



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**CHEBYSHEV-GRÜSS TIPLI EŞİTSİZLİKLER VE
UYGULAMALARI**

SÜMEYRA KAPLAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA**

DÜZCE, 2019

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CHEBYSHEV-GRÜSS TIPLI EŞİTSİZLİKLER VE
UYGULAMALARI

Sümevra KAPLAN tarafından hazırlanan Chebyshev-Grüss tipli eşitsizlikler ve uygulamaları isimli çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa Kemal Yıldız

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Doç. Dr. Fuat Usta

Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 06/12/2019

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

6 Aralık 2019

Sümevra Kaplan

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve tecrübeleri ile değerli katkılarını esirgemeyen Arş. Gör. Dr. Tuba TUNÇ ve Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin BUDAK 'a şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme ve canımdan çok sevdiğim babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

6 Aralık 2019

Sümeyra Kaplan

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL KAVRAMLAR	5
2.1. GENEL KAVRAMLAR.....	5
2.2. GRÜSS EŞİTSİZLİĞİ.....	10
3. MATERYAL VE YÖNTEM	17
3.1. AĞIRLIKLIL GRÜSS İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ.....	17
3.1.1. Her İki Fonksiyonun Lipschitzian Olduğu Durum	21
3.1.2. f -nin Lipschitzian Olduğu Durum.....	23
3.1.3. f - nin M -Lipschitzian ve g -nin Lipschitzian Olduğu Durum	25
3.1.4. Her İki Fonksiyonun Hölder Koşulu Sağlandığı Durum	27
3.1.5. f' ve g' nin L_p Uzayına Ait Olduğu Durum	28
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	36
4.1. CHEBYSHEV-GRÜSS TIPLI EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALAR ...	37
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	46
6. KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

SİMGELER

$\max\{a,b\}$	a ve b nin maksimumu
$\sup\{a,b\}$	a ve b nin supremumu
$ f $	f Fonksiyonunun Mutlak Değeri
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$L_1[a,b]$	Kapalı $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_p[a,b]$	Kapalı $[a,b]$ Aralığında p . Kuvveti İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_\infty[a,b]$	Kapalı $[a,b]$ Aralığında İntegrali Sınırlı Olan Fonksiyonların Kümesi
$\ \cdot\ _p$	Lebesgue Normu
$AC[a,b]$	Mutlak Sürekli Fonksiyonların Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
$ x $	x Sayısının Mutlak Değeri

ÖZET

CHEBYSHEV-GRÜSS TIPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Sümevra KAPLAN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Aralık 2019, 48 sayfa

Chebyshev ve Grüss tipli eşitsizliklerle ilgili olan bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eşitsizlikler ve eşitsizliklerin tarihi gelişimi kısaca verilmiştir. Ayrıca birinci bölümde literatürde bilinen bazı eşitsizlikler ifade edilmiştir. İkinci bölümde, eşitsizliklerle ilgili genel kavramlar ve Grüss eşitsizliği ifade edilmiştir. Konveks fonksiyon, mutlak süreklilik, integraller için Hölder eşitsizliği, Lebesgue integralinin varlık teoremi ve bir çok tanımla birlikte Grüss eşitsizliği tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde ise ikinci bölümde verilen tanımlar ve özellikler yardımıyla Ağırlıklı Grüss integral eşitsizliği maddeler halinde ispatı verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Chebyshev ve Grüss tipli integral eşitsizliklerinin genelleştirilmesi yapılmıştır.

Anahtar sözcükler: Konveks fonksiyon, Hölder eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği, Grüss eşitsizliği.

ABSTRACT

Chebyshev-Grüss Type Inequalities and Application

Sümeýra KAPLAN

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

December 2019, 48 pages

This thesis on Chebyshev and Grüss type inequalities consists of four chapters. In the first part, inequalities and their historical development of the inequalities are given briefly, and some inequalities known in the literature are mentioned. In the second part, the general concepts related to inequalities and Grüss inequality are expressed, and convex function, absolute continuity, Hölder's inequality for integrals, existence theorem of Lebesgue integral and Grüss inequality with many definitions are defined. In the third part, the weighted Grüss integral inequality is given as proof with the help of the definitions and properties given in the second part. In the fourth chapter, generalizations of integral inequalities of type Chebyshev-Grüss are made.

Keywords: Convex function, Hölder inequality, Chebyshev inequality, Grüss inequality.

1. GİRİŞ

Matematikte bu alanda kendimize sorduğumuz ilk soru “Neden Matematiksel Eşitsizlikler” sorusu olmuştur. Geçmişe dönük yapılan araştırmalar sonucunda 1978 yılında R. Bellman tarafından şöyle bir cevap verilmiştir: “Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırma durumu karşımıza çıkmaktadır. Klasik eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.” Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında var olup birçok alanda uygulamaları vardır.

