



**ÇEŞİTLİ GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
CAPUTO-FABRIZIO KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRLER İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Kader AŞAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Ana Bilim Dalı

Dr.Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

AĞRI-2025

(Her Hakkı Saklıdır)

	LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI	Doküman No	FR-211
		İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa No	1/1

ÇEŞİTLİ GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN CAPUTO-FABRIZIO KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN danışmanlığında, Kader AŞAK tarafından hazırlanan bu çalışma, 19/08/2025 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR İmza :
Üye : Doç. Dr. Alper EKİNCİ İmza :
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN İmza :
Üye : İmza :
Üye : İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet TEYFUR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN



LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ BENZERLİK RAPORU

Doküman No	FR-213
İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
Revizyon Tarihi	
Revizyon No	00
Sayfa No	1 / 2

Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir		
Öğrenci Adı Soyadı	Kader AŞAK	
Numarası		
Ana Bilim Dalı	Matematik	
Bilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	
Programı	Tezli Yüksek Lisans	
Danışman Unvanı Adı Soyadı	Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN	
Tez Başlığı	Çeşitli Güçlü Konveks Fonksiyonlar için Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörleri İçeren İntegral Eşitsizlikler	
Bölümler	Turnitin Sonucu	En Yüksek Değer
Giriş	% 5	% 25
Kuramsal Temeller/Kavramsal Çerçeve	% 15	% 30
Materyal ve Yöntem	% 23	% 30
Araştırma Bulguları	% 15	% 20
Sonuç/Tartışma/Öneri	% 0	% 20
TEZ (GENEL)	% 19	% 25

29/07/2025

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Kader AŞAK

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN
------------	--------------	-----------

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kader AŞAK

**ÇEŞİTLİ GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN CAPUTO-FABRIZIO
KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

JÜRİLER
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
Doç. Dr. Alper Ekinci
Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

AĞRI-2025

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇEŞİTLİ GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN CAPUTO-FABRIZIO KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Kader AŞAK

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

L'Hospital'in, Leibniz'e yönelttiği “kesirli mertebeden türevin varlığı” sorusunun ardından, yaklaşık elli yıl boyunca kesirli analiz alanında sınırlı sayıda çalışma yapılmıştır. Ancak yerel olmayan problemlerin modellenmesinde sunduğu yenilikçi yaklaşım ve karmaşık gerçek dünya problemlerine uygulanabilirliği, bu alandaki araştırmaları hızlandırmıştır. Böylece kesirli analiz; matematik, fizik, mühendislik, ekonomi, biyoloji ve diğer bilim–mühendislik disiplinlerinde önemli bir araştırma alanı hâline gelmiştir. Son yıllarda kesirli türev ve integrallerin eşitsizlik teorisiyle birlikte incelenmesi, mevcut integral eşitsizliklerinin daha genel biçimlerinin elde edilebileceğini göstermiştir.

Bu tez çalışmasında, 2015 yılında M. Caputo ve M. Fabrizio tarafından literatüre kazandırılan, tekil olmayan kesirli türeve karşılık gelen integral tanımları ele alınmıştır. Güçlü konveks fonksiyon türleri için Caputo–Fabrizio kesirli integralleri kullanılarak yeni Hermite–Hadamard ve Ostrowski tipli eşitsizlikler türetilmiştir.

2025, 65 sayfa

Anahtar Kelimeler: Caputo-Fabrizio kesirli integral, Hermite-Hadamard, Ostrowski, güçlü konvekslik

ABSTRACT

Master Thesis

INTEGRAL INEQUALITIES FOR SEVERAL STRONGLY CONVEX FUNCTIONS INCLUDING CAPUTO-FABRIZIO FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS

Kader AŞAK

Ağrı İbrahim Çeçen University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

L'Hospital's question to Leibniz concerning the existence of fractional-order derivatives marked the beginning of fractional calculus, yet research in this area remained limited for nearly fifty years. Over time, its innovative approach to modeling non-local problems and its applicability to complex real-world challenges significantly accelerated developments in the field. Consequently, fractional calculus has become a prominent area of study within mathematics, physics, engineering, economics, biology, and various other science and engineering disciplines. Recently, the combined study of fractional derivatives, integrals, and inequality theory has yielded important findings, demonstrating that more general forms of existing integral inequalities can be established.

This thesis focuses on the integral definitions corresponding to the non-singular fractional derivative introduced by M. Caputo and M. Fabrizio in 2015. New Hermite–Hadamard and Ostrowski type inequalities are derived using Caputo–Fabrizio fractional integrals for certain classes of strongly convex functions.

2025, 65 pages

Keywords: Caputo-Fabrizio fractional integral, Hermite-Hadamard, Ostrowski, strongly convexity

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenim sürecinde her konuda büyük bir özveri ve samimiyetle yardımcı olan, bu noktaya gelmemde büyük pay sahibi olan, her zaman sevgi saygı ve minnetle hatırlayacağım çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN’a teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Diğer yandan, öğrenim hayatım boyunca, zorlu koşullara rağmen kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı annem Dilek ÖZTÜRK ESKO, babam Behçet ESKO ablam Melek SİS ve kız kardeşim Songül ESKO’ya çok teşekkür ederim.

Ayrıca her türlü fedakarlığı ve desteği gösteren sevgili eşim Çağrı AŞAK’a yürekten teşekkür ederim.

Ağustos 2025
Kader AŞAK

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Temel Kavramlar	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM	16
3.1 Caputo- Fabrizio Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler.....	19
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	22
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	62
KAYNAKLAR	63

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
I	Reel sayılar kümesinin alt aralığı
Γ	Gama fonksiyonu
B	Beta Fonksiyonu
$\mathcal{L}$	İntegrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{B}(\partial)$	Normalleştirme fonksiyonu
${}^{RL}D_{a+}^{\zeta}\psi(w)$	sol Riemann-Liouville kesirli türev
$(J_{a+}^{\zeta}\psi)(w)$	sol Riemann-Liouville kesirli integral
${}^CD_{a+}^{\zeta}\psi(w)$	sol Caputo kesirli türev
${}^{CF}D_a^{\zeta}\psi(w)$	sol Caputo-Fabrizio kesirli türev
$({}^{CF}Q_a^{\zeta}\psi)(w)$	sol Caputo-Fabrizio kesirli integral

1. GİRİŞ

Konvekslik kavramı, kökeni M.Ö. 250 yılına kadar uzanan tarihsel bir arka plana sahiptir. Bu dönemde Arşimet, çemberin içine ve dışına çizdiği düzgün çokgenler aracılığıyla π sayısına dair ilk hassas yaklaşımları elde etmiştir. Her ne kadar konvekslik fikri bu tür geometrik çalışmalarda örtük biçimde yer alsada, kavramın matematiksel literatürde açık bir biçimde tanımlanması ve sistematik biçimde ele alınması 19. yüzyılın sonları ile 20. yüzyılın başlarına denk gelmektedir.

Konvekslik kavramının modern anlamda literatüre dâhil edilmesi, 1881 yılının Ekim ayında Charles Hermite'in elde ettiği bir sonuçla başlamıştır. Hermite'in bu sonucu, herhangi bir ispat sunulmaksızın 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayımlanmıştır. Bunu takiben, 1893 yılında Jacques Hadamard, konveks fonksiyonlara ilişkin bazı temel kavramları çalışmalarında kullanmış, ancak bu çalışmalar henüz sistematik bir yapıdan yoksun kalmıştır. Konveks fonksiyonların kuramsal olarak sistematik biçimde incelenmesi ise 1905–1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen'in çalışmalarıyla başlamış ve bu süreç konveks analiz alanının doğuşuna zemin hazırlamıştır (Pachpatte 2005).

Konveks fonksiyonların tanımı, doğrudan bir eşitsizlik aracılığıyla yapılmaktadır. Dolayısıyla eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar teorisinin hem tanımsal hem de analitik yapısında merkezi bir rol üstlenmektedir. Jensen eşitsizliği başta olmak üzere, birçok klasik eşitsizlik, konvekslik kavramı üzerinden formüle edilmekte ve başta olasılık teorisi, optimizasyon, ekonomi, fonksiyonel analiz ve istatistik olmak üzere çok sayıda disiplinde geniş uygulama alanı bulmaktadır.

Eşitsizlik teorisi, matematiksel işlemler kapsamında eşitsizliklerin nasıl formüle edileceğini, çözümleneceğini ve analiz edileceğini inceleyen bir alt disiplindir. Bu teori, matematiğin temel bileşenlerinden biri olup, matematiksel düşüncenin geliştirilmesi ve uygulanması açısından büyük bir öneme sahiptir. Matematiksel eşitsizliklerin kuramsal temelleri 18. ve 19. yüzyıllarda birçok seçkin matematikçi tarafından atılmış ve bu alandaki çalışmalar, matematiğin farklı disiplinlerinde önemli katkılar sağlamıştır. Bu alana katkı sunan öncü

matematikçiler arasında P. L. Chebyshev (1821–1894), K. F. Gauss (1777–1855) ve A. L. Cauchy (1789–1857) gibi isimler yer almaktadır. Modern anlamda matematiğin temel disiplinlerinden biri olarak konumlanmasında dönüm noktası niteliğindeki ilk sistematik çalışma 1934 yılında G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Pólya tarafından yayımlanan *Inequalities* adlı eserdir (Hardy *et al.* 1952). Bu eser eşitsizliklerin sınıflandırılması, analizi ve çeşitli matematiksel bağlamlarda uygulanabilirliğini derinlemesine ele alarak alana kuramsal bir bütünlük kazandırmıştır.

Kesirli analiz, diferansiyel ve integral hesapların doğal bir genellemesi olup, türev ve integral işlemlerinin tamsayı olmayan mertebelerle tanımlanmasını konu edinir. Bu alanın tarihsel kökeni, 1695 yılında Marquis de L'Hospital ile Gottfried Wilhelm Leibniz arasında gerçekleşen dikkat çekici bir yazışmaya dayanmaktadır. L'Hospital, bu yazışmada Leibniz'e, bir diferansiyel denklemde türevin mertebesinin $1/2$ olması hâlinde ne anlama gelebileceğini sormuştur. Leibniz, bu soruya verdiği yanıtta ileride önemli sonuçlar doğurabilecek bu problemin, matematiğin henüz oluşmakta olan yeni bir alanı olan “kesirli analiz” olarak bilinen disiplin için bir başlangıç teşkil edebileceğini öngörmüştür (Oldham and Spanier, 1974).

Bu öncü fikirlerin ardından, 1738 yılında Leonhard Euler tamsayı olmayan mertebeden türevler üzerine çalışmalarda bulunmuş; 1822 yılında ise Joseph Fourier, integral kullanarak türev tanımını geliştirmiştir. Fourier'in tanımı, keyfi mertebeden türev için yapılan ilk sistematik yaklaşım olarak literatüre geçmiştir. Kesirli analizin gelişimi, 1826 yılında Niels Henrik Abel'in ortaya koyduğu ve bu alanın ilk uygulama problemi olarak kabul edilen Tautochrone problemiyle ivme kazanmıştır. Abel, bu problem çerçevesinde bir integral eşitsizliğini çözmüş ve bu çözüm, kesirli analiz için önemli bir dönüm noktası oluşturmuştur (Yang 2019; Lazarević *et al.* 2014).

