODU	43
B) C_k -METODLARI	67
4. BÖLÜM	
C_k -METODLARI İLE DİĞER METODLAR ARASINDAKİ	
BAZI İLİŞKİLER	106
A) CESÀRO VE HÖLDER ORTALAMALARI.....	106
B) CESÀRO VE ABEL METODLARI	109
C) CESÀRO VE EULER METODLARI	115
KAYNAKLAR	122

Bu çalışmayı yaparken bana yol gösterip, hiçbir yardımdan kaçınmayan değerli hocam Doç.Dr. Hüsnü KIZMAZ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ocak, 1987

Ayşe ALACA

Ö Z E T

Bu çalışmanın amacı, C_k - metodlarını (k yinci mertebeden Cesàro metodlarını) incelemektir. Birinci bölümde bazı ön bilgilere, ikinci bölümde ise aslında bir limitleme metodu olan matris dönüşümleri ile ilgili temel teoremlere (Silverman - Toeplitz, Kojima-Schur ve Schur Teoremleri) yer verilmiştir.

Bu hazırlıklardan sonra, üçüncü bölümde C_k - metodları incelenmiştir. Son bölümde de analizde kullanılan diğer Abel, Cesàro ve Euler metodları ile C_k - metodları arasındaki ilişkilere yer verilmiştir.

Ocak, 1987

Ayşe ALACA

G İ R İ Ş

Toplanabilme teorisindeki temel düşünce, ıraksak serilere de değişik yollardan anlam vermek ve böylece yeni bir yakınsaklık kavramı oluşturmaktır. Ancak bu gibi kavramların ortaya atılmasında şüphesiz tamamen keyfi hareket edilemez. Tanımlanacak yeni metodların aşağıdaki özelliklere sahip olmaları istenir:

a) Cauchy anlamında yakınsak ve Limiti s olan bir dizi (S_n) ise (S_n) dizisi yeni anlamda da yakınsak ve limiti s olmalıdır,

b) Cauchy anlamında ıraksak en az bir dizi yeni metodla limitlenebilir olmalıdır,

c) Eğer bir (S_n) dizisine farklı iki metod uygulanır ve bu dizi bu iki metodla da limitlenebilirse her iki metod için (S_n) in limiti aynı olmalıdır.

a) ve b) koşulları temel koşullardır. Fakat bütün metodlar c) koşulunu sağlamak zorunda değildir.

Bu üç koşula ek olarak, Cauchy anlamında yakınsak serilerin cebirsel işlemlerinin elemanter kurallarının; yani

$$A) \sum a_n = s \Rightarrow \sum k a_n = ks \quad (\text{her sabit } k \text{ için})$$

$$B) \sum a_n = s \quad \text{ve} \quad \sum b_n = t \Rightarrow \sum (a_n \mp b_n) = s \mp t$$

$$C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$$

aksiyomlarının sağlanması istenir. Bir özel metod tarafından sağla-

nan, yukardakine benzer koşulların çokluğu metodun etki alanının (bu özel metodla limitlenebilen dizilerin tamamı) büyüklüğünü sağlar.

Yukarıda anlatılanları daha iyi kavrayabilmek için bunları bir örnekle açıklayalım.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisinin kısmi toplam dizisi (S_n) ise,

$$S_n = \sum_{u=0}^n (-1)^u = \frac{1}{2} (1+(-1)^n)$$

şeklinde ifade edilebilir. (S_n) dizisinin Cauchy anlamında ıraksak olduğu açıktır. (S_n) in 0 ile 1 arasında salınması bize

$$S_n^1 = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$$

aritmetik ortalamasının teşkili fikrini vermiştir.

$$S_n^1 = \frac{\frac{1}{2}(1+(-1)^0) + \frac{1}{2}(1+(-1)^1) + \dots + \frac{1}{2}(1+(-1)^n)}{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{u=0}^n (-1)^u}{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2} S_n}{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2} [\frac{1}{2}(1+(-1)^n)]}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4(n+1)}$$

Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^1 = \frac{1}{2}$ bulunur.

Cauchy-Limit teoremine göre

$$S_n \rightarrow s \ (n \rightarrow \infty) \text{ ise } S_n^1 = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \rightarrow s \ (n \rightarrow \infty)$$

olduğu bilinmektedir. O halde Cauchy anlamında s limitine yakınsayan bir dizinin aritmetik ortalaması da s limitine yakınsar. Fakat bunun tersi doğru değildir. En azından yukarıdaki $(S_n) = (\sum_{u=0}^n (-1)^u)$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mevcut değil, fakat $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^1 = \frac{1}{2}$ dir.^{u=0}

O halde yeni tanım (Aritmetik ortalama), eski tanım (Cauchy anlamında yakınsaklık) ile yapabildiklerimizin hepsini yapmamızı mümkün kılmaktadır. Bundan başka yeni tanım eskisinden daha geniş bir etki alanına sahiptir. Ayrıca aritmetik ortalamanın A), B) ve C) koşullarını sağladığı açık olarak görülür.

Aritmetik ortalama metodunun en basit bir genelleştirilmesi ilk defa 1882 yılında O. Hölder tarafından yapılmıştır. Hölder bu genelleştirmesinde (H, k) ($k \in \mathbb{N}$) ile gösterilen k . mertebeden Hölder metodunu tanımlamıştır. Dolayısıyla aritmetik ortalamaya $(H, 1)$ tanımını karşılık getirmiştir. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisi $(H, 1)$ toplanabilir ve toplamı $\frac{1}{2}$ dir. Bunu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2} \ (H, 1)$$

şeklinde göstereceğiz. Ancak $(H, 1)$ metodunun $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(n+1)}$ serisi için yetersiz olduğu kolayca görülür. Gerçekten, bu serinin kısmi toplamına S_n dersek,

$$S_n^1 = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$$

olmak üzere

$$S_n^1 = \begin{cases} \frac{n+2}{2(n+1)} & , n \text{ çift} \\ 0 & , n \text{ tek} \end{cases}$$

dir. Açık olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^1$ mevcut değildir. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ serisinin toplamı 1. mertebeden Hölder metoduyla ((H,1) metoduyla) bulunamaz; yani aritmetik ortalama ile bu serinin toplamının hesaplanması mümkün değildir. Ancak (S_n^1) dizisinin tekrar aritmetik ortalamasını almayı düşünebiliriz. (S_n^1) nin aritmetik ortalamasını teşkil ettiğimizde

$$S_n^{11} = \frac{S_0^1 + S_1^1 + \dots + S_n^1}{n+1} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu görürüz. O halde verilen serinin kısmi toplamına arka arkaya iki kez aritmetik ortalama alma işlemi uygulandığında limit bulmak mümkün olmuştur. Yani;

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) = \frac{1}{4} \quad (H,2)$$

dir. Bunun anlamı, verilen seri $\frac{1}{4}$ e 2. mertebeden Hölder toplanabilir. Bır.

Aynı işlem üç kez tekrarlanarak

$$1-3+6-10+\dots\dots\dots$$

serisinin $\frac{1}{8}$ e toplanabilir olduğu, yani

$$1-3+6-10+\dots\dots\dots = \frac{1}{8} \quad (H,3)$$

olduğu görülür. Bu sonuçlar bizi herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için bir (H, k) toplanabilme metodu tanımlamaya yöneltir.

Hölder tanımları aritmetik ortalamanın en basit genişletilmelerinden biridir, fakat en basit olmakla birlikte en uygun olanı değildir.

Aritmetik ortalamanın bir başka genelleştirilmesi de Cesàro tarafından C_k -ortalamları ($k > -1, k \in \mathbb{R}$) adı altında yapılmıştır. C_k -ortalamları (H, k) ortalamalarından daha geneldir.

Şimdi de toplanabilme teorisini bir başka açıdan ele alalım. Şöyle ki; $\forall n, k = 0, 1, 2, \dots$ için a_{nk} bir kompleks sayı olmak üzere $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $Z = (Z_n)$ de bir kompleks sayı dizisi olsun. $Z = (Z_n)$ dizisini

$$\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Şeklinde yazalım ve A matrisi ile $Z = (Z_n)$ dizisini alışılmış matris çarpımı yöntemiyle çarpalım. Bu çarpımı yaparken $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ için $A_n(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} Z_k$ serilerinin yakınsak olduğunu kabul etmek zorundayız. Bu takdirde,

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0k} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(Z) \\ A_1(Z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n(Z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bu şekilde elde edilen $(A_n(Z))$ dizisine (Z_n) dizisinin A-dönüşümü denir.

Özel bir $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisini aşağıdaki gibi seçelim.

$$a_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Bu durumda herhangi bir $Z=(Z_n)$ dizisinin A-dönüşümü

$$(A_n(Z)) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} Z_k \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} Z_k \right) = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n Z_k \right)$$

dir. Son eşitlikten de anlaşıldığı gibi, bu şekilde seçilen A matrisi verilen $Z=(Z_n)$ dizisine uygulanınca

$$(A \text{ ve } \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \text{ matrisi alışılmış matris çarpımı yöntemiyle çarpılınca})$$

(Z_n) dizisi kendi aritmetik ortalamasına dönüşüyor. Bu özel dönüşüm Cesàro (veya $(C,1)$, veya C_1) dönüşümü olarak adlandırılır. $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisini değişik seçerek verilen diziyi daha değişik dizilere dönüştürebiliriz.

Sonuç olarak, toplanabilme aslında bir matris dönüşümüdür. İlk kez 1911 yıllarında O. Toeplitz Lineer uzay teorisi metodlarıyla toplanabilme Teorisi arasındaki ilgiyi kurmuştur.

Bütün kompleks terimli dizilerin kümesi S olsun. $S, \mathbb{C}$ üzerinde bir lineer uzaydır. E, F S nin alt uzayları ve $A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. $\forall x=(x_k) \in E$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ serileri yakınsak ve $(A_n(x)) \in F$ ise A matrisi E den F ye bir limitleme metodudur veya A matrisi E yi F ye dönüştürüyor denir. E yi F ye dönüştüren bütün matrislerin kümesi (E, F) ile gösterilir. Eğer $x=(x_k) \in E$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$ mevcut ve ℓ ye eşit ise $x=(x_k)$ A -limitlenebilir denir ve $A\text{-}\lim x_n = \ell, x_n \rightarrow \ell$ (A) ($n \rightarrow \infty$) şekillerinden biriyle gösterilir. Ayrıca $x=(x_n)$ dizisi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gibi bir sonsuz serinin kısmi toplam dizisi ise o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi ℓ ye A -toplanabilir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell$ (A) şeklinde gösterilir. Bu takdirde, A ya bir limitleme metodu veya toplama metodu denir. Biz A -limitlenebilen bütün dizilerin kümesini (A) ile göstereceğiz.

Toeplitz özel olarak E ve F yerine

$c = \{x=(x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ mevcut, } \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } x_k \in \mathbb{C}\}$ yi alarak c den c ye olan ve üstelik limiti koruyan yani; $x=(x_k) \in c$ için $x_k \rightarrow \ell$ ($k \rightarrow \infty$) ise $A_n(x) \rightarrow \ell$ ($n \rightarrow \infty$) olan $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisinin hangi koşulları sağlaması gerektiğini araştırdı.

Yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren ve üstelik limiti koruyan sonsuz matrislere "Toeplitz matrisi" veya "regüler matris" denir. Bütün regüler matrislerin kümesi $(c, c; P)$ ile gösterilir. Böylece,

$$A \in (c, c; P) : \Leftrightarrow \forall x = (x_n) \in c \text{ için } A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \text{ mevcut}$$

$$\text{ve } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

dir. Ayrıca yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren (Limiti koruması gerekmez) sonsuz matrislere yakınsaklık koruyan matris denir. Bütün yakınsaklık koruyan matrislerin kümesi (c, c) ile gösterilir. O halde

$$A \in (c, c) : \Leftrightarrow \forall x = (x_n) \in c \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

$$\text{serileri yakınsak ve } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) \text{ mevcut}$$

tur. Sınırlı dizileri yakınsak dizilere dönüştüren sonsuz matrislere de "yakınsaklık üreten matrisler" denir ve bütün yakınsaklık üreten matrislerin kümesi (ℓ^∞, c) ile gösterilir. Böylece

$$A \in (\ell^\infty, c) : \Leftrightarrow \forall x = (x_n) \in \ell^\infty \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } A_n(x) \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) \text{ mevcuttur.}$$

Bu çalışmanın 1. Bölümünde diğer bölümler için bir hazırlık yapıldıktan sonra 2. Bölümde (c_0, c_0) , $(c; c)$, $(c, c; P)$ ve (ℓ^∞, c) karakterize edilecek, 3. Bölümde ise özel bir metod olan k. mertebeden Cesàro ortalaması incelenecektir.

1. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölüm diğer bölümler için bir hazırlık niteliğindedir. Bu nedenle bazı tanım ve teoremlere yer verilmiş, ancak birkaç teoremin ispatı yapılmamış, sadece kaynak gösterilmiştir.

Tanım 1.1: X, Y ($\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ üzerinde) lineer uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda, \mu$ skalerleri için $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ ise f $Y \subset X$ üzerinde bir lineer dönüşüm denir.

Özel olarak $Y = \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) ise f lineer dönüşümüne X üzerinde kompleks (veya reel) değerli bir lineer fonksiyonel denir.

Tanım 1.2: X ($\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ üzerinde) bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa bu fonksiyona bir norm fonksiyonu veya kısaca norm, $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu lineer uzay (veya kısaca normlu) uzay denir.

- i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- ii) $\forall x \in X$ ve $\forall \lambda$ skaleri için $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$
- iii) $\forall x, y \in X$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Aşağıda ilerde sık sık kullanılacak olan bazı lineer uzaylar ve o uzaylarda tanımlanan normlar verilmiştir.

$$c_0 := \{x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, x_n \in \mathbb{C}\}$$

$$x=(x_n) \in c_0 \text{ için } ||x|| := \sup_n |x_n| = \max_n |x_n|, \quad (1.1)$$

$$\ell_p := \{x=(x_n) : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty, x_n \in \mathbb{C}\} \quad (p \geq 1)$$

$$x \in \ell_p \quad (p \geq 1) \text{ için } ||x|| := (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}, \quad (1.2)$$

$$c := \{x=(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ var, } x_n \in \mathbb{C}\}$$

$$x \in c \text{ için } ||x|| := \sup_n |x_n|, \quad (1.3)$$

$$\ell_{\infty} := \{x=(x_n) : M_x > 0 \text{ öyle ki } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |x_n| < M_x, x_n \in \mathbb{C}\}$$

$$x \in \ell_{\infty} \text{ için } ||x|| := \sup_n |x_n|. \quad (1.4)$$

Her normlu lineer uzay, normun tanımladığı $d(x,y) := ||x-y||$ metriği ile bir metrik uzaydır. Eğer $(X, ||.||)$ normlu lineer uzayı normun tanımladığı metrik ile tam metrik uzaysa X e Banach uzayı denir.

Tanım 1.3: X, Y normlu uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm olsun.

$$(i) \forall x \in X \text{ için } ||f(x)|| \leq M \cdot ||x||$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa f ye X üzerinde sınırlı lineer dönüşüm denir. X den Y ye olan bütün sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi $B(X, Y)$ ile gösterilir.

ii) $f \in B(X, Y)$ ise f nin normu

$$||f|| := \inf \{M : ||f(x)|| \leq M \cdot ||x||, x \in X\} \quad (1.5)$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \quad (1.6)$$

dır.

Teorem 1.1: ([5], sayfa 104, teorem 4.11) X, Y normlu uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. f nin X üzerinde sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul f nin sınırlı olmasıdır.

Teorem 1.2: ([5], sayfa 107, teorem 7) X bir normlu uzay ve Y de bir Banach uzayı olsun. Bu takdirde $B(X, Y)$ de bir Banach uzayıdır.

$Y = \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) ise $B(X, Y)$ X^* ile gösterilir ve X^* e X in sürekli duali denir.

Tanım 1.4: X bir lineer uzay olsun. $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa g ye bir paranorm, (X, g) ikilisine de bir paranormlu uzay denir.

- i) $g(0) = 0$,
- ii) $g(x) = g(-x)$,
- iii) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ ($\forall x, y \in X$ için).
- iv) $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ($\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$) ve $x \rightarrow x_0$ ($x, x_0 \in X$) ise $g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$.

Tanım 1.5: (X, g) bir paranormlu lineer uzay olsun. X in elemanlarının bir (b_k) dizisi bulunabilirse öyle ki her bir $x \in X$ e karşılık bir ve yalnız bir (λ_k) skaler dizisi varsa ve $x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k b_k$ yazılabiliyorsa; yani $g(x - \sum_{k=0}^n \lambda_k b_k) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise (b_k) dizisine X için bir Schauder bazı denir.

$e_0 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_1 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, ... (yani e_k $k+1$. terimi 1, diğer terimleri sıfır olan dizi) olmak üzere $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ için bir Schauder bazıdır. Ayrıca $e = (1, 1, 1, \dots)$ ise $(e, e_0, e_1, \dots)$ e için bir

Schauder bazıdır. (Bkz:[5], sayfa 88, örnek 11)

Teorem 1.3. [5]: $f \in c^*$ ise $\{a_n\}$ sayısı ve $(a_n) \in \ell_1$ öyle ki $\forall x = (x_n) \in c$ için

$$f(x) = a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \quad (1.7)$$

dir. Ayrıca,

$$\|f\| = |a| + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad (1.8)$$

dir.