Matematiksel eşitsizlik alanının temelleri XVIII. ve XIX. yüzyıllarında K. F. Gauss(1775-1885), A. L. Cauchy(1785-1857) ve P. L. Chebyshev(1821-1894) olmak üzere birçok matematikçi tarafından atılmıştır. Matematiksel eşitsizliklerin alanının A.L. Cauchy, P.L. Cebysev'den sonraki zamanda da önemli bir rolünün var olduğu bilinmektedir. C.F. Gauss ve bu alanda çalışan diğer matematikçiler, uygulama teknikleri için alt yapı oluşturulmasında etkin olmuştur. 19. asrın sonları ve 20. asrın başlarında hemen hemen matematik alanına ait tüm dallarda sayısız eşitsizlik incelenmiş ve kullanıma başlanmıştır. Bu incelemelerin sonuçları bilim alanı ve mühendisliğin diğer alanlarında da kullanılmıştır. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır (1952). Eşitsizlik alanı yalıtılmış bir formül formundan sistemli bir disipline çevirmişlerdir. Yapılan çalışma sonraki birçok araştırmacının ana taşlarını oluşturmuş, farklı yöntemler sunarak çözüme ulaşılmasında destek olmuştur. Bu salt eşitsizlikler konusunu ele alan ve birçok yeni eşitsizlikler ve uygulamaları içeren ilk kaynak kitaptır. Aynı çalışmayı 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın tarafından üstelik aynı isim verilerek “Inequalities” adlı kitap takip eder. Bu çalışmanın devamında 1965 yılında J. Szarski'nin “Differential Inequalities”, 1991 yılında Mitrovic ve arkadaşları “Inequalities Involving Functions and Their Derivatives”, yine 1963 yılında Mitrovic ve arkadaşlarının “Classical and New Inequalities in Analysis” isimli

kitapları bu çalışmaların devamında izler.

Tüm bu kitapların dışında S. S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır. Geçmişten günümüze G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric, A. M. Fink, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, E. Set, İ. İşcan, A. O. Akdemir, M. Tunç gibi birçok bilim insanlarının da çalışmaları literatürde mevcuttur. Bu alanda çok büyük sayılan yukarıda belirtilen kitaplar, yalnızca basamak taşları olarak görev yapar. Yüzyıl süresince teorik alanda ve uygulama alanında inceleme yapan birçok araştırmacı tarafından farklı eşitsizlik türlerinin araştırılması büyük ilgi görmüştür. Farklı analitik eşitsizlikleri incelemek için farklı araştırmacılar tarafından çeşitli yaklaşımlar ile yeni birçok çalışmalar ortaya çıkarılmıştır [1]-[12]. Yeni araştırmaları tanıtmayı amaçlayan birkaç klasik ve önemli kitaplar literatüre kazandırılmıştır. Bu kitaplardan elde edilen temel sonuçlar, yöntem teknikleri ve uygulamaları oldukça önemli bir yere sahip olmuştur. Aynı zamanda matematik alanındaki birçok farklı dalda çalışan lisansüstü öğrenciler için ders kitapları konumunda okuyuculara sunulmuştur. Geride kalan yirmi yıl zarfında, eşitsizlik alanı çok önemli bir büyüme evresine girmiştir. Analitik eşitsizlik konusunda, özellikle birçok araştırma makalesinde, Cebysev, Grüss, Trapezoid, Ostrowski, Hadamard ve Jensen isimli eşitsizliklerle alakalı çok sayıda araştırma makaleleri yazılmıştır. Son yıllar içerisinde yayınlanan çok sayıda makale ve monografi yıllar içerisindeki ilerlemenin büyüklüğünü ortaya koymuştur. Tüm bu verilerle birlikte, yapılan araştırmalar hızla gelişen bu alan için kaynakların tam olarak yeterli olduğu tartışılmaktadır. İsmi verilen eşitsizliklerle alakalı literatürde çok sayıda ve farklı konu alanlarını içeren eşitsizlikler çeşitli dergilerde basılmış durumdadır. Bu sebeple, bu dergileri okuyan kişilerin kendilerini bu alanda yapılan araştırmalara ait ön bilgilere götüren bir kitaba ihtiyaçları vardır. Dolayısıyla, monografi yazabilmek adına birçok yazar bu alanın hızlı gelişimiyle alakalı bilgi birikimine sahip ve farklı alanlardan ortaya konulmuş uygulamalarını bir arada toplamanın çabası içine girmişlerdir. Eşitsizlikler konusu oldukça geniş bir alana sahiptir, bu konuda yazılan son kitaplar içerisinde yalnızca eşitsizlik sınıfına değil bu konu ile ilişkili birçok uygulamayı da içinde barındıran kitaplar, son yıllarda hızla bir şekilde literatüre kazandırılmaktadır.

Cebysev'nin temel matematiksel keşiflerinden biri aşağıdaki klasik integral eşitsizliğidir:

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{12} (b-a)^2 \|f'\|_{\infty} \|g'\|_{\infty} \quad (1.1)$$

Burada, $f, g : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı fonksiyonu $[a, b]$ aralığında türevleri sınırlı olan fonksiyonları olmak üzere ve,

$$T(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right) \quad (1.2)$$

(1.2) içerisinde yer alan integrallerin mevcut olması şartıyla, literatürde Cebysev'in fonksiyonelliği olarak bilinir. İlk başlarda 1882 yılında ortaya çıkan (1.1) eşitsizliği şimdi literatürde Cebysev'in eşitsizliği olarak geçmektedir. Yıllarca, bu eşitsizlik çok farklı araştırmacının dikkatini çekmiş ve bu eşitsizlikle alakalı fazla sayıda sonuç yayınlanmıştır [13], [14].

1935 yılında G. Grüss, iki fonksiyonun çarpımının integrali ile integrallerinin çarpımı arasındaki farklılığın bir tahminini veren değişik bir integral eşitsizliğini ispatladı:

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{4} (\Phi - \phi)(\Gamma - \gamma) \quad (1.3)$$

$f, g : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı ve $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve her $x \in [a, b]$ için sağlanıyorsa

$$\phi \leq f(x) \leq \Phi, \quad \gamma \leq g(x) \leq \Gamma,$$

her $x \in [a, b]$ için $\phi, \Phi, \gamma, \Gamma$ gerçekte sabitler bulunur ve $T(f, g)$ (1.2) ile verilir. Grüss tipinin diğer bütünleşik ve ayrık eşitsizliklerinin yanı sıra (1.3) basit bir ispat için, Mitrovic, Pecaric ve Fink'in [13] adlı kitabına bakınız.