1832 yılında Joseph Liouville, üstel fonksiyonların türevlerine ilişkin bir formül geliştirmiş ve tamsayı olmayan mertebeden integrallere ilişkin, bugün “Liouville integrali” olarak bilinen formülasyonu literatüre kazandırmıştır. Bu katkı, kesirli analiz alanının kuramsal temelini sağlamlaştırılmasına büyük ölçüde katkı sağlamıştır.

Kesirli analiz günümüzde, matematiksel analizden uygulamalı matematiğe; fizik, istatistik, sinyal işleme, kontrol teori, matematiksel modelleme ve biyoloji gibi çok çeşitli alanda geniş kapsamlı uygulamalara sahiptir. Bu gelişmeler doğrultusunda Riemann–Liouville, Hadamard, Caputo, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu, Katugampola gibi çeşitli kesirli integral ve türev operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlerin genellemeleri üzerinden yeni teorik çerçeveler oluşturulmuştur. Riemann–Liouville integrallerinin geliştirilmesi yoluyla geliştirilen farklı kesirli integral türleri, literatürdeki temel eşitsizliklerin yeniden ele alınmasına olanak sağlamış ve eşitsizlik teorisi ile kesirli analiz arasında doğrudan bir etkileşim alanı oluşmuştur. Böylece bu alan üzerine son yıllarda birçok makale ve tez çalışması sunulmuştur.

Çalışmamızın giriş bölümünde konvekslik, eşitsizlik, kesirli türev ve integral operatörlerinin önemi ve tarihsel akışı hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konvekslik kavramıyla ilgili temel tanım, teorem, kavramlar ve bazı konveks ve güçlü konveks fonksiyon çeşitlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Caputo-Fabrizio kesirli türev ve integrallerinin tanımı verilip, önceki çalışmalarda yer alan ilgili eşitsizlikler sunulmuştur. Dördüncü bölümde bazı güçlü konveks fonksiyon türleri için Caputo-Fabrizio kesirli integraller içeren Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmamız için önemli yere sahip bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Süreklilik) Boş olmayan $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilmiş olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall w \in X$ için $|w - a| < \delta \Rightarrow |\psi(w) - \psi(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, ψ fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreklidir denir (Musayev *et al.* 2007).

Tanım 2.1.2. (Düzgün Süreklilik) $X \subseteq \mathbb{R}$, $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall w_1, w_2 \in X$ noktaları için $|w_1 - w_2| < \delta \Rightarrow |\psi(w_1) - \psi(w_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, ψ fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.3. (Sınırlı Fonksiyon) $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x \in I$ için $|\psi(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ varsa, ψ ye sınırlı fonksiyon denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.4. (Lipschitz Koşulu) $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $w_1, w_2 \in X$ çifti için $|\psi(w_1) - \psi(w_2)| \leq P|w_1 - w_2|$ olacak şekilde bir $P > 0$ sabiti varsa, ψ fonksiyonuna Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyon denir. P sayısına ise ψ 'nin bir Lipschitz sabiti denir (Bayraktar 2010).

Önerme 2.1.1. $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. ψ fonksiyonu I kümesinde diferensiyellenebilir ve her $w \in I$ için $|\psi'(w)| \leq P$ olacak şekilde $P > 0$ sayısı varsa ψ fonksiyonu I da Lipschitz süreklidir denir (Tiel 1984).

Önerme 2.1.2. Lipschitz sürekli her fonksiyon süreklidir. Fakat bu önermenin tersi doğru olmayabilir (Tiel 1984).

Örnek 2.1.1. $f(w) = \sqrt{w}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreklidir. $\varepsilon > 0$ için, fonksiyon bir $P > 0$ Lipschitz sabiti için Lipschitz koşulunu sağlamasın. Her $w_1, w_2 \in [0,1]$ olmak üzere, $|\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2}| \leq P|w_1 - w_2|$ 'dir. $w_1 = 0$ ve $w_2 = \frac{1}{4P^2}$ alındığında,

$$|\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2}| = \frac{1}{2P} > \frac{1}{4P} = P|w_1 - w_2|$$

olacağından, fonksiyon $[0,1]$ aralığında Lipschitz sürekli değildir.

Tanım 2.1.5. (Mutlak Süreklilik) $\psi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\{(w_i, \lambda_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ $[a, b]$ 'nin ayrık açık alt aralıklarının bir koleksiyonu olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i - w_i| < \delta$$

olduğunda

$$\sum_{i=1}^n |\psi(\lambda_i) - \psi(w_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa ψ 'ye $[a, b]$ üzerinde mutlak süreklidir denir (Heil 2007).

Önerme 2.1.3. Mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir. Fakat bu önermenin tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 2.1.3. $\psi(w) = \begin{cases} 0, & w = 0 \text{ ise,} \\ w \sin(1/w) & w \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ve kapalı sınırlı aralık dolayısıyla düzgün
sürekli. Fakat mutlak sürekli değildir. $\sum_{k=1}^n w_k > 1$ olması şartıyla

$$w_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2} \text{ ve } \lambda_k = \frac{1}{2k\pi} \text{ alalım.}$$

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k - w_k| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{2k\pi} - \frac{1}{2k\pi + \pi/2} \right| < \delta$$

olması için $\delta > 0$ sayısı ne olursa olsun, $\varepsilon = 1/2$ seçilirse

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\psi(\lambda_k) - \psi(w_k)| &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{2k\pi} \sin(2k\pi) - \frac{1}{2k\pi + \pi/2} \sin(2k\pi + \pi/2) \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k\pi + \pi/2} = \sum_{k=1}^n w_k > 1 > \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla ψ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında mutlak sürekli değildir.

Önerme 2.1.4. Bir ψ fonksiyonu için aşağıdaki gerektirmeler doğrudur;

$$\psi - \text{Lipschitz} \Rightarrow \psi - \text{mutlak sürekli} \Rightarrow \psi - \text{düzgün sürekli} \Rightarrow \psi - \text{sürekli}$$

Tanım 2.1.6. (Konveks Küme) $\mathcal{L}$ bir lineer uzay $A \subset \mathcal{L}$ olsun. Eğer $w_1, w_2 \in A$ olmak üzere

$$W = \{k \in \mathcal{L} : k = tw_1 + (1-t)w_2, \ 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir (Kreyszig 1978).

W kümesi geometrik olarak uç noktaları w_1 ve w_2 olan doğru parçasıdır. Dolayısıyla konveks küme herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden ve boş olmayan kümedir.

Tanım 2.1.7 (Konveks Fonksiyon) $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $z, w \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\psi((1-t)z + tw) \leq (1-t)\psi(z) + t\psi(w)$$

şartı sağlanırsa ψ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer $z \neq w$ ve $t \in (0,1)$ için fonksiyon

$$\psi((1-t)z + tw) < (1-t)\psi(z) + t\psi(w)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona da kesin konveks fonksiyon denir (Pecaric *et al.* 1992).

Önerme 2.1.5. Konveks fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler doğrudur.

- i. Konveks iki fonksiyonun toplamı konvektir ve eğer fonksiyonlardan biri kesin konveks ise toplamı kesin konvektir
- ii. Konveks bir fonksiyonun skalerle çarpımı konvektir.
- iii. Bir fonksiyon bir aralıkta konveks ise aralığın kısıtlanmış bir alt aralığında da konvektir
- iv. $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) fonksiyon, $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan (artan) konveks bir fonksiyon ise $(\chi \circ \psi)$ bileşke fonksiyonu konveks (kesin konveks) fonksiyondur (Pecaric *et al.* 1992).

Örnek 2.1.4. $\mathbb{R}$ Üzerindeki Konveks Fonksiyon Örnekleri

- i. Herhangi $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ için $\psi(x) = w_1x + w_2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.

- ii. Herhangi $a \in \mathbb{R}$ için $\psi(w) = e^{aw}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- iii. $\zeta \geq 1$ için $|w|^\zeta$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur (Tiel 1984).

Teorem 2.1.1. $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $[a, b] \subset I^\circ$ (I 'nin içi) olsun. Öyleyse,

- i. $[a, b]$ kapalı aralığında fonksiyon Lipschitz koşulunu sağlar,
- ii. I° 'de fonksiyon süreklidir (Tiel 1984).

İspat. I° 'de $a \leq w_1 < w_2 \leq b$ noktalarını alalım.

$$\psi'_+(a) \leq \psi'_+(w_1) \leq \frac{\psi(w_1) - \psi(w_2)}{w_1 - w_2} \leq \psi'_-(w_2) \leq \psi'_-(b)$$

elde ederiz. $K = \max(|\psi'_+(a)|, |\psi'_-(b)|)$ kabul edilirse fonksiyon o zaman $[a, b]$ aralığında

$$|\psi(w_1) - \psi(w_2)| \leq K |w_1 - w_2|$$

Lipschitz koşulunu sağlar. Buradan $w_1 \rightarrow w_2$ iken $\psi(w_1) \rightarrow \psi(w_2)$ olur ve bu fonksiyonun sürekliliği demektir.

Teorem 2.1.2. I açık bir aralık ve $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. ψ 'nin I 'da konveks olması için gerek ve yeter şart $\psi''(w) \geq 0$ olmasıdır. Eğer $\psi''(w) > 0$ ise ψ kesin konvektir (Tiel 1984).

Tanım 2.1.8. ψ fonksiyonu $W \subseteq \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $w \in W$ için $|\psi(w)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa ψ fonksiyonuna W kümesinde sınırlı fonksiyon denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.9. ($\mathcal{L}_p[a, b]$ Uzayı) $p \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında tanımlı

$$\|\psi\|_p = \left[\int_a^b |\psi(\alpha)|^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayına Lebesgue uzayı veya p . dereceden integrallenebilir fonksiyonların uzayı denir ve $L_p[a, b]$ ile gösterilir (Soykan 2016).

$p = 1$ durumunda $\mathcal{L}_1[a, b]$ uzayı

$$\|\psi\|_1 = \left[\int_a^b |\psi(\alpha)| d\alpha \right] < \infty$$

normunu sağlayan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.1.10. (Gama Fonksiyonu) $\zeta > 0$ için

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty w^{\zeta-1} e^{-w} dw$$

ile tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu denir (Kannappan, 2009).

Gama fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz;

- i. $\Gamma(\zeta + 1) = \zeta \Gamma(\zeta) = \zeta!$ ($\zeta \in \mathbb{Z}^+$)
- ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Tanım 2.1.11. (Beta Fonksiyonu) $\tau > 0$, $\delta > 0$ için

$$B(\tau, \delta) = \int_0^1 \zeta^{\tau-1} (1-\zeta)^{\delta-1} d\zeta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu denir (Kannappan, (2009).