İspat: $f \in c^*$ olsun. $(e, e_0, e_1, \dots)$ in c için bir Schauder bazı olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $x = (x_n) \in c$, $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ olmak üzere

$$x = \ell e + \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - \ell) e_n$$

olarak yazılır. Diğer taraftan, $f \in c^*$ olduğundan

$$f(x) = \ell f(e) + \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - \ell) f(e_n) \quad (1.9)$$

dır. Şimdi keyfi bir $r \in \mathbb{N}$ alalım ve özel bir $x = (x_n)$ dizisi seçelim:

$$x_n := \begin{cases} \text{sgn } f(e_n) & , 0 \leq n \leq r \\ 0 & , n > r \end{cases} \quad (1)$$

Bu durumda $x = (x_n) \in c_0$ ve $\|x\| = 1$ dir. Ayrıca $f \in c^*$ olduğundan $\forall x = (x_k) \in c$ için $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ sağlanır. Özel olarak, seçtiğimiz $x = (x_n) \in c_0$ için

$$|f(x)| = \sum_{n=0}^r |f(e_n)| \leq \|f\| \quad (1.10)$$

(1) $z \in \mathbb{C}$ için $\text{sgn } z := |z|/z$ ($z \neq 0$) ve $\text{sgn } 0 = 1$ olarak tanımlanır.

dır. (1.10) dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(e_n)| = \sup_r \sum_{n=0}^r |f(e_n)| \leq \|f\| < \infty$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} |f(e_n)| < \infty$ ve $\mathbb{C}$ Banach uzayı olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} f(e_n)$ yakınsaktır. Böylece,

$$a := f(e) - \sum_{n=0}^{\infty} f(e_n), \quad a_n := f(e_n)$$

olarak tanımlanırsa (1.9) dan

$$f(x) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \quad (1.11)$$

yazılır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n |x_n| = \|x\|$ olduğundan (1.11) den

$$|f(x)| \leq (|a| + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|) \cdot \|x\|$$

elde edilir. Tanım 1.3.i) ve ii) ye göre

$$\|f\| \leq |a| + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad (1.12)$$

ve $\|x\| = 1$ olan $\forall x \in c$ için $|f(x)| \leq \|f\|$ dir. Dolayısıyla keyfi bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$x_n := \begin{cases} \text{Sgn } a_n & , \quad 0 \leq n \leq r \\ \text{Sgn } a & , \quad n > r \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $x = (x_n) \in c$, $\|x\| = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{Sgn } a$ ve

$$|f(x)| = |a + \sum_{n=0}^r a_n + \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n \text{Sgn } a| \leq \|f\|$$

olur. $(a_n) \in \ell_1$ olduğundan $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n = 0$ dir. Bu nedenle son eşitsiz-

likten

$$|a| + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \|f\| \quad (1.13)$$

elde edilir. (1.12) ve (1.13) den

$$\|f\| = |a| + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

çıkar,

Sonuç 1.1: Teorem 1.3 de c^x yerine c_0^x alınırsa $\forall f \in c_0^x$ için $\exists (a_n) \in \ell_1$ öyle ki $\forall x = (x_n) \in c_0$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \text{ ve } \|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

sağlanır.

Teorem 1.4: (Banach-Steinhaus, [5]): X bir Banach uzayı, Y bir normlu uzay, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer dönüşüm ve $\limsup \|A_n(x)\| < \infty$ olsun. O zaman $\sup_n \|A_n\| < \infty$, yani $(\|A_n\|)$ dizisi sınırlıdır.

Bu teoremden, " $\limsup \|A_n(x)\| < \infty$ " yerine $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$ in varlığı alınır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = A(x)$ denirse $A: X \rightarrow Y$ bir sınırlı lineer dönüşüm olur. (Bkz:[5], sayfa 115, teorem 12)

Teorem 1.5: ([2], sayfa 75, teorem 27) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serileri mutlak yakınsak ve $c_n := \sum_{j=0}^n b_j a_{n-j}$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mutlak yakınsak ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

dir.

Not 1.1: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n b_v a_{n-v} \right)$ serisi, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serilerinin Cauchy çarpımı olarak tanımlanır.

Teorem 1.6: (Kuvvet serileri için özdeşlik teoremi; [4], sayfa 172)
Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri $|x| < r$ için yakınsak ve toplam-
ları aynı ise bu iki seri tamamen özdeşdir; yani $\forall n=0,1,2,\dots$ için
 $a_n = b_n$ dir.

Teorem 1.7 (Abel kısmi toplam formülü; [4], sayfa 313): $a_0, a_1, a_2, \dots$
ve $b_0, b_1, b_2, \dots$ keyfi sayılar, $A_n := \sum_{v=0}^n a_v$ olsun. Bu takdirde $\forall n, k \in \mathbb{N}$ ve
 $k \geq 1$ için

$$\sum_{v=n+1}^{n+k} a_v b_v = \sum_{v=n+1}^{n+k} A_v (b_v - b_{v+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k+1}$$

dir.

$n \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ (veya $r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$) keyfi sayılar olsun. Bu takdirde,

$$A_n^r := \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{n!} = \binom{n+r}{r} = \binom{n+r}{n} \quad (1.14)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.8: $k, r, k+r+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ ise $\sum_{v=0}^n A_{n-v}^k A_v^r = A_n^{k+r+1}$ dir.

İspat: $|x| < 1$ $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^p x^n$ serisi mutlak yakınsak ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^p x^n = \frac{1}{(1-x)^{p+1}} \quad (1.15)$$

dir. O halde Teorem 1.5 e göre $c_n = \sum_{v=0}^n A_{n-v}^k A_v^r$ olmak üzere

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ $|x| < 1$ için mutlak yakınsak ve

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^r x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n A_{n-v}^k A_v^r \right) x^n \quad (1.16)$$

dır. Öte yandan, (1.15) $p=k, r, k+r+1$ için yazılır ve (1.16) da kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k+r+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^n A_{n-v}^k A_v^r \right) x^n$$

elde edilir. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden dolayı

$$A_n^{k+r+1} = \sum_{v=0}^n A_{n-v}^k A_v^r$$

bulunur.

Özel olarak $k=0$ ise $\sum_{v=0}^n A_v^r = A_n^{r+1}$ olur.

Tanım 1.6: $\Gamma(x)$ ile gösterilen ve

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (0 < x < \infty)$$

olarak tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir. Γ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x); \quad 0 < x < \infty$
- ii) $\Gamma(x+p) = (x+p-1)(x+p-2)\dots x\Gamma(x); \quad x > 0, p=1,2,\dots$
- iii) $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$

Ayrıca Γ fonksiyonunun tanımı genişletilerek

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}; \quad -n < x < -n+1$$

$n=1,2,3,\dots$

şeklinde verilir. (Bkz: [8], sayfa 368-369)

Aşağıda bundan sonra sık sık kullanacağımız bazı sembolleri tanıtalım.

$f(x)$ ve $g(x)$ verilen iki fonksiyon ve a da sabit bir nokta olsun. (x ve a reel veya komplekstir)

$$i) f(x) \sim g(x) (x \rightarrow a) : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

$$ii) f(x) = o(g(x)) (x \rightarrow a) : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sup \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty,$$

$$iii) f(x) = o(g(x)) (x \rightarrow a) : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

özellikle,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ ise } f(x) = o(1) (x \rightarrow a)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow a} \sup |f(x)| < \infty \text{ ise } f(x) = O(1) (x \rightarrow a)$$

yazılır.

Uyarı: Yukarıdaki ifadeler $x \rightarrow \mp \infty$ için de geçerlidir.

Teorem 1.9: $-\infty < x < \infty$ ve $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = 1 \quad (1.17)$$

dir.

İspat: 1) $0 < x < 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = 1$ dir. (Bkz:[8], sayfa 389).

ii) $1 < x < \infty$ ise (1.17) nin doğru olduğunu gösterelim. $x > 1$ olduğundan

$\exists \alpha, m$ öyle ki $0 \leq \alpha < 1$ ve $1 \leq m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = m + \alpha$ şeklindedir. Ayrıca,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \quad (1.18)$$

($x > 0$, $n = 1, 2, \dots$) ve Γ den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n)n^\alpha} = 1 \quad (1.19)$$

olduğu biliniyor. (1.18) de $x = m + \alpha$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma((m+\alpha)+n) &= \Gamma((n+\alpha)+m) \\ &= \Gamma(\alpha+n)(\alpha+n)(\alpha+n+1)\dots(\alpha+n+m-1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{\Gamma((m+\alpha)+n)}{\Gamma(n)n^{m+\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n)n^\alpha} \cdot \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\dots(\alpha+n+m-1)}{n^m} \quad (1.20)$$

bulunur.

$$\frac{(n+\alpha)(n+(\alpha+1))(n+(\alpha+2))\dots(n+(\alpha+m-1))}{n^m} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.21)$$

olduğu açıktır. (1.19) ve (1.21) kullanılarak (1.20) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = 1$$

olduğu görülür.

iii) $N \in \mathbb{N}$ keyfi olmak üzere $-N < x < -N+1$ olsun. bu takdirde,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = 1$ olduğunu indüksiyon metodunu kullanarak gösterelim.

$N=1$ olsun. Bu durumda $-1 < x < 0$ ve böylece $0 < x+1 < 1$ olur.

1) den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = 1$$

dir. Diğer taraftan $n \geq 1$ için $x+n > 0$ olduğundan

$$\frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{\Gamma((x+n)+1)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{(x+n)\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}}$$

dir. Böylece

$$\frac{(x+n)\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \sim \frac{n}{x+n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur.

Keyfi bir $N \in \mathbb{N}$ ve $-N < x < -N+1$ için

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olsun.

$-N-1 < x < -N$ için $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ olduğunu gösterelim.

$-N-1 < x < -N$ ise $-N < x+1 < -N+1$ olur. İndüksiyon kabulünden dolayı $\frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ dır. Öte yandan, $n > N$ için $x+n > 0$ olduğundan

$$\frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{\Gamma((x+n)+1)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{(x+n) \Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}}$$

dır. Böylece

$$\frac{(x+n) \Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

bulunur. O halde

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \sim \frac{n}{x+n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

dır. Dolayısıyla

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

Teorem 1.9 ve (1.14) birlikte kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.2: $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ ise $A_n^r \sim \frac{n^r}{\Gamma(r+1)} (n \rightarrow \infty)$ dır.

İspat: $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ olsun.

i) $r > -1$ ise $r+1 > 0$ dir. Tanım 1.6. ii) de $x := r+1$ alınır,sa,

$$\frac{\Gamma(r+1+n)}{\Gamma(r+1)} = (r+1)(r+2)\dots(r+n) \quad (1.21)$$

elde edilir. Ayrıca $\Gamma(n+1) = n!$ olduğundan

$$\frac{A_n^r}{n^r} = \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{\Gamma(n+1) n^r} \quad (1.22)$$

dir. (1.21), (1.22) de yerine yazılırsa

$$\frac{A_n^r}{n^r} = \frac{\Gamma(r+1+n)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+1)n^r} \quad (1.23)$$

elde edilir. $m := n+1$ olarak tanımlanırsa,

$$\frac{A_n^r}{n^r} = \frac{\Gamma(m+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(m)(m-1)^r} = \frac{\Gamma(m+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(m)m^r} \cdot \left(\frac{m}{m-1}\right)^r$$

bulunur. Böylece, Teorem 1.9 dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^r}{n^r} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(m+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(m)m^r} \cdot \left(\frac{m}{m-1}\right)^r = \frac{1}{\Gamma(r+1)}$$

elde edilir. O halde, $r > -1$ için $A_n^r \sim \frac{n^r}{\Gamma(r+1)}$ ($n \rightarrow \infty$) dir.

iii) $r < -1$ ve $r \notin \mathbb{Z}^-$ olsun. Bu takdirde

$-n < r+1 < -n+1$ ($n=1,2,3,\dots$) olur. Bu kez,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \quad (n=1,2,\dots, -n < x < -n+1)$$

eşitliğinde $x:=r+1$ alınır, i) deki işlemler tekrarlanır ve Teorem 1.9 kullanılırsa

$$A_n^r \sim \frac{n^r}{\Gamma(r+1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

2. B Ö L Ü M

TOEPLITZ VE SCHUR TEOREMLERİ

Bu bölümde, matris dönüşümleri ile ilgili temel teoremleri vereceğiz. İlgilendiğimiz matrisler sonlu olmayıp, sonsuz matrislerdir ve ortaya çıkan yakınsaklık problemi konuyu cebirden ziyade analizin bir parçası haline getirmektedir.

Şimdi girişte yer verdiğimiz (c_0, c_0) , (c, c) , $(c, c; P)$ ve (ℓ_∞, c) lineer uzaylarını karakterize eden teoremleri vereceğiz.

Teorem 2.1. [5]: $A = (a_{nk})$ ($n, k \in \mathbb{N}$) bir matris, $a_{nk} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$, k sabit) ve $M := \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olsun. O zaman $A: c_0 \rightarrow c_0$ bir sınırlı lineer dönüşümdür ve $\|A\| = M$ dir.

İspat: $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğundan $\forall x = (x_k) \in c_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ serileri yakınsaktır. Bu nedenle $\forall x = (x_k) \in c_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

vardır. $\forall x = (x_k) \in c_0$ için $A(x) := (A_n(x)) \in c_0$ olduğunu göstereceğiz.

$x = (x_k) \in c_0$ keyfi alalım. $x = (0, 0, \dots) =: \theta$ ise açık olarak $A(x) \in c_0$ dir.

Bu nedenle, $\theta \neq x \in c_0$ kabul edebiliriz. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $a_{nk} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$, k sabit) olduğundan $\exists N(\varepsilon) = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ ve $0 \leq k \leq N$ için

$$|a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2 \|x\| N}$$

dir. Ayrıca $x=(x_k) \in c_0$ olduğundan $\exists N'=N'(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\max_{k \geq N'} |x_k| < \frac{\epsilon}{2M}$ dir. $m := \max \{N, N'\}$ alalım. Bu takdirde $\forall n > m$ ve $0 \leq k \leq m$ için

$$|a_{nk}| < \frac{\epsilon}{2 \|x\|_m}, \quad \max_{k \geq m} |x_k| < \frac{\epsilon}{2M} \quad (2.1)$$

olur. Böylece, $\forall n > m$ için

$$|A_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| |x_k| = \sum_{k=0}^{m-1} |a_{nk}| |x_k| + \sum_{k=m}^{\infty} |a_{nk}| |x_k|$$

yazılır, (1,1) ve 2,1) kullanılırsa

$$|A_n(x)| < \epsilon$$

elde edilir. O halde $A: c_0 \rightarrow c_0$ dir. A'nın lineer olduğu açıktır. Şimdi A'nın sınırlı olduğunu gösterelim. $\forall x=(x_k) \in c_0$ için $A(x) \in c_0$ olduğundan

$$\|A(x)\| = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \leq \|x\| \cdot \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = M \cdot \|x\| \quad (2.2)$$

dir. Bu nedenle A dönüşümü sınırlıdır.

Son olarak $\|A\| = M$ olduğunu gösterelim.

$M = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğundan $\exists m=m(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{mk}| > M - \frac{\epsilon}{2} \quad (2.3)$$

dir. Ayrıca $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{mk}| < \infty$ olduğundan $\exists p=p(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$\sum_{k \geq p} |a_{mk}| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.4)$$

dir.

şimdi özel $x=(x_k)_{k=0}^{\infty}$ tanımlayalım.

$$x_k := \begin{cases} \operatorname{sgn} a_{mk} & , 0 \leq k \leq p \\ 0 & , k > p \end{cases}$$

Bu $x=(x_k)_{k=0}^{\infty}$ için $\|x\|=1$ ve

$$\begin{aligned} |A_m(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} x_k \right| = \left| \sum_{k=0}^p a_{mk} x_k \right| = \left| \sum_{k=0}^p a_{mk} \operatorname{sgn} a_{mk} \right| = \sum_{k=0}^p |a_{mk}| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{mk}| - \sum_{k>p} |a_{mk}| \end{aligned}$$

dır. (2.3) ve (2.4) gözönüne alınırsa

$$|A_m(x)| > M - \varepsilon$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \|A(x)\| = \sup_n |A_n(x)| \geq |A_m(x)| > M - \varepsilon \quad (2.5)$$

bulunur. Ayrıca (2,2) den $x \neq 0$ için

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq M$$

yazılır. O halde,

$$M - \varepsilon < \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq M$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = M$ dir. Öte yandan, (1.6)

ya göre $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$ dir. O halde $\|A\| = M$ dir.

Teorem 2.2 de $A \in B(c_0, c_0)$ ise Teorem 2.1 in koşullarını sağlayan bir (a_{nk}) matrisinin varlığı gösterilecektir.

Teorem 2.2.[5]: $A: c_0 \rightarrow c_0$ bir sınırlı lineer dönüşüm olsun Bu takdirde A , bir (a_{nk}) matrisi tanımlar öyle ki

$$\|A\| = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \text{ (} \forall \text{ sabit } k \text{ için)}$$

sağlanır.

İspat: $A: c_0 \rightarrow c_0$ bir sınırlı lineer dönüşüm olsun.

$(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nin c_0 için bir Schauder bazı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $\forall x \in c_0$ için $\exists (x_k)$ skaler dizisi öyle ki

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k$$

olarak yazılır. Teorem 1.1 den dolayı A süreklidir. Bu nedenle

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k A(e_k)$$

dır. Ayrıca $\forall k \in \mathbb{N}$ için $e_k \in c_0$ ve $A: c_0 \rightarrow c_0$ olduğundan $A(e_k) \in c_0$ dır.

$$A(e_k) := (a_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}, \dots)$$

olarak yazalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $A(e_k) \in c_0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = 0 \text{ (sabit her } k \in \mathbb{N} \text{ için)}$$

dir. $\forall x = (x_k) \in c_0$ için $A(x) \in c_0$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} x_k$ serileri yakınsaktır. O halde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} x_k$$

vardır. Bundan sonra $(a_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ yerine $(a_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ gösterimini kullanalım. $\forall x \in c_0$ için

$$||A(x)|| = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right| = \sup_n |A_n(x)|$$

olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|A_n(x)| \leq ||A(x)||$ dir. Ayrıca, $A \in B(c_0, c_0)$ olduğundan $\forall x \in c_0$ için $||A(x)|| \leq ||A|| \cdot ||x||$ dir. Dolayısıyla, $\forall x \in c_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|A_n(x)| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

sağlanır. O halde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in c_0^*$ dir. Sonuç 1.1 e göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$||A_n|| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \quad (2.6)$$

dir. Şimdi $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğunu gösterelim. c_0 bir Banach uzayı, $\mathbb{C}$ normlu uzay, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in c_0^*$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = 0$ olduğundan Banach-Steinhaus Teoremine göre $\exists H > 0$ sabiti öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$||A_n|| \leq H \quad (2.7)$$

dir. (2.6), (2.7) de yerine yazılırsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq H, \text{ yani } \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

elde edilir.

$$M := \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$$

olarak tanımlanır ve Teorem 2.1 kullanılırsa $||A|| = M$ bulunur.

Şimdi de bu bölümün temel teoremi olan Silverman-Toeplitz teoreminde kullanacağımız bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 2.1. [5]: $\forall x=(x_k) \in c$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $\forall x=(x_k) \in c$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ yakınsak, fakat $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$ dir. Bu durumda doğal sayıların bir (n_i) alt dizisi vardır öyle ki $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ve

$$\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_k| > i$$

sağlanır. Şimdi bir $y=(y_k) \in c_0$ tanımlayalım.

$$y_k := \begin{cases} (Sgn a_k)/i & , n_i < k \leq n_{i+1} \\ 0 & , 0 \leq k \leq n_1 \end{cases}$$

$c_0 \subset c$ olduğundan $y=(y_k) \in c$ dir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{|a_k|}{1} + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} \frac{|a_k|}{2} + \sum_{k=n_3+1}^{n_4} \frac{|a_k|}{3} + \dots$$

$> 1+1+1+ \dots,$

böylece $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k$ ıraksaktır. $y=(y_k) \in c$ olduğundan bu hipotezle çelişir. Bu nedenle, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ olmak zorundadır.