Aşağıdaki eşitsizlik literatürde Yamuk(Trapezoid) eşitsizliği olarak geçmektedir:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \right| \leq \frac{1}{12} (b-a)^3 \|f''\|_{\infty}. \quad (1.4)$$

Burada $f : [a, b] \rightarrow R$ ile tanımlı f dönüşümü (a, b) aralığında ikinci mertebeden türevlenebilir ve (a, b) aralığında sınırlı yani,

$$\|f''\|_{\infty} = \sup_{x \in (a, b)} |f''(x)| < \infty.$$

(1.4) eşitsizliği çok sayıda yazarın ilgisini çekmiştir ve bu eşitsizlikle ilgili çok farklı sonuç literatürde ortaya çıkmıştır. Eşitsizlikle alakalı detaylı bir araştırma da, Cerone ve Dragomir tarafından son dönemde yayınlanan makalelerinde (1.4) eşitsizliği bulunabilir [15]-[18].

Burada tezin amacı, fonksiyonların farklı durumlar göz önüne alarak Chebyshev-Grüss tipli yeni eşitsizlikler elde etmek olacaktır. Elde edilen sonuçlar daha önce yapılan çalışmaların bir genelleştirmesi olacaktır.



2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan tanım ve teoremler verilerek gerekli görülen bazı önemli teoremlerin ispatları da verilmiştir.

Tanım 2.1.1. Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.1.2. Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüm operatör denir.

Tanım 2.1.3. (Konveks Fonksiyon) $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyona konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte " $\geq$ " olması halinde de f fonksiyona konkav fonksiyon denir. Yukardaki eşitsizlikte $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

olur. Bu tip eşitsizlikleri sağlayan fonksiyonlara da J-konveks fonksiyon denir.

Konveks Fonksiyonların Temel Özellikleri:

i. k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), a_j > 0; (j = 1, 2, 3, \dots, k)$$

fonksiyonuda konvektir.

ii. $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konkav ve $S = \{x : g(x) > 0\}$ olsun. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ olmak üzere f , S de konvektir.

iii. $g : R \rightarrow R$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : R^n \rightarrow R$ konveks olsun.

Bu takdirde; $f : R^n \rightarrow R$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonunda konvektir.

iv. $g : R \rightarrow R$ konveks ve h , $h(x) = Ax + B$ formunda $h : R^n \rightarrow R$ konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

vi. f ve g fonksiyonlar J -konveks ise $f(x) + g(x)$ de J -konvektir.

vii. f , $\bar{I}'$ 'de J -konveks ve g , $\bar{I}''$ de J -konveks ise bu takdirde $f(x)g(x)$ de $\bar{I} = \bar{I}' \cap \bar{I}''$ de J -konvektir.

Tanım 2.1.4. $\Omega_1 = [a, b]$, $\Omega_2 = [c, d]$ $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x, y)$, $\Omega_1 \times \Omega_2$ üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y) dx \right) dy$$

şeklindeki eşitliğe *Dirichlet formülü* denir.

Tanım 2.1.5. (Mutlak Süreklilik) $I \subset R$, $f : I \rightarrow R$ bir fonksiyon ve (x_k, y_k) sonlu bir aralık olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki,

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \Rightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

ise f ye mutlak sürekli denir ve $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı $AC^n[a, b]$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. $x, y \in R$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

şeklindeki eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.7. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.1.8. (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n -lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

a. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

b. $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [19].

Tanım 2.1.9. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. [13]

Teorem 2.1.10. (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$ olsun. $f, g \in L^p$ ise, $f + g \in L^p$ yazılır ve

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Önce, $f + g \in L^p$ olduğunu gösterelim. Eğer $|f| \leq |g|$ veya $|f| > |g|$ için

$$|f + g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

olduğundan, $f + g \in L^p$ olduğu hemen yazılır. $p = 1$ ise, eşitsizliğin doğru olduğu apaçıktır. $p > 1$ olduğunu kabul edelim. Hölder Eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |f + g|^p dx \\
&= \int_a^b |f + g| |f + g|^{p-1} dx \\
&\leq \int_a^b |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_a^b |g| |f + g|^{p-1} dx \\
&\leq \left[\int_a^b |f|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b |f + g|^p dx \right]^{(p-1)/p} \\
&\quad + \left[\int_a^b |g|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b |f + g|^p dx \right]^{(p-1)/p}
\end{aligned}$$

yazılır. Her iki taraf, sıfırdan farklı kabul edeceğimiz

$$\left[\int_a^b |f + g|^p dx \right]^{(p-1)/p}$$

ifadesine bölünürse,

$$\begin{aligned}
& \left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{1/p} \\
&\leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p dx \right]^{1/p}
\end{aligned}$$

şeklindeki Minkowski Eşitsizliği bulunur.

Tanım 2.1.11. E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi K sayısı için $E\{x : f(x) > k\}$ kümesi ölçülebilirse, f fonksiyonuna *ölçülebilir fonksiyon* denir.

Teorem 2.1.12. (Lebesgue integralinin varlık teoremi) Sonlu ölçümlü E kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise f fonksiyonunun *Lebesgue integrali* vardır.