Beta fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $B(\tau, \delta) = B(\delta, \tau)$
- ii. $B(\tau, \delta) = \frac{\Gamma(\tau)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\tau + \delta)} \quad \tau, \delta > 0$

Tanım 2.1.12 (Birinci anlamda s –konveks Fonksiyon) $k, t \geq 0, k^s + t^s = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $z, w \in \mathbb{R}_+$ için $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\psi(kz + tw) \leq k^s \psi(z) + t^s \psi(w)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ψ 'ye birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse ψ fonksiyonu birinci anlamda s –konkav fonksiyon olarak adlandırılır (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.13 (İkinci anlamda s –konveks Fonksiyon) $k, t \geq 0, k + t = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $z, w \in \mathbb{R}_+$ için $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$\psi(kz + tw) \leq k^s \psi(z) + t^s \psi(w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ψ 'ye ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse ψ fonksiyonu ikinci anlamda s –konkav fonksiyon olarak adlandırılır (Dragomir and Pearce 2000).

Yukarıda verilen s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Tanım 2.1.14. (m –Konveks Fonksiyon) $\psi : [0, \varsigma] \rightarrow \mathbb{R}, \varsigma > 0$ olsun. Her $z, w \in [0, \varsigma], m \in [0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\psi(tz + m(1-t)w) \leq t\psi(z) + m(1-t)\psi(w)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ψ fonksiyonuna m -konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

$m = 1$ durumunda m -konveks fonksiyon, konveks fonksiyona indirgenir.

Tanım 2.1.15. ((s, m)-Konveks Fonksiyon) $\psi : [0, \varsigma] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\varsigma > 0$ olsun. Her $z, w \in [0, \varsigma]$, $(s, m) \in [0, 1]^2$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\psi(tz + m(1-t)w) \leq t^s \psi(z) + (1-t)^s \psi(w)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ψ fonksiyonuna (s, m) -konveks fonksiyon denir (Park 2011).

Tanım 2.1.16. (Güçlü Konveks Fonksiyon) $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $z, w \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\psi(tz + (1-t)w) \leq t\psi(z) + (1-t)\psi(w) - \mathcal{Z}t(1-t)(w-z)^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ψ fonksiyonuna $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü konveks fonksiyon denir (Polyak 1966).

Teorem 2.1.3. ψ fonksiyonunun (w_1, w_2) üzerinde ikinci mertebeden türevinin mevcut olduğu varsayılın. ψ fonksiyonunun (w_1, w_2) üzerinde $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü konveks olması için gerek ve yeter şart her $w \in (w_1, w_2)$ için $\psi''(w) \geq 2\mathcal{Z}$ olmasıdır (Roberts and Varberg 1973).

Güçlü konvekslik, kesin konvekslik ve konvekslik arasındaki ilişki şu şekilde bir ilişki vardır. Güçlü konveks fonksiyon aynı zamanda kesin konvektir ve dolayısıyla da konvektir. Ancak bu ifadenin tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin $\mathbb{R}$ 'de tanımlı $\psi(w) = w^2$ fonksiyonu güçlü konveks, kesin konveks ve aynı zamanda konveks bir fonksiyondur. $\mathbb{R}$ 'de tanımlı $\psi(w) = e^w$ fonksiyonu hem kesin konveks hem de konvektir; ancak güçlü konveks değildir. $\mathbb{R}$ 'de tanımlı $\psi(w) = w$ fonksiyonu konvektir; ancak ne güçlü konvektir ne de kesin konvektir (Roberts and Varberg 1973).

Tanım 2.1.17. (Güçlü s -Konveks) $\psi : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\mathcal{Z} > 0$ olmak üzere, her $z, w \in A$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\psi(tz + (1-t)w) \leq t^s \psi(z) + (1-t)^s \psi(w) - \mathcal{Z}t(1-t)(w-z)^2$$

şeklinde ifade edilen güçlü s -konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Polyak, 1966).

Tanım 2.1.18. (Güçlü m -Konveks) $\psi : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\mathcal{Z} > 0$, $m \in [0,1]$ olmak üzere, her $z, w \in A$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\psi(tz + m(1-t)w) \leq t\psi(z) + m(1-t)\psi(w) - \mathcal{Z}mt(1-t)(w-z)^2$$

şeklinde ifade edilen güçlü m -konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Lara et al. 2015)

Tanım 2.1.19. (Güçlü (s,m) -Konveks Fonksiyon) $\psi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\mathcal{Z} > 0$, her $z, w \in [0, +\infty)$, $(s, m) \in [0,1]^2$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\psi(tz + m(1-t)w) \leq t^s \psi(z) + (1-t)^s \psi(w) - \mathcal{Z}mt(1-t)(w-z)^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ψ fonksiyonuna güçlü (s, m) – konveks fonksiyon denir (Bracamonte et al. 2016).

2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu bölümde literatürde yer alan bazı önemli eşitsizliklere ve işlemlerde kullanılan yardımcı eşitsizliklere yer verilmiştir.

Teorem 2.2.1. (Hermite Hadamard Eşitsizliği) $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık, $w, z \in I$ ve $w < z$ olmak üzere $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\psi\left(\frac{w+z}{2}\right) \leq \frac{1}{(z-w)} \int_w^z \psi(x) dx \leq \frac{\psi(w) + \psi(z)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir and Pearce 2000).

Teorem 2.2.2. (Ostrowski Eşitsizliği) $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) açık aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in (w, z)$ için $|\psi'(x)| \leq M$ ise

$$\left| \psi(\kappa) - \frac{1}{(z-w)} \int_w^z \psi(x) dx \right| \leq M(z-w) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(\kappa - \frac{w+z}{2} \right)^2}{(z-w)^2} \right]$$

eşitsizliği her $\kappa \in [w, z]$ için sağlanır. $\frac{1}{4}$ sabiti elde edilebilecek en küçük sabittir (Dragomir 2012).

M. Ostrowski'nin 1938 yılında ele aldığı bu eşitsizlik, kapalı aralıkta sürekli bir ψ fonksiyonun integral ortalamasıyla fonksiyonun kendisi arasındaki sapmayı göstermektedir.

Teorem 2.2.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $h, \Omega > 1$ ve $\frac{1}{h} + \frac{1}{\Omega} = 1$

olsun. Eğer ψ , $|\psi|^h, \xi$ ve $|\xi|^\Omega$ $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |\psi(w)\xi(w)|dw \leq \left(\int_a^b |\psi(w)|^h dw \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_a^b |\xi(w)|^\Omega dw \right)^{\frac{1}{\Omega}}$$

eşitsizliği sağlanır (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.2.4. (Power Mean Eşitsizliği) $\Omega \geq 1$ olmak üzere ψ , ξ , $|\psi|$ ve $|\xi|^\Omega$ $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |\psi(w)\xi(w)|dw \leq \left(\int_a^b |\psi(w)|dw \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \left(\int_a^b |\psi(w)||\xi(w)|^\Omega dw \right)^{\frac{1}{\Omega}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.2.5. (Hölder-İşcan Eşitsizliği) $\Omega > 1$ ve $\frac{1}{h} + \frac{1}{\Omega} = 1$ olsun. ψ ve

χ , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|\psi|^h$ ve $|\chi|^\Omega$ $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \int_a^b |\psi(w)\chi(w)|dw \\ & \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-w) |\psi(w)|^h dw \right) \left(\int_a^b (b-w) |\chi(w)|^\Omega dw \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_a^b (w-a) |\psi(w)|^h dw \right) \left(\int_a^b (w-a) |\chi(w)|^\Omega dw \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur (İscan 2019).

Teorem 2.2.5. (Young eşitsizliği) $a, b > 0$ ve $\eta > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\mu} = 1$ ise

bu takdirde

$$ab \leq \frac{a^\eta}{\eta} + \frac{b^\mu}{\mu}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic 1970).



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Çalışmanın bu bölümünde ana sonuçlarımızı yakından ilgilendiren Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörleri tanımlanmıştır. Daha sonra Caputo-Fabrizio integral operatörleri yardımıyla elde edilen bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Tanım 3.1. $a < w < b$ ve $\psi \in L[a, b]$ olsun. $\zeta \geq 0$ ve $[\zeta]$, ζ 'nın tam değeri olmak üzere sırasıyla ζ . mertebeden sol ve sağ Riemann Liouville kesirli türev operatörleri

$${}^{RL}D_{a+}^{\zeta}\psi(w) = \frac{1}{\Gamma(n-\zeta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^w (w-t)^{n-\zeta-1} \psi(t) dt \quad (n=[\zeta]+1, w > a)$$

ve

$${}^{RL}D_{b-}^{\zeta}\psi(w) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\zeta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_w^b (t-w)^{n-\zeta-1} \psi(t) dt \quad (n=[\zeta]+1, b > w)$$

şeklinde tanımlanır (Samko *et al.* 1993).

Riemann Liouville kesirli türev operatörlerine karşılık gelen ζ . mertebeden sol ve sağ kesirli integral operatörler

$$(J_{a+}^{\zeta}\psi)(w) = \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \int_a^w (w-t)^{\zeta-1} \psi(t) dt \quad w > a$$

ve

$$(J_{b-}^{\zeta}\psi)(w) = \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \int_w^b (t-w)^{\zeta-1} \psi(t) dt \quad w < b$$

şeklindedir (Samko *et al.* 1993).

Riemann Liouville kesirli integraller $\zeta = 1$ durumunda klasik integrale indirgenir ve ayrıca $\zeta = 0$ durumunda $J_{a+}^0 = J_{b-}^0 = \psi(\omega)$ 'dir.

Teorem 3.1. Her $w \in [a, b]$ ve $\psi \in \mathcal{L}_p(a, b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ olmak üzere, eğer $\zeta, \beta > 0$ $\zeta + \beta \geq 1$ için Riemann-Liouville kesirli integraller

$$(J_{a+}^{\zeta} J_{a+}^{\beta} \psi)(w) = (J_{a+}^{\zeta+\beta} \psi)(w) \text{ ve } (J_{b-}^{\zeta} J_{b-}^{\beta} \psi)(w) = (J_{b-}^{\zeta+\beta} \psi)(w)$$

eşitliklerini sağlar (Samko *et al.* 1993).

Riemann-Liouville kesirli türevinin tanımına göre sabitin türevi sıfır olmamaktadır. 1967 yılında M. Caputo bu eksikliği gidermek, ayrıca kesirli mertebeden türevin başlangıç koşullarını, tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları cinsinden ifade edilebilir hale getirmek adına Caputo kesirli türev operatörünü sunmuştur.

Tanım 3.2. $\psi \in \mathcal{L}_p(a, b)$ ve $a < w < b$ olsun. Bu durumda $\zeta > 0$, $[\zeta]$ ζ 'nın tam değeri olmak üzere $n = [\zeta] + 1$ için sırasıyla ζ . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevleri

$${}^c D_{a+}^{\zeta} \psi(w) = \frac{1}{\Gamma(n - \zeta)} \int_a^w \frac{\psi^{(n)}(t)}{(w - t)^{\zeta + 1 - n}} dt \quad w > a$$

ve

$${}^c D_{b-}^{\zeta} \psi(w) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \zeta)} \int_w^b \frac{\psi^{(n)}(t)}{(t - w)^{\zeta + 1 - n}} dt \quad w < b$$

şeklindedir (Podlubny 1998)

Caputo'nun tanımında kullanılan $(w - t)^{\zeta + 1 - n}$ çekirdeği, $w = t$ noktasında tekil olduğu için Caputo ve Fabrizio 2015 yılında exponential fonksiyon kullanarak yeni ζ . mertebeden sol kesirli türev tanımını, Abdeljawad ve Baleanu 2017

yılında ζ . mertebeden sağ Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımını ve ilgili ζ . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integrallerini vermişlerdir (Atangana and Baleanu 2016; Abdeljawad and Baleanu 2017).