Aşağıdaki teorem toplanabilme teorisinde regüler matrisleri karakterize eden teoremdir. Bu teoremin ispatı önce klasik analizde oldukça uzun bir şekilde yapılmıştır (6 , sayfa 11, teorem II.1(3^o)). Sonradan fonksiyonel analizin araçları (Banach-Steinhaus Teoremi) kullanılarak ispat basitçe verilmiştir. Biz bu yolu seçeceğiz.

Bu teoremin yeterlilik koşulları Silverman, (RN) koşulunun gerekliliği ise Toeplitz tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.3. (Silverman-Toeplitz) [5]: $A=(a_{nk})_{c(c,c;P)}$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(RN) \quad \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad (\text{Satır-Norm Koşulu})$$

$$(Co) \quad a_{nk} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit}) \quad (\text{Sütün koşulu})$$

$$(RS_1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \rightarrow l (n \rightarrow \infty) \quad (\text{Satır-Toplam koşulu})$$

dır.

İspat: "Yeterli koşul" (RN), (Co) ve (RS_1) sağlansın. $A \in (c,c;P)$ olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir $x=(x_k)_{c,c}$ alalım ve $l := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ diyelim. Bu durumda (RN) den

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (x_k - l) + l \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$$

yazılır. (RS_1) den, $\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = l$ dir. Ayrıca $y_k := x_k - l$ olmak

üzere $y=(y_k)_{c,c_0}$ olur. $y \in c_0$, (RN) ve (Co) sağlandığından Teorem 2,1 e

göre $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (x_k - l) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ dir. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = l$,

dolayısıyla $A \in (c,c;P)$ dir.

"Gerekli koşul": $A \in (c,c;P)$ olsun, (RN), (Co) ve (RS_1) koşullarının sağlandığını gösterelim. $k \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit olmak üzere $x=e_k=(x_k)$ alalım. $x \in c_0$, yani $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ dir. Diğer taraftan, $c_0 \subset c$ ve $A \in (c,c;P)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ var ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

dır. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (k \text{ sabit})$$

bulunur. O halde, (Co) sağlanır.

Yine $x=e=(1,1,1,\dots)$ alalım. $x=e \in c$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ dir. $A \in (c,c;P)$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$$

dir. Bu ise (RS_1) i ispatlar.

Şimdi (RN) nin sağlandığını gösterelim. Keyfi bir $x=(x_k) \in c$ alalım ve $\ell := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ diyelim. $A \in (c,c;P)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ var ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \ell$ dir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x)$ in varlığı, yardımcı Teorem 2.1 den dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olduğunu gerektirir. Böylece,

$$A_n : c \rightarrow \mathbb{C}$$

$$|A_n(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \right) \|x\|$$

elde edilir; yani $A_n \in c^x$ dir. O halde, Teorem 1.1 de f yerine A_n , a yerine sıfır, (a_n) yerine (a_{nk}) alınırsa

$$\|A_n\| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \ell$ olduğundan $\limsup_n |A_n(x)| < \infty$ dir. Banach-Steinhaus Teoreminden dolayı $\sup_n \|A_n\| < \infty$ dir. Böylece $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ dir.

$A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ise A matrisine üçgensel matris denir.

Sonuç 2.1. [4]: Bir $A=(a_{nk})$ üçgensel matrisi Teorem 2.3 ün koşullarına ek olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,n-k} = 0 \quad (\forall \text{ sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için})$$

koşulunda sağlıyorsa, bu takdirde

$$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty) \text{ ve } y_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$$

olmak üzere

$$Z_n := \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k y_{n-k} \rightarrow x \cdot y (n \rightarrow \infty)$$

dır.

İspat: $A=(a_{nk})$ üçgensel matrisi belirtilen koşulları sağlasın ve $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, $y_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$ olsun.

$$x_k y_{n-k} = (x_k - x) y_{n-k} + x y_{n-k}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{k=0}^n a_{nk} y_{n-k} (x_k - x) + x \sum_{k=0}^n a_{nk} y_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n a_{nk} y_{n-k} (x_k - x) + x \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} y_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir. $b_{nk} := a_{nk} y_{n-k}$ denirse, açık olarak $B=(b_{nk})$ matrisi Teorem 2.1 in koşullarını sağlar. Ayrıca $x_n - x \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ dir. Böylece, Teorem 2.1 den

$$\sum_{k=0}^n a_{nk} y_{n-k} (x_k - x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (2.9)$$

elde edilir. Şimdi, $x \cdot \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} y_k$ yi ele alalım.

$c_{nk} := a_{n,n-k}$ olarak tanımlanırsa, $C = (c_{nk})$ matrisi Teorem 2.3 ün koşullarını sağlar. Gerçekten,

$$(RN) \quad \sup_n \sum_{k=0}^n |c_{nk}| = \sup_n \sum_{k=0}^n |a_{n,n-k}| = \sup_n \sum_{k=0}^n |a_{nk}| < \infty$$

$$(Co) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,n-k} = 0 \quad (\forall \text{ sabit } k \text{ için})$$

$$(RS)_I) \quad \sum_{k=0}^n c_{nk} = \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} = \sum_{k=0}^n a_{nk} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. O halde, Teorem 2.3 den $\sum_{k=0}^n c_{nk} y_k \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$, yani

$$\sum_{k=0}^n a_{n,n-k} y_k \rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

dır. (2,9 ve (2.10), (2.8) de kullanılırsa

$$z_n \rightarrow xy \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur.

Şimdi Toeplitz teoreminden daha genel olan Kojima-Schur Teoremini vereceğiz. Bu teoremin koşullarını sağlayan matrisi "yakınsaklık koruyan matris" denir.

Teorem 2.4. [5] (Kojima-Schur Teoremi): $A = (a_{nk}) \in (c, c)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$i) \quad \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p \quad (\forall p \in \mathbb{N} \text{ için})$$

olmasıdır.

İspat: "Gerekli koşul": $A=(a_{nk}) \in (c,c)$ olsun. I) nin gerekliliği Teorem 2.3 deki gibi gösterilir. II) nin gerekliliğini göstermek için keyfi fakat sabit bir $p \in \mathbb{N}$ alalım ve

$$x_k := \begin{cases} 0, & 0 \leq k < p \\ 1, & k \geq p \end{cases}$$

olmak üzere $x=(x_k) \in c$ dizisini tanımlayalım. $A \in (c,c)$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}$$

vardır.

"Yeterli koşul": I) ve II) sağlansın. $A \in (c,c)$ olduğunu gösterelim.

Keyfi bir $x=(x_k) \in c$ alalım ve $\ell := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ diyelim. I) den

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (x_k - \ell) + \ell \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$$

yazılır.

$$s_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (x_k - \ell) \text{ ve } t_n := \ell \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$$

olsun. II) den $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a_0$, böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \ell a_0$ dir.

Yine II) den dolayı sabit her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{\infty} a_{ni} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} a_{ni} = a_k - a_{k+1}$$

dir. Şimdi $b_k := a_k - a_{k+1}$ olmak üzere

$$s_n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x_k - \ell) \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu göstereceğiz. Açık olarak, keyfi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m |b_k| &= \sum_{k=0}^m |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{nk}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m |a_{nk}| \leq \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \end{aligned}$$

dır. O halde,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m |b_k| \leq \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$$

dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} s_n - \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x_k - \ell) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (x_k - \ell) - \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x_k - \ell) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{nk} - b_k) (x_k - \ell) \end{aligned}$$

bulunur.

$$U_n := \sum_{k=0}^{\infty} (a_{nk} - b_k) (x_k - \ell)$$

yazalım. Teorem 2.1 de x_k yerine $x_k - \ell$, a_{nk} yerine $a_{nk} - b_k$ yazılırsa

$U_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ bulunur. Bu nedenle

$$s_n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x_k - \ell) \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. 0 halde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x_k - \ell) + \ell a_0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

yani, $A \in (c, c)$ olur.

Teorem 2.1 ve Teorem 2.3 de yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren matrisleri karakterize ettik. İspatta temel araç olarak Banach-Steinhaus Teoremini kullandık. c yakınsak diziler uzayının Schauder bazına sahip olması bize bu olanağı sağladı. Bundan sonra sınırlı dizileri yakınsak dizilere dönüştüren matrisleri karakterize edeceğiz. Yani, (ℓ^∞, c) yi belirleyeceğiz. ℓ^∞ sınırlı diziler uzayının ayrılabilir (separable) olmaması ve Schauder bazının bulunmaması bu uzay üzerinde Banach-Steinhaus Teoremini kullanmamıza olanak vermez. Dolayısıyla ispatta analizin klasik yöntemlerini kullanacağız. Önce bir yardımcı teorem vereceğiz.

Yardımcı Teorem 2.2.[5]: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| < \infty$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

ise $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}|$ n ye göre düzgün yakınsaktır.

İspat: i) $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| < \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ için})$

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ olsun ve $\epsilon > 0$ keyfi verilsin. ii) den dolayı $\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ için $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| < \epsilon$ dir. Ayrıca, i) den $0 \leq n \leq N$ için $\exists m = m(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\sum_{k=m}^{\infty} |b_{nk}| < \epsilon$ sağlanır. 0 halde,

$$M := \max \{ m(n, \epsilon) \}$$

$$0 \leq n \leq N$$

olarak tanımlanırsa, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=M}^{\infty} |b_{nk}| < \epsilon$ olur. $M=M(\epsilon)$ olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}|$ n ye göre düzgün yakınsaktır.

Aşağıdaki teorem 1921 de Schur tarafından ispatlanmıştır. Dolayısıyla Schur Teoremi olarak bilinir

Teorem 2.5. [5]. (Schur): $A=(a_{nk})_{n,k} \in (\ell^{\infty}, c)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

i) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$ n ye göre düzgün yakınsak,

ii) Her sabit k için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}$ var

olmasıdır.

İspat: "Gerekli koşul": $A=(a_{nk})_{n,k} \in (\ell^{\infty}, c)$ olsun. Bu durumda $\forall x \in \ell^{\infty}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$ vardır. Özel olarak,

$$x_n := \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N} \text{ keyfi fakat sabit})$$

olmak üzere $x=(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^{\infty}$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}$$

dır. $A \in (\ell^{\infty}, c)$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$ vardır, dolayısıyla her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}$ vardır. O halde ii) sağlanır. Şimdi i) nin sağlandığını gösterelim.

$A \in (\ell^{\infty}, c)$ ve $c \subset \ell^{\infty}$ olduğundan $\forall x=(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c$ için $(A_n(x))=(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k)$ yakınsaktır. Teorem 2.4 den

$$M := \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad (2.11)$$

olmak zorundadır. $a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}$ olmak üzere $b_{nk} := a_{nk} - a_k$ olarak tanımlansın. Keyfi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m |a_k| &= \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{nk}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m |a_{nk}| \\ &\leq \sup_n \sum_{k=0}^m |a_{nk}| \leq M \end{aligned}$$

olduğundan, $m \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq M \quad (2.12)$$

dir. Diğer taraftan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{nk} - a_k) x_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$$

dir. $A \in (\ell^\infty, c)$ ve (2.12) den dolayı $B := (b_{nk}) \in (\ell^\infty, c)$ olur. Şimdi $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ olduğunu göstereceğiz (2.11) ve (2.12) den,

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \leq \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$$

dir. O halde, $B_n := \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}|$ olmak üzere (B_n) sınırlı bir dizidir.

Kabul edelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \neq 0$ dir. Bu takdirde, $c := \limsup B_n > 0$ olmak üzere $\{B_{n_m}\} \subset (B_n)$ alt dizisi öyle ki $B_{n_m} \rightarrow c (m \rightarrow \infty)$ dir. Yazımda kolaylık olması için B_{n_m} yerine B_m yazalım. O halde,

$$B_m = \sum_{k=0}^{\infty} |b_{mk}| \rightarrow c (m \rightarrow \infty) \quad (2.13)$$

dir. Ayrıca her sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_{mk} = \lim_{m \rightarrow \infty} (a_{mk} - a_k) = 0 \quad (2.14)$$

dır. (2.13) ve (2.14) den,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} |b_{m(o),k}| - c \right| < \frac{c}{10} \quad (2.15)$$

ve

$$|b_{m(o),o}| < \frac{c}{10} \quad (2.16)$$

sağlanacak şekilde $m(o) \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan, $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{m(o),k}| < \infty$ olduğundan,

$$\sum_{k=k(1)+1}^{\infty} |b_{m(o),k}| < \frac{c}{10} \quad (2.17)$$

olacak şekilde $o < k(1) \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\sum_{k=1}^{k(1)} |b_{m(o),k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |b_{m(o),k}| - |b_{m(o),o}| - \sum_{k=k(1)+1}^{\infty} |b_{m(o),k}|$$

eşitliğinde (2.15), (2.16) ve (2.17) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k(1)} |b_{m(o),k}| - c &\leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} |b_{m(o),k}| - c \right| + \sum_{k=k(1)+1}^{\infty} |b_{m(o),k}| + |b_{m(o),o}| \\ &< \frac{c}{10} + \frac{c}{10} + \frac{c}{10} = \frac{3c}{10} \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan sonra,

$$B(m,p,q) := \sum_{k=p}^q |b_{mk}|$$

şeklinde yazacağız. Şimdi $m(1) > m(o)$ öyle seçelim ki

$$|B(m(1), 0, \infty) - c| < \frac{c}{10} \quad (2.18)$$

$$B(m(1), 0, k(1)) < \frac{c}{10} \quad (2.19)$$

olsun. Yine $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{m(1), k}| < \infty$ olduğundan $k(2) > k(1)$ öyle seçilir ki

$$B(m(1), k(2)+1, \infty) < \frac{c}{10} \quad (2.20)$$

sağlanır. Dolayısıyla (2.18), (2.19) ve (2.20) kullanılarak

$$\begin{aligned} |B(m(1), k(1)+1, k(2)) - c| &\leq |B(m(1), 0, \infty) - c| + |B(m(1), k(2)+1, \infty)| \\ &+ |B(m(1), 0, k(1))| < \frac{3c}{10} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu kez, $m(2) > m(1)$ öyle seçilir ki

$$|B(m(2), 0, \infty) - c| < \frac{c}{10} \quad (2.21)$$

$$B(m(2), 0, k(2)) < \frac{c}{10} \quad (2.22)$$

olur. Ayrıca $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{m(2), k}| < \infty$ olduğundan $k(3) > k(2)$ öyle seçilir ki

$$B(m(2), k(3)+1, \infty) < \frac{c}{10} \quad (2.23)$$

sağlanır. O halde, (2.21), (2.22) ve (2.23) kullanılırsa

$$\begin{aligned} |B(m(2), k(2)+1, k(3)) - c| &\leq |B(m(2), 0, \infty) - c| + |B(m(2), 0, k(2))| \\ &+ |B(m(2), k(3)+1, \infty)| \end{aligned}$$

$$< \frac{c}{10} + \frac{c}{10} + \frac{c}{10} = \frac{3c}{10}$$

bulunur. Böyle devam ederek,

$m(0) < m(1) < m(2) < \dots, o = k(0) < k(1) < k(2) < \dots$ doğal sayı dizileri bulunur

öyle ki

$$\left. \begin{aligned} B(m(r), o, k(r)) &< \frac{c}{10} \quad (r=0, 1, 2, \dots) \\ B(m(r), k(r+1)+1, \infty) &< \frac{c}{10} \\ |B(m(r), k(r)+1, k(r+1)) - c| &< \frac{3c}{10} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

sağlanır. Şimdi bir $x = (x_k) \in \ell^\infty$ tanımlayalım.

$$x_k := \begin{cases} 0 & , k=0 \\ (-1)^r \operatorname{sgn} b_{m(r),k} & , k(r) < k \leq k(r+1). \\ & r=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Bu $x = (x_k) \in \ell^\infty$ için $\|x\| = 1$ ve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} b_{m(r),k} x_k &= \sum_{1 \leq k \leq k(r)} b_{m(r),k} (-1)^r \operatorname{sgn} b_{m(r),k} \\ &+ \sum_{k(r) < k \leq k(r+1)} b_{m(r),k} (-1)^r \operatorname{sgn} b_{m(r),k} \\ &+ \sum_{k > k(r+1)} b_{m(r),k} (-1)^r \operatorname{sgn} b_{m(r),k} \\ \sum_{k=0}^{\infty} b_{m(r),k} x_k &= \sum_{1 \leq k \leq k(r)} (-1)^r |b_{m(r),k}| + \sum_{k(r) < k \leq k(r+1)} (-1)^r |b_{m(r),k}| \\ &+ \sum_{k > k(r+1)} (-1)^r |b_{m(r),k}| \end{aligned}$$

dır. Bu nedenle, (2.24) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_{m(r),k} x_k^{(-1)^r c} \right| \leq \left| \sum_{1 \leq k \leq k(r)} (-1)^r |b_{m(r),k}| \right| \\
 & + \left| \sum_{k(r) < k \leq k(r+1)} (-1)^r |b_{m(r),k}| - (-1)^r c \right| + \left| \sum_{k > k(r+1)} (-1)^r |b_{m(r),k}| \right| \\
 & = \left| \sum_{1 \leq k \leq k(r)} |b_{m(r),k}| + \left| \sum_{k(r) < k \leq k(r+1)} |b_{m(r),k}| - c \right| \right| \\
 & + \left| \sum_{k > k(r+1)} |b_{m(r),k}| \right| \\
 & < \frac{c}{10} + \frac{3c}{10} + \frac{c}{10} = \frac{c}{2}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$B_{m(r)}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_{m(r),k} x_k$$

yakınsak değildir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \neq 0$ ise bir $x = (x_k) \in \ell_{\infty}$ bulunuyor öyle ki bu $x = (x_k)$ dizisi için $(B_n(x))$ yakınsak olmuyor. Bu ise hipotezle çelişir. O halde, $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olmak zorundadır. Öyleyse Yardımcı Teorem 2.2'ye göre $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}|$ neye göre düzgün yakınsaktır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk} + a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$ neye göre düzgün yakınsaktır.

"Yeterli koşul": i) ve ii) sağlansın. Keyfi bir $x = (x_k) \in \ell_{\infty}$ alalım.

$a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}$ diyelim. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^m |a_k| = \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{nk}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m |a_{nk}| \leq \sup_{k=0}^m \sum_{k=0}^m |a_{nk}| < M$$

dir. Böylece,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq M \quad (M = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|)$$

dır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$$

olduğundan

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$ vardır. O halde $A \in (\ell_{\infty}, c)$ dir.

Teorem 2.5 in koşullarını sağlayan $A = (a_{nk})$ matrisine "Schur matrisi" veya "yakınsaklık üreten matris" denir.

$A = (a_{nk})$ regüler bir matris ise A yakınsaklık üretmez. Gerçekten; $A = (a_{nk})$ regüler bir matris ise $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ ve $a_{nk} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit})$ olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki A yakınsaklık üretsın. Bu takdirde Teorem 2.5 e göre $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$ n ye göre düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{nk}| = 0$$

olur. Bu ise $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ ile çelişir. O halde $A = (a_{nk})$ regüler bir matris ise yakınsaklık üretmez.

