

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**CHARLIER POLİNOMLARININ TEMEL MATRİS ÖZELLİKLERİ
VE FONKSİYONEL İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULAMALARI**

Arif CİVELEK

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER**



MANİSA-2022

Arif CİVELEK

CHARLIER POLİNOMLARININ TEMEL MATRİS ÖZELLİKLERİ
VE FONKSİYONEL İTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULAMALARI

2022

TEZ ONAYI

Arif CİVELEK tarafından hazırlanan " Charlier Polinomlarının Temel Matris Özellikleri ve Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları " adlı tez çalışması 31/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	Prof. Dr. Mehmet SEZER Manisa Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Ersin ASLAN Manisa Celal Bayar Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ Konya Teknik Üniversitesi	

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Arif CİVELEK



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TABLO DİZİNİ.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
1.GİRİŞ	1
2.GENEL BİLGİLER	3
2.1. Kaynak Özetleri.....	3
2.2. Stirling Sayılarının Temel Özellikleri	3
2.3. Charlier Polinomlarının Temel Özellikleri.....	6
2.4. Temel Problem	8
3.MATERYAL VE YÖNTEM.....	10
3.1. Charlier Polinomlarının Temel Matris Özellikleri.....	10
3.2. Charlier Polinomlarına Dayalı Matris Sıralama Yöntemi.....	14
3.2.1. Diferansiyel Kısımın Matris Formu.....	15
3.2.2. Fonksiyonel Diferansiyel Kısımın Matris Formu.....	16
3.2.3. Fonksiyonel Fredholm İntegral Kısımın Matris Formu.....	17
3.2.4. Fonksiyonel Volterra İntegral Kısımın Matris Formu.....	18
3.2.5 Çözüm Yöntemi.....	18
3.3. Rezidüel Fonksiyona Dayalı Hata Analizi.....	21
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	23
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	Bilinmeyen Charlier Katsayılar Matrisi
$C_n(x, \alpha)$	Charlier Polinomları
B	Diferansiyel Geçiş Matrisi
$\mathbf{B}(\alpha, \beta)$	Gecikmeli Denklemler için Geçiş Matrisi
N	Kesme Sınırı
$y(x)$	Tam Çözüm
$y_N(x)$	Yaklaşık Çözüm
$[\mathbf{U} ; \lambda]$	Koşullar İçin Artırılmış Matris
$[\mathbf{W} ; \mathbf{G}]$	Temel Denkleme ait Artırılmış Matrisi
$[\tilde{\mathbf{W}} ; \tilde{\mathbf{G}}]$	Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris
$[x]^n$	Artan faktöriyel Fonksiyonu
$[x]_n$	Azalan faktöriyel Fonksiyonu
$\binom{x}{n}$	Binom Katsayı Fonksiyonu
$R_N(\mathbf{x})$	Rezidüel Hata Fonksiyonu
$ \mathbf{e}_N(\mathbf{x}) $	Mutlak Hata Fonksiyonu
$\mathbf{M}(\alpha)$	Charlier-Binom-Standart Geçiş Matrisi
$\mathbf{J}(\alpha)$	Charlier-Binom Geçiş Matrisi
$\mathbf{X}(\mathbf{x})$	Standart Taban Matrisi
$\chi(x)$	Binom Taban Matrisi
$\mathbf{C}(x, \alpha)$	Charlier Taban Matrisi
$\mathbf{S}(n, \mathbf{k})$	2.tip Stirling sayıları
$\mathbf{s}(n, \mathbf{k})$	1.tip Stirling sayıları
$\overline{R_N}$	Tahmini Hata Üst Sınırı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$\alpha=1$ için Charlier Polinomlarının Grafiği.....	7
Şekil 4.1	N=2,3,4,5 için Örnek 4.2'deki Charlier polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.....	28
Şekil 4.2	N=2,3,4,5 için Örnek 4.3'deki Charlier polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.....	31
Şekil 4.3	N=2,3,4,5 için Örnek 4.4'deki Charlier polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması	35
Şekil 4.4	N=2,3 için Örnek 4.5'deki Charlier polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.....	37



TABLO DİZİNİ

Tablo 2.1. Birinci tip Stirling sayıları, $s(n,k)$, için değerler tablosu.....	6
Tablo 2.2. İkinci tip Stirling sayıları, $S(n,k)$, için değerler tablosu	6
Tablo 4.1. $N=2,3,4,5$ için Örnek 4.2 deki mutlak hataların karşılaştırılması.....	28
Tablo 4.2. $N=2,3,4,5$ için Örnek 4.3 deki mutlak hataların karşılaştırılması.....	32
Tablo 4.3. $N=3,4,5$ için Örn. 4.4 teki yaklaşık ve tam çözümlerin karşılaştırılması.....	36
Tablo 4.4. Örnek 4.5'teki Charlier polinom çözümleri ile Dickson polinom çözümlerinin [52] karşılaştırılması.....	38



TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER' e, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan,ve desteğini gördüğüm sevgili hocalarım Sayın Dr.Öğretim Üyesi Kübra ERDEM BİÇER'e ve Doç.Dr. Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ'ye yürekten teşekkür ederim.

Arif CİVELEK
Manisa, 2022



Yüksek Lisans Tezi

Charlier Polinomlarının Temel Matris Özellikleri ve Fonksiyonel İntegro-Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Arif CİVELEK

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Bu çalışmada, sabit gecikmeli fonksiyonel Fredholm ve Volterra tipi integro diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır koşulları altında yaklaşık çözümlerini bulmak için Stirling sayıları, faktöriyel polinomları ve Taylor polinomları ile birlikte Charlier polinomlarına dayalı bir matris-sıralama yöntemi geliştirilir. Kullanılan yöntem, problemin çözümünü, sıralama noktaları yardımıyla, bir matris denkleminin çözümüne indirger ve böylece problemin yaklaşık çözümü elde edilir. Ayrıca, Charlier polinomundaki α -parametresi, uygun çözümleri bulmak için kullanılır. Aynı zamanda, kalan fonksiyon ve ortalama değer teoremi ile bağlantılı bir hata analizi gerçekleştirilir ve bazı örnekler sunulur. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle gösterilir; yöntemin uygulanabilirliği ve etkinliği gözlemlenir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, fonksiyonel diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemler hakkında genel bilgiler verilir. İkinci bölümde, Stirling sayıları, faktöriyel polinomları ve Charlier polinomlarının temel özellikleri tanıtılır ve ilgili kaynak özeti ile birlikte temel problem açıklanır. Üçüncü bölümde ise, diferansiyel, gecikmeli diferansiyel ve integral kısımlarının temel matris bağıntıları kullanılarak çözüm için Charlier matris-sıralama yöntemi geliştirilir ve reziduel (kalan) fonksiyona dayalı bir hata analizi yapılır. Dördüncü bölümde ise, her bir kesim için sayısal örnekler verilir. Sonuçlar tablo ve grafiklerle yorumlanır. Tablolarda tam çözüm ile bulunan çözümler ve mutlak hatalar karşılaştırılır. Son olarak, beşinci bölümde, sonuç ve öneriler sunulur.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel diferansiyel-denklemler, Fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler, Charlier ve Taylor Polinomları, Matris Sıralama Yöntemi

2022, (44) sayfa

ABSTRACT

Graduate Thesis

Fundamental Matrix Properties of Charlier Polynomials and Applications to Functional Integro-Differential Equations

Arif CİVELEK

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

In this study, a matrix-collocation method based on Charlier polynomials together with Taylor polynomials, Stirling numbers and factorial polynomials is developed to solve functional differential and Volterra-Fredholm type integro-differential equations with mixed constant delays under the initial-boundary conditions. The used method reduces the solution of problem to the solution of a matrix equation and hence the approximate solution of the problem is obtained. Besides, the parameter- α in Charlier polynomials is used for obtaining the appropriate solutions. An error analysis related with the residual function and the mean-value theorem is implemented and some examples are presented. The obtained results are demonstrated by tables and graphics; the usability and efficiency of the method are observed.

The thesis consists of five chapters. In the first chapter, the fundamental knowledges about functional differential and integro-differential equations are examined. In the second chapter, the general information related to the Stirling numbers, factorial polynomial and Charlier polynomial is given; the fundamental problem along with source data is established. In the third chapter, the Charlier matrix-collocation methods are developed by using the basic matrix relations for differential, delay differential and integral parts in the equation. and then, an error analysis based on residual function and the mean-value theorem for the solution is performed. In the fourth chapter, some numerical examples are given for each section. The results are supported by tables and figures. In tables and figures, the obtained solutions and exact solutions together with absolute errors are compared. Finally, in the fifth chapter, conclusions and recommendations are given.

Keywords: Functional differential equations, Functional integro-differential equations, Charlier and Taylor polynomials, Matrix-collocation method

2022, (44) pages

1. GİRİŞ

Fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel ve Fredholm-Volterra tipindeki integral denklemlerin bir kombinasyonudur; bilinmeyen fonksiyon ve bunların türevlerinin ve integrallerinin farklı argümanlardaki değerlerini içerirler. Bunlar fonksiyonel denklemlerin geniş bir sınıfını oluştururlar ve genellikle, biyoloji, ekonomi, elektrodinamik, potansiyel teori, elektrostatik, astronomi, kimya, mekanik, fizik, kontrol teorisi, biyofizik, matematiksel istatistik gibi, fen ve teknoloji alanlarda önemli bir rol oynarlar; bu alanlarda oluşan fiziksel olayların matematiksel modellenmesinde kullanılırlar [1 -12].

Fonksiyonel denklemlerin önemli bir sınıfını oluşturan diferansiyel denklemlerle ilgili ilk araştırmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında Newton ve Leibniz tarafından “diferansiyel ve integral hesap” üzerine yapılan çalışmalarla başlamış; diferansiyel denklem şeklindeki bağıntıya da ilk önce Newton’un 1671 yılında yazdığı “Flux metodu ve sonsuz seriler” adlı eserinde karşılaşılmuştur. Bu tip adi diferansiyel denklemlerin n . mertebeden genel hali, y bağımlı değişken ve x bağımsız değişken olmak üzere,

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.1)$$

bağıntısı ile tanımlanmaktadır [13-16]. Bunlar, fen, mühendislik ve ekonomi gibi pek çok daldaki problemlerin modellenmesinde kullanılmaktadırlar. Roket ve uyduların hareketi, bir elektrik devresindeki akım veya elektrik yükü, iletken bir çubuktaki ısı akımı, bir tel veya zarın titreşimi, radyoaktif bir maddenin parçalanması, kimyasal reaksiyonların belirlenmesi, belirli bir geometrik özellikteki eğrilerin bulunması gibi durumlarda diferansiyel denklemlere gereksinim duyulmaktadır.

Yapılarında türev, fark ve bunların çeşitli kombinasyonlarını bulunduran veya argümanlarda ilerleme, gecikme gibi sapmaları bulunan denklemlere “*fonksiyonel diferansiyel denklem*” denir [17-22] ve

$$G(x, y(\alpha_0 x + \beta_0), y'(\alpha_1 x + \beta_1), y''(\alpha_2 x + \beta_2), \dots, y^{(n)}(\alpha_n x + \beta_n)) = 0 \quad (1.2)$$

bağıntısı ile gösterilebilir. Benzer şekilde, fonksiyonel Volterra-Fredholm tipi bir integral denklemin genel formu [22-29]

$$H(x, y(x), \int_a^b K_f(x, t) y(\lambda t + \mu) dt, \int_a^x K_v(x, t) y(\gamma t + \eta) dt) = 0 \quad (1.3)$$

bağıntısı ile tanımlanabilir.

Diferansiyel-fark denklemleri, gecikmeli diferansiyel denklemler ile bunların integral terimli olanları fonksiyonel diferansiyel denklemler grubunda yer alırlar ve bazı fiziksel olayların matematiksel modelidirler. Aynı zamanda, bu tip denklemler ile modelleme yapılması, 1940'lı yılların sonunda Lord Cherwell'in asal sayıların dağılımı üzerindeki çalışması ile ve Minorsky'nin II. Dünya savaşı sırasında gemilerin dengede kalmasını sağlamak üzere oluşturduğu modellemesi ile başlamıştır [17].