Tanım 3.3. $\psi \in \mathcal{L}(a, b)$ ve $a < w < b$ olsun. Bu durumda $\zeta \in (0, 1)$ olmak üzere ζ . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli türevleri

$${}^{CF}_a D^\zeta \psi(w) = \frac{\mathcal{M}(\zeta)}{1-\zeta} \int_a^w \exp\left(\frac{-\zeta(w-t)}{1-\zeta}\right) \psi'(t) dt \quad (w > a)$$

ve

$${}^{CF}_b D^\zeta \psi(w) = -\frac{\mathcal{M}(\zeta)}{1-\zeta} \int_w^b \exp\left(\frac{-\zeta(t-w)}{1-\zeta}\right) \psi'(t) dt \quad (w < b)$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathcal{M}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonu olup $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}(1) = 1$ şeklindedir (Atangana and Baleanu 2016; Abdeljawad and Baleanu 2017).

Tanım 3.4. $\psi \in \mathcal{L}(a, b)$ ve $a < w < b$ olsun. Bu durumda $\zeta \in [0, 1]$ olmak üzere ζ . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integralleri

$$({}^{CF}_a I^\zeta \psi)(w) = \frac{1-\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \psi(w) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \int_a^w \psi(t) dt \quad (w > a)$$

ve

$$({}^{CF}_b I^\zeta \psi)(w) = \frac{1-\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \psi(w) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \int_w^b \psi(t) dt \quad (b > w)$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathcal{B}(\zeta) > 0$ normalleştirme fonksiyonu olup $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}(1) = 1$ şeklindedir (Caputo and Fabrizio 2015).

3.1 Caputo- Fabrizio Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

2022 yılında konveks fonksiyonlar için Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörlerini içeren Ostrowski tipli eşitsizlikler Sahoo ve arkadaşları tarafından elde edilmiştir (Sahoo *et al.* 2022).

Lemma 3.1.1. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\psi \in L[w, z]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{z+w}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(w) + \frac{z+w}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(z) \right] - \psi\left(\frac{z+w}{2}\right) \\ &= \frac{z-w}{4} \left\{ \int_0^1 t \psi' \left(\frac{t}{2} w + \frac{2-t}{2} z \right) d\omega - \int_0^1 t \psi' \left(\frac{t}{2} z + \frac{2-t}{2} w \right) d\omega \right\} \\ &+ \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

Teorem 3.1.1. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\psi' \in L[w, z]$ olsun. Eğer $|\psi'|$ konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{z+w}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(w) + \frac{z+w}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(z) \right] - \psi\left(\frac{z+w}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{z-w}{4} \left\{ \frac{|\psi'(w)| + |\psi'(z)|}{2} \right\} + \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

Teorem 3.1.2. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\psi' \in L[w, z]$ olsun. Eğer $|\psi'|^\Omega$ konveks

fonksiyon ve $\Omega > 1$, $\frac{1}{h} + \frac{1}{\Omega} = 1$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{z+w}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{z-w}{4} \left\{ \left(\frac{1}{h+1} \right)^{\frac{1}{h}} \right. \\
& \quad \times \left. \left[\left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{4} + \frac{3|\psi'(z)|^\Omega}{4} \right)^{\frac{1}{\Omega}} + \left(\frac{3|\psi'(w)|^\Omega}{4} + \frac{|\psi'(z)|^\Omega}{4} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right] \right\} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

Teorem 3.1.3. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\psi' \in L[w, z]$ olsun. Eğer $|\psi'|^\Omega$ konveks fonksiyon ve $\Omega > 1$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{z+w}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{z-w}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \left[\left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(z)|^\Omega}{3} \right)^{\frac{1}{\Omega}} + \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{3} + \frac{|\psi'(z)|^\Omega}{6} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right] \right\} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

Teorem 3.1.4. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\psi' \in L[w, z]$ olsun. Eğer $|\psi'|^\eta$ konveks fonksiyon, $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta} = 1$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{z+w}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left[\frac{2}{\mu(\mu+1)} + \frac{|\psi'(w)|^\eta + |\psi'(z)|^\eta}{\eta} \right] \quad (3.5)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

Teorem 3.1.5. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon $w < z$ ve $\psi' \in L[w, z]$ olsun. Eğer $|\psi'|^\Omega$ konveks fonksiyon ve $\Omega > 1$, $\frac{1}{h} + \frac{1}{\Omega} = 1$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[{}^{CF}_{\frac{z+w}{2}-} I^\zeta \psi(w) + {}^{CF}_{\frac{z+w}{2}+} I^\zeta \psi(z) \right] - \psi\left(\frac{z+w}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{z-w}{4} \left\{ \left(\frac{1}{(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega + 5|\psi'(z)|^\Omega}{12} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(z)|^\Omega}{3} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega + 5|\psi'(w)|^\Omega}{12} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(w)|^\Omega}{3} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right\} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde başlangıçta güçlü (s, m) -konveks fonksiyonlar için Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörler içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, daha sonra güçlü s -konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler ile ilgili yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Lemma 4.1. $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $w, z \in I^\circ$ ve $w < z$ için $\psi' \in L[w, z]$ olsun. O halde $\kappa \in [w, z]$, $\zeta \in (0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} & {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \\ & - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \\ & = \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\int_0^1 (tz + (1-t)w) \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 (tw + (1-t)z) \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) dt \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $\Upsilon_1 = \int_0^1 (tz + (1-t)w) \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) dt$

ve $\Upsilon_2 = \int_0^1 (tw + (1-t)z) \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) dt$ olsun. Υ_1 ve Υ_2 toplanıp kısmi

integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\int_0^1 (tz + (1-t)w) \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 (tw + (1-t)z) \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z\psi(w) - w\psi\left(\frac{w+z}{2}\right)}{w-z} \right) + \frac{2\zeta(z-w)}{\mathcal{B}(\zeta)} \int_0^1 \psi\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) dt \\
&\quad + \frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{w\psi(z) - z\psi\left(\frac{w+z}{2}\right)}{z-w} \right) + \frac{2\zeta(z-w)}{\mathcal{B}(\zeta)} \int_0^1 \psi\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) dt
\end{aligned}$$

bulunur. İntegrallere değişken değişimi yapıldıktan $\frac{2(1-\zeta)}{\mathcal{B}(\zeta)}\psi(\kappa)$ eklenerek istenilen sonuç bulunur.

Teorem 4.1. $\psi:[w,z] \subset [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (w,z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\psi' \in L[w,z]$ ve $m,s \in (0,1]$ olsun. Bu durumda her $\kappa \in [w,z]$ ve $t \in [0,1]$ için $|\psi'|$ fonksiyonu $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü (s,m) -konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{CF}I_w^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}I_z^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
&\leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{2^{-s}}{s^2+3s+2} \right) (w|\psi'(w)| + z|\psi'(z)|) \right. \\
&\quad \left. + m \left(\frac{2^{-s}+2s}{s^2+3s+2} \right) \left(w \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right| + z \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right| \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{m\mathcal{Z}}{16} \left(w \left| \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 \right| + z \left| \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right| \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2^{-s}}{2+s} \right) (z|\psi'(w)| + w|\psi'(z)|) \right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$+m\left(\frac{2^{-s}(2^{s+2}-s-3)}{s^2+3s+2}\right)\left(z\left|\psi'\left(\frac{z}{m}\right)\right|+w\left|\psi'\left(\frac{w}{m}\right)\right|\right) \\ -\frac{5m\mathcal{Z}}{48}\left[z\left|\left(\frac{z}{m}-w\right)^2\right|+w\left|\left(z-\frac{w}{m}\right)^2\right|\right]$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in (0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (4.1) eşitliğine mutlak değer özelliği uygulanıp, sonrasında $|\psi'|$ fonksiyonunun güçlü (s,m) -konveksliği kullanılarak gerekli integral işlemler yapılırsa