3. B Ö L Ü M

CESÀRO ORTALAMALARI

A-) C_1 - METODU

Tanım 3.1: Bir (S_n) dizisi verilsin.

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$$

olmak üzere (σ_n) dizisi yakınsak ve limiti S ye eşit ise (S_n) dizisi C_1 -limitlenebilir (veya $(C,1)$ limitlenebilir) denir ve $S_n \rightarrow S(C_1)$ (veya $S_n \rightarrow S(C,1)$) şeklinde gösterilir. Eğer (S_n) , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve $S_n \rightarrow S(C_1)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi C_1 -toplanabilir (veya $(C,1)$ -toplanabilir) denir, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1)$ (veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C,1)$) şeklinde gösterilir.

C_1 -metoduna 1. mertebeden Cesàro ortalaması da denir. Şimdi C_1 -limitlenebilme ile ilgili bazı önemli özellikler vereceğiz. Aşağıda vereceğimiz Teorem 3.1 C_1 -limitlenebilen dizilerin sınıfı hakkında önemli bilgiler verecektir.

Teorem 3.1. [6]: $S_n \rightarrow S(C_1)$ ise $S_n = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) dır. Ayrıca, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamı S_n ise $a_n = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) dır. Eğer $0 < \lambda_n \neq O(1)$ ($n \rightarrow \infty$) ise bir (S_n) dizisi vardır öyle ki $S_n \rightarrow S(C_1)$ dir Fakat $S_n \neq o(\frac{n}{\lambda_n})$ ($n \rightarrow \infty$) dır. (Yani, $S_n \rightarrow S(C_1)$ ise $S_n = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) en iyi ihtimaldir.)

İspat: $S_n \rightarrow S(C_1)$; yani $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k \rightarrow S(n \rightarrow \infty)$ olsun.

$$(n+1)\sigma_n = S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1} + S_n$$

$$n\sigma_{n-1} = S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = S_n$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{S_n}{n} = (1 + \frac{1}{n}) \sigma_n - \sigma_{n-1} \rightarrow o(n \rightarrow \infty)$$

yani, $S_n = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) bulunur. S_n , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamı ise $a_n = S_n - S_{n-1}$ olduğundan $a_n = o(n)$ dir.

$o < \lambda_n \neq 0(1)$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. Doğal sayıların öyle bir (n_i) alt dizisini bulabiliriz ki $n_{i+1} > n_i + 2$ ve $\lambda_{n_i} \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty)$ olur.

$$T_n := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} & , n = n_i \\ 0 & , n \neq n_i \end{cases}$$

ve

$$S_n := (n+1) T_n - n T_{n-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde,

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{(2T_1 - T_0) + (3T_2 - 2T_1) + \dots + ((n+1)T_n - nT_{n-1})}{n}$$

$$\sigma_n = -\frac{T_0}{n} + (1 + \frac{1}{n}) T_n$$

olur. Diğer taraftan, $T_n \rightarrow o(n \rightarrow \infty)$ olduğundan $\sigma_n \rightarrow o(n \rightarrow \infty)$ yani, $S_n \rightarrow o(C_1)$ dir. Fakat

$$S_{n_i} = (n_i + 1) T_{n_i} - n_i T_{n_i-1} = (n_i + 1) T_{n_i}$$

$$\frac{\lambda_{n_i}}{n_i} S_{n_i} = (1 + \frac{1}{n_i}) \lambda_{n_i} \cdot T_{n_i} = (1 + \frac{1}{n_i}) \sqrt{\lambda_{n_i}} \rightarrow \infty \quad (i \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$S_{n_i} \neq o\left(\frac{n_i}{\lambda_{n_i}}\right)$$

dir.

Teorem 3.1 gösteriyor ki C_1 -limitlenebilen her dizi için $S_n = o(n)$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani, $S_n = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) olan her (S_n) dizisi C_1 -limitlenemez. Hatta C_1 -limitlenemeyen sınırlı diziler bile vardır. Buna bir örnek verelim.

$$(S_n) = (0, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

10 tane 10² tane 10³ tane 10⁴ tane

olsun. Bu (S_n) dizisi için $\liminf S_n = 0$ ve $\limsup S_n = 1$ dir. O halde, (S_n) sınırlıdır. Fakat,

$$\sigma_{10^{2k+1}} = \frac{\dots o+1+1+\dots+1}{10^{2k+1}+1} \geq \frac{10^{2k+1}-10^{2k}}{10^{2k+1}+1} \rightarrow \frac{9}{10} \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$\sigma_{10^{2k}} = \frac{\dots 1+o+o \dots +o}{10^{2k}+1} \leq \frac{10^{2k}-1}{10^{2k}+1} \rightarrow \frac{1}{10} \quad (k \rightarrow \infty)$$

olduğundan (S_n) C_1 -limitlenemez.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1)$ olduğunu fakat tersinin doğru olmadığını biliyoruz. Ancak, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1)$ ve a_n belli bir koşulu sağlarsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ olur. Bu durumu Teorem 3.2 de tartışacağız.

Teorem 3.2. [4]: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. Eğer

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1). \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (C_1)$$

koşulları sağlanıyorsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ dir.

İspat: i) ve ii) sağlansın, i) den $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ olmak üzere

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \rightarrow S \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

dir. Ayrıca ii) den dolayı

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

dir. Diğer taraftan,

$$S_n - \sigma_n = S_n - \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n+1}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n+1} \quad (3.3)$$

dır. (3.1) ve (3.2), (3.3) de kullanılırsa

$$S_n \rightarrow S(n \rightarrow \infty), \text{ yani } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

bulunur.

Aşağıda bazı özel diziler tanımlayacağız. Bunları izleyen teoremlerde ise bu özel diziler ile C_1 -metodunun ilişkilerini araştıracağız.

Tanım 3.2. [6]: Bir (S_n) dizisi verilsin $1 \leq \frac{m}{n} \rightarrow 1$ ($m, n \rightarrow \infty$) olmak üzere $S_m - S_n \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) ise bu diziye "yavaş salınımlı dizi" denir. Bu tanım aşağıdaki tanıma denktir.

(S_n) dizisi yavaş salınımlıdır $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ ve $\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ ve $n \leq m \leq (1+\delta)n$ için $|S_n - S_m| < \epsilon$ dir.

Tanım 3.3. [6]: (S_n) reel terimli bir dizi olsun. $1 \leq \frac{m}{n} \rightarrow 1$ ($m, n \rightarrow \infty$) olmak üzere $\liminf (S_m - S_n) > 0$ kalıyorsa (S_n) dizisine "yavaş azalan dizi" denir. Buna denk bir tanım şöyle yapılır.

(S_n) dizisi yavaş azalandır $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ ve $\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ ve $n \leq m \leq (1+\delta)n$ için $S_m \geq S_n - \epsilon$ dir.

Bir (S_n) dizisi yavaş azalan ise $(-S_n)$ dizisi "yavaş artan dizidir" denir.

B özel bir limitleme metodu olsun. Bir dizinin üzerine konulan ve bu dizinin B-limitlenebilmesiyle birlikte dizinin yakınsaklığı

ğını da gerektiren koşula, söz konusu limitleme metodu için bir Tauber koşulu adı verilir. Bu koşulun geçerliliğini ortaya koyan teoreme ise Tauber Teoremi denir.

Aşağıda vereceğimiz Teorem 3.3, bir (S_n) dizisinin C_1 -limitlenebilirliği için Tauber Teoremidir. 1925 de R.Schmidt tarafından ispatlanan bu teoremdeki Tauber koşulu, (S_n) dizisinin yavaş azalan olmasıdır.

Teorem 3.3. [6]: $S_n \rightarrow S(C_1)$ ve (S_n) yavaş azalan ise (S_n) yakınsaktır.

İspat: $S_n \rightarrow S(C_1)$ ve (S_n) yavaş azalan olsun. $S=0$ alalım. (Çünkü, (S_n) yavaş azalan ise $(S_n - S)$ de yavaş azalan, $S_n \rightarrow S(C_1)$ ise $S_n - S \rightarrow 0(C_1)$ dir. Bu nedenle $S=0$ almak genelliği bozmaz) Bu durumda,

$$\limsup S_n \geq 0 \text{ ve } \liminf S_n \leq 0$$

dır. Gerçekten, $S_n \rightarrow 0(C_1)$ yani, $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olduğu gözönüne alınırsa

$$S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$$

eşitliğinden

$$\limsup \frac{S_n}{n} \geq \limsup \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma_n - \limsup \sigma_{n-1} = 0$$

ve

$$\liminf \frac{S_n}{n} \leq \liminf \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma_n - \liminf \sigma_{n-1} = 0$$

elde edilir. Şimdi (S_n) in yakınsak olmadığını kabul edelim. Bu takdirde,

$$(i) \limsup S_n > 0$$

veya

$$(ii) \liminf S_n < 0$$

olmak zorundadır.

(i): $\limsup S_n > 0$ ise $\exists \alpha > 0$ ve bir (n_i) doğal sayı dizisi $(n_i \rightarrow \infty)$ öyle ki $S_{n_i} > \alpha$ olur. $\varepsilon := \frac{\alpha}{2}$ alalım. Tanım 3.3 e göre $\exists \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki

$\forall n_i \geq N$ ve $n_i \leq m_i \leq m_i$, $m_i := \lceil n_i(1+\delta) \rceil$ için

$$S_{m_i} \geq S_{n_i} - \frac{\alpha}{2} \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

dir. ($\lceil n_i(1+\delta) \rceil$, $n_i(1+\delta)$ nın tam kısmını gösterir.) Diğer taraftan,

$$\sigma_{m_i} - \frac{n_i+1}{m_i+1} \sigma_{n_i} = \frac{S_{n_i+1} + S_{n_i+2} + \dots + S_{m_i}}{m_i+1} \geq \frac{\alpha}{2} \frac{m_i - n_i}{m_i+1}$$

ve

$$\frac{m_i - n_i}{m_i+1} \sim \frac{\delta}{1+\delta + \frac{1}{n_i}} \quad (n_i \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(\sigma_{m_i} - \frac{n_i+1}{m_i+1} \sigma_{n_i} \right) \geq \lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2} \frac{m_i - n_i}{m_i+1} = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\delta}{1+\delta + \frac{1}{n_i}}$$

$$0 \geq \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\delta}{1+\delta}$$

elde edilir ki bu α ve δ pozitif olduğundan mümkün değildir.

(11) : $\liminf S_n < 0$ ise $\exists \alpha < 0$ ve (n_i) doğal sayı dizisi $(n_i \rightarrow \infty)$

öyle ki $S_{n_i} \leq \alpha < 0$ dır. $\varepsilon := -\frac{\alpha}{2} > 0$ olsun. Bu takdirde, Tanım 3.3 e göre $\exists \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n_i > N$ ve $[\frac{n_i}{1+\delta}] =: m_i \leq n \leq n_i$ için $S_{n_i} \geq S_{m_i} + \varepsilon$ dır.

$$\alpha \geq S_{n_i} \geq S_{m_i} + \frac{\alpha}{2},$$

$$S_{m_i} \leq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla.

$$\sigma_{n_i} - \frac{m_i+1}{n_i+1} \sigma_{m_i} = \frac{S_{m_i+1} + S_{m_i+2} + \dots + S_{n_i}}{n_i+1} \leq \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{n_i - m_i}{n_i+1}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{n_i - m_i}{n_i+1} \sim \frac{\delta/1+\delta}{1+\frac{1}{n_i}} \quad (n_i \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(\sigma_{n_i} - \frac{m_i+1}{n_i+1} \sigma_{m_i} \right) \leq \lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{n_i - m_i}{n_i+1},$$

$$0 \leq \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\delta}{1+\delta}$$

elde edilir. Bu ise $\delta > 0$ ve $\alpha < 0$ olduğundan mümkün değildir.

O halde, varsayım yanlıştır (S_n) yakınsak olmak zorundadır.

Teorem 3.4. [6]: Bir (a_n) dizisi için $S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$ olsun.

(I) $a_n = O(\frac{1}{n})$ ise (S_n) dizisi yavaş salınımlıdır.

(II) $K > 0$ olmak üzere $na_n > -K$ ($1 \leq n \leq N$) ise (S_n) dizisi yavaş azalandır.

İspat: Verilen (a_n) dizisi için $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ olsun. Bu takdirde $m \geq n$ için $S_m - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m$ dir.

(I): $a_n = O(\frac{1}{n})$ ise $\exists M > 0$ öyle ki $|a_n| < \frac{M}{n}$ ($1 \leq n \leq N$) dir. O halde, $m \geq n$ ve $\frac{m}{n} \rightarrow 1$ ($m, n \rightarrow \infty$) için

$$|S_m - S_n| < M \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} \right) < \frac{M(m-n)}{n} = M \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \rightarrow 0$$

($m, n \rightarrow \infty$) dir. Tanım 3.2 ye göre (S_n) yavaş salınımlıdır.

(II): $K > 0$ olmak üzere $na_n > -K$ ($1 \leq n \leq N$) olsun. $\epsilon > 0$ keyfi verilsin $\delta \leq \frac{\epsilon}{K}$ seçelim. Bu takdirde, $n \leq m \leq (1+\delta)n$ için

$$S_m - S_n > -K \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} \right) > -K \left(\frac{m}{n} - 1 \right) > -\epsilon,$$

dolayısıyla $S_m > S_n - \epsilon$ elde edilir. O halde, Tanım 3.3 e göre (S_n) yavaş azalandır.

Şimdi, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin C_1 -toplanabilirliği için bir Tauber Teoremi verebiliriz.

Sonuç 3.1: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1)$ ve $ma_m > -K$ ($K > 0$, $1 \leq m \leq N$) ise o zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \text{ dir.}$$

İspat: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1)$ ve $ma_m > -K$ ($K > 0$, $1 \leq m \leq N$) olsun.

$ma_m > -K$ olduğundan Teorem 3.4.(II) ye göre $(S_n) = (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$ dizisi

yavaş azalandır. Ayrıca

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1)$ verildiğinden $S_n \rightarrow S(C_1)$ dir.

$S_n \rightarrow S(C_1)$ ve (S_n) yavaş azalan olduğundan Teorem 3.3 e göre $S_n \rightarrow S(n \rightarrow \infty)$ dir. Bu nedenle, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ dir.

$A=(a_{nk})$ herhangi bir limitleme metodu olsun. A yalnızca yakınsak dizileri limitleyen bir Toeplitz matrisi ise A yakınsaklığa denktir denir. Buna göre $I=(i_{nk})$ birim matrisinin yakınsaklığa denk olduğu açıktır. Birim matristen başka yakınsaklığa denk olan limitleme metodlarını veren teorem, Mercerian Teoremi olarak bilinir.

$$a_{nk} := \begin{cases} \frac{1-\alpha}{n+1} & , k < n \\ \frac{n\alpha+1}{n+1} & , k = n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

olmak üzere $A=(a_{nk})$ matrisi tanımlansın.

$$m_{-1} := 0, m_n := \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \quad (n=0,1,\dots)$$

olarak tanımlanırsa

$$A_n(S) := \sum_{k=0}^n a_{nk} S_k = \alpha S_n + (1-\alpha)m_n$$

olur. (S_n) , $S_n \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$) olan herhangi bir dizi ise $A_n(S) \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$) (α üzerinde kısıtlama olmadan) dir. O halde A bir Toeplitz matrisidir. Mercer, $\alpha > 0$ için $A=(a_{nk})$ matrisinin yakınsaklığa denk olduğunu ispatlamıştır. Bunu Teorem 3.5 ile vereceğiz.

Teorem 3.5. [4] . (Mercer Teoremi): Bir (S_n) dizisi verilsin.

$$m_{-1}=0, m_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \alpha > 0$$

olmak üzere

$$t_n := \alpha S_n + (1-\alpha)m_n \quad S(n \rightarrow \infty)$$

ise $S_n \rightarrow S \quad (n \rightarrow \infty)$ dir.

İspat: Verilen (S_n) dizisi için, $\alpha > 0, m_{-1}=0$

$$m_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ olmak üzere}$$

$$t_n = \alpha S_n + (1-\alpha) m_n \quad (3.4)$$

olsun. Bu takdirde,

$$(n+1)m_n - nm_{n-1} = S_n \quad (3.5)$$

dir. (3.5), (3.4) de yerine yazılırsa

$$t_n = (\alpha n + 1)m_n - \alpha n m_{n-1} \quad (3.6)$$

elde edilir. Şimdi $q_0, q_1, q_2, \dots$ öyle seçelim ki

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= 1 \\ q_0 - \alpha q_1 &= 0 \\ (\alpha + 1)q_1 - 2\alpha q_2 &= 0 \\ (2\alpha + 1)q_2 - 3\alpha q_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ ((n-1)\alpha + 1)q_{n-1} - n\alpha q_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (x)$$

olsun. Bu takdirde,

$$q_n = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha+1}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha+1}{3\alpha} \dots \frac{(n-1)\alpha+1}{n\alpha}$$

olur. $\beta := \frac{1}{\alpha}$ denirse,

$$q_n = \beta \cdot \frac{1}{2} (1+\beta) \cdot \frac{1}{3} (2+\beta) \dots \frac{1}{n} (n-1+\beta),$$

$$q_n = \frac{\beta(1+\beta)(2+\beta)+\dots+(n-1+\beta)}{1.2.3.\dots n}$$

elde edilir. Tanım. 1.6.11) ye göre

$$q_n = \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta) \cdot n!}$$

dir. (1.17) den,

$$q_n \sim \frac{n^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Diğer taraftan, Sonuç 1.2 ve Teorem 1.8 kullanılırsa

$$Q_n := \sum_{k=0}^n q_k \sim \sum_{k=0}^n \frac{k^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \sim \frac{n^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \sim A_n^{\beta-1} \sim A_n^{\beta} \sim \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)(\alpha n+1)q_n} &\sim \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)(\alpha n+1)} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{n^{\beta-1}} \quad (n \rightarrow \infty) \\ &= \frac{n}{\beta(\alpha n+1)} \rightarrow \frac{1}{\alpha\beta} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{n^2}{\Gamma(\beta+1)} \sim (\alpha n+1) q_n \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Böylece,

$$Q_n \sim (\alpha n+1) q_n \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.7)$$

elde edilir. Öte yandan, (3.6) dan,

$$q_0 t_0 = m_0 q_0$$

$$q_1 t_1 = (\alpha+1) m_1 q_1 - \alpha m_0 q_1$$

$$q_2 t_2 = (2\alpha+1) m_2 q_2 - 2\alpha m_1 q_2$$

.....

$$q_{n-1} t_{n-1} = ((n-1)\alpha+1) m_{n-1} q_{n-1} - (n-1)\alpha m_{n-2} q_{n-1}$$

$$q_n t_n = (\alpha n+1) m_n q_n - \alpha m_{n-1} q_n$$

sistemi elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanır ve (*) sistemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} q_0 t_0 + q_1 t_1 + \dots + q_n t_n &= m_0 (q_0 - \alpha q_1) + m_1 ((\alpha+1) q_1 - 2\alpha q_2) \\ &+ \dots \\ &+ m_{n-1} ((n-1)\alpha+1) q_{n-1} - \alpha n q_n \\ &+ m_n (\alpha n+1) q_n \\ &= (\alpha n+1) m_n q_n \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte, (3.7) kullanılırsa

$$m_n = \frac{q_0 t_0 + q_1 t_1 + \dots + q_n t_n}{(n+1)q_n} \sim \frac{q_0 t_0 + q_1 t_1 + \dots + q_n t_n}{Q_n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Şimdi,

$$a_{nk} := \begin{cases} \frac{q_k}{Q_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

olmak üzere $A := (a_{nk}) \in (c, c; P)$ olduğunu gösterelim.

$$(RN): \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{Q_n} = 1$$

olduğundan $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ dir.

$$(C_0): \quad a_{nk} = \frac{q_k}{Q_n} \sim \frac{k^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta}} = \frac{\beta k^{\beta-1}}{n^{\beta}} \quad (n, k \rightarrow \infty)$$

olduğundan $a_{nk} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit})$ dir.

$$(RS_1): \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{Q_n} = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ için})$$

olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ dir.