Bu tezin amacı, (1.1), (1.2) ve (1.3) ile tanımlanan fonksiyonel denklemlerin birleştirilmesiyle oluşturulan genelleştirilmiş Volterra-Fredholm tipi fonksiyonel integro-diferansiyel denklemin lineer halini (yani y bağımlı değişkeni ve türevlerine göre birinci dereceden olup çarpım şeklinde olmaması halini) ele alarak, ve Sezer ve ark. [2,4,8,9, 11,12,14,16-18,24-29] tarafından geliştirilen Matris-Sıralama yöntemini uygulayarak, belli koşullar altında Charlier polinomları [30-32] cinsinden yaklaşık çözümleri araştırmak; rezidüel (kalan) fonksiyonlara dayalı bir hata analiz tekniği geliştirmektir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Kaynak Özetleri

Bu çalışmada, (1.1), (1.2) ve (1.3) ile tanımlanan fonksiyonel denklemlerinin birleşimi ile oluşturulan genelleştirilmiş fonksiyonel integro-diferansiyel denkleminin özel bir sınıfını oluşturan Volterra-Fredholm tipi lineer fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler incelenmektedir. Bu tür denklemler, biyoloji, ekonomi, elektrodinamik, potansiyel teori, elektrostatik, astronomi, kimya, mekanik, fizik, kontrol teorisi, biyofizik, matematiksel istatistik, salınım teorisi, astrofizik, elasticity gibi birçok uygulamalı alanlarda önemli rol oynamaktadır [1-4,6-15,18-22,24-29].

Son yıllarda, fonksiyonel diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin polinom çözümlerini elde etmek için birçok yöntemler verilmiştir. Bunlardan bazıları; Chelyshkov, Lucas, Müntz-Legendre, Taylor, Chebyshev, Fibonacci, Laguerre, Legendre, Bessel, Hybrid Euler-Taylor, Bernoulli, Euler, Dickson, Bell, Gegenbauer, Boubaker, ve Hermite polinomlarına dayalı matris-sıralama yöntemleri sunulmuştur [2,4,8-12,14,16-18,24-28,33-39] ve diğer literatürde bilinen diğer yöntemler aşağıda sunulmuştur: Varyasyonel yineleme [19,40], homotopy perturbasyon [3], Adomian ayrıştırma [22], Legendre- Gauss sıralama [6], one-leg θ [5], Jacobian eliptik fonksiyon [23], Hybrid fonksiyon [41], Kübik B-Spline fonksiyon [42], Geriye Yerine koyma [43] ve Rasyonelleştirilmiş Haar fonksiyonlar yöntemleri.

2.2 Stirling Sayılarının Temel Özellikleri

Binom katsayı fonksiyonları, faktöriyel polinomları ve Stirling sayıları matematik ve uygulamalı matematik problemlerinde ortaya çıkmaktadır. Aralarında sıkı bir bağ bulunan bu ifadeler; özellikle, sonlu farklar teorisi, kombinatorik hesaplamalar, interpolasyon teorisi ve spline teorisinde ve aynı zamanda, fen ve mühendislik problemlerinin modellenmesinde, önemli bir rol oynarlar [45-49]. Bu ifadelerle ilgili açıklamalar kısaca aşağıda sunulmuştur.

Faktöriyel polinomları, artan faktöriyel polinomları ve azalan faktöriyel polinomları olarak iki sınıfta ele alınır. Bunlar, sırasıyla, $[x]^n$ ve $[x]_n$ sembolleri ile gösterilir; $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere,

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1), \quad [x]^0 = 1$$

ve (2.1)

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1), \quad [x]_0 = 1$$

bağıntıları ile tanımlanır. [45,47, 49].

Binom katsayı fonksiyonları, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\binom{x}{n} = \frac{[x]_n}{n!} \Leftrightarrow n! \binom{x}{n} = [x]_n, \quad \binom{x}{0} = 1 \quad (2.2)$$

olarak tanımlanmaktadır [45].

Matematikte, Stirling sayıları kombinatorik problemlerde ortaya çıkmış olup, 18.Yüzyılda İskoç matematikçi James Stirling tarafından keşfedilmiştir. İki tip Stirling sayıları vardır: 1.tip Stirling sayıları ve 2.tip Stirling sayıları. Bu konuda literatürde farklı notasyonlar kullanılmaktadır. Örneğin, 1.tip Stirling sayıları $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$,

$s(n,k)$ veya $S_1(n,k)$ ile ve 2.tip Stirling sayıları ise $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, $S(n,k)$ veya $S_2(n,k)$ ile gösterilmektedir. Bu çalışmada ise Stirling sayıları için $s(n,k)$ ve $S(n,k)$ notasyonları kullanılmaktadır [47,48].

Birinci Tip Stirling Sayıları $s(n,k)$; $n,k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere, n elemanlı bir kümenin k ayrık devirli permütasyonlarının sayısı olarak yorumlanabilir. Bunların üreteç fonksiyonu [45-48]

$$\frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} s(n,k) \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < 1 \quad (2.3)$$

ile verilir. (2.3) bağıntısından, $s(n,k)$ için aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir:

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k);$$

$$s(n, 0) = 0, n \in \mathbb{N}; s(n, n) = 1, n \in \mathbb{N}_0; s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n-1)!, n \in \mathbb{N}; s(n, k) = 0, n < k, k < 0.$$

İkinci tip Stirling sayıları $S(n, k), n, k \in \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere n elemanlı bir kümeyi boş olmayan k tane alt kümeye parçalama yolunun sayısı olarak yorumlanabilir [4]. Bu sayıları hesaplamak için bir genel formül

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n. \quad (2.4)$$

ile verilir [45-48]. Aynı zamanda, ikinci tip Stirling sayıları

$$\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!}. \quad (2.5)$$

üreteç fonksiyonu ile de tanımlanır [47-49]. (2.4) veya (2.5) bağıntılarından aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir [6-48]:

$$S(n+1, k) = kS(n, k) + S(n, k-1);$$

$$S(n, 0) = 0, ; S(n, n) = 1, S(n, 1) = 1, n \in \mathbb{N} \quad S(n, k) = 0, n < k \text{ veya } k < 0.$$

Aynı zamanda, (2.1)-(2.5) bağıntıları ile açıklanan Stirling sayıları, faktöriyel polinomları ve $\{x^k\}_{k=0}^n$ taban fonksiyonu arasında sıkı bir ilişkinin olduğu iyi bilinmektedir [45-49]. Bu temel bağıntılar aşağıda sunulmaktadır:

$$[x]_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k, \quad \left(= n! \binom{x}{n} \right), (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.6)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) [x]_k, \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.7)$$

$$[x]^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k) x^k, \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.8)$$

Örnek olarak, (2.6) ve (2.7) bağıntılarını veya yukarıdaki uygun bağıntıları kullanarak $0 \leq n, k \leq 7$ için $s(n, k)$ 1.tip Stirling sayılarının ve $S(n, k)$ 2.tip Stirling polinomlarının sayısal değerleri Tablo 2.1. ve Tablo 2.2. de gösterilmiştir [47]:

Tablo 2.1. Birinci tip Stirling sayıları, $s(n, k)$, için değerler tablosu

n/k	k=0	k = 1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7
n=0	1							
n=1		1						
n=2		-1	1					
n=3		2	-3	1				
n=4		-6	11	-6	1			
n=5		24	-50	35	-10	1		
n=6		-120	274	-225	85	-15	1	
n=7		720	-1764	1624	-735	175	-21	1

Tablo 2.2. İkinci tip Stirling ssayıları, $S(n, k)$, için değerler tablosu

n/k	k=0	k = 1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7
n=0	1							
n=1		1						
n=2		1	1					
n=3		1	3	1				
n=4		1	7	6	1			
n=5		1	15	25	10	1		
n=6		1	31	90	65	15	1	
n=7		1	63	301	350	140	21	1

2.3. Charlier Polinomlarının Temel Özellikleri

Charlier polinomları $C_n(x, \alpha)$ [30-32,50],

$$e^{-\alpha w} (1 + w)^x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, \alpha) \frac{w^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanırlar ve

$$C_n(x, \alpha) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! (-\alpha)^{n-k} \binom{x}{k} \quad (2.9)$$

açık ifadesine sahiptirler. Bunlar Charlier tarafından sunulmuş [32] ve x 'e göre n . dereceden polinomdurlar. Ayrıca, $\alpha > 0$ için, bunlar pozitif reel ekseninde bir ayırık dağılıma göre ortogonal polinomlar sistemi oluştururlar; yani aşağıdaki ayırık ortogonalite bağıntısını sağlarlar:

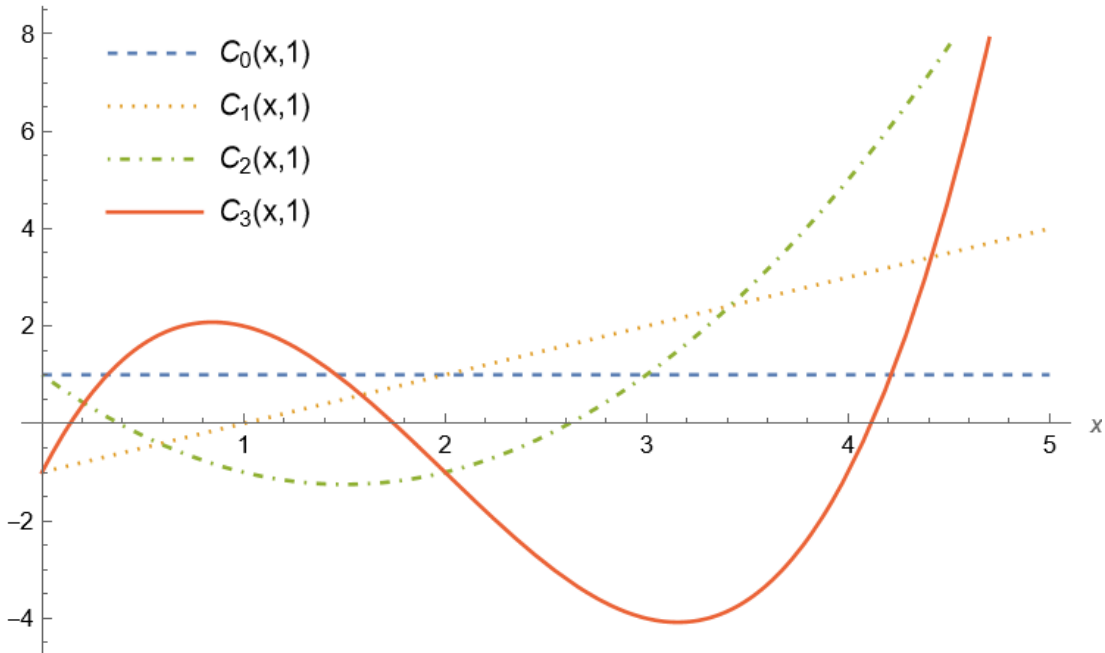
$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n(k, \alpha) C_m(k, \alpha) \frac{\alpha^k}{k!} = e^{\alpha} \alpha^n n! \delta_{mn}; \quad m, n = 0, 1, \dots$$

Ek olarak, $\alpha > 0$ için, ayırık dağılımlı $C_n(x, \alpha)$ Charlier polinomları

$$C_{n+1}(x, \alpha) = (x - n - \alpha)C_n(x, \alpha) - \alpha n C_{n-1}(x, \alpha); \quad C_0(x, \alpha) = 1, \quad C_{-1}(x, \alpha) = 0.$$

rekürans bağıntısını sağlarlar. $\alpha = 1$ için $C_n(x, \alpha)$ polinomlarının bazıları ve grafikleri Şekil 2.1 de verilmiştir:

$$\begin{aligned} C_0(x, 1) &= 1, \\ C_1(x, 1) &= x - 1, \\ C_2(x, 1) &= x^2 - 3x + 1, \\ C_3(x, 1) &= x^3 - 6x^2 + 8x - 1 \end{aligned}$$



Şekil 2.1 $\alpha=1$ için Charlier Polinomlarının Grafiği

2.4. Temel Problem

Bu çalışmada, yüksek mertebeden lineer Fredholm-Volterra tipindeki

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{j=0}^J Q_{rj}(x) y^{(r)}(\alpha_j x + \beta_j) = g(x) + \delta_1 F(x) + \delta_2 V(x); \quad (2.10)$$

$$F(x) = \int_a^b K_f(x, t) y(\lambda t + \mu) dt \text{ ve } V(x) = \int_a^x K_v(x, t) y(\gamma t + \eta) dt, \quad m_1 \leq m, \quad a \leq x, t \leq b.$$

fonksiyonel integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)] = \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (2.11)$$

başlangıç-sınır koşulları altında,

$$y(x) \cong \sum_{n=0}^N a_n C_n(x, \alpha) \quad (2.12)$$

ile tanımlanan sonlu Charlier seri formunda yaklaşık çözümleri araştırılmaktadır.