$$\left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\ \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\int_0^1 (tz + (1-t)w) \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) \right| dt \right. \\ \left. + \int_0^1 (tw + (1-t)z) \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) \right| dt \right] \\ \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\int_0^1 (tz + (1-t)w) \left(\left(\frac{1-t}{2}\right)^s |\psi'(z)| + m \left(\frac{1+t}{2}\right)^s \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right| \right. \right. \\ \left. \left. - m\mathcal{Z}\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(z - \frac{w}{m}\right)^2 \right) dt \right. \\ \left. + \int_0^1 (tw + (1-t)z) \left(\left(\frac{1-t}{2}\right)^s |\psi'(w)| + m \left(\frac{1+t}{2}\right)^s \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right| \right. \right. \\ \left. \left. - m\mathcal{Z}\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{z}{m} - w\right)^2 \right) dt \right] \\ = \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{2^{-s}}{s^2+3s+2} \right) (w|\psi'(w)| + z|\psi'(z)|) \right. \\ \left. + m \left(\frac{2^{-s}+2s}{s^2+3s+2} \right) \left(w\left|\psi'\left(\frac{z}{m}\right)\right| + z\left|\psi'\left(\frac{w}{m}\right)\right| \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m\mathcal{Z}}{16} \left(w \left| \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 \right| + z \left| \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right| \right) \\
& + \left(\frac{2^{-s}}{2+s} \right) \left(z |\psi'(w)| + w |\psi'(z)| \right) \\
& + m \left(\frac{2^{-s} (2^{s+2} - s - 3)}{s^2 + 3s + 2} \right) \left(z \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right| + w \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right| \right) \\
& - \frac{5m\mathcal{Z}}{48} \left(z \left| \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 \right| + w \left| \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1. Eğer teoremden $s = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w |\psi'(w)| + z |\psi'(z)|}{12} \right. \\
& \quad + \frac{5m}{12} \left(w \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right| + z \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right| \right) \\
& \quad - \frac{m\mathcal{Z}}{16} \left(w \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 + z \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right) \\
& \quad + \frac{(z |\psi'(w)| + w |\psi'(z)|)}{6} \\
& \quad + \frac{m}{3} \left(z \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right| + w \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right| \right) \\
& \quad \left. - \frac{5m\mathcal{Z}}{48} \left(z \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 + w \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2. Eğer teoremden $s = 1$, $\mathcal{Z} = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w|\psi'(w)| + z|\psi'(z)|}{12} \right. \\
& \quad + \frac{5m}{12} \left(w \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right| + z \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right| \right) \\
& \quad + \frac{(z|\psi'(w)| + w|\psi'(z)|)}{6} \\
& \quad \left. + \frac{m}{3} \left(z \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right| + w \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right| \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3. Eğer teoremden $m = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{2^{-s}}{s^2 + 3s + 2} \right) (w|\psi'(w)| + z|\psi'(z)|) \right. \\
& \quad + \left(\frac{2^{-s} + 2s}{s^2 + 3s + 2} \right) (w|\psi'(z)| + z|\psi'(w)|) \\
& \quad - \frac{\mathcal{Z}}{16} (w(z-w)^2 + z(z-w)^2) \\
& \quad + \left(\frac{2^{-s}}{2+s} \right) (z|\psi'(w)| + w|\psi'(z)|) \\
& \quad + \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{s^2 + 3s + 2} \right) (z|\psi'(z)| + w|\psi'(w)|) \\
& \quad \left. - \frac{5\mathcal{Z}}{48} (z|(z-w)^2| + w|(z-w)^2|) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4. Eğer teoremde $m = 1$, $\mathcal{Z} = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{2^{-s}}{s^2 + 3s + 2} \right) (w|\psi'(w)| + z|\psi'(z)|) \right. \\
& \quad + \left(\frac{2^{-s} + 2s}{s^2 + 3s + 2} \right) (w|\psi'(z)| + z|\psi'(w)|) \\
& \quad + \left(\frac{2^{-s}}{2+s} \right) (z|\psi'(w)| + w|\psi'(z)|) \\
& \quad \left. + \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{s^2 + 3s + 2} \right) (z|\psi'(z)| + w|\psi'(w)|) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.5. Eğer teoremde $m = 1$, $s = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{5(w|\psi'(w)| + z|\psi'(z)|)}{12} + \right. \\
& \quad + \frac{(w|\psi'(z)| + z|\psi'(w)|)}{6} \\
& \quad + \frac{(z|\psi'(w)| + w|\psi'(z)|)}{6} \\
& \quad - \frac{\mathcal{Z}}{16} (w(z-w)^2 + z(z-w)^2) \\
& \quad \left. - \frac{5\mathcal{Z}}{48} (z|(z-w)^2| + w|(z-w)^2|) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.6. Eğer teoremda $m = 1$, $s = 1$ ve $\mathcal{Z} = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\ & \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{5(w|\psi'(w)| + z|\psi'(z)|)}{12} \right. \\ & \quad \left. + \frac{7(w|\psi'(z)| + z|\psi'(w)|)}{12} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2. $\psi : [w, z] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\psi' \in L[w, z]$ ve $m, s \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda her $\kappa \in [w, z]$ ve $t \in [0, 1]$ için $|\psi'|^\Omega$ fonksiyonu $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü (s, m) -konveks fonksiyon ve $\Omega > 1$, $\frac{1}{h} + \frac{1}{\Omega} = 1$ olmak üzere olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\ & \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z^{h+1} - w^{h+1}}{(z-w)(h+1)} \right)^{\frac{1}{h}} \\ & \quad \times \left[\left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(z)|^\Omega + m \left(\frac{2-2^{-s}}{s+1} \right) \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{m\mathcal{Z}}{6} \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} + \left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(w)|^\Omega \right. \right. \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$+m\left(\frac{2-2^{-s}}{s+1}\right)\left|\psi'\left(\frac{z}{m}\right)\right|^{\Omega}-\frac{m\zeta}{6}\left(w-\frac{z}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{\Omega}}\Bigg]$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in (0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (4.1) eşitliğinden ve integraller için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left| {}^{CF}_w I^{\zeta} \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^{\zeta} \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\ & \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\int_0^1 (tz + (1-t)w) \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) \right| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 (tw + (1-t)z) \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) \right| dt \right] \\ & \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\int_0^1 |tz + (1-t)w|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) \right|^{\Omega} dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 |tw + (1-t)z|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) \right|^{\Omega} dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right] \end{aligned}$$

yazılır. Hipotezden $|\psi'|^{\Omega}$ fonksiyonu güçlü (s, m) -konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| {}^{CF}_w I^{\zeta} \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^{\zeta} \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\ & \leq \left(\int_0^1 |tz + (1-t)w|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left| \psi'(z) \right|^{\Omega} + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^{\Omega} \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m\mathcal{Z}\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(z-\frac{w}{m}\right)^2 dt \Bigg)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\int_0^1 |tw + (1-t)z|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \times \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left| \psi'(w) \right|^\Omega + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right|^\Omega \right. \right. \\
& \left. \left. - m\mathcal{Z}\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(w-\frac{z}{m}\right)^2 dt \right)^{\frac{1}{\Omega}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve gerekli integral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Sonuç 4.7. Eğer teoremden $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z^{h+1} - w^{h+1}}{(z-w)(h+1)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \times \left[\left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{4} + \frac{3m}{4} \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{m\mathcal{Z}}{6} \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} + \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3m}{4} \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right|^\Omega - \frac{m\mathcal{Z}}{6} \left(w - \frac{z}{m} \right)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.8. Eğer teoremden $s=1$, $\mathcal{Z}=0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z^{\hbar+1} - w^{\hbar+1}}{(z-w)(\hbar+1)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{4} + \frac{3m}{4} \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{4} + \frac{3m}{4} \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.9. Eğer teoremde $m = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z^{\hbar+1} - w^{\hbar+1}}{(z-w)(\hbar+1)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \\
& \quad \times \left[\left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(z)|^\Omega + \left(\frac{2-2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(w)|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\mathcal{Z}}{6} (z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} + \left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(w)|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{2-2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(z)|^\Omega - \frac{\mathcal{Z}}{6} (w-z)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.10. Eğer teoremden $m = 1$, $\mathcal{Z} = 0$ alınır

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z^{h+1} - w^{h+1}}{(z-w)(h+1)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left[\left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(z)|^\Omega + \left(\frac{2-2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(w)|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(w)|^\Omega + \left(\frac{2-2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(z)|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.11. Eğer teoremden $m = 1$, $s = 1$ alınır

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z^{h+1} - w^{h+1}}{(z-w)(h+1)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{4} + \frac{3|\psi'(w)|^\Omega}{4} - \frac{\mathcal{Z}}{6}(z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{4} + \frac{3|\psi'(z)|^\Omega}{4} - \frac{\mathcal{Z}}{6}(z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.12. Eğer teoremden $m = 1$, $s = 1$ ve $\mathcal{Z} = 0$ alınır

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z^{h+1} - w^{h+1}}{(z-w)(h+1)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{4} + \frac{3|\psi'(w)|^\Omega}{4} \right)^{\frac{1}{\Omega}} + \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{4} + \frac{3|\psi'(z)|^\Omega}{4} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3. $\psi : [w, z] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\psi' \in L[w, z]$ ve $m, s \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda her $\kappa \in [w, z]$ ve $t \in [0, 1]$ için $|\psi'|^\Omega$ fonksiyonu $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü (s, m) -konveks fonksiyon ve $\Omega > 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \times \left[\left(z |\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{1}{2(s+1)(s+2)} \right) + mz \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega \left(\frac{2^{-s} + 2s}{(s+1)(s+2)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{mz\mathcal{Z}}{16} \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 + w |\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + mw \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} \right) - \frac{5mw\mathcal{Z}}{48} \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(w |\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{1}{2(s+1)(s+2)} \right) + mw \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega \left(\frac{2^{-s} + 2s}{(s+1)(s+2)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{mw\mathcal{Z}}{16} \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 + z |\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} \right) \right. \\
& \quad \left. + mz \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega \left(\frac{2^{-s} (2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} \right) - \frac{5mz\mathcal{Z}}{48} \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in (0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (4.1) eşitliğinden ve Power-Mean eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\int_0^1 (tz + (1-t)w) \left| \psi' \left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w \right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 (tw + (1-t)z) \left| \psi' \left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z \right) \right| dt \right] \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\int_0^1 |tz + (1-t)w| dt \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 |tz + (1-t)w| \left| \psi' \left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w \right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 |tw + (1-t)z| dt \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \times \left. \left(\int_0^1 |tw + (1-t)z| \left| \psi' \left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z \right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden $|\psi'|^\Omega$ fonksiyonunun güçlü (s, m) -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \left(\frac{z+w}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \times \left[\left(\int_0^1 (tz + (1-t)w) \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - m\mathcal{Z}\left(\frac{1-t}{2}\right) \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right|^\Omega \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - m\mathcal{Z}\left(\frac{1-t}{2}\right) \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(w - \frac{z}{m} \right)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Gerekli integral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Sonuç 4.13. Eğer teoremden $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{z|\psi'(z)|^\Omega}{12} + \frac{5mz}{12} \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega - \frac{mz\mathcal{Z}}{16} \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 + \frac{w|\psi'(z)|^\Omega}{6} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{mw}{3} \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega - \frac{5mw\mathcal{Z}}{48} \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{w|\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{5mw}{12} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega - \frac{mw\mathcal{Z}}{16} \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 \right. \\
& \left. + \frac{z|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{mz}{3} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega - \frac{5mz\mathcal{Z}}{48} \left(\frac{z}{m} - w \right)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.14. Eğer teoremden $s = 1$, $\mathcal{Z} = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \times \left[\left(\frac{z|\psi'(z)|^\Omega}{12} + \frac{5mz}{12} \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right|^\Omega + \frac{w|\psi'(z)|^\Omega}{6} + \frac{mw}{3} \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{w|\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{5mw}{12} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega + \frac{z|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{mz}{3} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.15. Eğer teoremden $m = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
&\quad \times \left[\left(z|\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{1}{2(s+1)(s+2)} \right) + z|\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}+2s}{(s+1)(s+2)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{z\mathcal{Z}}{16} (z-w)^2 + w|\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w|\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2}-s-3)}{(s+1)(s+2)} \right) - \frac{5w\mathcal{Z}}{48} (z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
&\quad \left. + \left(w|\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{1}{2(s+1)(s+2)} \right) + w|\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}+2s}{(s+1)(s+2)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{w\mathcal{Z}}{16} (z-w)^2 + z|\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + z|\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2}-s-3)}{(s+1)(s+2)} \right) - \frac{5z\mathcal{Z}}{48} (z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.16. Eğer teoremden $m=1$, $\mathcal{Z}=0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
&\leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
&\quad \times \left[\left(z|\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{1}{2(s+1)(s+2)} \right) + z|\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}+2s}{(s+1)(s+2)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w|\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} \right) + w|\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2}-s-3)}{(s+1)(s+2)} \right) \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(w |\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{1}{2(s+1)(s+2)} \right) + w |\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{2^{-s} + 2s}{(s+1)(s+2)} \right) \right. \\
& \left. + z |\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} \right) + z |\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} \right) \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.17. Eğer teoremden $m = 1$, $s = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \times \left[\left(\frac{z |\psi'(z)|^\Omega}{12} + \frac{5z}{12} |\psi'(w)|^\Omega - \frac{z\mathcal{Z}}{16} (z-w)^2 + \frac{w |\psi'(z)|^\Omega}{6} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{w}{3} |\psi'(w)|^\Omega - \frac{5w\mathcal{Z}}{48} (z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{w |\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{5w}{12} |\psi'(z)|^\Omega - \frac{w\mathcal{Z}}{16} (z-w)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{z |\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{z}{3} |\psi'(z)|^\Omega - \frac{5z\mathcal{Z}}{48} (z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.18. Eğer teoremden $m = 1$, $s = 1$ ve $\mathcal{Z} = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left(\frac{z+w}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{z|\psi'(z)|^\Omega + 5z|\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{w|\psi'(z)|^\Omega + 2w|\psi'(w)|^\Omega}{6} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{5w|\psi'(z)|^\Omega + w|\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{2z|\psi'(z)|^\Omega + z|\psi'(w)|^\Omega}{6} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.4. $\psi : [w, z] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\psi' \in L[w, z]$ ve $m, s \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda her $\kappa \in [w, z]$ ve $t \in [0, 1]$ için $|\psi'|^\eta$ fonksiyonu $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü (s, m) -konveks fonksiyon ve $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{2}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\eta} \left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) |\psi'(z)|^\eta + m \left(\frac{2-2^{-s}}{s+1} \right) \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\eta \right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m\mathcal{Z}}{6}\left(z-\frac{w}{m}\right)^2\Bigg)+\frac{1}{\eta}\left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1}\right)\left|\psi'(w)\right|^\eta\right. \\
& \left.+m\left(\frac{2-2^{-s}}{s+1}\right)\left|\psi'\left(\frac{z}{m}\right)\right|^\Omega-\frac{m\mathcal{Z}}{6}\left(w-\frac{z}{m}\right)^2\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in (0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (4.1) eşitliğinden ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\int_0^1 \left| tz + (1-t)w \right| \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left| tw + (1-t)z \right| \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) \right| dt \right] \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{1}{\mu} \left(\int_0^1 |tz + (1-t)w|^\mu dt \right) + \frac{1}{\eta} \left(\int_0^1 \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) \right|^\eta dt \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\mu} \left(\int_0^1 |tw + (1-t)z|^\mu dt \right) + \frac{1}{\eta} \left(\int_0^1 \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) \right|^\eta dt \right) \right]
\end{aligned}$$