Teorem 2.3 e göre $A = (a_{nk}) \in (c, c; P)$ dir. Dolayısıyla $t_n \rightarrow S (n \rightarrow \infty)$ ise $m_n \rightarrow S (n \rightarrow \infty)$ dir. (3.4) den

$$S_n = \frac{1}{\alpha} \cdot (t_n - (1-\alpha)m_n)$$

bulunur. Böylece,

$$S_n \rightarrow \frac{1}{\alpha} (S - (1-\alpha)S) = S \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

Aşağıdaki problemlerin her biri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin C_1 -toplana-
bilmesi için gerekli ve yeterli koşulları verir.

Problem 3.1: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1)$ olması için gerekli ve yeterli koşul
 $\sum_{k=0}^n (1 - \frac{k}{n+1}) a_k \rightarrow S(n \rightarrow \infty)$ olmasıdır.

Çözüm: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C_1)$ olsun. Bu takdirde, $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$
olmak üzere

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n S_k \rightarrow S(n \rightarrow \infty)$$

dır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_n) \\ &= \frac{1}{n+1} [a_0 + (a_0 + a_1) + \dots + (a_0 + a_1 + \dots + a_n)] \\ &= \frac{1}{n+1} [(n+1) a_0 + n a_1 + \dots + a_n] \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (n+1-k) a_k \\ &= \sum_{k=0}^n (1 - \frac{k}{n+1}) a_k \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\sigma_n \rightarrow S(n \rightarrow \infty) \iff \sum_{k=0}^n (1 - \frac{k}{n+1}) a_k \rightarrow S(n \rightarrow \infty)$$

dır.

Problem 3.2: $\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = S(C_1)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $|Z| \leq 1$ ve $Z \neq 1$ olmasıdır.

Çözüm: "Gerekli koşul": $\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = S(C_1)$ yani, $S_n = \sum_{k=0}^n Z^k$ olmak üzere $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k \rightarrow S(n \rightarrow \infty)$ olsun

$Z=1$ için $S_n = n+1$ olduğundan $\frac{S_n}{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ dir. Teorem 3.1 e göre (S_n) dizisi C_1 -limitlenemez. Bu ise hipotezle çelişir. O halde, $\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = S(C_1)$ ise $Z \neq 1$ dir.

$$S_n = \sum_{k=0}^n Z^k = \frac{1-Z^{n+1}}{1-Z}$$

olduğundan

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-Z} [(1-Z) + (1-Z^2) + \dots + (1-Z^{n+1})]$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-Z} [(n+1) - Z(1+Z+\dots+Z^n)]$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-Z} [(n+1) - \frac{Z(1-Z^{n+1})}{1-Z}]$$

$$= \frac{1}{1-Z} - \frac{Z(1-Z^{n+1})}{(1-Z)^2(n+1)}$$

dir. $\sigma_n \rightarrow S(n \rightarrow \infty)$ olduğundan $a_n := \frac{Z(1-Z^{n+1})}{(1-Z)^2(n+1)}$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

vardır. $b_n := \frac{Z}{(1-Z)^2(n+1)}$ denirse

$$a_n = b_n - \frac{Z^{n+2}}{(1-Z)^2(n+1)} \quad \text{ve} \quad |a_n - b_n| = \frac{|Z|^{n+2}}{|1-Z|^2(n+1)}$$

olur. $|Z| > 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| - \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$$

dır. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ in varlığı ile çelişir. O halde, $\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = S(C_1)$ ise $|Z| > 1$ olamaz; $|Z| \leq 1$ olmak zorundadır.

"Yeterli koşul": $|Z| \leq 1$ ve $Z \neq 1$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = S(C_1)$ olduğunu gösterelim

$$\sigma_n = \frac{1}{1-Z} - \frac{Z(1-Z^{n+1})}{(1-Z)^2(n+1)}$$

idi. $|Z| \leq 1$ ve $Z \neq 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{1-Z}$ dir.

Gerçekten;

(i) $|Z| < 1$ ise $\frac{Z^{n+2}}{(1-Z)^2(n+1)} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, dolayısıyla $\sigma_n \rightarrow \frac{1}{1-Z} (n \rightarrow \infty)$,

(ii) $|Z| = 1 (Z \neq 1)$ ise $Z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = O(1) \quad (\theta := \arg Z)$ olduğundan yine $\sigma_n \rightarrow \frac{1}{1-Z} (n \rightarrow \infty)$

dir.

Problem 3.3. [4]: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_1)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}$ yakınsak ve $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \right) = s$ olmasıdır.

Çözüm: "Gerekli koşul": $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_1)$ yani: $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ olmak üzere $s_n \rightarrow s(C_1)$ olsun. Teorem 3.1 den

$$s_n = o(n) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.8)$$

dir. Diğer taraftan, $S_n := s_0 + s_1 + \dots + s_n$ olarak tanımlanırsa

$$\sigma_n = \frac{S_n}{n+1} \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve dolayısıyla

$$S_n = O(n+1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.9)$$

dır.

$$M := \sup_n \frac{|S_n|}{n+1}$$

olsun. $\varepsilon_n = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$ olmak üzere

$$\frac{S_n}{n+1} = s + \varepsilon_n \quad (n)$$

şeklinde yazılır. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bu takdirde, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ için $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ sağlanır. $n > N$ ve $p \in \mathbb{N}$ keyfi alalım. Bu takdirde, Abel kısmi toplam formülünden

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k+1} &= \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - s_n \cdot \frac{1}{n+2} + s_{n+p} \cdot \frac{1}{n+p+2} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{s_n}{n+2} + \frac{s_{n+p}}{n+p+2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} s_k \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{S_n}{(n+2)(n+3)} + \frac{S_{n+p}}{(n+p+2)(n+p+3)} \\
 & = 2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{S_n}{(n+2)(n+3)} \\
 & \quad + \frac{S_{n+p}}{(n+p+2)(n+p+3)} \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.11), (3.10) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k+1} & = 2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{S_{n+p}}{(n+p+2)(n+p+3)} - \frac{S_n}{(n+2)(n+3)} \\
 & = \frac{S_n}{n+2} + \frac{S_{n+p}}{n+p+2} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
 \left| 2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right| & \leq 2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|S_k|}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\
 & \leq 2M \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k+2)(k+3)},
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{(k+2)(k+3)} \sim \frac{1}{k^2}$ ($k \rightarrow \infty$) ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ yakınsak olduğundan, n yeterince büyük seçilirse $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| 2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right| < \varepsilon$$

sağlanır. Böylece,

$$2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k}{(k+1)(k+2)(k+3)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.13)$$

elde edilir.

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}$$

olarak tanımlanırsa

$$T_{n+p} - T_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k+1} \quad (3.14)$$

bulunur. (3.8), (3.9) ve (3.13), (3.12) de kullanılırsa

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{k+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve dolayısıyla (3.14) den

$$T_{n+p} - T_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\forall p \in \mathbb{N} \text{ için})$$

elde edilir. O halde, (T_n) Cauchy dizisidir. Bu nedenle (T_n) dizisi yakınsaktır. Öyleyse

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}$$

olarak tanımlanan (R_n) dizisi için

$$R_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dir. Aynı zamanda (3.12) den " $p \rightarrow \infty$, n sabit" için

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{S_k}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{S_n}{(n+2)(n+3)} - \frac{s_n}{n+2}$$

elde edilir. Böylece,

$$(n+2) R_n + s_n = -\frac{S_n}{n+3} + 2(n+2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{S_k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

bulunur. Ayrıca, (x) e göre

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{S_k}{(k+1)(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)} (s + \epsilon_k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) s + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{(k+2)(k+3)} \\ &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^p \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) s + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\epsilon_k|}{(k+2)(k+3)} \\ &< \frac{s}{n+3} + \frac{\epsilon}{n+3} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+2) R_n + s_n] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{S_n}{n+3} + 2(n+2) \cdot \frac{s}{n+3} + \frac{\epsilon}{n+3} \right] \\ &= -s + 2s + 2\epsilon \\ &= s + 2\epsilon \end{aligned}$$

dir. $R_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan

$$(n+1) R_n + s \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.16)$$

dir. Öte yandan,

$$t_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} \right)$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} + \dots + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i+1} + \dots + \sum_{i=n}^n \frac{a_i}{i+1} + (n+1) \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} \\ &= s_n + (n+1) R_n \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.16) kullanılırsa

$$t_n \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur.

"Yeterli koşul": $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}$ yakınsak ve $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \right) = s$; yani

$t_n \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$) olsun.

$$t_n = s_n + (n+1) R_n$$

olduğundan

$$t_{n+1} - t_n = s_{n+1} + (n+2)R_{n+1} - s_n - (n+1)R_n$$

$$= a_{n+1} + R_n + (n+2)(R_{n+1} - R_n)$$

$$= a_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} + \frac{a_{n+2}}{n+3} + \dots$$

$$+ (n+2) \left[\frac{a_{n+2}}{n+3} + \frac{a_{n+3}}{n+4} + \dots - \frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{a_{n+2}}{n+3} - \dots \right]$$

$$= \frac{a_{n+1}}{n+2} + \frac{a_{n+2}}{n+3} + \dots$$

$$= R_n$$

dir. O halde,

$$t_{n+1} - t_n = R_n,$$

$$t_n = s_n + (n+1)R_n$$

eşitliklerinden

$$t_n = s_n + (n+1)(t_{n+1} - t_n),$$

$$s_n = t_n - (n+1)(t_{n+1} - t_n),$$

$$s_n = 2t_n - [(n+1)t_{n+1} - nt_n]$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
 s_0 + s_1 + \dots + s_n &= 2t_0 - (t_1 - s_0 \cdot t_0) \\
 &\quad + 2t_1 - (2t_2 - t_1) \\
 &\quad + 3t_2 - (3t_3 - 2t_2) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + 2t_n - ((n+1)t_{n+1} - nt_n) \\
 &= 2(t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n) - (n+1)t_{n+1},
 \end{aligned}$$

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = 2 \frac{t_0 + t_1 + \dots + t_n}{n+1} - t_{n+1}$$

elde edilir. $t_n \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$ olduğundan

$$\frac{t_0 + t_1 + \dots + t_n}{n+1} \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$$

ve böylece

$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \rightarrow 2s - s = s(n \rightarrow \infty)$$

bulunur. O halde,

$$s_n \rightarrow s(C_1) \text{ dolayısıyla } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_1)$$

dir.

B-) C_k -METODLARI

E.Cesàro 1890 da ıraksak serileri yeniden ele alarak, C_1 -yakınsaklık fikrini ortaya attı. Ardından, k pozitif tamsayı olmak üzere C_k -metodlarını tanımladı.

K.Knopp, 1907 de ve bağımsız olarak S.Chapman, 1911 de $\alpha > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ için C_α -metodlarını tanımladılar.

$k \in \mathbb{N}$ için C_k -metodu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.4: Bir (s_n) dizisi verilsin.

$$S_n^k := S_0^{k-1} + S_1^{k-1} + \dots + S_n^{k-1} \quad (1 \leq k \in \mathbb{N}) \text{ ve } S_n^0 := s_n \quad (3.17)$$

olmak üzere

$$C_n^k(s) := \frac{S_n^k}{\binom{n+k}{k}} \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

ise (s_n) dizisi s ye C_k -limitlenebilir (veya k . mertebeden Cesàro limitlenebilir) denir ve $s_n \rightarrow s(C_k)$ şeklinde gösterilir.

Eğer (s_n) , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve $s_n \rightarrow s(C_k)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye C_k -toplanabilir (veya k . mertebeden Cesàro toplanabilir) denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k)$ şeklinde gösterilir.

Sonuç 1.2 ye göre

$$\binom{n+k}{k} \sim \frac{n^k}{\Gamma(k+1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s ye C_k -toplanabilmesi

$$\Gamma(k+1)n^{-k}S_n^k = k!n^{-k}S_n^k \rightarrow s(n \rightarrow \infty) \quad (3.18)$$

olması ile de tanımlanır.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$ serisi $|x| < 1$ için yakınsaktır.

Gerçekten, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k)$ ise tanım gereği

$$k!n^{-k}S_n^k \rightarrow s(n \rightarrow \infty),$$

böylece

$$n^{-k}S_n^k \rightarrow \frac{s}{\Gamma(k+1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Bu nedenle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_{n+1}^k x^{n+1}|}{|S_n^k x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{s}{\Gamma(k+1)} (n+1)^k \right|}{\left| \frac{s}{\Gamma(k+1)} n^k \right|} |x| = |x|$$

dır. Dolayısıyla d'Alembert testine göre $\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$ serisi $|x| < 1$ için yakınsaktır.

Burada S_n^k , a_n ve s_n ler cinsinden ifade edilebilir: $p \in \mathbb{N}$ ve $|x| < 1$ için

$$(1-x)^{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{p-1} x^n$$

olduğu bilinir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{1-x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
 &= (1-x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\
 &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) x^n \\
 &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,
 \end{aligned}$$

ve böylece

$$\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

elde edilir. Aynı düşünce ile

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1-x)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n s_k \right) x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(1)} x^n
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $k=0$ ve $k=1$ için

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n$$

dır. Yukarıdaki işlem k defa arkaya arkaya uygulanırsa $k \geq 2$ ve $k \in \mathbb{N}$ için de

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$$

olduğu görülür. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^k} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n \quad (3.19)$$

dır. (3.19) da

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n \text{ ve } \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$$

elde edilir. Burada Cauchy çarpımı yapılır ve kuvvet serilerinin özdeşlik teoremi kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k}{n-i} a_i \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{n-i} s_i \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n,$$

$$S_n^k = \sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{n-i} s_i = \sum_{i=0}^n \binom{n-i+k}{n-i} a_i$$

bulunur. Böylece, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi için

$$\rho_n^k(S) = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{n-i} s_i}{\binom{n+k}{n}} = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k}{n-i} a_i}{\binom{n+k}{n}}$$

olur. O halde, $C_k = ((c_{kni}))$ k. mertebeden Cesàro matrisini göstermek üzere

$$(c_{kni}) := \begin{cases} \frac{\binom{n-i+k-1}{n-i}}{\binom{n+k}{n}}, & i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}$$

dir. Buraya kadar olan işlemlerde $k \in \mathbb{N}$ aldık. Şu soru aklımıza gelebilir: k yı herhangi bir reel sayı alabilirmiyiz?

Benzer yolla $k \in \mathbb{R}$ için

$$S_n^k = \sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{n-i} s_i$$

ile tanımladığımızı varsayabiliriz. Bu durumda,

(i) k negatif tamsayı ise $\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k} = 0$ olacağından C_k -matrisi tanımlanamaz.

(ii) k negatif tamsayı değil ve $k < -1$ ise C_k -metodunun tanımı amaca uygun değildir. Gerçekten:

$p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$ ve $|x| < 1$ için

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n, \quad \binom{p}{n} := \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{n!}$$

olduğu kullanılır ve $a_n^p = \binom{p}{n}$ olarak tanımlanırsa sonuç 1.2 den

$$a_n^p \sim \frac{n^{p-1}}{\Gamma(p)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu nedenle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi pozitif terimli ıraksak bir seridir. Fakat bu seri için

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^p} = \frac{1}{(1-x)^{k+p+1}}$$

olduğundan özel olarak k yerine -p-1 alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{-p-1} x^n = 1$$

olacağından

$$S_n^{-p-1} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases}$$

olur. O halde, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ (C_{-p-1}) dir. Yapılan bu işlem ile sonsuza ıraksayan ıraksak bir seriye sonlu bir sayı karşılık getiriliyor. Bu sonucun amaca uygun olmadığı açıktır.

(III) $k > -1$ ve $k \in \mathbb{R}$ ise C_k -metodu tanımlanır. Bu durumda

$$S_n^k = \sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{n-i} s_i \quad (3.20)$$

olarak tanımlanır. $|x| < 1$ için

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

olduğu gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{(1-x)^{k+1}}{(1-x)^k} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
 &= \frac{(1-x)^{k+1}}{(1-x)^k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \\
 &= (1-x)^{k+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right) \\
 &= (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{n-i} s_i \right) x^n
 \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{n-i} s_i \right) x^n$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.20) kullanılırsa

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21) den

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k}{n-i} a_i \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$$

çıkar. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoremine göre

$$\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k}{n-i} a_i = S_n^k$$

dır.

Sonuç olarak $k \in \mathbb{R}$ ve $k > -1$ için :

$$C_n^k(s) := \frac{S_n^k}{\binom{n+k}{n}} = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{n-i} s_i}{\binom{n+k}{n}} = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k}{n-i} a_i}{\binom{n+k}{n}} \quad (3.22)$$

dır. Bu takdirde,

$$C_n^k(s) \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$$

ise (s_n) dizisi s ye C_k -Limitlenebilir veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye C_k -toplantabilir denir. Böylece, $C_k = ((c_k)_{ni})$ k. mertebeden Cesàro matrisi için

$$(c_k)_{ni} = \begin{cases} \frac{\binom{n-i+k-1}{n-i}}{\binom{n+k}{n}}, & i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases} \quad (3.23)$$

olur. O halde, C_k -matrisi bir üçgensel matristir.

Bir $A = (a_{ni})$ üçgensel matrisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A ya normal matris denir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(c_k)_{nn} = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \neq 0$ olduğundan C_k -matrisi bir normal matristir. Dolayısıyla tersi vardır. Şimdi $C_k^{-1} = ((c_k^{-1})_{ni})$ C_k -matrisinin tersini göstermek üzere

$$(c_k^{-1})_{ni} = \begin{cases} \binom{n-i+k-1}{n-i} \binom{i+k}{k} & , i \leq n \\ 0 & , i > n \end{cases}$$

olduğu gösterilecektir.