Burada $P_k(x)$, $Q_{rj}(x)$, $K_f(x, t)$, $K_v(x, t)$ ve $g(x)$ fonksiyonları, $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı bilinen analitik fonksiyonlardır; ayrıca α_j , β_j ,

λ , μ , γ , η , δ_1 , δ_2 , λ_j , a_{jk} ve b_{jk} uygun sabitlerdir; $y(x)$ bulunması gereken bilinmeyen fonksiyondur. $C_n(x, \alpha)$, Kesim 2.2.de tanımlanan α -parametrelili Charlier polinomları ve a_n bulunması gereken Charlier katsayılarıdır.

Diğer taraftan;

- Eğer (2.10) denkleminde $\delta = \delta_2 = 0$ iken; denklem m. Mertebe karışık argümentli gecikmeli diferansiyel denklem, $\alpha_j = 1$ olması halinde de denklem m.mertebe diferansiyel-fark denklemi olur.
- (2.10) denkleminde $\alpha_j = \lambda = \gamma = 1$ olması halinde, bu denklem m.mertebeden lineer fonksiyonel integro-diferansiyel-fark denklemi olarak adlandırılabilir.
- (2.10) denkleminde, $Q_{rj}(x) = 0$, $\lambda = \gamma = 1$, $\mu = \eta = 0$ halinde denklem Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemine indirgenir.

- Özet olarak, (2.10) ile tanımlanan lineer fonksiyonel integro-diferansiyel denklemi; adi diferansiyel denklemi, Fredholm ve integral denklemi, pantograph tipindeki tüm denklemler gibi oldukça çok denklemleri içinde bulundururlar.

Bu tez çalışmasındaki amacımız, (2.10)-(2.11) probleminin (2.12) formunda çözümünü bulmak için, Kesim 2.1 de bahsedilen matris-sıralama yöntemleri de gözönüne alınarak, standart sıralama noktalarına ve Charlier polinomlarına dayalı bir “**matris-sıralama yöntemi**” geliştirmektir. Ayrıca, rezidüel (kalan) fonksiyonla bağlantılı hata analiz tekniği kullanılarak, geliştirilen yöntemin etkinliğini ve uygulanabilirliğini test etmektir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Charlier Polinomlarının Temel Matris Özellikleri

Bu kesimde, (2.1), (2.2) ve (2.6), (2.8) ile tanımlanan binom katsayı fonksiyonları, faktöriyel polinomları ve Stirling sayıları arasındaki matris bağıntıları oluşturulmakta ve elde edilen sonuçlar, Charlier polinomları ile Charlier matris yönteminin kurulmasında kullanılmaktadır. Bu ifadelerle ilgili açıklamalar kısaca aşağıda sunulmuştur.

Önce 1.tip Stirling sayıları, azalan faktöriyel polinomları ve binom katsayı polinomları arasındaki (2.6) bağıntısını,

$$\binom{x}{n} = \frac{[x]_n}{n!} = \frac{\sum_{k=0}^n s(n,k) x^k}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{s(n,k)}{n!} x^k$$

olarak yazarız ve $n=0,1,2, \dots, N$ için, $\binom{x}{n}$ ve x^n tabanlarına göre, bu ifadeyi

$$\binom{x}{0} = \sum_{k=0}^0 \frac{s(0,k)}{0!} x^k = \frac{s(0,0)}{0!} x^0$$

$$\binom{x}{1} = \sum_{k=0}^1 \frac{s(1,k)}{1!} x^k = \frac{s(1,0)}{1!} x^0 + \frac{s(1,1)}{1!} x^1$$

$$\binom{x}{2} = \sum_{k=0}^2 \frac{s(2,k)}{2!} x^k = \frac{s(2,0)}{2!} x^0 + \frac{s(2,1)}{2!} x^1 + \frac{s(2,2)}{2!} x^2$$

$\vdots$

$$\binom{x}{N} = \sum_{k=0}^N \frac{s(N,k)}{N!} x^k = \frac{s(N,0)}{N!} x^0 + \frac{s(N,1)}{N!} x^1 + \dots + \frac{s(N,N)}{N!} x^N$$

açık hale veya

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \binom{x}{0} \\ \binom{x}{1} \\ \binom{x}{2} \\ \vdots \\ \binom{x}{N} \end{bmatrix}}_{(\chi(x))^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s(0,0)}{0!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{s(1,0)}{1!} & \frac{s(1,1)}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{s(2,0)}{2!} & \frac{s(2,1)}{2!} & \frac{s(2,2)}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{s(N,0)}{N!} & \frac{s(N,1)}{N!} & \frac{s(N,2)}{N!} & \dots & \frac{s(N,N)}{N!} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_1^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \dots \\ x^N \end{bmatrix}}_{(\mathbf{X}(x))^T}$$

matris formuna veya kısaca

$$(\chi(x))^T = \mathbf{S}_1^T (\mathbf{X}(x))^T \Rightarrow \chi(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S}_1 \quad (3.1)$$

matris denkleminde dönüştürürüz. Burada, içerilen matrisler

$$\chi(x) = \begin{bmatrix} \binom{x}{0} & \binom{x}{1} & \binom{x}{2} & \dots & \binom{x}{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \frac{s(0,0)}{0!} & \frac{s(1,0)}{1!} & \frac{s(2,0)}{2!} & \dots & \frac{s(N,0)}{N!} \\ 0 & \frac{s(1,1)}{1!} & \frac{s(2,1)}{2!} & \dots & \frac{s(N,1)}{N!} \\ 0 & 0 & \frac{s(2,2)}{2!} & \dots & \frac{s(N,2)}{N!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s(N,N)}{N!} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmaktadır. Benzer şekilde, (2.7) bağıntısından

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n,k) [x]_k = \sum_{k=0}^n S(n,k) k! \binom{x}{k}$$

yazılabilir ve $n=0,1,2, \dots, N$ için, aşağıdaki matris bağıntıları elde edilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}^T(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0! S(,00) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1! S(1,0) & 1! S(1,1) & 0 & \dots & 0 \\ 2! S(2,0) & 2! S(2,1) & 2! S(2,2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N! S(N,0) & N! S(N,1) & N! S(N,2) & \dots & N! S(N,N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_2^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \binom{x}{0} \\ \binom{x}{1} \\ \binom{x}{2} \\ \vdots \\ \binom{x}{N} \end{bmatrix}}_{(\boldsymbol{\chi}(x))^T},$$

veya kısaca

$$(\mathbf{X}(x))^T = \mathbf{S}_2^T (\boldsymbol{\chi}(x))^T \Rightarrow \mathbf{X}(x) = \boldsymbol{\chi}(x) \mathbf{S}_2 \Rightarrow \boldsymbol{\chi}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S}_2^{-1}; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0! S(0,0) & 1! S(1,0) & 2! S(2,0) & \dots & N! S(N,0) \\ 0 & 1! S(1,1) & 2! S(2,1) & \dots & N! S(N,1) \\ 0 & 0 & 2! S(2,2) & \dots & N! S(N,2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N! S(N,N) \end{bmatrix}.$$

Açıklama: (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden $\mathbf{S}_1$ ve $\mathbf{S}_2$ matrisleri arasında $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2^{-1}$ bağıntısının olduğu görülür.

Charlier polinomlarının matris formu ise, (2.9) da tanımlanan

$$C_n(x, \alpha) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! (-\alpha)^{n-k} \binom{x}{k}$$

ifadesinde, kesme sınırı N alınarak aşağıdaki gibi oluşturulur. Buna göre, önce $n=0,1,2, \dots, N$ için, (2.9) ifadesi açıkça

$$C_0(x, \alpha) = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} k! (-\alpha)^{0-k} \binom{x}{k} = \binom{0}{0} 0! (-\alpha)^0 \binom{x}{0}$$

$$C_1(x, \alpha) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} k! (-\alpha)^{1-k} \binom{x}{k} = \binom{1}{0} 0! (-\alpha)^1 \binom{x}{0} + \binom{1}{1} 1! (-\alpha)^0 \binom{x}{1}$$

$$\begin{aligned} C_2(x, \alpha) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} k! (-\alpha)^{2-k} \binom{x}{k} \\ &= \binom{2}{0} 0! (-\alpha)^2 \binom{x}{0} + \binom{2}{1} 1! (-\alpha)^1 \binom{x}{1} + \binom{2}{2} 2! (-\alpha)^0 \binom{x}{2} \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} C_n(x, \alpha) &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} k! (-\alpha)^{N-k} \binom{x}{k} \\ &= \binom{N}{0} 0! (-\alpha)^{N-0} \binom{x}{0} + \binom{N}{1} 1! (-\alpha)^{N-1} \binom{x}{1} + \binom{N}{2} 2! (-\alpha)^{N-2} \binom{x}{2} \\ &\quad + \dots + \binom{N}{N} N! (-\alpha)^0 \binom{x}{N} \end{aligned}$$

olarak yazılır ve

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_0(x, \alpha) \\ C_1(x, \alpha) \\ C_2(x, \alpha) \\ \vdots \\ C_N(x, \alpha) \end{bmatrix}}_{C^T(x, \alpha)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \binom{0}{0} 0! (-\alpha)^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} 0! (-\alpha)^1 & \binom{1}{1} 1! (-\alpha)^0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{0} 0! (-\alpha)^2 & \binom{2}{1} 1! (-\alpha)^1 & \binom{2}{2} 2! (-\alpha)^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{N}{0} 0! (-\alpha)^N & \binom{N}{1} 1! (-\alpha)^{N-1} & \binom{N}{2} 2! (-\alpha)^{N-2} & \dots & \binom{N}{N} N! (-\alpha)^0 \end{bmatrix}}_{J^T(\alpha)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \binom{x}{0} \\ \binom{x}{1} \\ \binom{x}{2} \\ \vdots \\ \binom{x}{N} \end{bmatrix}}_{\chi^T(x)}$$

matris formuna veya kısaca

$$\boxed{\mathbf{C}(x, \alpha) = \boldsymbol{\chi}(x) \mathbf{J}(\alpha)} \quad (3.3)$$

matris denkleminde dönüştürülür; burada içerilen matrisler

$$\mathbf{C}(x, \alpha) = [C_0(x, \alpha) \ C_1(x, \alpha) \ C_2(x, \alpha) \ \dots \ C_N(x, \alpha)],$$

$$\boldsymbol{\chi}(x) = \begin{bmatrix} \binom{x}{0} & \binom{x}{1} & \binom{x}{2} & \dots & \binom{x}{N} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}(\alpha) = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}0!(-\alpha)^0 & \binom{1}{0}0!(-\alpha)^1 & \binom{2}{0}0!(-\alpha)^2 & \dots & \binom{N}{0}0!(-\alpha)^N \\ 0 & \binom{1}{1}1!(-\alpha)^0 & \binom{2}{1}1!(-\alpha)^1 & \dots & \binom{N}{1}0!(-\alpha)^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}2!(-\alpha)^0 & \dots & \binom{N}{2}(-\alpha)^{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N}N!(-\alpha)^0 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Sonuç olarak (3.1) ve (3.3) veya (3.2) ve (3.3) bağıntılarından Charlier polinomlarının matris formu sırasıyla,

$$\mathbf{C}(x, \alpha) = \boldsymbol{\chi}(x) \mathbf{J}(\alpha) \Rightarrow \boxed{\mathbf{C}(x, \alpha) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S}_1 \mathbf{J}(\alpha)}$$

veya

$$\mathbf{C}(x, \alpha) = \boldsymbol{\chi}(x) \mathbf{J}(\alpha) \Rightarrow \boxed{\mathbf{C}(x, \alpha) = \mathbf{X}(x) \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{J}(\alpha)} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir.