Tanım 2.1.13. $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna *sınırlı fonksiyon* denir.

Tanım 2.1.14. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = L_p = \left\{ f : \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normuna göre bir *Banach* uzaydır.

Teorem 2.1.15. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- a. f , (a, b) aralığında süreklidir ve
- b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır [19].

Teorem 2.1.16. f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır [20].

Tanım 2.1.17. $f : X \subseteq R \rightarrow R$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $f(x) \leq M$, ise M ye f nin bir üst sınırı denir. (Yani, $f^{-1}(\mu, \infty) = \{x \in X : f(x) > M\}$ kümesi boştur). Burada

$$U_f = \{M \in R : f^{-1}(\mu, \infty) = \emptyset\}$$

kümesi f nin üst sınırlarının kümesi olsun. f nin supremumu, eğer U_f kümesi boştan farklı ise bu durumda,

$$\sup f = \inf U_f$$

olarak tanımlanır. Diğer durumda ise

$$\sup f = +\infty$$

dır. Ayrıca her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde $M \in R$ varsa bu durumda $\sup f \leq M$ dır.

(X, Σ, μ) ölçülebilir bir uzay ve f de ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ yada $f^{-1}(\mu, \infty)$ ölçülebilir kümesi sıfır ölçümlü ise M 'ye f nin esas üst sınırı denir.

$$U_f^{ess} = \{M \in R : \mu(f^{-1}(\mu, \infty)) = 0\}$$

esas üst sınırlarının kümesi olsun. Bu durumda, $U_f^{ess} \neq \emptyset$ ise yukardaki tanıma benzer olarak

$$ess \sup f = \inf U_f^{ess}$$

olarak tanımlanır. Aksi halde, yani $U_f^{ess} = \emptyset$ ise $ess \sup f = +\infty$ dır. Ayrıca, bu durumda hemen hemen her $x \in X$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde $M \in R$ varsa $ess \sup f \leq M$ dır.

Ayrıca esas infimum tanımı da esas alt sınırlarının supremumu olarak tanımlanır yani esas alt sınırlarının kümesi boştan farklı ise

$$ess \inf f = \sup \{k \in R : \mu(\{x : f(x) < k\}) = 0\}$$

olarak tanımlanır. Eğer esas alt sınırların kümesi boş ise bu durumda $\text{ess inf } f = -\infty$ dır.

Eğer $\mu(X) > 0$ ise

$$\inf f \leq \text{ess inf } f \leq \text{ess sup } f \leq \sup f$$

bağıntısı vardır. Eğer $\mu(X) = 0$ ise bu durumda da $\text{ess sup } f = +\infty$ ve $\text{ess inf } f = -\infty$ dır.

Tanım 2.1.18. $f : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu her $x, y \in [a, b]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x - y|^r, \quad 0 < r \leq 1$$

şartı sağlanıyorsa f ye r -Hölder denir. Burada $r = 1$ için Hölder koşulu f Lipschitzian koşulu olur (Burada, f Lipschitzian koşulu f Lipschitzian yada f Lipschitz süreklilik olarak da adlandırılır.) [14].

2.2. GRÜSS EŞİTSİZLİĞİ

Teorem 2.2.1. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ iki integrallenebilir fonksiyon ve $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ için tüm $x \in [a, b]$, ki burada $\gamma, \Gamma \in R$ sabitler olmak üzere

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{2}(\Gamma - \gamma)\sqrt{T(f, f)} \quad (2.1)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: f ve g senkronize fonksiyonlar olduklarından

$$(f(t) - f(s))(g(t) - g(s)) \geq 0$$

yazılır. Buradan da

$$f(t)g(t) + f(s)g(s) \geq f(t)g(s) + f(s)g(t)$$

olup eşitliğin her iki taraf t ve s ye göre $[a, b]$ üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned} & T(f, g) \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)dt \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde Korkine'nin özdeşliğinin elde edilmiş olur. Böylece

$$T(f, g) = \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f(t) - f(s))(g(t) - g(s))dtds$$

yazılır. Dolayısıyla, (2.2)'den

$$T(f, f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx - \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \quad (2.3)$$

bulunur. Ayrıca, $T(f, f) \geq 0$ ve $T(g, g) \geq 0$. olduğunda Cauchy-Schwarz integral eşitsizliğini çift katlı integraller kullanarak

$$\begin{aligned} & |T(f, g)|^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f(t) - f(s))(g(t) - g(s)) dt ds \right\}^2 \\ &\leq \left\{ \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f(t) - f(s))^2 dt ds \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (g(t) - g(s))^2 dt ds \right\} \\ &= T(f, f)T(g, g) \end{aligned} \quad (2.4)$$

yazılır. Diğer yandan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki $T(f, f)$, $T(g, g)$ ifadeleri hesaplayalım. O halde kabulumuz doğrultusunda

$$\begin{aligned} T(g, g) &= \left(\Gamma - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - \gamma \right) \\ &\quad - \frac{1}{b-a} \int_a^b (\Gamma - g(x))(g(x) - \gamma) dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

yazabiliriz. (2.5) ifadesinde $(\Gamma - g(x))(g(x) - \gamma) \geq 0$ olup ayrıca temel eşitsizlik olarak bilinen