Verilen bir (s_n) dizisine C_k -matrisi uygulandığında

$$\sigma_n^k := C_n^k(S) = \sum_{i=0}^n (c_k)_{ni} s_i$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$s_n = \sum_{i=0}^n (c_k^{-1})_{ni} \sigma_i^k \quad (3.24)$$

bulunur. Yine $|x| < 1$ için

$$\frac{1}{(1-x)^k} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= (1-x)^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{k}{n} x^n \right] \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{k}{n-i} S_i^k \right) x^n \end{aligned}$$

dir. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden

$$s_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{k}{n-i} s_i^k$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} (-1)^{n-i} \binom{k}{n-i} &= \frac{(-1)^{n-i} k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-i-1))}{(n-i)!} \\ &= \frac{-k(-k+1)(-k+2)\dots(-k+(n-i-1))}{(n-i)!} \\ &= \binom{n-i-k-1}{n-i} \end{aligned}$$

olduğundan

$$s_n = \sum_{i=0}^n \binom{n-i-k-1}{n-i} s_i^k$$

dır. Burada (3.22) kullanılırsa

$$s_n = \sum_{i=0}^n \binom{n-i-k-1}{n-i} \binom{i+k}{k} \sigma_i^k \quad (3.25)$$

bulunur. (3.24) ve (3.25) den

$$(c_k^{-1})_{ni} = \begin{cases} \binom{n-i-k-1}{n-i} \binom{i+k}{k} & , i \leq n \\ 0 & , i > n \end{cases} \quad (3.26)$$

elde edilir.

C_k -metodu, girişte sözedilen A), B) ve C) aksiyomlarını sağlar. Yani;

$$A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k) \text{ ise } \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda s(C_k);$$

$$B) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k) \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = t(C_k) \text{ ise } \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t(C_k);$$

$$C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k) \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0(C_k).$$

dır. Gerçekten;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k) \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = t(C_k)$$

olsun.

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serisi için S_n^k, B_n^k ile gösterilsin. Bu takdirde,

$$\frac{S_n^k}{\binom{n+k}{n}} \rightarrow s(n \rightarrow \infty) \text{ ve } \frac{B_n^k}{\binom{n+k}{n}} \rightarrow t(n \rightarrow \infty)$$

olur.

A) $x_n := \lambda a_n$ olarak tanımlanır ve $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ için S_n^k, D_n^k ile gösterilirse

$$D_n^k = \lambda S_n^k$$

olduğu görülür. Böylece

$$\frac{D_n^k}{\binom{n+k}{n}} \rightarrow \lambda s(n \rightarrow \infty)$$

yani;

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lambda s(C_k)$$

elde edilir.

B) $t_n := a_n \mp b_n$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ için S_n^k, T_n^k ile gösterilirse

gösterilirse

$$T_n^k = S_n^k \mp B_n^k$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\frac{T_n^k}{\binom{n+k}{n}} \rightarrow (s \mp t) \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur. O halde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n) = (s \mp t)(C_k)$$

dır.

C) $y_n := a_{n+1}$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = s - a_0(C_k)$$

olduğu gösterilirse ispat biter. $|x| < 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n &= (1-x)^{-k-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= (1-x)^{-k-1} (a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}) \\ &= (1-x)^{-k-1} (a_0 + x \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n). \end{aligned}$$

$$= a_0 (1-x)^{-k-1} + \frac{x}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_0 x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^{n+1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_0 x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k}{k} y_i \right) x^{n+1}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_0 x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-i-1+k}{k} y_i \right) x^n$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{n+k}{k} a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-i-1+k}{k} y_i \right] x^n$$

dir. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden dolayı

$$S_n^k = \binom{n+k}{k} a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-i-1+k}{k} y_i \quad (n > 0)$$

elde edilir.

$\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ için S_n^k, H_n^k ile gösterilirse

$$S_n^k = \binom{n+k}{k} a_0 + H_{n-1}^k \quad (n > 0)$$

olur. Ayrıca,

$$\binom{n+k}{k} \sim \binom{n-1+k}{k} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$\frac{H_{n-1}^k}{\binom{n-1+k}{k}} \rightarrow s - a_0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{H_n^k}{\binom{n+k}{k}} \rightarrow s-a_0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

yani;

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s-a_0 \quad (C_k)$$

elde edilir.

Bundan sonra, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere C_α -metodunun bazı önemli özelliklerini vereceğiz.

Teorem 3.6 ile regüler C_α -metodları belirlenir.

Teorem 3.6: $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ ise C_α -metodu regülerdir.

İspat: $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^n |(c_\alpha)_{ni}| = \sum_{i=0}^n (c_\alpha)_{ni} = \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n-i+\alpha-1}{n-1}}{\binom{n+\alpha}{n}} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \cdot \binom{n+\alpha}{n} = 1$$

olduğundan (RN) ve (RS₁) koşulları sağlanır. Ayrıca her sabit i için

$$(c_\alpha)_{ni} = \frac{\binom{n-i+\alpha-1}{\alpha-1}}{\binom{n+\alpha}{n}} \sim \frac{(n-i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha} \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve

$$\frac{(n-i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, \quad i \text{ sabit})$$

olduğundan (C_0) koşulu da sağlanır. O halde, Teorem 2.3 e göre C_α -metodu regülerdir.

$\alpha=0$ için C_α -metodu, Cauchy anlamındaki yakınsaklığı verir. Dolayısıyla $\alpha>0$ için C_α -metodu regülerdir.

$-1<\alpha<0$ ise C_α -metodu regüler değildir. Bunu göstermek için ispatsız olarak vereceğimiz yardımcı Teorem 3.1 i kullanacağız.

Yardımcı Teorem 3.1. ([1], sayfa 425): $r,s \in \mathbb{R}$, r,s ve $r+s-1$ negatif tamsayı değilse

$$\sum_{k=0}^n \left| \binom{k-r}{k} \binom{n-k-s}{n-k} \right| = O(n^{-r}) + O(n^{-s}) + O(n^{-r-s+1})$$

dir.

$-1<\alpha<0$ olsun. Bu takdirde Yardımcı Teorem 3.1 den dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left| (c_\alpha)_{nk} \right| &= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^n \left| \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} \right| \\ &= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} (O(1) + O(n^\alpha)) \\ &\sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha} (O(1) + O(n^\alpha)) \quad (n \rightarrow \infty) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha} O(1) + \Gamma(\alpha+1) O(1) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

böylece

$$\sum_{k=0}^n \left| (c_\alpha)_{nk} \right| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. O halde, $-1 < \alpha < 0$ ise C_α -metodu (RN) koşulunu sağlamıyor; dolayısıyla regüler değildir.

A ve B iki limitleme metodu olsun. Eğer $S_n \rightarrow S(A)$ olan her (S_n) dizisi için $S_n \rightarrow S'(B)$ oluyorsa bu durumda "B metodu A'yı kapsar" denir ve $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir. Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise A ve B metodları denktir denir ve $A \hat{=} B$ (veya $A = B$) şeklinde gösterilir. Ayrıca $A \subseteq B$ fakat A ve B metodları denk değilse, "B metodu A'dan daha kuvvetlidir" (veya "A metodu B'den daha zayıftır") denir.

Yine, $S_n \rightarrow S(A)$ ve $S_n \rightarrow S'(B)$ olan her (S_n) dizisi için $S = S'$ oluyorsa "A ve B metodları uyumludur" denir.

Şimdi vereceğimiz Teorem 3.7'de C_α -metodlarının uyumlu olma durumlarını ele alacağız. Önce, adı geçen teoremin ispatında kullanacağımız aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 3.2 [1]: $r > -1$, $s > -1$, $\frac{a_n}{n^r} \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), $\frac{b_n}{n^s} \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$) ise

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k} b_k}{n^{r+s+1}} \rightarrow \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)ab}{\Gamma(r+s+2)} \quad (n \rightarrow \infty) \text{ dir.}$$

İspat: $r > -1$, $s > -1$, $\frac{a_n}{n^r} \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), $\frac{b_n}{n^s} \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. Sonuç 1.2'ye göre

$$A_n^r = \binom{n+r}{n} \sim \frac{n^r}{\Gamma(r+1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve

$$A_n^s = \binom{n+s}{n} \sim \frac{n^s}{\Gamma(s+1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan, $\varepsilon_n = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$), $\eta_n = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$) olmak üzere

$$a_n = (\Gamma(r+1) a + \epsilon_n) A_n^r$$

$$b_n = (\Gamma(s+1) b + \eta_n) A_n^s$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^n (\Gamma(r+1) a + \epsilon_{n-k}) A_{n-k}^r (\Gamma(s+1) b + \eta_k) A_k^s$$

$$= \Gamma(r+1) \Gamma(s+1) ab A_n^{r+s+1}$$

$$= a \Gamma(r+1) \sum_{k=0}^n A_{n-k}^r \eta_k A_k^s$$

$$+ b \Gamma(s+1) \sum_{k=0}^n \epsilon_{n-k} A_{n-k}^r A_k^s$$

$$+ \sum_{k=0}^n \epsilon_{n-k} \eta_k A_{n-k}^r A_k^s$$

dır. Son eşitliğin her iki yanı A_n^{r+s+1} ile bölünür ve

$\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{r+s+1} \Gamma(r+s+2) (n \rightarrow \infty)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k} b_k}{A_n^{r+s+1}} &\sim \frac{\Gamma(r+1) \Gamma(s+1) ab}{\Gamma(r+s+2)} \\ &+ \frac{a \Gamma(r+1)}{\Gamma(r+s+2)} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n A_{n-k}^r \eta_k A_k^s}{A_n^{r+s+1}} \\ &+ \frac{b \Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n \epsilon_{n-k} A_{n-k}^r A_k^s}{A_n^{r+s+1}} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r+s+2)} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_{n-k} \eta_k A_{n-k}^r A_k^s}{A_n^{r+s+1}} (n \rightarrow \infty) \quad (3.27)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. (ε_n) ve (η_n) dizileri yakınsak olduklarından sınırlıdır, dolayısıyla $\exists M > 0$ sayısı öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|\varepsilon_n| < M$ ve $|\eta_n| < M$ dir. Ayrıca, (ε_n) ve (η_n) sıfır dizisi olduğundan $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ için

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon \quad \text{ve} \quad |\eta_n| < \varepsilon$$

sağlanır. Bu nedenle, her $n > N$ için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^r \eta_k A_k^s}{A_n^{r+s+1}} \right| &< \frac{1}{A_n^{r+s+1}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^r |\eta_k| A_k^s \\ &= \frac{1}{A_n^{r+s+1}} \left(\sum_{k=0}^N |\eta_k| A_{n-k}^r A_k^s + \sum_{k=N+1}^n |\eta_k| A_{n-k}^r A_k^s \right) \\ &< \frac{1}{A_n^{r+s+1}} \left(M \sum_{k=0}^N A_{n-k}^r A_k^s + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n A_{n-k}^r A_k^s \right) \\ &< M \sum_{k=0}^N \frac{A_{n-k}^r A_k^s}{A_n^{r+s+1}} + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Sabit bir k için

$$c := \frac{k^s \Gamma(r+s+2)}{\Gamma(r+1) \Gamma(s+1)}$$

olmak üzere

$$\frac{A_{n-k}^r A_k^s}{A_n^{r+s+1}} \sim \frac{n^r k^s \Gamma(r+s+2)}{\Gamma(r+1) \Gamma(s+1) n^{r+s+1}} = c \frac{1}{n^{s+1}} \rightarrow o(n \rightarrow \infty) \quad (3.28)$$

olduğundan,

$$M. \sum_{k=0}^N \frac{A_{n-k}^r A_k^s}{A_n^{r+s+1}} \sim M \sum_{k=0}^N \frac{c}{n^{s+1}} = M(N+1) \frac{c}{n^{s+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Böylece

$$\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+s+2)} \frac{\sum_{k=0}^n A_{n-k}^r A_k^s}{A_n^{r+s+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.29)$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak

$$\sum_{k=0}^n \frac{\epsilon_{n-k} A_{n-k}^r A_k^s}{A_n^{r+s+1}} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.30)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{\epsilon_{n-k} \eta_k A_{n-k}^r A_k^s}{A_n^{r+s+1}} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.31)$$

olduğu görülür. (3.27) de (3.29), (3.30) ve (3.31) kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k} b_k}{n^{r+s+1}} \rightarrow \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} ab \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur.

Teorem 3.7. [1]: $r > -1$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_r)$ ise her $\delta > 0$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_{r+\delta})$

dır.

İspat: $r > -1$, $\delta > 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_r)$ olsun. Bu takdirde (3.21) e göre $s_n = \partial_0 + \partial_1 + \dots + \partial_n$ olmak üzere $|x| < 1$ için

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{r+\delta} x^n &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n}{(1-x)^{r+\delta}} \\
 &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n}{(1-x)^r} \cdot \frac{1}{(1-x)^\delta} \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n^r x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\delta-1} x^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\delta-1} S_k^r \right) x^n
 \end{aligned}$$

dir. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden.

$$S_n^{r+\delta} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\delta-1} S_k^r \quad (3.32)$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ (C_r) olduğundan

$$\frac{S_n^r}{A_n^r} \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$$

dir. Ayrıca Sonuç 1.2 de gözönüne alınırsa

$$\frac{S_n^r}{A_n^r} \sim \frac{S_n^r}{A_n^r \Gamma(r+1)} + \frac{s}{\Gamma(r+1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur.

$$x_n := A_n^{\delta-1} \quad \text{ve} \quad y_n := S_n^r$$

olarak tanımlanırsa

$$\frac{x_n}{n^{\delta-1}} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\delta)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\frac{y_n}{n^r} \rightarrow \frac{s}{\Gamma(r+1)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur. Yardımcı Teorem 3.2 ye göre

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_{n-k} y_k}{n^{r+\delta}} = \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^{\delta-1} S_k^r}{n^{r+\delta}} \rightarrow \frac{s}{\Gamma(r+\delta+1)} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.33)$$

dır. (3.33), (3.32) de kullanılırsa

$$\frac{S_n^{r+\delta}}{n^{r+\delta}} \rightarrow \frac{s}{\Gamma(r+\delta+1)} \quad (n \rightarrow \infty), \text{ yani } \frac{S_n^{r+\delta}}{A_n^{r+\delta}} \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Böylece $\forall \delta > 0$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_{r+\delta})$ bulunur.

Sonuç olarak, $r > -1$ ise $\forall \delta > 0$ için C_r ile $C_{r+\delta}$ -metodları uyumludur.

Teorem 3.6 dan, $\alpha > 0$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_{\alpha})$ olduğunu biliyoruz. Şimdi vereceğimiz Teorem 3.8, $-1 < \alpha < 0$ durumunda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_{\alpha})$ olabilmesi için a_n lerin sağlaması gereken koşulu verir.

Teorem 3.8 [3]: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ve $a_n = O(n^{-1})$ ise $\forall \delta > 0$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_{-1+\delta})$ dır.

İspat: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ve $a_n = O(n^{-1})$ olsun.

(i) $\delta \geq 1$ ise $-1+\delta \geq 0$ dır. Teorem 3.6 ya göre $C_{-1+\delta}$ -metodu regülerdir. Böylece, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_{-1+\delta})$ dır.

(ii) $0 < \delta < 1$ olsun. $0 < w < 1$ olmak üzere $N := [[wn]]$ olarak tanımlansın. (n yeterince büyük seçilerek $N \geq 1$ sağlanır.)

$s_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$ olmak üzere $s_n \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$) olduğu biliniyor.

Ayrıca

$$\begin{aligned} s_n^{-1+\delta} &= \sum_{k=0}^n \binom{n-k+\delta-1}{\delta-1} a_k = \sum_{k=0}^n \binom{k+\delta-1}{\delta-1} a_{n-k}, \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+\delta-1}{\delta-1} a_{n-k} + \sum_{k=N}^n \binom{k+\delta-1}{\delta-1} a_{n-k} \end{aligned}$$

dır.

$$S_1 := \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+\delta-1}{\delta-1} a_{n-k} \text{ ve } S_2 := \sum_{k=N}^n \binom{k+\delta-1}{\delta-1} a_{n-k}$$

olsun. Sonuç 1.2 den $\binom{k+\delta-1}{\delta-1} = O(k^{\delta-1})$ dir. $a_n = O(n^{-1})$

verildiğinden $a_{n-k} = O\left(\frac{1}{n-k}\right)$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_n + \sum_{k=1}^{N-1} \binom{k+\delta-1}{\delta-1} a_{n-k} \\ &= O\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} O(k^{\delta-1}) \cdot O\left(\frac{1}{n-k}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} O\left(\frac{k^{\delta-1}}{n-k}\right) \\ &= O\left(\frac{N^{\delta}}{n-N}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} O\left(\frac{N^{\delta}}{n-N}\right) \\ &= O\left(\frac{N^{\delta}}{n-N}\right) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, $N = \lfloor wn \rfloor$ olduğundan $N^\delta \leq w^\delta n^\delta$ ve $n - N \geq n(1 - w)$ dır. Bu nedenle,

$$\frac{N^\delta}{n - N} \leq \frac{w^\delta n^{\delta-1}}{1 - w}$$

ve dolayısıyla

$$S_1 = O\left(\frac{w^\delta}{1 - w} n^{\delta-1}\right)$$

olur. O halde $\frac{|S_1|}{n^{\delta-1}} < \frac{K w^\delta}{1 - w}$ olacak şekilde $K > 0$ sabiti vardır. Öyle

ise $\epsilon > 0$ keyfi verildiği takdirde $|S_1| < \epsilon n^{\delta-1}$ olacak şekilde $0 < w < 1$ seçilebilir. ($w < (\frac{\epsilon}{K + \epsilon})^{1/\delta}$ seçmek yeter.)

$$u_k := \binom{k + \delta - 1}{\delta - 1} \text{ ise}$$

$$S_2 = \sum_{k=N}^n \binom{k + \delta - 1}{\delta - 1} a_{n-k} = \sum_{k=N}^n u_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-N} u_{n-k} a_k$$

olur. Abel kısmi toplam formülünden

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-N} \left(\sum_{i=0}^k a_i \right) (u_{n-k} - u_{n-k-1}) + \left(\sum_{k=0}^{n-N} a_k \right) u_{n-(n-N+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-N} s_k (u_{n-k} - u_{n-k-1}) + s_{n-N} u_{N-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-N-1} s_k (u_{n-k} - u_{n-k-1}) + s_{n-N} (u_N - u_{N-1}) + s_{n-N} u_{N-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-N-1} s_k (u_{n-k} - u_{n-k-1}) + s_{n-N} u_N$$

bulunur.