3.2. Charlier Polinomlarına Dayalı Matris Sıralama Yöntemi

Bu kesimde, (2.10)-(2.11) ile tanımlanan problemin (2.12) sonlu Charlier serisi formunda çözümünü bulmak için Charlier Matris-Sıralama yöntemi kurulmaktadır. Bu amaç için, problemin her bir teriminin (parçasının) matris formları aşağıdaki kesimlerde oluşturulmuştur.

3.2.1. Diferansiyel Kısımn Matris Formu

Verilen (2.10) denkleminin (2.11) koşullarına göre (2.12) Charlier polinomları cinsinden çözümlerini bulmak için, öncelikle, $y(x)$ çözüm fonksiyonu ve türevlerinin matris formlarını aşağıdaki gibi oluşturmamız gerekmektedir. Bu nedenle, (2.12) ile tanımlanan kesilmiş Charlier serisinin matris formu

$$\begin{aligned} y(x) &\cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n C_n(x, a), \quad \alpha > 0 \\ &= a_0 C_0(x, a) + a_1 C_1(x, a) + \dots + a_N C_N(x, a) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_0(x, a) & C_1(x, a) & \dots & C_N(x, a) \end{bmatrix}}_{C(x, a)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}}_A \end{aligned}$$

olarak yazılır ve (3.4) matris bağıntısını kullanarak, kısaca

$$\boxed{y(x) \cong y_N(x) = C(x, a) \mathbf{A}} \quad \text{veya} \quad \boxed{y(x) \cong y_N(x) = C(x, a) \mathbf{A}} \quad (3.5)$$

$$\boxed{= \mathbf{X}(x) \mathbf{S}_1 \mathbf{J}(a) \mathbf{A}} \quad \boxed{= \mathbf{X}(x) \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{J}(a) \mathbf{A}}$$

haline indirgenir; ayrıca $y^{(k)}(x)$ türevinin matris formu, $k=0,1,2, \dots, N$ için,

$$\boxed{y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{S}_1 \mathbf{J}(a) \mathbf{A}} \quad \text{veya} \quad \boxed{y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{J}(a) \mathbf{A}} \quad (3.6)$$

$$\boxed{= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{S}_1 \mathbf{J}(a) \mathbf{A}} \quad \boxed{= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{J}(a) \mathbf{A}}$$

olur. Burada $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix},$$

olarak tanımlanmaktadır. $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ ve $\mathbf{J}(\alpha)$ matrisleri sabit olduklarından,

$\mathbf{M}(\alpha) = \mathbf{S}_1 \mathbf{J}(\alpha)$ veya $\mathbf{M}(\alpha) = \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{J}(\alpha)$ olarak, (3.5) ve (3.6) bağıntılarının yerine

$$y^{(k)}(x) \equiv y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{M}(a) \mathbf{A}, \quad k=0,1,2, \dots, m \quad (3.7)$$

matris formu kullanılabilir.

Dolayısıyla, (3.7) türev ifadesini, (2.10) denkleminin diferansiyel kısmında(parçasında) yerine koyarak

$$D(x) = \sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{M}(a) \mathbf{A} \quad (3.8)$$

matris formu elde edilir.

3.2.2. Fonksiyonel Diferansiyel Kısımın Matris Formu

Fonksiyonel diferansiyel kısmının matris formu için, önceki kesimde verilen (3.7) matris bağıntısında $x \rightarrow \alpha_j x + \beta_j$ konularak ve düzenlenerek [2,4,10,11],

$$\begin{aligned} y^{(r)}(\alpha_j x + \beta_j) &\equiv y_N^{(r)}(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{X}(\alpha_j x + \beta_j) \mathbf{B}^r \mathbf{M}(a) \mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^r \mathbf{M}(a) \mathbf{A} \end{aligned} \quad r=0,1,2,\dots,m \quad (3.9)$$

matris bağıntısı kurulur; burada

$$\mathbf{X}(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j)$$

olduğu iyi bilinmektedir [11,12,16] ve $\mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j)$ matrisi

$$\mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_j^0 \beta_j^0 & \binom{1}{0} \alpha_j^0 \beta_j^1 & \binom{2}{0} \alpha_j^0 \beta_j^2 & \cdots & \binom{N}{0} \alpha_j^0 \beta_j^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_j^1 \beta_j^0 & \binom{2}{1} \alpha_j^1 \beta_j^1 & \cdots & \binom{N}{1} \alpha_j^1 \beta_j^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_j^2 \beta_j^0 & \cdots & \binom{N}{2} \alpha_j^2 \beta_j^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{N}{N} \alpha_j^N \beta_j^0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmaktadır. Böylece, (3.9) türev ifadesini, (2.10) denkleminin fonksiyonel diferansiyel kısmında(parçasında) yerine koyarak fonksiyonel diferansiyel kısmına karşı gelen matris formu

$$D_f(x) = \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{j=0}^J Q_{rj}(x) y^{(r)}(\alpha_j x + \beta_j) = \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{j=0}^J Q_{rj}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^r \mathbf{M}(a) \mathbf{A} \quad (3.10)$$

olarak elde edilir.

3.2.3. Fonksiyonel Fredholm İntegral Kısımın Matris Formu

Kesim 2.4. da (2.10) fonksiyonel denkleminin

$$F(x) = \int_a^b K_f(x, t) y(\lambda t + \mu) dt, \quad a \leq x, t \leq b$$

ile verilen Fredholm integral kısmın matris formunu oluşturmak için, bir önceki kesimde oluşturulan (3.9) matris bağıntısında, önce $x = t$, $a_j = \lambda$, $\beta_j = \mu$ ve $r=0$ alınarak

$$y(\lambda t + \mu) = X(\lambda t + \mu) M(a) A$$

bağıntısı kurulur. Aynı zamanda, $X(\lambda x + \mu) = X(x) B(\lambda, \mu)$ olduğundan, bu bağıntı

$$y(\lambda t + \mu) = X(t) B(\lambda, \mu) M(a) A \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

Sonra, $K_f(x, t)$ çekirdek fonksiyonun matris formu

$$K(x, t) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \end{bmatrix} K_f \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} = X(x) K_f X^T(t)$$

alınarak, kısaca,

$$K(x, t) = X(x) K_f X^T(t); \quad (3.12)$$

burada

$$K_f = [k_{pq}^f], \quad k_{pq}^f = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K_f(0,0)}{\partial x^p \partial t^q}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, N.$$

olarak yazılır [27-29,33-35]. Elde edilen (3.11) ve (3.12) ifadeleri Fredholm kısmında yerine konularak ve düzenlenerek, $F(x)$ ' in matris formu

$$\begin{aligned} F(x) &= X(x) K_f \int_a^b X^T(t) X(t) dt B(\lambda, \mu) M(a) A \\ &= X(x) K_f Q_f B(\lambda, \mu) M(a) A; \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bulunur; burada

$$Q_f = \int_a^b X^T(t) X(t) dt = [q_{mn}^f]; q_{mn}^f = \frac{b^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m+n+1}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, N$$

şeklinde hesaplanır [27-29,33-35].

3.2.4. Fonksiyonel Volterra İntegral Kısımın Matris Formu

Bir önceki kesimde oluşturulan (3.11)-(3.13) işlemlerinden yararlanarak,

$$V(x) = \int_a^x K_v(x,t) y(\gamma t + \eta) dt, \quad a \leq x, t \leq b$$

Volterra integral parçası ile bağlantılı

$$y(\gamma t + \eta) = X(t) B(\gamma, \eta) M(a) A,$$

$$K_v(x,t) = X(x) K_v X^T(t),$$

ve

$$\begin{aligned} V(x) &= X(x) K_v \int_a^x X^T(t) X(t) dt B(\gamma, \eta) M(a) A \\ &= X(x) K_v Q_v(x) B(\gamma, \eta) M(a) A; \end{aligned} \quad (3.14)$$

matris bağıntıları elde edilir. Burada K_v ve $Q_v(x)$ matrisleri

$$K_v = [k_{pq}^v], \quad k_{pq}^v = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} K_v(0,0)}{\partial x^p \partial t^q}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, N.$$

ve

$$Q_v(x) = \int_a^x X^T(t) X(t) dt = [q_{mn}^v(x)]; \quad q_{mn}^v(x) = \frac{x^{m+n+1} - a^{m+n+1}}{m+n+1}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, N$$

formülleri ile hesaplanır [11,27,29,35].

3.2.5 Çözüm Yöntemi

Bu kesimde, (2.10) ile tanımlanan fonksiyonel lineer integro-diferansiyel denkleminin, Charlier ve Taylor polinomları cinsinden çözümlerini bulmak için bir matris-sıralama yöntemi geliştiririz. Bu amaçla, ilk önce $D(x)$, $D_f(x)$, $F(x)$ ve $V(x)$ ile gösterilen (3.8), (3.10), (3.13) ve (3.14) matris bağıntılarını (2.10) denkleminde yazarak

$$\begin{aligned} \{ \sum_{k=0}^m P_k(x) X(x) B^k + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{j=0}^J Q_{rj}(x) X(x) B(\alpha_j, \beta_j) B^r - \delta_1 X(x) K_f Q_f B(\lambda, \mu) \\ - \delta_2 X(x) K_v Q_v(x) B(\gamma, \eta) \} M(\alpha) A = g(x) \end{aligned}$$

matris denklemini elde ederiz. Daha sonra, bu denklemde

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{N} \right) i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

ile tanımlı sıralama noktalarını yerleştirirsek,

$$\left\{ \sum_{k=0}^m P_k(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}^k + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{j=0}^J Q_{rj}(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^r - \delta_1 X(x_i) K_f Q_f B(\lambda, \mu) \right. \\ \left. - \delta_2 X(x_i) K_v Q_v(x_i) B(\gamma, \eta) \right\} \mathbf{M}(\alpha) A = g(x_i)$$

matris denklemler sistemi oluşturulur. Bu sistem, kompakt formunda,

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{j=0}^J \mathbf{Q}_{rj} \mathbf{X} \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^r - \delta_1 \mathbf{X} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f \mathbf{B}(\lambda, \mu) \right. \\ \left. - \delta_2 \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}}_v \bar{\mathbf{Q}}_v B(\gamma, \eta) \right\} \mathbf{M}(\alpha) A = \mathbf{G} \quad (3.15)$$

matris denklemi olarak yazılır ki buna (2.10) fonksiyonel integro diferansiyel denkleminin temel matris denklemi denir; bu denklem içindeki matrisler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{rj} = \begin{bmatrix} Q_{rj}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{rj}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{rj}(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_v = \begin{bmatrix} K_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_v \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}}_v = \begin{bmatrix} Q_v(x_0) \\ Q_v(x_1) \\ \vdots \\ Q_v(x_N) \end{bmatrix}.$$

Ayrıca, (3.15) temel matris denklemi,

$$\mathbf{W} = [w_{pq}] = \left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{j=0}^J \mathbf{Q}_{rj} \mathbf{X} \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^r - \delta_1 \mathbf{X} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f \mathbf{B}(\lambda, \mu) - \delta_2 \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}}_v \bar{\mathbf{Q}}_v \mathbf{B}(\gamma, \eta) \right\} \mathbf{M}(\alpha), \quad p, q = 0, 1, \dots, N,$$

olmak üzere, kısaca,

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W} ; \mathbf{G}] \quad (3.16)$$

formunda yazılabilir. Aynı zamanda, (3.15) veya (3.16) matris denklemi, $\{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ bilinmeyen katsayılı, $(N+1)$ cebirsel denklemden oluşan bir sisteme karşılık gelir.