yazılır ve güçlü (s, m) – konvekslikten

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\eta} \left(\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \left| \psi'(z) \right|^\eta + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\eta \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m\mathcal{Z}\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(z-\frac{w}{m}\right)^2 dt \Bigg) \\
& + \frac{1}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) \\
& + \frac{1}{\eta} \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\eta + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right|^\eta \right. \right. \\
& \left. \left. - m\mathcal{Z}\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(w-\frac{z}{m}\right)^2 dt \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Gerekli integral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Sonuç 4.19. Eğer teoremden $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{2}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) \right. \\
& \quad + \frac{1}{\eta} \left(\frac{|\psi'(z)|^\eta}{4} + \frac{3m}{4} \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\eta - \frac{m\mathcal{Z}}{6} \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{\eta} \left(\frac{|\psi'(w)|^\eta}{4} + \frac{3m}{4} \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right|^\eta - \frac{m\mathcal{Z}}{6} \left(w - \frac{z}{m} \right)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.20. Eğer teoremden $s=1$, $\mathcal{Z}=0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{2}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) + \frac{1}{\eta} \left(\frac{|\psi'(z)|^\eta}{4} + \frac{3m}{4} \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right|^\eta + \frac{|\psi'(w)|^\eta}{4} + \frac{3m}{4} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\eta \right) \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.21. Eğer teoremden $m = 1$ alınırsa

$$\left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{2}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) + \frac{1}{\eta} \left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) + \left(\frac{2-2^{-s}}{s+1} \right) \right) (|\psi'(w)|^\eta + |\psi'(z)|^\eta) - \frac{\mathcal{Z}}{3} (z-w)^2 \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.22. Eğer teoremden $m = 1, \mathcal{Z} = 0$ alınırsa

$$\left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{2}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) + \frac{1}{\eta} \left(\left(\frac{2^{-s}}{s+1} \right) + \left(\frac{2-2^{-s}}{s+1} \right) \right) (|\psi'(w)|^\eta + |\psi'(z)|^\eta) \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.23. Eğer teoremden $m=1$, $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\ & \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{2}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\eta} \left(\left(|\psi'(w)|^\eta + |\psi'(z)|^\eta \right) - \frac{\zeta}{3} (z-w)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.24. Eğer teoremden $m=1$, $s=1$ ve $\zeta=0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\ & \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{2}{\mu} \left(\frac{z^{\mu+1} - w^{\mu+1}}{(z-w)(\mu+1)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\eta} \left(\left(|\psi'(w)|^\eta + |\psi'(z)|^\eta \right) \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.5. $\psi : [w, z] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (w, z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\psi' \in L[w, z]$ ve $m, s \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda her $\kappa \in [w, z]$ ve $t \in [0, 1]$ için $|\psi'|^\Omega$ fonksiyonu $\zeta > 0$ modülü ile güçlü (s, m) -konveks fonksiyon ve $\Omega > 1$, $\frac{1}{h} + \frac{1}{\Omega} = 1$ olmak üzere olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1}(w(1+h) - z(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \right. \\
& \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} \left| \psi'(z) \right|^\Omega + \frac{m2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega - \frac{5m\mathcal{Z}}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1}(z(1+h) - w(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+1)(s+2)} \left| \psi'(z) \right|^\Omega + \frac{m(2^{-s} + 2s)}{(s+1)(s+2)} \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega - \frac{m\mathcal{Z}}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1}(z(1+h) - w(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} \left| \psi'(w) \right|^\Omega + \frac{m2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right|^\Omega - \frac{5m\mathcal{Z}}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1}(w(1+h) - z(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left. \left(\frac{2^{-s}}{(s+1)(s+2)} \left| \psi'(w) \right|^\Omega + \frac{m(2^{-s} + 2s)}{(s+1)(s+2)} \left| \psi'\left(\frac{z}{m}\right) \right|^\Omega - \frac{m\mathcal{Z}}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in (0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normleştirme fonksiyonudur.

İspat: (4.1) eşitliğinden ve Hölder-İşcan eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\int_0^1 (tz + (1-t)w) \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 (tw + (1-t)z) \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) \right| dt \right] \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |tz + (1-t)w|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 (1-t) \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 t |tz + (1-t)w|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}z + \frac{1+t}{2}w\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 (1-t) |tw + (1-t)z|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 (1-t) \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 t |tw + (1-t)z|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{1-t}{2}w + \frac{1+t}{2}z\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır ve $|\psi'|^\Omega$ fonksiyonunun güçlü (s, m) – konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |tz + (1-t)w|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-t) \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi'\left(\frac{w}{m}\right) \right|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - m \mathcal{Z} \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 t |tz + (1-t)w|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \times \left(\int_0^1 t \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - m \mathcal{Z} \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(z - \frac{w}{m} \right)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\int_0^1 (1-t) |tw + (1-t)z|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \times \left(\int_0^1 (1-t) \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - m \mathcal{Z} \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(w - \frac{z}{m} \right)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\int_0^1 t |tw + (1-t)z|^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \times \left(\int_0^1 t \left(\left(\frac{1-t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega + m \left(\frac{1+t}{2} \right)^s \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - m \mathcal{Z} \left(\frac{1-t}{2} \right) \left(\frac{1+t}{2} \right) \left(w - \frac{z}{m} \right)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Son eşitsizlikte belirtilen integraller hesaplandıktan sonra ispat tamamlanır.

Sonuç 4.25. Eğer teoremden $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1}(w(1+h) - z(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{6} + \frac{m}{3} \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right|^\Omega - \frac{5m\mathcal{Z}}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1} (z(1+\hbar) - w(2+\hbar))}{(z-w)^2 (\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \\
& \times \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{12} + \frac{5m}{12} \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right|^\Omega - \frac{m\mathcal{Z}}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1} (z(1+\hbar) - w(2+\hbar))}{(z-w)^2 (\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \\
& \times \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{m}{3} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega - \frac{5m\mathcal{Z}}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1} (w(1+\hbar) - z(2+\hbar))}{(z-w)^2 (\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \\
& \times \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{5m}{12} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega - \frac{m\mathcal{Z}}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.26. Eğer teoremda $s=1$ ve $\mathcal{Z}=0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1} (w(1+\hbar) - z(2+\hbar))}{(z-w)^2 (\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{6} + \frac{m}{3} \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1} (z(1+\hbar) - w(2+\hbar))}{(z-w)^2 (\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{12} + \frac{5m}{12} \left| \psi' \left(\frac{w}{m} \right) \right|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1}(z(1+h) - w(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \times \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{m}{3} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1}(w(1+h) - z(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \times \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{5m}{12} \left| \psi' \left(\frac{z}{m} \right) \right|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.27. Eğer teoremden $m = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1}(w(1+h) - z(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \right. \\
& \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} |\psi'(z)|^\Omega + \frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} |\psi'(w)|^\Omega - \frac{5\mathcal{Z}}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1}(z(1+h) - w(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+1)(s+2)} |\psi'(z)|^\Omega + \frac{(2^{-s} + 2s)}{(s+1)(s+2)} |\psi'(w)|^\Omega - \frac{\mathcal{Z}}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1}(z(1+h) - w(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} |\psi'(w)|^\Omega + \frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} |\psi'(z)|^\Omega - \frac{5\mathcal{Z}}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1}(w(1+h) - z(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \right]
\end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{2^{-s}}{(s+1)(s+2)} |\psi'(w)|^\Omega + \frac{(2^{-s} + 2s)}{(s+1)(s+2)} |\psi'(z)|^\Omega - \frac{\mathcal{Z}}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.28. Eğer teoremden $m = 1$ ve $\mathcal{Z} = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\ & \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \left[\left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1}(w(1+h) - z(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \right. \\ & \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} |\psi'(z)|^\Omega + \frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} |\psi'(w)|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\ & \quad + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1}(z(1+h) - w(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \\ & \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+1)(s+2)} |\psi'(z)|^\Omega + \frac{(2^{-s} + 2s)}{(s+1)(s+2)} |\psi'(w)|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\ & \quad + \left(\frac{w^{h+2} + z^{h+1}(z(1+h) - w(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \\ & \quad \times \left(\frac{2^{-s}}{(s+2)} |\psi'(w)|^\Omega + \frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{(s+1)(s+2)} |\psi'(z)|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\ & \quad + \left(\frac{z^{h+2} + w^{h+1}(w(1+h) - z(2+h))}{(z-w)^2(h+1)(h+2)} \right)^{\frac{1}{h}} \\ & \quad \times \left. \left(\frac{2^{-s}}{(s+1)(s+2)} |\psi'(w)|^\Omega + \frac{(2^{-s} + 2s)}{(s+1)(s+2)} |\psi'(z)|^\Omega \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.29. Eğer teoremden $m = 1$ ve $s = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{z^{\hbar+2} + w^{\hbar+1}(w(1+\hbar) - z(2+\hbar))}{(z-w)^2(\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(w)|^\Omega}{3} - \frac{5\mathcal{Z}}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad + \left(\frac{w^{\hbar+2} + z^{\hbar+1}(z(1+\hbar) - w(2+\hbar))}{(z-w)^2(\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{12} + \frac{5|\psi'(w)|^\Omega}{12} - \frac{\mathcal{Z}}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{w^{\hbar+2} + z^{\hbar+1}(z(1+\hbar) - w(2+\hbar))}{(z-w)^2(\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(z)|^\Omega}{3} - \frac{5\mathcal{Z}}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{z^{\hbar+2} + w^{\hbar+1}(w(1+\hbar) - z(2+\hbar))}{(z-w)^2(\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{5|\psi'(z)|^\Omega}{12} - \frac{\mathcal{Z}}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.30. Eğer teoremden $m = 1$, $s = 1$ ve $\mathcal{Z} = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{CF}_w I^\zeta \psi(\kappa) + {}^{CF}_z I^\zeta \psi(\kappa) + \frac{\zeta}{\mathcal{B}(\zeta)} \left[\frac{w\psi(z) - z\psi(w)}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\zeta(z-w)}{2\mathcal{B}(\zeta)} \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) + \frac{2(1-\zeta)\psi(\kappa)}{\mathcal{B}(\zeta)} \right] \right| \\
& \leq \frac{\zeta(z-w)}{4\mathcal{B}(\zeta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\frac{z^{\hbar+2} + w^{\hbar+1}(w(1+\hbar) - z(2+\hbar))}{(z-w)^2(\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(w)|^\Omega}{3} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& + \left(\frac{w^{\hbar+2} + z^{\hbar+1}(z(1+\hbar) - w(2+\hbar))}{(z-w)^2(\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{12} + \frac{5|\psi'(w)|^\Omega}{12} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\frac{w^{\hbar+2} + z^{\hbar+1}(z(1+\hbar) - w(2+\hbar))}{(z-w)^2(\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(z)|^\Omega}{3} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \left. + \left(\frac{z^{\hbar+2} + w^{\hbar+1}(w(1+\hbar) - z(2+\hbar))}{(z-w)^2(\hbar+1)(\hbar+2)} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{12} + \frac{5|\psi'(z)|^\Omega}{12} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.6. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (w, z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\psi' \in L[w, z]$ olsun. $|\psi'|$ fonksiyonu $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü s -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left(\frac{|\psi'(w)| + |\psi'(z)|}{2^s(s+1)} + \frac{(2^{2+s} - s - 3)(|\psi'(w)| + |\psi'(z)|)}{2(1+s)(2+s)} \right. \\
& \quad \left. - \mathcal{Z} \frac{10(z-w)^2}{48} \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