$$cd \leq \left(\frac{c+d}{2} \right)^2; \quad c, d \in R,$$

eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} T(g, g) &\leq \left(\Gamma - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx - \gamma \right) \\ &\leq \left(\frac{\Gamma - \gamma}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Böylece, (2.6) eşitsizliği (2.4) de yerine yazılır ve yeniden düzenlenirse, (2.1) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.2.2. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ iki integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& |T(f, g)| \\
& \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \left(f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right) \left(g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(y) dy \right) \right| dx
\end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: İlk önce ilk integralin içindeki ifadeler açılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right) \\
& \times \left(g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(y) dy \right) dx \\
& = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left\{ f(x)g(x) - g(x) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right. \\
& \quad \left. - f(x) \frac{1}{b-a} \int_a^b g(y) dy \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \frac{1}{b-a} \int_a^b g(y) dy \right\} dx \\
& = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(y) dy \right. \\
& \quad \left. + (b-a) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \int_a^b g(y) dy \right\} \\
& = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \\
& \quad - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right) \\
& = T(f, g)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

yazılır. Buradan da (2.8) ifadesindeki özdeşliğin modülü alınırsa,

$$\begin{aligned}
& |T(f, g)| \\
& \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \left(f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right) \left(g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(y) dy \right) \right| dx
\end{aligned}$$

elde edilir ki buda (2.7)'deki eşitsizliği ispatlamış olacaktır.

Teorem 2.2.3. $f, g : [a, b] \rightarrow R$, $[a, b]$ 'da sürekli, (a, b) türevlenebilir ve f', g' fonksiyonlar (a, b) aralığına sınırlı ise her $x \in [a, b]$ için

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b [\|g(x)\| \|f'\|_\infty + |f(x)| \|g'\|_\infty] E(x) dx \quad (2.9)$$

dır. Burada

$$E(x) = \frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2$$

dır.

İspat: $p(x, t)$ fonksiyonu

$$p(x, t) = \begin{cases} t-a & t \in [a, x] \\ t-b & t \in (x, b] \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlansın. Bu kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x, t) f'(t) dt \\ &= \int_a^x (t-a) f'(t) dt + \int_x^b (t-b) f'(t) dt \\ &= (t-a) f(t) \Big|_a^x - \int_a^x f(t) dt + (t-b) \Big|_x^b - \int_x^b f(t) dt \\ &= (x-a) f(x) + (b-x) f(x) - \int_a^b f(t) dt \\ &= (b-a) f(x) - \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

yazılır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x, t) f'(t) dt, \quad (2.11)$$

bulunur. Burada ki (2.11) eşitliği Montgomery'nin özdeşliği olarak bilinir. Benzer şekilde (2.12) ifadesi g fonksiyonu için de doğru olacağından

$$g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x, t) g'(t) dt, \quad (2.12)$$

yazılır. Böylece, (2.11) ve (2.12)'ün her iki tarafın sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra elde edilen sonucu a 'dan b 'ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& 2 \int_a^b f(x)g(x)dx \\
&= \frac{2}{b-a} \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right) \\
&+ \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[g(x) \int_a^b p(x,t)f'(t)dt + f(x) \int_a^b p(x,t)g'(t)dt \right] dx
\end{aligned} \tag{2.13}$$

bulunur. (2.13)'den ve modülün özelliklerini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned}
& |T(f,g)| \\
&\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \left[|g(x)| \int_a^b |p(x,t)| |f'(t)| dt + |f(x)| \int_a^b |p(x,t)| |g'(t)| dt \right] dx \\
&\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \left[\|f'\|_\infty |g(x)| + \|g'\|_\infty |f(x)| \right] E(x) dx,
\end{aligned}$$

elde edilir ki buda (2.9) eşitsizliği olarak elde edilir.

Teorem 2.2.4. $f, g : [a, b] \rightarrow R$, iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_\infty[a, b]$ ise

$$|T(f, g)| \leq \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}} \|f'\|_\infty \sqrt{T(g, g)} \tag{2.14}$$

dır.

İspat: f ve g fonksiyonlar için, Korkine'in özdeşliği olarak da bilinen (2.2) özdeşliği vardır. Burada (2.1)'deki ispat tekniği yardımıyla (2.4) elde ederiz. Herhangi bir $s, t \in [a, b]$ için

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(\xi) d\xi$$

olduğu kolayca görülür. (2.2) 'de bu gerçeği kullanarak , aşağıdaki eşitsizliği elde edilir:

$$\begin{aligned}
|T(f, f)| &= \frac{1}{2(b-a)^2} \left| \int_a^b \int_a^b (f(t) - f(s))^2 dt ds \right| \\
&= \frac{1}{2(b-a)^2} \left| \int_a^b \int_a^b \left(\int_s^t f'(\xi) d\xi \right)^2 dt ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \left(\int_s^t |f'(\xi)| d\xi \right)^2 dt ds \\
&\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \|f'\|_\infty^2 \int_a^b \int_a^b (t-s)^2 dt ds \\
&= \frac{(b-a)^2}{12} \|f'\|_\infty^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ayrıca, (2.4)'de (2.15) eşitsizliği kullanarak, (2.14)'de istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 2.2.5. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı türevlenebilen ve sürekli fonksiyonlar olsun.

$f', g' \in L_q[a, b]$, $q > 1$, ise

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{(b-a)^3} \|f'\|_q \|g'\|_q \int_a^b (B(x))^{\frac{2}{r}} dx. \tag{2.16}$$

Burada, $x \in [a, b]$ için

$$B(x) = \frac{1}{r+1} \left[(x-a)^{r+1} + (b-x)^{r+1} \right] \tag{2.17}$$

ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ dır.