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} &= \binom{k+\delta-1}{\delta-1} - \binom{k-1+\delta-1}{\delta-1} \\ &= \frac{\delta(\delta+1) \dots (\delta-1+k)}{k!} - \frac{\delta(\delta+1) \dots (\delta-1+k-1)}{(k-1)!} \\ &= \frac{\delta(\delta+1) \dots (\delta+k-2)(\delta-1+k-k)}{k!} \\ &= \frac{\delta(\delta-1)(\delta+1) \dots (\delta+k-2)}{k!} \\ &= \binom{k+\delta-2}{\delta-2} \\ &= O(k^{\delta-2}) \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ve $s=0$ ise $s_n = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{n-N-1} s_k (u_{n-k} - u_{n-k-1}) + s_{n-N} u_N \\ &= \sum_{k=0}^{n-N-1} o(1) \cdot O(n^{\delta-2}) + o(1) \cdot O(n^{\delta-1}) \\ &= o(n^{\delta-1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$S_n^{-1+\delta} = S_1 + S_2 = o(n^{\delta-1}) + o(n^{\delta-1}) = o(n^{\delta-1}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\frac{S_n^{-1+\delta}}{n^{\delta-1}} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\frac{S_n^{-1+\delta}}{(n^{\delta-1})} \sim \frac{S_n^{-1+\delta}}{n^{\delta-1}} = F(\delta) o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$\frac{S_n^{-1+\delta}}{(n^{\delta-1})} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{yani} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = o(C_{-1+\delta})$$

dır.

$s \neq 0$ ise $s_n - s = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$ olduğundan benzer işlemler yapılarak

$$\frac{S_n^{-1+\delta}}{(n^{\delta-1})} \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kompleks terimli bir seri ve $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ olsun.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $a_n = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$ ve $s_n = O(1) \quad (n \rightarrow \infty)$ olduğunu bili-

yoruz. Teorem 3.1 de, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_1$ -toplanabilirse $a_n = o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$ ve

$s_n = o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$ olduğunu söylemiştik. Şimdi ise $r > -1$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

C_r -toplanabilirse a_n ve s_n in sahip olduğu özellikleri inceleyeceğiz.

Teorem 3.9. [1]: $r > -1$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s(C_r)$ ise $0 < \delta < r+1$ için $\frac{S_n^{r-\delta}}{A_n^{r-\delta}} = o(n^\delta)$ ($n \rightarrow \infty$) dır. Özellikle $0 < r = \delta$ için $\frac{S_n^r}{A_n^r} = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$) ve böylece $c_n = o(n^r)$ ($n \rightarrow \infty$) dır. ($s_n := c_0 + c_1 + \dots + c_n$)

İspat: $r > -1$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s(C_r)$, $0 < \delta < r+1$ sağlansın ve $\epsilon > 0$ verilsin. Bu durumda,

$$\frac{S_n^r}{A_n^r} = s + \epsilon_n \quad (\epsilon_n \rightarrow o(n^\infty)) \quad (3.34)$$

olduğundan

$$S_n^r = (s + \epsilon_n) A_n^r \quad (3.35)$$

şeklindedir.

(I): δ tam sayı olsun. $S_n^r = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^r c_k$ idi. O halde,

$$\begin{aligned} S_n^r - S_{n-1}^r &= \sum_{k=0}^n A_{n-k}^r c_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k-1}^r c_k \\ &= \sum_{k=0}^n (A_{n-k}^r - A_{n-k-1}^r) c_k, \quad (A_{-1}^r = 0) \\ &= \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{r-1} c_k \\ &= S_n^{r-1}, \end{aligned}$$

$$\frac{S_n^r}{A_n^r} - \frac{S_{n-1}^r}{A_{n-1}^r} = \frac{S_n^{r-1}}{A_n^r} \quad (3.36)$$

bulunur. (3.34), (3.36) da kullanılırsa

$$\frac{S_n^{r-1}}{A_n^r} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Burada da Sonuç 1.2 gözönüne alınırsa

$$\frac{S_n^{r-1}}{n^r} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$S_n^{r-2} = S_n^{r-1} - S_{n-1}^{r-1}$$

eşitliği n^r ile bölünür ve benzer işlemler yapılırsa

$$S_n^{r-2} = o(n^r) \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur. Dolayısıyla δ tamsayı olunca bu işlem arka arkaya uygulanarak

$$S_n^{r-\delta} = o(n^r) \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

(ii): δ tamsayı olmasın. (3.32), δ yerine $-\delta$ alınarak yazılır ve (3.35) kullanılırsa

$$S_n^{r-\delta} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{-\delta-1} (s+\varepsilon_k) A_k^r$$

elde edilir.

$\varepsilon_n = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan $\exists p \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > p$ için $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ dir.

Dolayısıyla,

$$S_n^{r-\delta} = sA_n^{r-\delta} + \sum_{k=0}^p A_{n-k}^{-\delta-1} \varepsilon_k A_k^r + \sum_{k=p+1}^n A_{n-k}^{-\delta-1} \varepsilon_k A_k^r \quad (3.37)$$

olur. Diğer taraftan, Sonuç 1.2 ye göre

$$\frac{sA_n^{r-\delta}}{n^r} \sim \frac{s}{n^\delta \Gamma(r-\delta+1)} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$\frac{sA_n^{r-\delta}}{n^r} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.38)$$

dir.

$$\begin{aligned} \frac{\left| \sum_{k=0}^p A_{n-k}^{-\delta-1} \varepsilon_k A_k^r \right|}{n^r} &\leq \frac{1}{n^r} \sum_{k=0}^p \left| A_{n-k}^{-\delta-1} \varepsilon_k A_k^r \right| \\ &= \frac{1}{n^r} \sum_{k=0}^p O(n^{-\delta-1}) \left| \varepsilon_k A_k^r \right| \\ &= O(n^{-\delta-1-r}) \sum_{k=0}^p \left| A_k^r \varepsilon_k \right| \\ &= O(1) \cdot \sum_{k=0}^p \left| A_k^r \varepsilon_k \right| \\ &= o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

buradan

$$\frac{\left| \sum_{k=0}^p A_{n-k}^{-\delta-1} \varepsilon_k A_k^r \right|}{n^r} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.39)$$

çıkar. Yardımcı Teorem 3.1 e göre

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=p+1}^n A_{n-k}^{-\delta-1} \varepsilon_k A_k^r \right| &< \varepsilon \sum_{k=0}^n |A_{n-k}^{-\delta-1} A_k^r| \\
 &= \varepsilon [O(n^{-\delta-1}) + O(n^r) + O(n^{r-\delta})] \\
 &= \varepsilon [o(n^r) + O(n^r) + o(n^r)] \\
 &= \varepsilon O(n^r) (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$\frac{\sum_{k=p+1}^n A_{n-k}^{-\delta-1} \varepsilon_k A_k^r}{n^r} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.40)$$

olur. (3.38), (3.39) ve (3.40), (3.37) de kullanılırsa

$$\frac{S_n^{r-\delta}}{n^r} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Burada Sonuç 1.2 kullanılırsa

$$\frac{S_n^{r-\delta}}{A_n^{r-\delta}} = o(n^\delta) \quad (n \rightarrow \infty)$$

bulunur. Özellikle $r > 0$ ve $\delta = r$ ise $S_n^0 = o(n^r) (n \rightarrow \infty)$ olur.

$S_n^0 = s_n = o(n^r) (n \rightarrow \infty)$, böylece; $c_n = s_n - s_{n-1}$ ve $(n-1)^r \sim n^r (n \rightarrow \infty)$ olduğu kullanılarak $c_n = o(n^r) (n \rightarrow \infty)$ bulunur.

O halde, herhangi bir $r > -1$ için $c_n/n^r \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ değilse $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, C_r -toplanaamaz.

Teorem 3.10. [4]: Bir (s_n) dizisi verilsin.

$m_n := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$ olmak üzere $m_n \rightarrow s(C_{k-1})$ olması için gerekli ve yeterli koşul $s_n \rightarrow s(C_k)$ olmasıdır. (Burada $1 \leq k \in \mathbb{N}$ dir.)

İspat: Bir (s_n) dizisi verilsin ve $m_n := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$ olsun.

(m_n) dizisi için S_n^k, M_n^k ile gösterilsin. Diğer yandan,

$$C_n^k(s) := \frac{S_n^k}{\binom{n+k}{k}} \quad (3.41)$$

idi. $C_n^k(m)$ de,

$$C_n^k(m) := \frac{M_n^k}{\binom{n+k}{k}} \quad (3.42)$$

olarak tanımlansın.

"Gerekli koşul": $m_n \rightarrow s(C_{k-1})$ olsun. (3.19) dan $|x| < 1$ için

$$\frac{1}{(1-x)^k} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^k} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k-1}} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k-2} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k-2} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n s_i \right) x^n \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k-2} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) m_n x^n \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-2}{k-2} (i+1)m_i \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n$$

dır. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden

$$S_n^k = \sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-2}{k-2} (i+1)m_i$$

çıkar. Bu son eşitlikte;

$$i+1 = (n+k) - (n+k-i-i),$$

$$\binom{n-i+k-2}{k-2} (n+k-1-i) = (k-1) \binom{n-i+k-1}{k-1}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$S_n^k = (n+k) \sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-2}{k-2} m_i - (k-1) \sum_{i=0}^n \binom{n-i+k-1}{k-1} m_i,$$

$$S_n^k = (n+k)M_n^{k-1} - (k-1)M_n^k \quad (3.43)$$

bulunur. (3.41) ve (3.43) den

$$\binom{n+k}{k} C_n^k(s) = S_n^k = (n+k) M_n^{k-1} - (k-1) M_n^k,$$

$$C_n^k(s) = \frac{n+k}{\binom{n+k}{k}} M_n^{k-1} - \frac{k-1}{\binom{n+k}{k}} M_n^k$$

elde edilir.

$$\frac{n+k}{\binom{n+k}{n}} = \frac{k}{\binom{n+k-1}{k-1}}$$

olduğundan

$$C_n^k(s) = k \frac{M_n^{k-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}} - (k-1) \cdot \frac{M_n^k}{\binom{n+k}{k}} \quad (3.44)$$

dir. (3.42) ve (3.44) den

$$C_n^k(s) = k \cdot C_n^{k-1}(s) - (k-1) C_n^k(s) \quad (3.45)$$

elde edilir. $m_n \rightarrow s(C_{k-1})$; yani $C_n^{k-1}(m) \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$ olduğundan Teorem 3.7 ye göre $C_n^k(m) \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$ dir. Bu nedenle (3.45) den

$$C_n^k(s) \rightarrow ks - (k-1)s = s(n \rightarrow \infty)$$

bulunur. Böylece $s_n \rightarrow s(C_k)$ olur.

"Yeterli koşul": $s_n \rightarrow s(C_k)$; yani $C_n^k(s) \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$ olsun.

$$M_n^{k-1} = M_n^k - M_{n-1}^k$$

olduğundan (3.43) den

$$S_n^k = (n+k)(M_n^k - M_{n-1}^k) - (k-1)M_n^k,$$

$$S_n^k = (n+1)M_n^k - (n+k)M_{n-1}^k \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.41), (3.46) da kullanılırsa

$$C_n^k(s) = \frac{(n+1)M_n^k - (n+k)M_{n-1}^k}{\binom{n+k}{k}}$$

$$= (n+1) \cdot \frac{M_n^k}{\binom{n+k}{k}} - n \cdot \frac{M_{n-1}^k}{\binom{n-1+k}{k}}$$

bulunur. Ayrıca son eşitlikte (3.42) kullanılırsa

$$C_n^k(s) = (n+1) C_n^k(m) - n C_{n-1}^k(m) \quad (3.47)$$

olur. (3.47) $n=n, n-1, n-2, \dots, 1$ için yazılır ve taraf tarafa toplanırsa,

$$C_n^k(s) + C_{n-1}^k(s) + \dots + C_1^k(s) = (n+1) C_n^k(m) - C_0^k(m)$$

elde edilir.

$$C_0^k(m) = M_0^k \quad \text{ve} \quad M_0 = m_0 = s_0$$

olduğundan

$$C_0^k(m) = C_0^k(s)$$

dir. Bu nedenle

$$\sum_{i=0}^n C_i^k(s) = (n+1) C_n^k(m) \quad (3.48)$$

olur. Böylece,

$$C_n^k(m) = \frac{\sum_{i=0}^n C_i^k(s)}{n+1}$$

bulunur. $C_n^k(s) \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$ olduğundan Cauchy limit teoremine göre

$$C_n^{k(m) \rightarrow s(n \rightarrow \infty)}$$

olur ve (3.45) yardımıyla

$$C_n^{k-1}(m) \rightarrow \frac{s}{k} + \frac{k-1}{k} s = s(n \rightarrow \infty)$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $m_n \rightarrow s(C_{k-1})$ dir.

$$C_n^k(m) = \frac{\sum_{i=0}^n C_i^k(s)}{(n+1)}$$

eşitliği (s_n) dizisinin C_k -dönüşümünün aritmetik ortalamasının, aynı dizinin aritmetik ortalamasının C_k -dönüşümüne eşit olduğunu ifade eder.

Sonuç 3.1: $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k)$ ise

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n+1} \rightarrow s(C_k) \text{ dir.}$$

İspat: $k \in \mathbb{N}$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_k)$ olsun. Bu durumda $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ olmak üzere

$$s_n \rightarrow s(C_k)$$

dir. Teorem 3.10 a göre

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \rightarrow s(C_{k-1})$$

ve Teorem 3.7 ye göre de

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \rightarrow s \quad (C_k)$$

dir. Dolayısıyla

$$s_n - \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \rightarrow 0 \quad (C_k)$$

olur. Diğer taraftan,

$$s_n - \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n+1}$$

olduğu da gözönüne alınırsa

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n+1} \rightarrow 0 \quad (C_k)$$

bulunur.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serileri mutlak yakınsak ise bunların Cauchy

çarpımı olan $\sum c_n$ serisinin de (mutlak) yakınsak olduğunu biliyoruz.

Ancak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serilerinin sadece yakınsak olması durumunda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ serisi yakınsak olmayabilir. Örneğin:

$a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serileri yakınsak,

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \right)$ serisi ise ıraksaktır.

Aşağıda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serilerinin sıra ile C_α ve C_β -toplanabilmeleri halinde $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ serisinin durumunu tartışacağız

Teorem 3.11 [4]: $\alpha > 0, \beta > 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_{\alpha})$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t(C_{\beta})$

ise $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s.t(C_{\alpha+\beta+1})$ dir.

İspat: $\alpha > 0, \beta > 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_{\alpha})$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t(C_{\beta})$ olsun. Bu takdirde,

Teorem 3.9 a göre $a_n = o(n^{\alpha}) (n \rightarrow \infty)$ ve $b_n = o(n^{\beta}) (n \rightarrow \infty)$ dir. Bu nedenle

$|x| < 1$ için

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

olur. Öte yandan $\gamma = \alpha + \beta + 1$ olarak tanımlanırsa, $|x| < 1$ için

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^{\beta+1}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{\gamma+1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ için } S_n^{\alpha}, A_n^{\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ için } S_n^{\beta}, B_n^{\beta}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ için } S_n^{\gamma}, C_n^{\gamma}$$

ile gösterilir ve (3.21) kullanılırsa

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{\beta} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\gamma} x^n$$

bulunur. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden

$$\sum_{k=0}^n A_k^{\alpha} B_{n-k}^{\beta} = C_n^{\gamma}$$

dir.

$$x_n := \frac{A_n^\alpha}{A_n^\alpha}, \quad y_n := \frac{B_n^\beta}{A_n^\beta}, \quad a_{nk} := \begin{cases} \frac{A_k^\alpha A_{n-k}^\beta}{A_n^\gamma}, & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$z_n := \frac{C_n^\gamma}{A_n^\gamma} = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} a_{nk}$$

olur. $A=(a_{nk})$ açık olarak bir üçgensel matristir ve Sonuç 2.1 in koşullarını sağlar. Gerçekten:

i) (3.28) den, $\forall p \in \mathbb{N}$ için $a_{np} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ve $a_{n,n-p} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olduğu görülür.

$$\text{ii) } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k=0}^n |a_{nk}| = \sum_{k=0}^n a_{nk} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k^\alpha A_{n-k}^\beta}{A_n^\gamma} = 1$$

olduğundan $\sup_n \sum_{k=0}^n |a_{nk}| < \infty$ ve $\sum_{k=0}^n a_{nk} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) dir.

Ayrıca, $x_n \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$) ve $y_n \rightarrow t$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan Sonuç 2.1 e göre

$$z_n = \frac{C_n^\gamma}{A_n^\gamma} \rightarrow s.t \quad (n \rightarrow \infty);$$

dolayısıyla $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s.t(C_\gamma)$ dir.

$$\text{Girişte, } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2} (C_1) \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) = \frac{1}{4} (C_2)$$

olduğunu göstermiştik. Şimdi ise daha genel olarak,

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k} = \frac{1}{2^{k+1}} (C_{k+1}) \quad (3.49)$$

olduğunu gösterelim:

(3.49) un $k=0$ ve $k=1$ için doğru olduğunu biliyoruz, dolayısıyla $k \geq 2$ için doğruluğunu göstermek yeter.

Bunun için:

$$a_n := (-1)^n \binom{n+k}{n}, \quad s_n = \sum_{i=0}^n a_i \quad \text{ve} \quad S_n^k = \sum_{i=0}^n A_{n-i}^k a_i$$

olmak üzere,

$$\frac{S_n^k}{A_n^k} \rightarrow \frac{1}{2^{k+1}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu gösterirsek ispat biter. (3.19) dan $|x| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k} x^n$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{1}{(1+x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k} x^n \quad (|x| < 1)$$

olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{1}{(1+x)^{k+1}} = \frac{1}{(1-x^2)^{k+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k}{k} x^{2i}$$

bulunur. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden dolayı

$$S_n^k = \begin{cases} \binom{i+k}{k} & , n=2i \\ 0 & , n=2i+1 \end{cases}$$

dır.

$n=2i$ olsun. Bu takdirde,

$$S_n^{k+1} = \sum_{i=0}^n S_i^k = \sum_{i=0}^i \binom{i+k}{k} = \binom{i+k+1}{k+1} \sim \frac{i^{k+1}}{\Gamma(k+2)} \quad (i \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$\frac{S_n^{k+1}}{A_n^{k+1}} = \frac{\binom{i+k+1}{k+1}}{\binom{2i+k+1}{k+1}} \rightarrow \frac{1}{2^{k+1}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\times)$$

elde edilir.

$n=2i+1$ olsun, Bu durumda da

$$\frac{S_n^{k+1}}{A_n^{k+1}} = \frac{\binom{i+k+1}{k+1}}{\binom{2i+1+k+1}{k+1}} \rightarrow \frac{1}{2^{k+1}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\times \times)$$

dır. $(\times)$ ve $(\times \times)$ dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k} = \frac{1}{2^{k+1}} (C_{k+1})$$

bulunur.

4. B Ö L Ü M

C_k -METODLARI İLE DİĞER METODLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

Bu bölümde, C_k -metodlarının Hölder, Abel ve Euler metodlarıyla olan bazı ilişkilerini vereceğiz.