Şimdi, (2.11) başlangıç-sınır koşulları için matris formu, (3.7) matris bağıntısı yardımıyla,

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{kj} \mathbf{X}(a) + b_{kj} \mathbf{X}(b)] \cdot \mathbf{B}^k \mathbf{M}(\alpha) \mathbf{A} = \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

olarak bulunur veya

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{kj} \mathbf{X}(a) + b_{kj} \mathbf{X}(b)] \cdot \mathbf{B}^k \mathbf{M}(\alpha) = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \dots \quad u_{jN}]$$

olmak üzere,

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \lambda_j \quad \text{veya} \quad \Rightarrow [\mathbf{U}_j ; \lambda_j], \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.17)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, temel matris denklemine karşı gelen (3.16) arttırılmış matris formunda bulunan son m tane satır matrislerinin silinip, yerine koşullara karşı gelen (3.17) arttırılmış matrisinin konulmasıyla, aşağıdaki gibi yeni arttırılmış matris elde edilir:

$$[\tilde{W} ; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Eğer, (3.18) de $\text{rank } \tilde{W} = \text{rank} [\tilde{W} ; \tilde{G}] = N+1$, ise $A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G}$ belirlenir.

Dolayısıyla, A katsayılar matrisi tek olarak elde edilir. Dolayısıyla, (2.10)-(2.11) problemi bir tek çözüme sahip olur. Eğer $\text{rank } \tilde{W} \neq \text{rank} [\tilde{W} ; \tilde{G}]$ ise, problemin bir çözümü bulunamaz

3.3. Rezidüel Fonksiyona Dayalı Hata Analizi

Bu kesimde, (2.10)-(2.11) probleminin Kesim 3.2.5. de sunulan kesilmiş Charlier seri formuna dayalı matris-sıralama yöntemiyle elde edilen (2.12) çözümlerinin doğruluğunu ve kullanılabilirliğini kontrol edebilmek için aşağıdaki işlemler yapılmaktadır.

(2.12) ile tanımlı $y_N(x)$ kesilmiş Charlier serisi (veya Charlier polinomu), (2.10) fonksiyonel integro-diferansiyel denkleminin bir yaklaşık çözümü olduğundan, $y_N(x)$ çözümü denklemde yerine konulduğunda denklem sağlanmalıdır; yani, her $x \in [a, b]$ için,

$$R_N(x) = \sum_{k=0}^m P_k(x) y_N^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{j=0}^J Q_{rj}(x) y_N^{(r)}(\alpha_j x + \beta_j) - \delta_1 F(x) - \delta_2 V(x) - g(x) \cong 0$$

olmalıdır. Böylece, oluşan bu $R_N(x)$ fonksiyonuna rezidüel (kalan) fonksiyon denir. Diğer yandan, eğer problemin $y(x)$ tam çözümü biliniyorsa, $y(x)$ ve $y_N(x)$ çözümleri arasındaki farka, $e_N(x)$ fonksiyonuna, hata fonksiyonu denir;

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

olarak tanımlanmaktadır. $|e_N(x)|$ fonksiyonuna da mutlak hata fonksiyonu denir.

Ayrıca, $R_N(x)$ rezidüel fonksiyonunu ve $[a,b]$ aralığında $|R_N(x)|$ in ortalama değerini kullanarak da, çözümün doğruluğu veya hassasiyeti incelenebilir ve hata sınırı tahmin edilebilir [4,10,11,12,16,26,51]. Burada N , yeterince büyük olduğunda hata azalır; yani $R_N(x) \rightarrow 0$ olur. Ayrıca, Ortalama Değer Teoremi vasıtasıyla, hatanın $\bar{R}_N$ üst sınırı aşağıdaki gibi tahmin edilebilir [9,25,29,36,37,52,53]:

$$i) \quad \left| \int_a^b R_N(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx,$$

$$ii) \quad \int_a^b R_N(x) dx = (b-a)R_N(c), \quad c \in [a,b]$$

$$iii) \quad \left| \int_a^b R_N(x) dx \right| = (b-a)|R_N(c)|.$$

(i) ve (iii) ifadelerini kullanarak ortalama hatanın üst sınırı

$$(b-a)|R_N(x_0)| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx \Rightarrow |R_N(x_0)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N.$$

olarak tahmin edilebilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Örnek 4.1 Öncelikle

$$y''(x) - xy'(x+1) = x^2 + x + \int_0^1 xy(t-1)dt - \int_0^x y(t+1)dt,$$

Fredholm-Volterra türü integro-diferansiyel denkleminin $y(0) = -1, y'(0) = 2$

koşulları altındaki çözümünü inceleyelim. Bu problem için $P_0(x) = 0, P_1(x) = 0,$

$$P_2(x) = 1, Q_{00}(x) = 0, \alpha_0 = 0, \beta_0 = 0, Q_{10}(x) = -x, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 1, g(x) = x^2 + x, a = 0,$$

$$b = 1, F(x) = \delta_1 = 1, K_f(x, t) = x, \lambda = 1, \mu = -1, V(x) = \delta_2 = -1, K_v(x, t) = 1, \gamma = 1, \eta = 1$$

olup problemin tam çözümü $y(x) = 2x - 1$ dir. $N = 2$ için Charlier polinomlarına dayalı

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n C_n(x, \alpha), \alpha = 1, 0 \leq x \leq 1$$

formunda çözümler aranacaktır. $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris denklemleri,

$$\{P_0 XB^0 + P_1 XB^1 + P_2 XB^2 + Q_{00} XB(\alpha_0, \beta_0) B^0 + Q_{10} XB(\alpha_1, \beta_1) B^1 - \delta_1 XK_f Q_f B(\lambda, \mu) - \delta_2 \bar{X} \bar{K}_v \bar{Q}_v B(\gamma, \eta)\} \\ M(\alpha)A = G$$

şeklindedir. Bu denklemdeki matrisler

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda, \mu) = B(1, -1), \quad B(\gamma, \eta) = B(1, 1)$$

$$K_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_f = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{64} & \frac{1}{160} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \bar{K}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow M(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Probleme karşılık gelen $[\mathbf{W} ; \mathbf{G}]$ matrisi,

$$[\mathbf{W} ; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & ; & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -3 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

olup verilen koşula karşılık gelen matris ise,

$$\mathbf{U} = [U \quad ; \quad \lambda] = \begin{bmatrix} u_0 & ; & \lambda_0 \\ u_1 & ; & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 1 & -3 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylelikle probleme ait genişletilmiş matris

$$[\tilde{\mathbf{W}} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 1 & -1 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 1 & -3 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrise karşılık gelen lineer cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

olarak bulunur; katsayılar (3.5) te yerine yazılarak $y_2(x)$ yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = 2x - 1$$

olarak bulunur. Böylece tam çözüme ulaşılır.

Bu problemi bir de α parametresine bağlı olarak çözelim. Burada $M(\alpha) = S_1 \cdot J(\alpha)$ olmak üzere $M(\alpha)$ matrisi

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & -2\alpha - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Problemin çözüm matrisi ise

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2\alpha - 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylelikle probleme ait $[W; G]$ matrisi

$$[W; G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{4} & ; & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -2\alpha - 1 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

olup koşullara karşılık gelen matris ise,

$$\mathbf{U} = [U \quad ; \quad \lambda] = \begin{bmatrix} u_0 & ; & \lambda_0 \\ u_1 & ; & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & ; & -1 \\ 0 & 1 & -2\alpha - 1 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş matris

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 1 & -\alpha & \alpha^2 & ; & -1 \\ 0 & 1 & -2\alpha - 1 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu matrise karşılık gelen lineer denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilen bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [2\alpha - 1 \quad 2 \quad 0]^T$$

şeklinde elde edilir; katsayıların (3.5) de yerine yazılmasıyla da $y_2(x)$ yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = 2x - 1$$

olarak bulunur ki bu da problemin tam çözümüdür.

Örnek 4.2 İkinci örnekte

$$y'(x) - 2y(x) + y'(x-1) - 2y(x-1) = -e^x - e^{x-1}$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümünü $y(0) = 1$ koşulu altında

araştıralım. Problemin tam çözümü $y(x) = e^x$ tir. Burada $P_0(x) = -2$, $P_1(x) = 1$,

$Q_{00}(x) = -2$, $Q_{10}(x) = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = -1$, $g(x) = -e^x - e^{x-1}$, $a = 0$, $b = 1$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ dir.

$N = 2$ için Charlier polinomlarına dayalı

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n C_n(x, \alpha), \quad \alpha = 1, 0 \leq x \leq 1$$

formunda çözümler aranacaktır. Sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris denklemleri,

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 P_k X B^k + \sum_{r=0}^1 \sum_{j=0}^0 Q_{rj} X B(\alpha_j, \beta_j) B^r \right\} M(\alpha) A = G$$

şeklindedir ve bu denklemden matrisler

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_{00} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, Q_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1.36788 \\ -2.25525 \\ -3.71828 \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Probleme karşılık gelen $[W ; G]$ matrisi,

$$[W ; G] = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -20 & ; & -1.36788 \\ -4 & 6 & -11 & ; & -2.25525 \\ -4 & 4 & -4 & ; & -3.71828 \end{bmatrix}$$

olup koşula karşılık gelen matris ise,

$$U = [1 \quad -1 \quad 1 \quad ; \quad 1]$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş matris

$$[\tilde{W} ; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -20 & ; & -1.36788 \\ -4 & 6 & -11 & ; & -2.25525 \\ 1 & -1 & 1 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu matrise karşılık gelen lineer denklem sisteminin çözülmesiyle

A matrisi

$$A = [2.9441 \quad 2.37279 \quad 0.42869]^T$$

şeklinde bulunur. Katsayılar (3.5) serisinde yerine yazıldığında $y_2(x)$ çözümü

$$y_2(x) = 1 + 1.08672x + 0.42869x^2$$

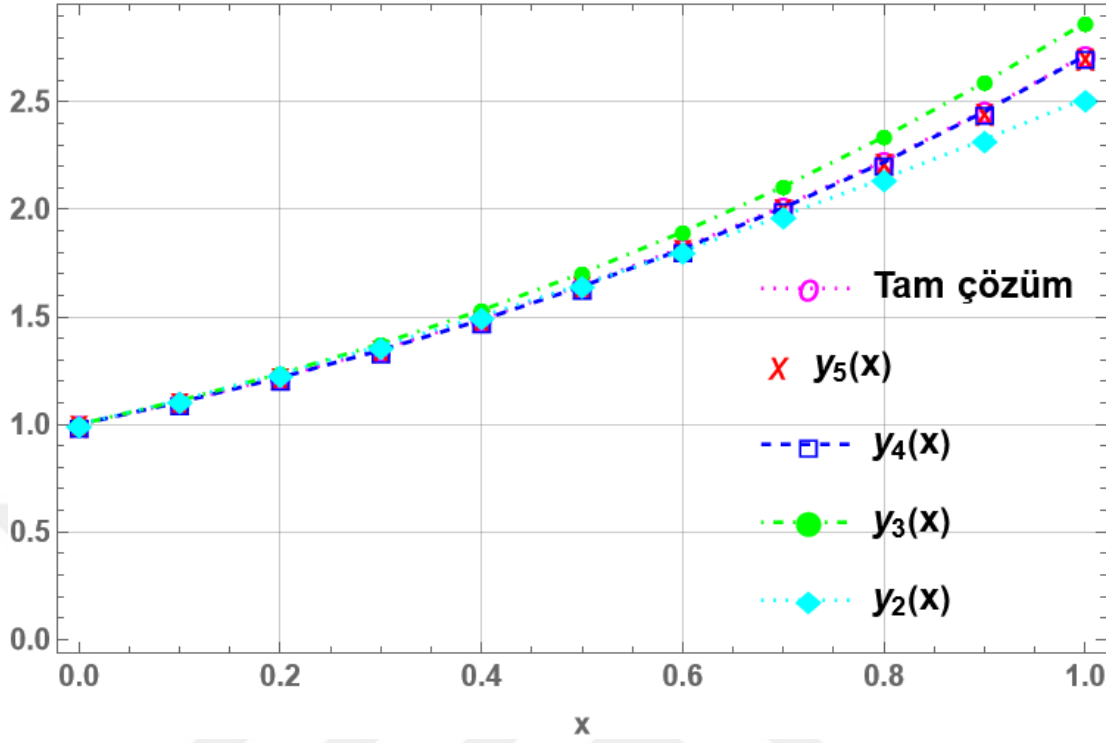
olarak bulunur. $N = 3, 4$ ve 5 için çözümler

$$y_3(x) = 0.999994 + 1.04437x + 0.628804x^2 + 0.193976x^3$$

$$y_4(x) = 1 + 0.982363x + 0.495586x^2 + 0.191266x^3 + 0.0452267x^4$$

$$y_5(x) = 1 + 0.998936x + 0.490346x^2 + 0.1619673x^3 + 0.0460545x^4 + 0.0092139x^5$$

olarak bulunur.