İspat: Teorem 2.2.3.'ün ispatında olduğu gibi aşağıdaki özdeşlikleri yazabiliriz:

$$f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t) dt = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b p(x, t) f'(t) dt$$

$$g(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b g(t) dt = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b p(x, t) g'(t) dt.$$

Burada, $x \in [a, b]$ için $p(x, t)$ çekirdeği (2.10) de tanımlandığı gibi olsun.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
&f(x)g(x) - f(x) \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b g(t) dt \right) \\
&- g(x) \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t) dt \right) \\
&+ \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t) dt \right) \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b g(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b p(x, t) f'(t) dt \right) \left(\int_a^b p(x, t) g'(t) dt \right)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

olur. Buradan da (2.18)'in her iki tarafını a dan b ye x e göre integrali alınarak, $(b-a)$ de bölerek,

$$T(f, g) = \frac{1}{(b-a)^3} \int_a^b \left(\int_a^b p(x, t) f'(t) dt \right) \left(\int_a^b p(x, t) g'(t) dt \right) dx \quad (2.19)$$

yazılır. Son olarak, (2.19)'un her iki tarafının mutlak değerini alır ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & |T(f, g)| \\ & \leq \frac{1}{(b-a)^3} \int_a^b \left(\int_a^b |p(x, t)| |f'(t)| dt \right) \left(\int_a^b |p(x, t)| |g'(t)| dt \right) dx \\ & \leq \frac{1}{(b-a)^3} \int_a^b \left(\left\{ \int_a^b |p(x, t)|^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \left\{ \int_a^b |f'(t)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right) \\ & \quad \times \left(\left\{ \int_a^b |p(x, t)|^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \left\{ \int_a^b |g'(t)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \right) dx \\ & = \frac{1}{(b-a)^3} \|f'\|_q \|g'\|_q \int_a^b \left(\left\{ \int_a^b |p(x, t)|^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (2.20)$$

olur. Buradan da basit bir hesaplama ile,

$$\begin{aligned} & \int_a^b |p(x, t)|^r dt \\ & = \int_a^x |t-a|^r dt + \int_x^b |t-b|^r dt \\ & = \int_a^x (t-a)^r dt + \int_x^b (b-t)^r dt \\ & = \frac{(x-a)^{r+1} + (b-x)^{r+1}}{r+1} = B(x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

bulunur. (2.21) ifadesi (2.20) de yerine yazılırsa (2.16) eşitsizliği elde edilmiş olur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. AĞIRLIKLIL GRÜSS İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve $x \in [a, b]$ için

$$\varphi \leq f(x) \leq \phi, \quad \gamma \leq g(x) \leq \Gamma \quad (3.1)$$

koşullarını sağlayan bu fonksiyonlar için

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{1}{4}(\phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$$

eşitsizliği 1935 yılında G. Grüss tarafından ispatlanmıştır. Daha sonra bu eşitsizlik literatüre Grüss eşitsizliği olarak girmiş ve bir çok yazar tarafında farklı türde eşitsizlikler ve yeni ispatlar yapmışlardır. Burada $x \in [a, b]$ için

$$f(x) = g(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

seçilmesi halinde eşitsizlikteki $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi sabit olduğu, Grüss tarafından verilmiştir. Şimdi aşağıda vereceğimiz ağırlıklı Grüss eşitsizliğinin farklı bir versiyonunu Dragomir 1998 yılında ispatlamıştır [15].

Teorem 3.1. f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$x \in [a, b]$ için (3.1) koşulunu sağlayan reel $\varphi, \phi, \gamma, \Gamma$ sabitleri ve $\int_a^b h(x)dx > 0$ şartını sağlayan integrallenebilir $h : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ için

$$\left| \left\{ \int_a^b h(x)dx \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx - \int_a^b f(x)h(x)dx \int_a^b g(x)h(x)dx \right\} \right| \leq \frac{1}{4}(\phi - \varphi)(\Gamma - \gamma) \left(\int_a^b h(x)dx \right)^2 \quad (3.2)$$

eşitsizliği vardır. Burada $\frac{1}{4}$ mümkün olan en iyi sabittir.

İspat: f ve g nin (3.1) koşulları yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx \right. \\
& \left. - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx \right\} \\
& = \frac{1}{2 \left(\int_a^b h(x)dx \right)^2} \int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))h(x)h(y)dxdy
\end{aligned} \tag{3.3}$$

yazılır. Buradan da, Cauchy-Buniakowski-Schwarz's çift katlı integral için integral eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2 \left(\int_a^b h(x)dx \right)^2} \int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))h(x)h(y)dxdy \right]^2 \\
& \leq \frac{1}{2 \left(\int_a^b h(x)dx \right)^2} \int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))^2 h(x)h(y)dxdy \\
& \quad \times \frac{1}{2 \left(\int_a^b h(x)dx \right)^2} \int_a^b \int_a^b (g(x) - g(y))^2 h(x)h(y)dxdy
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& = \left[\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f^2(x)h(x)dx - \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \right)^2 \right] \\
& \quad \times \left[\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g^2(x)h(x)dx - \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki bu son iki ifadeye denk olan aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f^2(x)h(x)dx - \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \right)^2 \\
&= \left(\phi - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \right) \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx - \phi \right) \\
& \quad - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b (\phi - f(x))(f(x) - \phi)h(x)dx.
\end{aligned}$$