İspat. (3.1) eşitliğine mutlak değer özelliği uygulanıp, sonrasında $|\psi'|$ fonksiyonunun güçlü s -konveksliği kullanılarak gerekli integral işlemler yapılır.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right| dt - \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}z + \frac{2-t}{2}w\right) \right| dt \right\} \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \int_0^1 t \left(\left(\frac{t}{2}\right)^s |\psi'(w)| + \left(\frac{2-t}{2}\right)^s |\psi'(z)| - \mathcal{Z} \frac{t}{2} \left(\frac{2-t}{2}\right) (z-w)^2 \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 t \left(\left(\frac{t}{2}\right)^s |\psi'(z)| + \left(\frac{2-t}{2}\right)^s |\psi'(w)| - \mathcal{Z} \frac{t}{2} \left(\frac{2-t}{2}\right) (z-w)^2 \right) dt \right\} \\
& = \frac{(z-w)}{4} \left(\frac{|\psi'(w)| + |\psi'(z)|}{2^s(s+1)} + \frac{(2^{2+s} - s - 3)|\psi'(w)| + |\psi'(z)|}{2(1+s)(2+s)} \right. \\
& \quad \left. - \mathcal{Z} \frac{10(z-w)^2}{48} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böyle ispat tamamlanır.

Sonuç 4.31. Eğer teoremden $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left(\frac{|\psi'(w)| + |\psi'(z)|}{2} - \mathcal{Z} \frac{10(z-w)^2}{48} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.32. Eğer teoremden $s=1$ ve $\mathcal{Z}=0$ alınırsa eşitsizlik, (3.2) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.7. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (w, z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\psi' \in L[w, z]$ olsun. $|\psi'|^\Omega$ fonksiyonu

$\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü s -konveks fonksiyon ve $\Omega > 1$, $\frac{1}{h} + \frac{1}{\Omega} = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left(\frac{1}{1+\hbar} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{1}{2^s(s+1)} |\psi'(w)|^\Omega + \frac{(2-2^{-s})}{(1+s)} |\psi'(z)|^\Omega - \zeta \frac{(z-w)^2}{6} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2^s(s+1)} |\psi'(z)|^\Omega + \frac{(2-2^{-s})}{(1+s)} |\psi'(w)|^\Omega - \zeta \frac{(z-w)^2}{6} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right] \quad (4.8)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (3.1) eşitliğine mutlak değer özelliği ve integraller için Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right| dt - \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}z + \frac{2-t}{2}w\right) \right| dt \right\} \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \left(\int_0^1 t^\hbar dt \right)^{\frac{1}{\hbar}} \left(\int_0^1 \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 t^\hbar dt \right)^{\frac{1}{\hbar}} \left(\int_0^1 \left| \psi'\left(\frac{t}{2}z + \frac{2-t}{2}w\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Hipotezden $|\psi'|^\Omega$ güçlü s -konveks olduğundan

$$\left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(z-w)}{4} \left[\left(\int_0^1 t^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \right. \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega - \mathcal{Z} \frac{t}{2} \left(\frac{2-t}{2} \right) (z-w)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 t^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega - \mathcal{Z} \frac{t}{2} \left(\frac{2-t}{2} \right) (z-w)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \left. \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral işlemler yapılarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.33. Eğer teoremde $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
&\leq \frac{(z-w)}{4} \left(\frac{1}{1+h} \right)^{\frac{1}{h}} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{4} + \frac{3|\psi'(z)|^\Omega}{4} - \mathcal{Z} \frac{(z-w)^2}{6} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{4} + \frac{3|\psi'(w)|^\Omega}{4} - \mathcal{Z} \frac{(z-w)^2}{6} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.34. Eğer teoremde $s=1$ ve $\mathcal{Z}=0$ alınırsa (4.8) eşitsizliği, (3.3) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.8. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (w, z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\psi' \in L[w, z]$ olsun. $|\psi'|^\Omega$ fonksiyonu $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü s -konveks fonksiyon ve $\Omega > 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{z+w}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(w) + \frac{z+w}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(z) \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \times \left\{ \left(|\psi'(w)|^\Omega \frac{2^{-s}}{s+2} + |\psi'(z)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2}-s-3)}{s^2+3s+2} \right) - \frac{5}{48} \mathcal{Z}(z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(|\psi'(z)|^\Omega \frac{2^{-s}}{s+2} + |\psi'(w)|^\Omega \left(\frac{2^{-s}(2^{s+2}-s-3)}{s^2+3s+2} \right) - \frac{5}{48} \mathcal{Z}(z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right\} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normleştirme fonksiyonudur.

İspat. (3.1) eşitliğine mutlak değer özelliği ve Power Mean eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{z+w}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(w) + \frac{z+w}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(z) \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right| dt - \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}z + \frac{2-t}{2}w\right) \right| dt \right\} \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \left(\int_0^1 t dt \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \left(\int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 t dt \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \left(\int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}z + \frac{2-t}{2}w\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Hipotezden $|\psi'|^\Omega$ güçlü s -konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{z+w^-}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(w) + \frac{z+w^+}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(z) \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \times \left\{ \left[\int_0^1 t \left(\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \mathcal{Z} \left(\frac{t}{2} \right) \left(\frac{2-t}{2} \right) (z-w)^2 \right) dt \right]^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left[\int_0^1 t \left(\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \mathcal{Z} \left(\frac{t}{2} \right) \left(\frac{2-t}{2} \right) (z-w)^2 \right) dt \right]^{\frac{1}{\Omega}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral işlemler yapıldıktan sonra sonuca ulaşılır. İspat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.35. Eğer teoremde $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{z+w^-}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(w) + \frac{z+w^+}{2} {}^{CF}I^\zeta \psi(z) \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad \times \left\{ \left(\frac{|\psi'(w)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(z)|^\Omega}{3} - \frac{5}{48} \mathcal{Z}(z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|\psi'(z)|^\Omega}{6} + \frac{|\psi'(w)|^\Omega}{3} - \frac{5}{48} \mathcal{Z}(z-w)^2 \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.36. Eğer teoremde $s=1$ ve $\mathcal{Z}=0$ alınırsa (4.9) eşitsizliği, (3.4) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.9. $w < z$ olmak üzere $\psi : [w, z] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (w, z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\psi' \in L[w, z]$ olsun. $|\psi'|^\eta$ fonksiyonu $\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü s -konveks fonksiyon ve $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\ & \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \frac{2}{\mu(\mu+1)} + \frac{2}{(1+s)\eta} [|\psi'(w)|^\eta + |\psi'(z)|^\eta] - \mathcal{Z} \frac{(z-w)^2}{3\eta} \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0, 1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (3.1) eşitliğine mutlak değer özelliği ve Young eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\ & \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right| dt - \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}z + \frac{2-t}{2}w\right) \right| dt \right\} \\ & \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\int_0^1 (t)^\mu dt \right) + \frac{1}{\eta} \left(\int_0^1 \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right|^\eta dt \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\mu} \left(\int_0^1 (t)^\mu dt \right) + \frac{1}{\eta} \left(\int_0^1 \left| \psi'\left(\frac{t}{2}z + \frac{2-t}{2}w\right) \right|^\eta dt \right) \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden $|\psi'|^\eta$ güçlü s -konveksliğinden dolayı yukarıdaki son eşitsizlik

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\ & \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu+1} \right) + \frac{1}{\eta} \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\eta + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\eta \right] dt \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{Z}\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2-t}{2}\right)(z-w)^2\Big]dt\Bigg) \\
& +\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu+1}\right)+\frac{1}{\eta}\left(\int_0^1\left[\left(\frac{t}{2}\right)^s|\psi'(z)|^\eta+\left(\frac{2-t}{2}\right)^s|\psi'(w)|^\eta\right.\right. \\
& \left.\left.-\mathcal{Z}\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2-t}{2}\right)(z-w)^2\Big]dt\right)\Bigg\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral işlemler yapıldıktan sonra ispat tamamlanır.