Şekil 4.1. N=2,3,4,5 için Örnek 4.2’deki Charlier polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.

Örnek 4.2 için Tahmini Hataların Üst Sınırları:

$$\{\bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4, \bar{R}_5\} = \{8.2373e-02, 1.4033e-02, 8.2038e-04, 3.1770e-05\}$$

Tablo 4.1 N=2,3,4,5 için Örnek 4.2 deki mutlak hataların karşılaştırılması

x_i	$y(x) = e^{x_i}$	$ e_2(x_i) $	$ e_3(x_i) $	$ e_4(x_i) $	$ e_5(x_i) $
0	1	0	0	0	0
0.1	1.0517	7.788e-03	5.855e-03	1.783e-03	2.072e-04
0.2	1.2214	1.309e-02	1.022e-02	3.504e-03	6.293e-04
0.3	1.34986	1.474e-02	1.24e-02	5.017e-03	1.278e-03
0.4	1.49182	1.145e-02	1.155e-02	6.187e-03	2.156e-03
0.5	1.64872	1.811e-03	6.721e-03	6.908e-03	3.254e-03

0.6	1.82212	1.576e-02	3.215e-03	7.115e-03	4.562e-03
0.7	2.03137	4.3e-02	1.953e-02	6.78e-03	6.067e-03
0.8	2.22554	8.18e-02	4.37e-02	6.022e-03	7.760e-03
0.9	2.4596	1.343e-01	7.736e-02	4.946e-03	9.650e-03
1	2.71828	2.03e-01	1.224e-01	3.84e-03	1.176e-02

Örnek 4.3 Üçüncü örnekte

$$y''(x) - e^{x+2}y'(x+1) = e^{-x} + \int_0^1 y(t-1)dt$$

integro diferansiyel fark denkleminin $y(0) = 2$ ve $y'(0) = -1$ koşulları altındaki

çözümünü inceleyelim. Burada $P_0(x) = P_1(x) = 0, P_2(x) = 1, Q_{00}(x) = 0,$

$Q_{10}(x) = -e^{x+2}, \alpha_0 = 1, \beta_0 = 1, g(x) = e^{-x}, a = 0, b = 1, \delta_1 = 1, K_f(x, t) = 1, \lambda = 1, \mu = -1, \delta_2 = 0$

olup problemin tam çözümü $y(x) = 1 + e^{-x}$ dir. Dikkat edilecek olursa $\delta_2 = 0$

olduğundan dolayı problem Fredholm tipi integro-diferansiyel fark denklemi olarak adlandırılır. Çözüme geçecek olursak, bu probleme N=2 için Charlier polinomları ile

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n C_n(x, \alpha), \alpha = 1; 0 \leq x \leq 1$$

formunda çözüm aranacaktır. N=2 için sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\}$$

şeklindedir. Problemin temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^2 P_k X B^k + \sum_{r=0}^1 \sum_{j=0}^0 Q_{rj} X B(\alpha_j, \beta_j) B^r - \delta_1 X K_f Q_f B(\lambda, \mu) \right\} M(1). A = G$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{10} = \begin{bmatrix} -7.38906 & 0 & 0 \\ 0 & -12.1825 & 0 \\ 0 & 0 & -20.0855 \end{bmatrix}, B(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_f = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, M(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.606531 \\ 0.36789 \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Probleme karşılık gelen $[W ; G]$ matrisi,

$$[W ; G] = \begin{bmatrix} 1 & -5.88906 & 6.55573 & ; & 1 \\ -1 & -10.6825 & -0.83333 & ; & 0.606531 \\ -1 & -18.5855 & -20.9188 & ; & 0.367879 \end{bmatrix}$$

olup verilen koşullara karşılık gelen matris ise,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & ; & 2 \\ 0 & 1 & -3 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylelikle probleme ait genişletilmiş matris

$$[\tilde{W} ; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} 1 & -5.88906 & 6.55573 & ; & 1 \\ 1 & -1 & 1 & ; & 2 \\ 0 & 1 & -3 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Bu matrise karşılık gelen lineer cebirsel denklem sisteminin

çözülmesiyle A bilinmeyen katsayılar matrisi

$$A = [1.5932309 \quad -0.1101535 \quad 0.296615]^T$$

olarak elde edilir; katsayıların (3.5) serisinde yerine yazılmasıyla da $y_2(x)$ yaklaşık çözümü

$$y_2(x) = 2 - 0.99999856x + 0.296615x^2$$

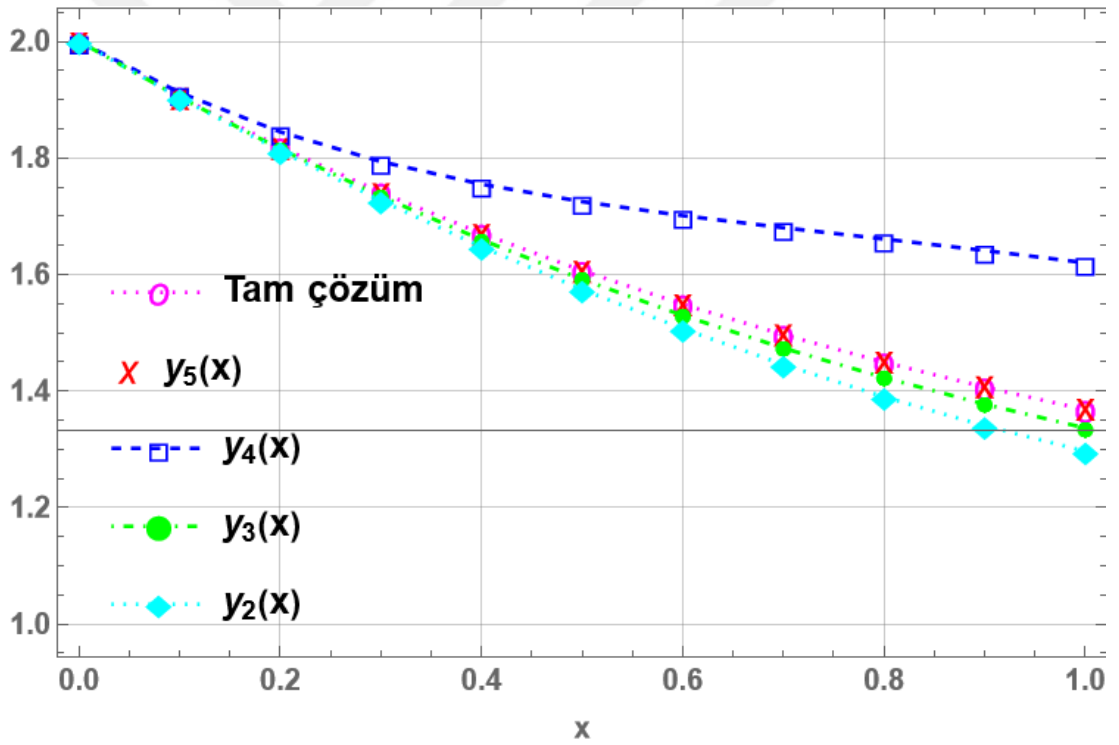
olarak elde edilir. Bu problemin N=3,4 ve 5 için yaklaşık çözümleri

$$y_3(x) = 2 - x + 0.395627x^2 - 0.0592314x^3$$

$$y_4(x) = 2 - x + 1.27963x^2 - 0.859634x^3 + 0.200026x^4$$

$$y_5(x) = 2 - x + 0.510584x^2 - 0.173223x^3 + 0.038406x^4 - 0.00412465x^5$$

olarak bulunur.



Şekil 4.2. N=2,3,4,5 için Örnek 4.3'deki Charlier polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması.

Örnek 4.3 için Tahmini Hataların Üst Sınırları:

$$\{\bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4, \bar{R}_5\} = \{1.8566, 4.5710e-02, 1.1876, 2.9598e-03\}$$

Tablo 4.2 N=2,3,4,5 için Örnek 4.3 deki mutlak hataların karşılaştırılması

x_i	$y(x) = 1 + e^{-x_i}$	$ e_2(x_i) $	$ e_3(x_i) $	$ e_4(x_i) $	$ e_5(x_i) $
0	2	0	0	0	0
0.1	1.9048	1.871e-03	9.404e-04	7.119e-03	9.90e-05
0.2	1.8187	6.866e-03	3.380e-03	2.590e-02	3.67e-04
0.3	1.7408	1.412e-02	6.881e-03	5.276e-02	7.584e-04
0.4	1.6703	2.286e-02	1.081e-02	8.453e-02	1.228e-03
0.5	1.6065	3.238e-02	1.503e-02	1.184e-01	1.734e-03
0.6	1.5488	4.203e-02	1.920e-02	1.521e-01	2.239e-03
0.7	1.4966	5.124e-02	2.304e-02	1.836e-01	2.713e-03
0.8	1.4493	5.949e-02	2.645e-02	2.114e-01	3.134e-03
0.9	1.4066	6.631e-02	2.930e-02	2.345e-01	3.486e-03
1	1.3680	7.126e-02	3.148e-02	2.521e-01	3.763e-03

Örnek 4.4 Dördüncü örnek olarak

$$y'''(x) - xy'(x) + y''(x-1) - xy(x-1) = -(x+1)[\sin(x-1) + \cos x] - \cos 2 + 1 + \int_{-1}^1 y(t-1) dt$$

Fredholm türü gecikmeli integro-diferansiyel denkleminin çözümünü $y(0) = 0$,

$y'(0) = 1, y''(x) = 0$ koşulları altında araştırılır. Problemin tam çözümü

$y(x) = \sin(x)$ olup burada $P_0(x) = 0, P_1(x) = -x, P_2(x) = 0, P_3(x) = 1, Q_{00}(x) = 0,$

$Q_{10}(x) = 1, Q_{20}(x) = 1, \alpha_0 = 1, \beta_0 = -1, \delta_1 = 1, K_f(x, t) = 1, \lambda = 1, \mu = -1,$