Ayrıca, her bir $x \in [a, b]$ için $\{((\phi - f(x))(f(x) - \phi))\} \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f^2(x)h(x)dx - \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \right)^2 \\
& \leq \left(\phi - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \right) \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx - \phi \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

yazılır ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g^2(x)h(x)dx - \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx \right)^2 \\
& \leq \left(\Gamma - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx \right) \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx - \gamma \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. Şimdi (3.3) , (3.4), (3.5) ,ve (3.6) ifadeleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx \right. \\
& \left. - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx \right| \\
& \leq \left(\phi - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \right) \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx - \phi \right) \\
& \quad \times \left(\Gamma - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx \right) \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx - \gamma \right) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

yazılır. Reel sayılar için temel eşitsizlik olarak bilinen

$$4pq \leq (p+q)^2, \quad p, q \in R$$

bu eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
& 4 \left(\phi - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \right) \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx - \phi \right) \\
& \leq (\phi - \phi)^2 \quad (3.8)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 4 \left(\Gamma - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx \right) \left(\frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx - \gamma \right) \\
& \leq (\Gamma - \gamma)^2 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece, (3.8) ve (3.9) eşitsizlikleri (3.7)'de yerlerine yazılırsa istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur. Ayrıca (3.2) eşitsizliğinin de $h(x)=1$ seçilebilir ve $x \in [a, b]$

$$f(x) = g(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

olarak f ve g fonksiyonları seçilirse

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = 1,$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx = 1,$$

$$\phi - \varphi = \Gamma - \gamma = 2$$

olacağından (3.2) eşitsizliğinde ki eşitlik durumu sağlanacaktır.

Şimdi, f ve g 'nin durumlarına göre aşağıdaki sonuçları verelim:

3.1.1. Her İki Fonksiyonun Lipschitzian Olduğu Durum

Teorem 3.1.1. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonlar Lipschitzian olsun yani her $x, y \in [a, b]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq L_1 |x - y|, \quad |g(x) - g(y)| \leq L_2 |x - y| \quad (3.10)$$

koşulunu sağlayacak şekilde sabit $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ var olsun. Ayrıca, eğer $p : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \right| \\ & \leq L_1 L_2 \left[\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) x^2 dx - \left(\int_a^b p(x) x dx \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $f, g : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonlar Lipschitzian olduğundan dolayı (3.10) eşitsizlikleri yardımıyla her $x, y \in [a, b]$ için

$$|(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))| \leq L_1 L_2 (x - y)^2$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlik $p(x)p(y) \geq 0$ ile çarpılır ve $[a, b]^2$ üzerinde integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy \right| \\
& \leq \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy \\
& \leq L_1 L_2 \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(x-y)^2 dxdy
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca burada kolaylıkla görüldüğü gibi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))p(x)p(y)dxdy \\
& = \left\{ \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \right. \\
& \quad \left. - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(x-y)^2 dxdy \\
& = \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)x^2dx - \left(\int_a^b p(x)xdx \right)^2
\end{aligned}$$

ifadeleri yazılır. Buda istenilen eşitsizliği sağlamış olur. Diğer yandan, $f(x) = L_1 x$, $g(x) = L_2 x$ olarak seçilirse f , L_1 Lipschitzian ve g de L_2 Lipschitzian olacağından, (3.11) deki eşitlik durumu sağlanmış olur.

Sonuç 3.1.2: Yukarıdaki Teorem 3.1.1 deki varsayımlara göre

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \\
& \leq \frac{L_1 L_2 (b-a)^2}{12}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

eşitsizliği vardır ve buradaki $\frac{1}{12}$ sabiti mümkün olan en iyi sabittir.

Yukarıdaki sonuç Cebayev tarafından verilen iyi bilinen bir sonuç olduğuna dikkat edelim.

Sonuç 3.1.3: $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar (a,b) üzerine türevlenebilir ve türevleri de sınırlı olsun. Yani,

$$\|f'\|_{\infty} = \sup_{t \in (a,b)} |f'(t)| < \infty$$

olarak tanımlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır;

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{\|f'\|_{\infty} \|g'\|_{\infty}}{12} (b-a)^2. \quad (3.13)$$

Burada ki $\frac{1}{12}$ sabiti mümkün olan en iyi sabittir.

3.1.2. f -nin Lipschitzian Olduğu Durum

Şimdi aşağıdaki her bir fonksiyonun Lipschitzian olduğunu varsayarak Grüss tipindeki başka bir eşitsizliği kanıtlayabiliriz.

Teorem 3.1.4. $f : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı fonksiyon M -Lipschitzian fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \begin{cases} M \|g\|_1 & g \in L_1[a, b] \\ M \left[\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right]^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{p}} \|g\|_q & g \in L_p[a, b], p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \\ M \frac{(b-a)^3}{3} \|g\|_{\infty} & g \in L_{\infty}[a, b] \end{cases} \quad (3.14)$$

İspat: Her $x, y \in [a, b]$ için

$$|f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq M|x - y||g(y)|$$

yazılır. Burada son eşitsizliğin her iki taraf $[a, b]^2$ üzerinde integrali alınırsa,

$$\left| \int_a^b \int_a^b (f(x)g(y) - f(y)g(y)) dx dy \right| \leq M \int_a^b \int_a^b |x - y| |g(y)| dx dy$$

yazılır. Diğer yandan soldaki integrali

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b (f(x)g(y) - f(y)g(y)) dx dy \\ &= \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx - (b-a) \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

şeklinde yazar ve $g \in L_1[a, b]$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b |x - y| |g(y)| dx dy \\ & \leq (b - a) \max_{(x, y) \in [a, b]^2} |x - y| \int_a^b |g(y)| dy \\ & = (b - a)^2 \|g\|_1 \end{aligned}$$

birinci kısımdaki eşitsizlik elde edilmiş olur.