Sonuç 4.37. Eğer teoremden $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)}\left[\frac{CF}{\frac{z+w}{2}}I^\zeta\psi(w)+\frac{CF}{\frac{z+w}{2}}I^\zeta\psi(z)\right]-\psi\left(\frac{w+z}{2}\right)-\frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)}[\psi(w)+\psi(z)]\right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4}\left\{\frac{2}{\mu(\mu+1)}+\frac{[|\psi'(w)|^\eta+|\psi'(z)|^\eta]}{\eta}-\mathcal{Z}\frac{(z-w)^2}{3\eta}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.38. Eğer teoremden $s=1$ ve $\mathcal{Z}=0$ alınırsa (4.10) eşitsizliği, (3.5) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.10. $w < z$ olmak üzere $\psi:[w,z]\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu (w,z) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\psi'\in L[w,z]$ olsun. $|\psi'|^\Omega$ fonksiyonu

$\mathcal{Z} > 0$ modülü ile güçlü s -konveks fonksiyon ve $\Omega > 1$, $\frac{1}{h} + \frac{1}{\Omega} = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)}\left[\frac{CF}{\frac{z+w}{2}}I^\zeta\psi(w)+\frac{CF}{\frac{z+w}{2}}I^\zeta\psi(z)\right]-\psi\left(\frac{w+z}{2}\right)-\frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)}[\psi(w)+\psi(z)]\right| \\
& \leq \frac{z-w}{4}\left(\left(\frac{1}{h^2+3h+2}\right)^{\frac{1}{h}}\times\left(\frac{2^{-s}}{s^2+3s+2}|\psi'(w)|^\Omega\right.\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2^{-s} + 2s}{s^2 + 3s + 2} |\psi'(z)|^\Omega - \frac{\mathcal{Z}(z-w)^2}{16} \Bigg)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\frac{1}{h+2} \right)^{\frac{1}{h}} \times \left(\frac{2^{-s}}{2+s} |\psi'(w)|^\Omega + \frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{s^2 + 3s + 2} |\psi'(z)|^\Omega \right. \\
& \quad \left. - \frac{5\mathcal{Z}(z-w)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\frac{1}{h^2 + 3h + 2} \right)^{\frac{1}{h}} \times \left(\frac{2^{-s}}{s^2 + 3s + 2} |\psi'(z)|^\Omega \right. \\
& \quad \left. + \frac{2^{-s} + 2s}{s^2 + 3s + 2} |\psi'(w)|^\Omega - \frac{\mathcal{Z}(z-w)^2}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\frac{1}{h+2} \right)^{\frac{1}{h}} \times \left(\frac{2^{-s}}{2+s} |\psi'(z)|^\Omega + \frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{s^2 + 3s + 2} |\psi'(w)|^\Omega \right. \\
& \quad \left. - \frac{5\mathcal{Z}(z-w)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\zeta \in [0,1]$ ve $\mathcal{B}(\zeta)$ normleştirme fonksiyonudur.

İspat. (3.1) eşitliğine mutlak değer özelliği ve Hölder-İşcan eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{CF}{\frac{z+w}{2}} I^\zeta \psi(w) + \frac{CF}{\frac{z+w}{2}} I^\zeta \psi(z) \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right| dt - \int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}z + \frac{2-t}{2}w\right) \right| dt \right\} \\
& \leq \frac{(z-w)}{4} \left\{ \left(\int_0^1 (1-t)t^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 (1-t) \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 t^{h+1} dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 t \left| \psi'\left(\frac{t}{2}w + \frac{2-t}{2}z\right) \right|^\Omega dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^1 (1-t) t^h dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 (1-t) \left| \psi' \left(\frac{t}{2} z + \frac{2-t}{2} w \right) \right| dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& + \left(\int_0^1 t^{\hbar+1} dt \right)^{\frac{1}{h}} \left(\int_0^1 t \left| \psi' \left(\frac{t}{2} z + \frac{2-t}{2} w \right) \right| dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden $|\psi'|^\Omega$ güçlü s -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^\zeta \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi \left(\frac{w+z}{2} \right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{z-w}{4} \left(\left(\frac{1}{\hbar^2 + 3\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{h}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-t) \left(\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{Z} \left(\frac{t}{2} \right) \left(\frac{2-t}{2} \right) (z-w)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{h}} \times \left(\int_0^1 t \left(\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{Z} \left(\frac{t}{2} \right) \left(\frac{2-t}{2} \right) (z-w)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{\hbar^2 + 3\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{h}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-t) \left(\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{Z} \left(\frac{t}{2} \right) \left(\frac{2-t}{2} \right) (z-w)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{h}} \times \left(\int_0^1 t \left(\left(\frac{t}{2} \right)^s |\psi'(z)|^\Omega + \left(\frac{2-t}{2} \right)^s |\psi'(w)|^\Omega \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{Z} \left(\frac{t}{2} \right) \left(\frac{2-t}{2} \right) (z-w)^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg)
\end{aligned}$$

halini alır. Gerekli integral işlemler yapıldıktan sonra ispat tamamlanır.

Sonuç 4.39. Eğer teoremden $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\mathcal{B}(\zeta)}{\zeta(z-w)} \left[\frac{{}^{CF}I^{\zeta} \psi(w)}{\frac{z+w^-}{2}} + \frac{{}^{CF}I^{\zeta} \psi(z)}{\frac{z+w^+}{2}} \right] - \psi\left(\frac{w+z}{2}\right) - \frac{1-\zeta}{\zeta(z-w)} [\psi(w) + \psi(z)] \right| \\
& \leq \frac{z-w}{4} \left(\left(\frac{1}{\hbar^2 + 3\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(w)|^{\Omega} + 5|\psi'(z)|^{\Omega}}{12} - \frac{\mathcal{Z}(z-w)^2}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(w)|^{\Omega} + 2|\psi'(z)|^{\Omega}}{6} - \frac{5\mathcal{Z}(z-w)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{\hbar^2 + 3\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(z)|^{\Omega} + 5|\psi'(w)|^{\Omega}}{12} - \frac{\mathcal{Z}(z-w)^2}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left. \left(\frac{1}{\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{|\psi'(z)|^{\Omega} + 2|\psi'(w)|^{\Omega}}{6} - \frac{5\mathcal{Z}(z-w)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \right) \\
& \quad + \left(\frac{1}{\hbar^2 + 3\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{2^{-s}}{s^2 + 3s + 2} |\psi'(z)|^{\Omega} \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{2^{-s} + 2s}{s^2 + 3s + 2} |\psi'(w)|^{\Omega} - \frac{\mathcal{Z}(z-w)^2}{16} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \\
& \quad + \left(\frac{1}{\hbar + 2} \right)^{\frac{1}{\hbar}} \times \left(\frac{2^{-s}}{2+s} |\psi'(z)|^{\Omega} + \frac{2^{-s}(2^{s+2} - s - 3)}{s^2 + 3s + 2} |\psi'(w)|^{\Omega} \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{5\mathcal{Z}(z-w)^2}{48} \right)^{\frac{1}{\Omega}} \Bigg)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.40. Eğer teoremden $s=1$ ve $\mathcal{Z}=0$ alınırsa (4.11) eşitsizliği, (3.6) eşitsizliğine indirgenir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörler kullanılarak (s) -güçlü konveks ve (s, m) -güçlü konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Ulaşılan bazı eşitsizliklerin literatürde mevcut olan klasik sonuçların doğal bir genellemesi niteliğinde olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum, Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörlerinin, güçlü konveks fonksiyon sınıfları bağlamında daha geniş kapsamlı ve esnek bir çerçeve sunduğunu göstermektedir. Çalışmamızda verilen lemma ile genel fonksiyon sınıfları için benzer çalışmaların yapılması bu alandaki teorik birikimi daha da zenginleştirecektir.

Sonuç olarak, elde edilen bulguların hem kesirli analiz literatürüne katkı sağladığı hem de ileride yapılacak olan araştırmalara yeni yöntem ve uygulama alanları açabileceği değerlendirilmektedir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., and Baleanu, D., 2017. Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 1098-1107.
- Atangana, A., and Baleanu, D. 2016. New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel. *Theory and Application to Heat Transfer Model, Thermal Science*, 20 (2), 757-763.
- Bayraktar, M., 2010. *Analiz*. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Beckenbach, E. F., Bellman, R., 1961. *Inequalities*. Springer-Verlag.
- Bracamonte M., Gimenez J., Vivaz-Cortez M. 2016. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for strongly (s, m)-Convex functions with modulus c in second sense , *Applied Mathematics & Information Sciences*.
- Bullen, P. S. 1978. Error estimates for some elementary quadrature rules, *Publ. Elektrotehn Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 602/633, 97–103.
- Caputo, M., Fabrizio, M., 2015. A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1, No.2, 73-85.
- Djida, J.D., Area, I. and Atangana, A., 2016. New numerical scheme of Atangana-Baleanu fractional integral: an application to groundwater flow within leaky aquifer”, *arXiv:1610.08681*.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications*. Victoria University.
- Dragomir, S.S., (2012). *Operator Inequalities of Ostrowski and Trapezoidal Type*. Springer Briefs in Mathematics, Springer, New York.
- Hardy, G.H., Littlewood, J. E., Polya, G., 1934. *Inequalities*. Cambridge University Press
- Heil, C., 2007. *Real Analysis Lecture Notes*, <http://people.math.gatech.edu>
- Iscan, I. 2019. New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality, *J. Inequal. Appl.* 304.
- Kannappan, P. 2009. *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer US.
- Kermausor, S., Nwaeze, E.R., 2023. New Fractional Integral Inequalities via k-Atangana–Baleanu Fractional Integral Operators. *Fractal Fract.*, 7, 740.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.

- Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis With Applications*. New York: John Wiley&Sons. Inc.
- Lara, T., Merentes, N., Quintero, R., Rosales, E. 2015. On strongly-convex functions. *Math. Aeterna* 5(3), 521-535.
- Lazarević, M. P., Rapaić, M. R., BŠekara, T., 2014. *Introduction to Fractional Calculus with Brief Historical Background. Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling*, WSEAS Press.
- Mihešan, V.G., 1993. A generalization of the convexity, *Seminar on Functional Equations, Approx. And Convex*. Cluj-Napoca, Romania.
- Mitrinović, D. S. 1970. *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S, Pečarić, J.E., and Fink, A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, UK.
- Musayev, B., Alp M., Mustafayev N., ve Ekincioglu, İ., 2007. *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I*. Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Oldham K. B., Spanier, J., (1974). *The Fractional Calculus and Applications of Diferentiation Diferentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press Inc., London, 1-185.
- Pachpatte, B. G., 2005. *Mathematical Inequalities*, North-Holland Library, vol. 67, Elsevier Science, Amsterdam, Holland.
- Park J., 2011. Some Hadamard's type inequalities for co-ordinated (s, m) -convex mappings in the second sense, *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 51, 205–216.
- Pečarić, J. E., 1987. *Convex Functions: Inequalities*. Serbo Croatian, Beograd.
- Pečarić, J.E., Proschan, F., and Tong, Y.L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications (Cilt 187)*. Academic Press, London.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press.
- Polyak, B.T., 1966. Existence theorems and convergence of minimiz-ing sequences for extremal problems with constraints, *Soviet Doklady Mathematics*, vol. 7, pp. 72–75.
- Roberts A.W., Varberg D.E. 1973. *Convex Functions*. New York, London.
- Sahoo, S.K., Mohammed, P.O., Kodamasingh, B., Tariq, M., Hamed, Y.S. 2022. New fractional integral inequalities for convex functions pertaining to Caputo-Fabrizio operator. *Fractal Fract.* 6, 171.

Samko, S. Kilbaş, A. Marichev, O. (1993). Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach, Linghorne.

Soykan, Y., 2016. Fonksiyonel Analiz. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.

Tiel, J. V., 1984. Convex Analysis. Wiley, Chicester.

Yang, X. J., (2019). General Fractional Derivatives: Theory, Methods and Applications. CRC Press, New York, USA.