$g(x) = -(x+1)[\sin(x-1) + \cos(x)] - \cos(2) + 1, a = -1, b = 1$ dir. N=3 için

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n C_n(x, \alpha); \alpha = 1, -1 \leq x \leq 1$$

sonlu Charlier seri formunda çözüm aranacaktır. $N=3$ için sıralama noktaları

$$\{x_0 = -1, x_1 = -1/3, x_2 = 1/3, x_3 = 1\}$$

olarak hesaplanır. Problemin temel matris denklemi,

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 P_k X B^k + \sum_{r=0}^2 \sum_{j=0}^0 Q_{rj} X B(\alpha_j, \beta_j) B^r - \delta_1 X K_f Q_f B(\lambda, \mu) \right\} M(1).A = G$$

olup açık formu,

$$\left\{ \begin{aligned} &P_0 X B^0 + P_1 X B^1 + P_2 X B^2 + P_3 X B^3 + Q_{00} X B(\alpha_0, \beta_0) B^0 + Q_{10} X B(\alpha_0, \beta_0) B^1 + \\ &Q_{20} X B(\alpha_0, \beta_0) B^2 - \delta_1 X K_f Q_f B(\lambda, \mu) \end{aligned} \right\} M(1).A = G$$

şeklinde olup 0' a eşit olan terimleri yazmamak suretiyle matris denkleminin en sade hali

$$\{P_1 X B^1 + P_3 X B^3 + Q_{00} X B(\alpha_0, \beta_0) B^0 + Q_{20} X B(\alpha_0, \beta_0) B^2 - \delta_1 X K_f Q_f B(\lambda, \mu)\} M(1).A = G$$

biçiminde olur ki bu denklemdeki matrisler,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Q_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B(\alpha_0, \beta_0) = B(\lambda, \mu) = B(1, -1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1.4161468 \\ 1.4341341 \\ 0.9806973 \\ 0.3355422 \end{bmatrix}, Q_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{bmatrix}, M(1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Probleme karşılık gelen $[W ; G]$ matrisi

$$[W ; G] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -\frac{8}{3} & -6 \\ -\frac{5}{3} & \frac{32}{9} & -\frac{206}{27} & \frac{1610}{81} \\ -\frac{7}{3} & \frac{38}{9} & -\frac{244}{27} & \frac{2402}{81} \\ -3 & 4 & -\frac{26}{3} & 34 \end{bmatrix}$$

verilen koşullara karşılık gelen matris ise,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & ; & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 8 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece probleme ait genişletilmiş matris

$$[\tilde{W} ; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -\frac{8}{3} & -6 & ; & 1.4161468 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & ; & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 8 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu matrise karşılık gelen lineer cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar matrisi A

$$A = [0.7027523 \quad 0.4055045 \quad -0.3566973 \quad -0.0594495]^T$$

olarak bulunur; katsayıların (3.5) serisinde yerine yazılmasıyla $y_3(x)$ yaklaşık

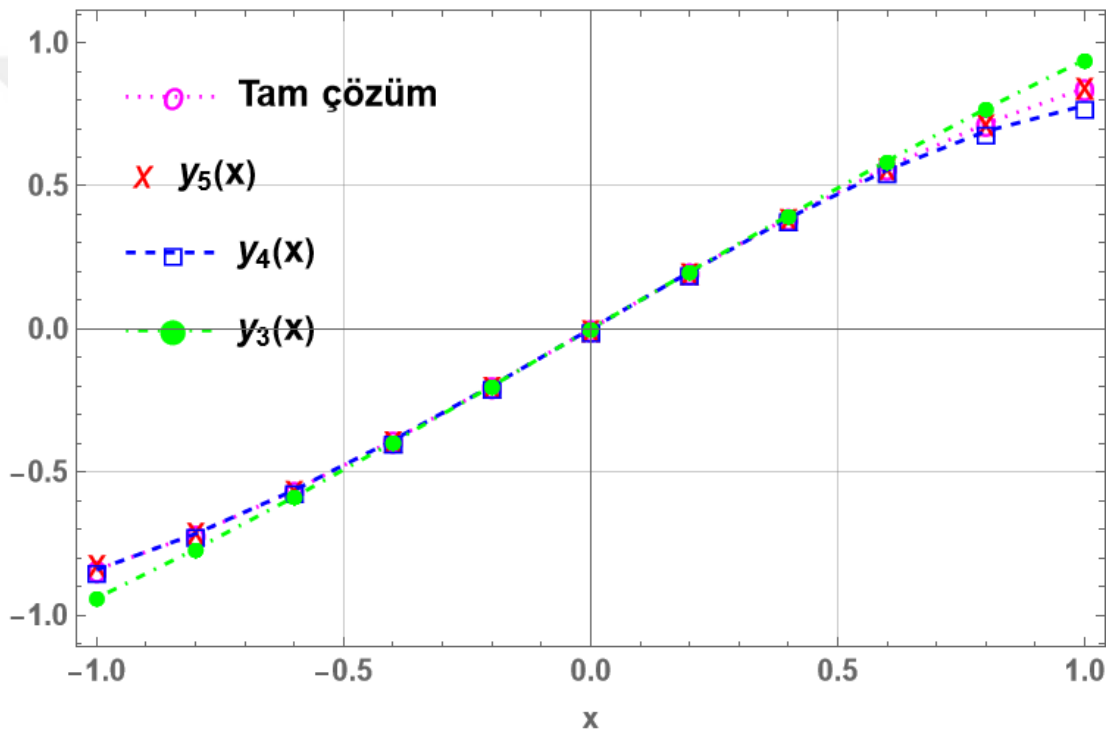
çözümü

$$y_3(x) = -1.249 \times 10^{-16} + x - 5.55112 \times 10^{-17} x^2 - 0.05945 x^3$$

olarak bulunur. $N=4, 5$ için yaklaşık çözümler aşağıdaki şekildedir.

$$y_4(x) = 1.627171 \times 10^{-15} + x + 5.551115 \times 10^{-16} x^2 - 0.18882 x^3 - 0.03056 x^4$$

$$y_5(x) = -1.4433 \times 10^{-15} + x - 0.176996 x^3 + 0.013347 x^4 + 0.010469 x^5$$



Şekil 4.3. $N=3,4,5$ için Örnek 4.4'deki Charlier polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması

Örnek 4.4 için Tahmini hataların Üst Sınırları:

$$\{\bar{R}_3, \bar{R}_4, \bar{R}_5\} = \{3.8018e-01, 3.2267e-01, 6.0058e-02\}$$

Tablo 4.3 N=3,4,5 için Örnek 4.4 teki yaklaşık ve tam çözümlerin karşılaştırılması

x_i	$y(x) = \sin x_i$	$y_3(x_i)$	$y_4(x_i)$	$y_5(x_i)$
-1	-0.8415	-0.9406	-0.8418	-0.820126
-0.9	-0.7833	-0.8567	-0.7824	-0.768395
-0.8	-0.7173	-0.7696	-0.7159	-0.707342
-0.7	-0.6442	-0.6796	-0.6426	-0.637845
-0.6	-0.5646	-0.5872	-0.5632	-0.560853
-0.5	-0.4794	-0.4926	-0.4783	-0.477368
-0.4	-0.3894	-0.3962	-0.3887	-0.388438
-0.3	-0.2955	-0.2984	-0.2952	-0.295138
-0.2	-0.1986	-0.1995	-0.1985	-0.198566
-0.1	-0.0998	-0.0999	-0.0998	-0.0998
0	0	-1.2490e-16	1.6278e-15	-1.4433e-15
0.1	0.0998	0.0999	0.0998	0.0998
0.2	0.1986	0.1995	0.1984	0.1986
0.3	0.2955	0.2984	0.2947	0.2953
0.4	0.3894	0.3962	0.3871	0.3891
0.5	0.4794	0.4926	0.4745	0.4790
0.6	0.5646	0.5872	0.5553	0.5643
0.7	0.6442	0.6796	0.6279	0.6442
0.8	0.7173	0.7696	0.6908	0.7183
0.9	0.7833	0.8567	0.7423	0.7860
1	0.8415	0.9406	0.7806	0.8468

Örnek 4.5 [52]

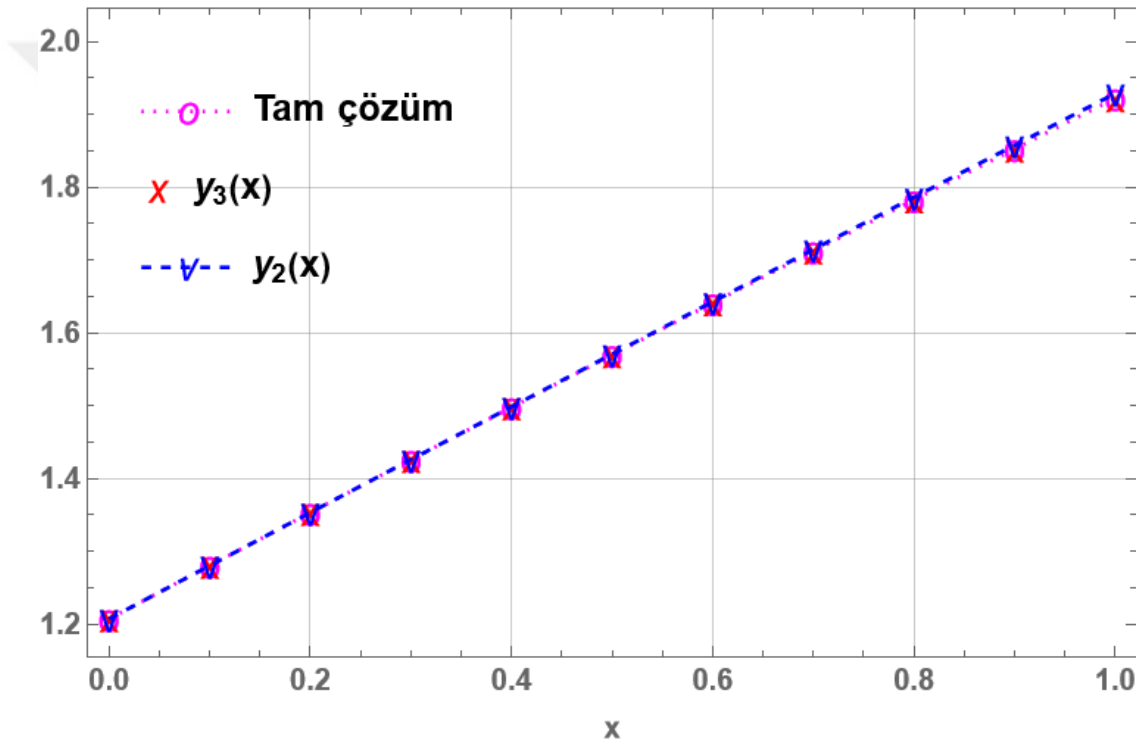
$$y''(x) + \ln(x+3)y'(x) + e^{-x}y\left(\frac{x}{2}\right) = g(x) - \int_0^x \frac{y(t)dt}{t+3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

denklemini, $y(0) = \ln^2(3)$ ve $y'(0) = 2 \ln(3)/3$ başlangıç koşulları altında tanımlanmaktadır. Burada, tam çözüm $y(x) = \ln^2(x+3)$ olarak verilir, $g(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$g(x) = \frac{2(1 - \ln(x+3)) + 2(x+3)\ln^2(x+3)}{(x+3)^2} + e^{-x} \ln^2(x/2+3) + \frac{\ln^3(x+3) - \ln^3(3)}{3}.$$

$$y_2(x) = 1.20695 + 0.732408x - 0.010957x^2$$

$$y_3(x) = 1.206949 + 0.732408x - 0.010957x^2 - 0.007528x^3$$



Şekil 4.4. N=2,3, için Örnek 4.5’deki Charlier polinom çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması

Örnek 4.5 için Tahmini Hata Üst Sınırları:

$$\{\overline{R}_2, \overline{R}_3\} = \{2.6232e-02, 7.0159e-03\}$$

Tablo 4.4 Örnek 4.5'teki Charlier polinom çözümleri ile Dickson polinom çözümlerinin [52] karşılaştırılması

x_i	$y(x_i) = \ln^2(x_i + 3)$	$y_2(x_i)$ [52]	$y_3(x_i)$ [52]	$y_2(x_i)$ $\alpha = 1$	$y_3(x_i)$ $\alpha = 1$
0.0	1.20694896	1.20694896	1.20694896	1.20694896	1.20694896
0.2	1.35291981	1.35299232	1.35293210	1.35299232	1.35293209
0.4	1.49762631	1.49815913	1.49767731	1.49815913	1.49767731
0.6	1.64079152	1.64244939	1.64082323	1.64244938	1.64082323
0.8	1.78222785	1.78586309	1.78200850	1.78586309	1.78200850
1.0	1.92181206	1.92840023	1.92087175	1.92840023	1.92087175

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Charlier polinomlarının matris özelliklerine dayanan bir matris- sıralama yöntem geliştirilmiş ve yöntem, sabit gecikmeli ve değişken katsayılı gecikmeli yüksek mertebeden Fredhol-Volterra tipi fonksiyonel integro-diferansiyel denklemlerin başlangıç-sınır koşulları altında yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılmıştır. Bu tip denklemlerin analitik çözümlerini bulmak oldukça zor olduğundan, çalışmada sunulan Charlier matris-sıralama yöntemine gerek duyulmuş; ayrıca, yöntem kalan fonksiyona ve Ortalama Değer Teoremine bağlı bir hata tahmin tekniği ile beraber beş probleme uygulanarak sonuçların doğruluğu gösterilmiş; yöntemin bahsedilen tip problemler için etkin olduğu sonucuna varılmıştır. Bu durum, hata tahminleri ile beraber sunulan örneklerin çözüm sonuçlarının sergilendiği tablolardan ve şekillerden gözlemlenmektedir.