A-) CESÀRO VE HÖLDER ORTALAMALARI

Bu kısımda, H_k ile gösterilen k. mertebeden Hölder metodunu tanımlayıp, H_k ile C_k metodlarının denk olduğunu göstereceğiz.

Tanım 4.1: Bir (s_n) dizisi verilsin.

$$H_n^0 = s_n \quad \text{ve} \quad H_n^k = \frac{1}{n+1} (H_0^{k-1} + H_1^{k-1} + \dots + H_n^{k-1}) \quad (k=1,2,\dots)$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^k = s$$

ise (s_n) dizisi s ye H_k -limitlenebilir (k. mertebeden Hölder limitlenebilir) denir ve

$$s_n \rightarrow s(H_k) \quad \text{veya} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s(H_k)$$

şeklinde gösterilir.

Eğer (s_n) , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve $s_n \rightarrow s(H_k)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye H_k -toplanabilir (k . mertebeden Hölder toplanabilir) denir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(H_k)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1 den anlaşıldığı gibi, H_k -metodu $k \in \mathbb{N}$ için tanımlıdır. Diğer taraftan, C_k -metodunun $k > -1$ ve $k \in \mathbb{R}$ için tanımlandığını biliyoruz. O halde, C_k -metodunun tanım alanı H_k -metodunun tanım alanından daha geniştir.

Teorem 4.1. [4]: $k \in \mathbb{N}$ için $H_k \subset C_k$ dir.

İspat: $k \in \mathbb{N}$ keyfi verilsin.

İ) $H_k \subset C_k$ olduğunu gösterelim. (s_n) , $s_n \rightarrow s(H_k)$ olan keyfi bir dizi olsun. Bu takdirde, tanım gereği

$$H_n^k = \frac{1}{n+1} (H_0^{k-1} + H_1^{k-1} + \dots + H_n^{k-1}) \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

dir. Teorem 3.10 a göre

$$H_n^{k-1} \rightarrow s(C_1)$$

dir. O halde,

$$H_n^{k-1} = \frac{1}{n+1} (H_0^{k-2} + H_1^{k-2} + \dots + H_n^{k-2}) \rightarrow s(C_1)$$

dir. Yine Teorem 3.10. dan

$$H_n^{k-2} \rightarrow s(C_2)$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.10 k defa arka arkaya uygulanırsa

$$H_n^0 \rightarrow s(C_k)$$

bulunur. $s_n = H_n^0$ olduğundan $s_n \rightarrow s(C_k)$ elde edilir.

ii) $C_k \subseteq H_k$ olduğunu gösterelim. Şimdi de (s_n) , $s_n \rightarrow s(C_k)$ olan keyfi bir dizi olsun. Bu takdirde, Teorem 3.10 a göre

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \rightarrow s(C_{k-1})$$

dir. Ayrıca $H_n^1 = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$ olduğundan

$$H_n^1 \rightarrow s(C_{k-1})$$

olur. Yine Teorem 3.10 a göre

$$H_n^2 = \frac{1}{n+1} (H_0^1 + H_1^1 + \dots + H_n^1) \rightarrow s(C_{k-2})$$

dır. Bu şekilde Teorem 3.10 k defa arka arkaya uygulanırsa

$$H_n^k = \frac{1}{n+1} (H_0^{k-1} + H_1^{k-1} + \dots + H_n^{k-1}) \rightarrow s(C_0)$$

bulunur. C_0 -metodu Cauchy anlamındaki yakınsaklığa denk olduğundan

$$H_n^k \rightarrow s(n \rightarrow \infty)$$

dir. Bu ise $s_n \rightarrow s(H_k)$ olduğunu gösterir.

i) ve ii) den $H_k \supset C_k$ elde edilir.

B-) CESÀRO VE ABEL METODLARI

Bu kısımda Abel metodunu tanımlayıp, bu metodun Cesàro metodlarından daha kuvvetli olduğunu göstereceğiz.

Tanım 4.2: Bir (s_n) dizisi verilsin. $0 < x < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

serisi yakınsak ve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = s$$

ise (s_n) dizisi s ye Abel limitlenebilir denir ve $s_n \rightarrow s(A)$ şeklinde gösterilir.

Eğer (s_n) , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve $s_n \rightarrow s(A)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye Abel toplanabilir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$ şeklinde gösterilir.

Abel metodu için $A(x)$ matrisi (Abel matrisi),

$$A(x) = (a_k(x)) = (x^k) \quad (0 < x < 1, k \in \mathbb{N})$$

dir.

Abel matrisinde, şimdiye kadar sözü edilen $A = (a_{nk})$ sonsuz matrislerinden farklı olarak n yerine reel değerli ve pozitif x sürekli değişkeni kullanılmış ve a_{nk} yerine de $a_k(x)$ yazılmıştır. Bu şekilde, n yerine reel değerli ve pozitif sürekli değişken kullanıldığında elde edilen limitleme metodları için Silverman-Toeplitz Teoremi aşağıdaki şekli alır.

Teorem 2.3' [1]: x reel değerli ve pozitif sürekli değişken olmak üzere $A(x)=(a_k(x))^c (c,c;P)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(RN)_1^1 \quad \sup_x \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x)| < \infty,$$

$$(C_0)_1^1 \quad a_k(x) \rightarrow 0 \quad (k \text{ sabit, } x \rightarrow \infty)$$

$$(RS_1)_1^1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty)$$

dır.

Aşağıdaki teorem, Abel-metodunun regüler Cesàro metodlarından daha kuvvetli olduğunu verir.

Teorem 4.2: $\alpha > 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_\alpha)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$ dır.

İspat: $\alpha > 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C_\alpha)$ olsun. Bu takdirde, Teorem 3.9 uyarınca $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ olmak üzere $s_n = o(n^\alpha)$ ($n \rightarrow \infty$) dır. Dalayışıyla $|x| < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ serisi yakınsaktır. Ayrıca,

$$\sigma(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^\alpha x^n$$

ve

$$C_n^\alpha(s) = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha}$$

olduğundan

$$\sigma(x) = (1-x)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha C_n^\alpha(s) x^n$$

olarak yazılır. Öte yandan

$$a_k(x) := (1-x)^{\alpha+1} A_k^\alpha x^k \quad (k=0,1,2,\dots)$$

olmak üzere $A(x) = (a_k(x))$ matrisi Teorem 2.3'ün koşullarını sağlar. Gerçekten:

$$(RS_1)^1 : \sum_{k=0}^{\infty} A_k^\alpha x^k = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \quad \text{olduğundan} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = 1;$$

$$\text{böylece} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = 1 \text{ bulunur,}$$

$$(C_0)^1 : \lim_{x \rightarrow 1^-} a_k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\alpha+1} A_k^\alpha x^k = 0,$$

$$\begin{aligned} (RN)^1 : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x)| &= \sum_{k=0}^{\infty} |(1-x)^{\alpha+1} x^k A_k^\alpha| \\ &= (1-x)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} |x^k A_k^\alpha| \\ &= \left(\frac{1-x}{1-|x|} \right)^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

$$\sup_{0 < x < 1} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x)| = \sup_{0 < x < 1} \left(\frac{1-x}{1-|x|} \right)^{\alpha+1} = O(1)$$

dir. Dolayısıyla $A(x)$ regülerdir.

(I) $s=0$ ise $C_n^\alpha(s) \rightarrow o(n \rightarrow \infty)$ dir. Ayrıca $A(x)$ regüler olduğundan $\sigma(x) \rightarrow o(x \rightarrow 1^-)$ dir. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = o(A)$ dir.

(II) $s \neq 0$ ise $s_n \rightarrow s \rightarrow o(C_\alpha)$ dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) x^k + s(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &= (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) x^k + s \end{aligned}$$

dır. (İ) den $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) x^k = 0$ dır. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sigma(x) = s$$

elde edilir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Gerçekten: $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$ fonksiyonu gözönüne alınırsa, bu fonksiyon $x = -1$ noktası dışında regülerdir. Bu nedenle $f(x)$, $|x| < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklindeki yakınsak bir kuvvet serisi ile temsil edilir.

O halde, $|x| < 1$ için $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ olsun.

Öte yandan

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1+x}} = \sqrt{e}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sqrt{e} \quad (A)$$

dır. Diğer taraftan, $|x| < 1$ ve keyfi bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1+x}} &= 1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(1+x)^2} + \dots + \frac{1}{(k+2)!} \frac{1}{(1+x)^{k+2}} + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{2!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+1}{1} x^n + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(k+2)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k+1}{k+1} x^n + \dots \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2!} \binom{n+1}{1} + \dots + \frac{1}{(k+2)!} \binom{n+k+1}{k+1} + \dots \right] (-1)^n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i}{i} \frac{1}{(i+1)!} \right) (-1)^n x^n$$

bulunur. O halde,

$$f(x) = e^{\frac{1}{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i}{i} \frac{1}{(i+1)!} \right) (-1)^n x^n$$

dir. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden dolayı

$$n \geq 1 \text{ için } a_n = (-1)^n \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i}{i} \frac{1}{(i+1)!}$$

dir. n çift ise,

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i}{i} \frac{1}{(i+1)!} > \frac{1}{(k+2)!} \binom{n+k+1}{k+1}$$

olur. Sonuç 1.2 ye göre

$$\frac{\binom{n+k+1}{k+1}}{(k+2)!} \sim \frac{n^{k+1}}{\Gamma(k+2)(k+2)!} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$\frac{a_n}{n^k} > \frac{n}{\Gamma(k+2)(k+2)!} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit})$$

dir. Böylece n çift ise $a_n \neq o(n^k)$ ($n \rightarrow \infty$) bulunur. Teorem 3.9 a göre

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_k$ -toplanamaz. Ayrıca Teorem 3.7 de kullanılırsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin hiçbir $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$ için C_k -toplanamadığı açık olarak görülür.

Bundan anlaşılıyor ki Abel metodu regüler Cesàro metodlarından daha kuvvetlidir. Dolayısıyla Abel metodunun etki alanı C_k -metodlarının ($k > 0$) etki alanından daha geniştir.

C-) CESÀRO VE EULER METODLARI

Burada özel olarak C_1 -metodu ile 1. mertebeden Euler metodu (E_1 -metodu) arasındaki bazı ilişkileri vereceğiz. Bunun için önce E_1 -metodunun tanımını verelim.

Tanım 4.3: Bir (s_n) dizisi verilsin. $\sigma_n := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$ ise (s_n) dizisi s ye E_1 -limitlenebilir (veya 1. mertebeden Euler limitlenebilir) denir ve $s_n \rightarrow s (E_1)$ şeklinde gösterilir.

Eğer (s_n) , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve $s_n \rightarrow s (E_1)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye E_1 -toplanabilir (veya 1. mertebeden Euler toplanabilir) denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(E_1)$ şeklinde gösterilir.

$E_1 = ((e_1)_{nk})$ 1. mertebeden Euler matrisini göstermek üzere

$$(e_1)_{nk} = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

dir. Açık olarak $E_1 = ((e_1)_{nk})$ matrisi Teorem 2.3 ün koşullarını sağlar; dolayısıyla E_1 -metodu regülerdir.

Problem 4.1 de $E_1 C_1$ ile $C_1 E_1$ -metodunun denk olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce iki matrisin alışılmış matris çarpımını tanıyalım.

$A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ iki matris olsun.

$$C = (c_{nk}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni} b_{ik}$$

olmak üzere $A.B=C=(c_{nk})$ dir. Burada her bir $n \in \mathbb{N}$ için ilgili serinin yakınsak olduğu kabul edilmiştir.

(3.23) den $C_1=((c_1)_{nk})$ 1. mertebeden Cesàro matrisi

$$(c_1)_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

dir. E_1, C_1 -matrisleri üçgensel matrisler olduklarından $E_1 C_1$ ve $C_1 E_1$ matrisleri sıra ile

$$E_1 C_1 := ((e_1 c_1)_{nk}) = \left(\sum_{i=k}^n (e_1)_{ni} (c_1)_{ik} \right)$$

$$C_1 E_1 := ((c_1 e_1)_{nk}) = \left(\sum_{i=k}^n (c_1)_{ni} (e_1)_{ik} \right)$$

olur.

Problem 4.1: $C_1 E_1$ ve $E_1 C_1$ metodları denktirler.

Çözüm: Verilen bir (s_n) dizisine C_1 ve E_1 -metodlarını uygulandığında elde edilen dizileri sırasıyla $C_1(s_n)$ ve $E_1(s_n)$ ile gösterilirse

$$C_1(s_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k =: c_n^1$$

$$E_1(s_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k =: s_n^1$$

olur. Aynı düşünce ile

$$E_1 C_1(s_n) = E_1(C_1(s_n)) = E_1(c_n^1) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k^1$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k s_i \right]$$

$$= \frac{1}{2^n} \binom{n}{0} s_0 + \frac{1}{2^n} \binom{n}{1} \frac{s_0 + s_1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \binom{n}{n} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{s_k}{2^n} \left[\sum_{i=k}^n \frac{\binom{n}{i}}{i+1} \right]$$

elde edilir. Ayrıca $0 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1}$$

olduğundan

$$E_1 C_1(s_n) = \sum_{k=0}^n \frac{s_k}{2^n(n+1)} \left[\sum_{i=k}^n \binom{n+1}{i+1} \right]$$

olur. Diğer taraftan $0 \leq k \leq n$ için

$$\sum_{i=k}^n 2^{n-i} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{n+1}{i+1}$$

olduğundan

$$E_1 C_1(s_n) = \sum_{k=0}^n \frac{s_k}{2^n(n+1)} \left[\sum_{i=k}^n 2^{n-i} \binom{i}{k} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{s_k}{n+1} \left[\sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{2^i} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{2^i} \right) s_k$$

bulunur. Öte yandan

$$C_1 E_1(s_n) := \sum_{k=0}^n (c_1 e_1)_{nk} s_k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{2^i} \right) s_k$$

idi. O halde

$$C_1 E_1(s_n) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{2^i} \right) s_k = E_1 C_1(s_n)$$

dir.

Aşağıda problem 4.1 i kullanarak E_1 ve C_1 metodlarının uyumlu olduğunu göstereceğiz.

Problem 4.2: $s_n \rightarrow s(E_1)$ ve $s_n \rightarrow c(C_1)$ ise $s=c$ dir.

Çözüm: $s_n \rightarrow s(E_1)$ ve $s_n \rightarrow c(C_1)$ olsun. Bu takdirde

$$i) \quad C_1(s_n) =: c_n^1 \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$ii) \quad E_1(s_n) =: s_n^1 \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur. ii). ve Cauchy limit teoreminden dolayı

$$C_1(s_n^1) = \frac{s_0^1 + s_1^1 + \dots + s_n^1}{n+1} \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

dir. Diğer taraftan,

$$C_1(s_n^1) = C_1(E_1(s_n)) = C_1 E_1(s_n)$$

olduğundan

$$C_1 E_1(s_n) \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. İ) ve E_1 -metodunun regülerliğinden

$$E_1(c_n^1) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k^1 \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Ayrıca

$$E_1(c_n^1) = E_1(C_1(s_n)) = E_1 C_1(s_n)$$

olduğundan

$$E_1 C_1(s_n) \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Problem 4.1 e göre $s=c$ dir.

O halde E_1 ve C_1 metodları uyumlu metodlardır. Fakat E_1 -limitlenicibildiği halde C_1 -limitlenemeyen veya C_1 -limitlenebildiği halde E_1 -limitlenemeyen diziler vardır. Problem 4.3 de bu tip dizilere örnek vereceğiz.

Problem 4.3: $C_1 \subset E_1$ ve $E_1 \subset C_1$ olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Önce $C_1 \subset E_1$ olmadığını bir örnekle açıklayalım.

$$s_n = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad n \text{ tamkare} \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda, $n=k^2$ için

$$C_1(s_n) = \frac{1}{n+1} (s_0 + s_1 + \dots + s_n)$$

$$= \frac{1+2+\dots+k}{k^2+1} = \frac{k(k+1)}{2(k^2+1)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (k \rightarrow \infty)$$

dir. n tamkare değilse, n den önce gelen ilk tamkare $m=k_1^2$ olsun.
Bu takdirde (s_n) nin tanımı gereği

$$C_1(s_n) = C_1(s_m) = \frac{1+2+\dots+k_1}{k_1^2+1} = \frac{k_1(k_1+1)}{2(k_1^2+1)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (k_1 \rightarrow \infty)$$

dir. O halde (s_n) dizisi C_1 -Limitlenebilir.

Aynı dizi için $E_1(s_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} s_i =: T_n$ olsun

$n=v^2$ için

$$T_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} s_i$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \left[\binom{2n}{0} s_0 + \binom{2n}{1} s_1 + \dots + \binom{2n}{2n} s_{2n} \right]$$

$$> \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} s_n$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} s_{v^2}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sqrt{n}$$

dir.

$$\frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sqrt{n} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad ([8], \text{ sayfa } 377)$$

olduğu gözönüne alınırsa $T_{2n} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ($n \rightarrow \infty$) bulunur. $\frac{1}{\sqrt{\pi}} > \frac{1}{2}$ ve

E_1, C_1 metodları uyumlu olduğundan (s_n) dizisi E_1 -limitlenemez.

O halde $C_1 \subseteq E_1$ değildir.

$E_1 \subseteq C_1$ olmadığını gösterelim. Bunun için $s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ ($z \in \mathbb{C}$)

olmak üzere (s_n) dizisini ele alalım. Problem 3.2 den

$$s_n \rightarrow s (C_1) \Leftrightarrow |z| < 1 \text{ ve } z \neq 1$$

dir. Halbuki bu (s_n) dizisi $|z+1| < 2$ dairesinin her noktasında

E_1 -limitlenebilirdir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} E_1(s_n) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{z}{1-z} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{z}{1-z} \cdot (1+z)^n \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z} \cdot \left(\frac{1+z}{2}\right)^n \end{aligned}$$

dir. $|1+z| < 2$ için; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+z}{2}\right)^n = 0$, dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_1(s_n) = \frac{1}{1-z}$$

dir.

KAYNAKLAR

- [1]- Dienes, P., "The Taylor Series"- Dover Publications Inc.,
New York.- 1957
- [2]- Ferrar, W.L., "Convergence"-Oxford University Press, Amen
House, London E.C.4- 1963
- [3]- Hardy, G.H., "Divergent Series"-Oxford University Press, Amen
House, London E.C.4-1963
- [4]- Knopp, K., "Theory and Application of Infinite Series"-
English ed., London, 1964.
- [5]- Maddox, I.J., "Elements of Functional Analysis"- Cambridge
University Press, 1970-
- [6]- Peyerimhoff, A., "Lecture Notes in Mathematics" -Springer
Verlag- 1969
- [7]- Powel, R.E.; Shah, S.M. "Sumnability Theory and Its
applications"-Van Nostrand Reinhold Company- 1972
- [8]- Widder, David V., "Advanced Calculus"-Prentice Hall, Inc.- 1961