Örnek 4.2- 4.5 deki Tablo 4.1-4.4 ve Şekil 4.1-4.4 lerin incelenmesinden görüldüğü gibi, α -parametresinin $\alpha = 1$ değerinin uygun olduğu; kesme sınırı N arttıkça hataların azaldığı ve tahmini hataların üst sınırları olan $\bar{R}_N$ nin altında kaldığı; elde edilen sayısal sonuçların, tam çözümlerle karşılaştırılmasından yaklaşık çözümlerin tutarlı olduğu; ayrıca Örnek 4.5 de, Tablo 4.4 ve Şekil 4.4 de görüldüğü gibi diğer yöntemlerle karşılaştırmalarından ve hata tahminlerinden, yöntemin tutarlı ve etkili olduğu doğrulanmıştır.

Sonuç olarak, sunulan Charlier matris-sıralama yönteminin güvenilirliği ve uygulanabilirliği görülmüş, bilgisayarda elde edilen sonuçların doğruluğundan emin olunmuş; dolayısıyla, bu yöntemin gecikmeli fonksiyonel diferansiyel, diferansiyel fark, gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerin yanı sıra, diğer tekil ve lineer olmayan fen ve mühendislik problemleri için de geliştirilebilir olduğu düşünülmektedir. Fakat bazı ek düzenlemelerin yapılması gerekmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Iserles, A., Liu, Y. On Neutral Functional-Differential Equations with Proportional Delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1997, 207, 73-95.
- [2] Oğuz, C., Sezer, M. Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro- differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2015, 259, 943-954.
- [3] Dehghan, M., Shakeri F. Solution of an integro-differential equation arising in oscillating magnetic field using He's homotopy perturbation method. *Progress In Electromagnetics Research*. 2008, 78, 361–376.
- [4] Erdem, K., Yalçınbaş, S., Sezer, M. A Bernoulli polynomial approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro differential-difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2013, 19(10), 1619–1631.
- [5] Wang, W.S., Li, S. F. On the one-leg Q-methods for solving nonlinear neutral functional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 193, 285-301.
- [6] Bhrawy, A. H., Assas, L. M., Tohidi, E., Alghamdi, M. A. A Legendre-Gauss collocation method for neutral functional-differential equations with proportional delays. *Advances in Difference Equations*. 2013, 2013(1), 1-16.
- [7] Rashed, M.T. Numerical solution of functional differential, integral and integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2004, 156, 485-492.
- [8] Kurt, N., Sezer, M. Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro differential equations with constant coefficients. *Journal of the Franklin Institute*. 2008, 345, 839–850.
- [9] Balcı, M., Sezer, M. Hybrid Euler-Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2016, 273, 33-41.
- [10] Baykuş N., Sezer M. Hybrid Taylor-Lucas Collocation Method for Numerical Solution of High-Order Pantograph Type Delay Differential Equations with Variables Delays. *Applied Mathematiccs & Information Sciences*. 2017, 11(6), 1795-1801.
- [11] Biçer, K. E., Sezer, M. Bernoulli Matrix-Collocation Method for solving general functional integro-differential equations with hybrid delays. *Journal of Inequalities and Special Functions*. 2017, 8(3). 85-99.
- [12] Gülsu, M., Öztürk, Y., Sezer, M. A new Chebyshev polynomial approximation for solving delay differential equations. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2012, 18 (6), 1043-1065.
- [13] Sezer, M., Daşcıoğlu, A. *Diferansiyel Denklemler I Teori ve Problem Çözümleri*. Dora Yayınları, Bursa, Türkiye, 2016.
- [14] Sezer, M., Kaynak, M. Chebyshev polynomial solutions of linear differential equations. *Intern. Journal of Mathematical Education in Science*. 1996, 27 (4), 607-618.
- [15] Driver, R. D. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, USA, 1977.
- [16] Gümgüm, S., Baykuş N., Kürkçü, Ö.K., Sezer, M. Lucas polynomial solution of nonlinear differential equations with variable delays. *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*. 2020, 49(2), 553-564.

- [17] Gök, E. Gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için Müntz-Legendre sıralama yöntemi. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2016, 125 s. (Doktora Tezi).
- [18] Sezer, M., Akyüz-Daşcıoğlu, A. Taylor polynominal solutions of general linear differential- difference equations with variable coefficients. *Applied Mathematics and Computation*. 2006, 174, 1526-1538.
- [19] Saadatmandi, A., Dehghan, M. Variational iteration method for solving a generalized pantograph equation. *Computers and Mathematics with Applications*. 2009, 58(11-12), 2190-2196.
- [20] Kolmanovskii, V.B., Nosov, V.R. *Stability of Functional Differential Equations*. Academic Press, London, 1986.
- [21] Cheng, K., Chen, Z., Zhang, Q. An approximate solution for a neutral functional differential equation with proportional delays. 2015, 260, 27-34.
- [22] Evans, D.J., Raslan, K.R. The Adomian decomposition method for solving delay differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*. 2005, 82 (1), 49–54.
- [23] Dai, C., Zhang, J. Jacobian elliptic function method for nonlinear differential difference equations, *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006, 27, 1042-1047.
- [24] Sezer, M., Akyüz, A., Daşcıoğlu, A. A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007, 200, 217-225.
- [25] Kürkçü, Ö.K., Aslan, E., Sezer, M., A novel collocation method based on residual error analysis for solving integro-differential equations using hybrid Dickson and Taylor polynomials. *Sains Malays*. 2017, 46, 335–347.
- [26] Şahin, N., Yüzbaşı, Ş., Sezer, M. A Bessel polynomial approach for solving general linear Fredholm integro- differential-difference equations. *International Journal of Computer Mathematics*. 2011, 88 (14), 3093-3111.
- [27] Yalcınbas, S., Sezer, M., and Sorkun, H.H. Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2009, 210, 334–349.
- [28] Akyüz-Daşcıoğlu, A., Sezer, M. A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations in the most general form. *International Journal of Computer Mathematics*, 2007, 84 (4), 527–539.
- [29] Kürkçü, Ö.K., Aslan, E., Sezer, M. A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential-difference equations using Dickson polynomials. *Applied Mathematics and Computation*. 2016, 276, 324–339.
- [30] Lopez, J.L., Temme, N.M. Convergent asymptotic expansions of Charlier, Laguerre and Jacobi polynomials. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*. 2004, 134(3), 537-555.
- [31] Dunster, T.M. Uniform Asymptotic Expansions for Charlier Polynomials. *Journal of Approximation Theory*. 2001, 112, 93–133.
- [32] Goh, W.M.Y. Plancherel–Rotach Asymptotics for the Charlier Polynomials. *Constructive approximation*, 1998, 14, 151–168.
- [33] Gürbüz, B., Sezer, M., Güler, C. Laguerre collocation method for solving Fredholm integro-differential equations with functional arguments, *Journal of Applied Mathematics*. 2014, 2014, 1-12.
- [34] Yuzbaşı, S., Sahin, N., Sezer, M. Bessel matrix method for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*. 2011, 3, 23-47.

- [35] Yüzbaşı, Ş., Şahin N., Sezer, M. Bessel polynomial solution of high-order linear Volterra integro-differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2011, 62(4),1940-1956.
- [36] Mollaoğlu, T. Volterra tipi gecikmeli fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler için Gegenbauer Polinom Yaklaşımı. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2017. (Yüksek Lisans Tezi).
- [37] Yıldız, G., Tınaztepe, G., Sezer, M. Bell Polynomial Approach for the Solutions of Fredholm Integro-Differential Equations with Variable Coefficients. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2020, 23(3), 973-993.
- [38] Akkaya, T., Yalçınbaş, S., Sezer, M. Numeric solutions for the pantograph type delay differential equation using first Boubaker polynomials. *Applied Mathematics and Computation*. 2013, 219, 9484–9492.
- [39] Akgönüllü, N., Şahin, N., Sezer, M. A Hermite Collocation Method for the Approximate Solutions of High-Order Linear Fredholm Integro-Differential Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2011, 27, 1707–1721.
- [40] Biazar, J. Numerical solution of functional integral equations by the variational iteration method. *ournal of computational and applied mathematics*. 2011, 235, 2581-2585.
- [41] Hsiao, C.H. Hybrid function method for solving Fredholm and Volterra integral equations of the second kind, *ournal of Computational and Applied Mathematics*. 2009, 230, 59–68.
- [42] Maleknejad, K., Mollapourasl, R., Mirzaei, P. Numerical solution of Volterra functional integral equation by using cubic B-spline scaling functions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2014, 30, 699-722.
- [43] Reutskiy, S.Y. The backward substitution method for multipoint problems with linear Volterra-Fredholm integro-differential equations fo the neutral type, *J. Comput. Appl. Math.* 296 (2016) 724-738.
- [44] Reihani, M.H, Abadi, Z. Rationalized Haar functions Method for solving Fredholm and Volterra integral equations. *Journal of Computational Applied Mathematics*. 2007, 200, 12–20.
- [45] Butzer, P.L., Hauss, II., Schmidt, I. Factorial functions and Stirling numbers of fractional orders. *Results in Mathematics*. 1989, 16, 1-48.
- [46] Mansour, T., Schork, M. Commutation relations, normal ordering, and Stirling numbers. Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2016.
- [47] Quaintance, J., Gould, H.W. Combinatorial identities for Stirling numbers. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey, 2016.
- [48] Kruchinin, V.V., Kruchinin, V.D. Composita and its properties. *Journal of Analysis & Number Theory*. 2014, 2 , 37-44.
- [49] Qi, F. Several identities involving the falling and rising factorials and the Cauchy, Lah, and Stirling numbers. *Acta Univ. Sapientiae Mathematica*. 2016, 8(2), 282-297.
- [50] Huangl, X.M., Lin, Y., Zhao, Y.Q. Asymptotics of the Charlier polynomials via difference equation methods. *Analysis and Applications*. 2021, 19(4).
- [51] Baykuş Savaşaneril, N.B., Sezer, M. Laguerre Polynomial Solution of High-Order Linear Fredholm Integro-Differential, Equations. *New Trends in Mathematical Science*. 2016, 4(2) 273–284.
- [52] Kürkcü, Ö.K., Aslan, E., Sezer, M., İlhan, Ö. A Numerical Approach Technique for Solving Generalized Delay Integro-Differential Equations with Functional

Bounds by Means of Dickson Polynomials. International Journal of Computational Methods. 2018, 15(1), 1850039.

[53] Erdem Biçer, K., Sezer, M. A Computational Method for Solving Differential Equations with Quadratic nonlinearity by using Bernoulli polynomials. Thermal Science. 2019, 23(1), 275-283.