Şimdi $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $g \in L_q[a, b]$ olsun. O zaman, Hölder integral eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b |x - y| |g(y)| dx dy \\ & \leq \left(\int_a^b \int_a^b |x - y|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(y)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = K^{\frac{1}{p}} (b - a)^{\frac{1}{q}} \|g\|_q \end{aligned}$$

olup buradan da

$$\begin{aligned} K &= \int_a^b \int_a^b |x - y|^p dx dy = \int_a^b \left(\int_a^b |x - y|^p dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_a^x |x - y|^p dy + \int_x^b |y - x|^p dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{(x - a)^{p+1} + (b - x)^{p+1}}{p + 1} \right] dx \\ &= \frac{2(b - a)^{p+2}}{(p + 1)(p + 2)} \end{aligned}$$

basit hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b |x - y| |g(y)| dx dy \\ & \leq \left[\frac{2}{(p + 1)(p + 2)} \right]^{\frac{1}{p}} (b - a)^{2 + \frac{1}{p}} \|g\|_q \end{aligned}$$

istenilen ikinci eşitsizlik sağlanılmış olur.

Son olarak varsayalım ki $g \in L_\infty[a, b]$ olsun. Böylece g 'nin sınırlılığından

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b |x-y| |g(y)| dx dy \\ & \leq \|g\|_\infty \int_a^b \int_a^b |x-y| dx dy = \frac{(b-a)^3}{3} \|g\|_\infty \end{aligned}$$

istenilen üçüncü eşitsizlik de sağlanmış olur.

Şimdi aşağıdaki önemli sonucu verelim.

Sonuç 3.1.5: $f : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı ve (a, b) de türevli ve bu aralıkta sınırlı fonksiyon olsun. O zaman, aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \\ & \leq \begin{cases} \|f'\|_\infty \|g\|_1 & g \in L_1[a, b] \\ \left[\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right]^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f'\|_\infty \|g\|_q & g \in L_q[a, b], p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \\ \frac{(b-a)}{3} \|f'\|_\infty \|g\|_\infty & g \in L_\infty[a, b] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.1.3. f -nin M -Lipschzian ve g -nin Lipschitzian Olduğu Durum

Grüss integral eşitsizliğinin bir başka genellemesi olan aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.1.6. f ve g $[a, b]$ üzerinde iki integrallenebilir fonksiyon olsun öyle ki her $x, y \in [a, b]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M |g(x) - g(y)| \quad (3.16)$$

koşulu sağlansın. O zaman

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \right| \\ & \leq M \left[\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)g^2(x)dx - \left(\int_a^b p(x)g(x)dx \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitsizlik vardır. Burada $p : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $[a, b]$ de integrallenebilir keyfi bir fonksiyondur.

İspat: (3.16) şartı ile her $x, y \in [a, b]$ için

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq M(g(x) - g(y))^2$$

yazılır ve bu eşitsizliği $p(x)p(y) \geq 0$ ile çarpar ve $[a, b]^2$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy \right| \\
& \leq \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))|dxdy \\
& \leq M \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(g(x)-g(y))^2dxdy
\end{aligned}$$

olup bulunan bu sonuç (3.17) eşit olur. $f(x) = Mx$, $g(x) = x$ olarak seçelim. Daha sonra herhangi bir p için yukarıdaki eşitsizlik durumu sağlanmış olur.

Yukarıdaki Teorem 3.1.6'nın önemli bir sonucunu aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Sonuç 3.1.7: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar (a, b) aralığında türevlenebilir iki fonksiyon, (a, b) aralığında $g(x) \neq 0$ ve her $x \in (a, b)$ için

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \leq M \quad (3.18)$$

şartını sağlayan $M > 0$ olsun. Bu durumda, (3.17) eşitsizliği sağlanır.

İspat: Cauchy ortalama değer teoremini kullanalım. Yani, her $x, y \in [a, b]$ için $x \neq y$ ve x ve y arasında bir c vardır öyle ki;

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

yazılır. Sonuç olarak her $x, y \in [a, b]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M |g(x) - g(y)|$$

olacağından Teorem 3.1.6 yardımıyla (3.17) eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.6: Sonuç 3.1.4 yardımıyla,

$$M = \sup_{x \in (a, b)} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| = \left\| \frac{f'}{g'} \right\|_{\infty}$$

normun sonlu olduğu gösterilir.

Uyarı 3.1.7: f ve g yukarıda verilen teoremden ki şartları sağlamak üzere aşağıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \\
& \leq M \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b g^2(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right)^2 \right]
\end{aligned} \quad (3.19)$$

vardır.

Sonuç 3.1.7'deki f ve g fonksiyonlar için

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \left\| \frac{f'}{g'} \right\|_{\infty} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b g^2(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right)^2 \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

3.1.4. Her İki Fonksiyonun Hölder Koşulu Sağlandığı Durum

Bu bölümde aşağıdaki gibi Hölder'in durumunu karşılayan fonksiyonlar için Grüss tipi bir eşitsizliğe dikkat çekelim.

Teorem 3.1.8. f ve g fonksiyonlarının Hölder koşulunu sağlıyor olsun yani her $x, y \in [a, b]$ ve $r, s \in (0, 1]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq H_1 |x - y|^r \quad \text{ve} \quad |g(x) - g(y)| \leq H_2 |x - y|^s \quad (3.20)$$

olacak şekilde $H_1, H_2 > 0$ sabitleri var olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{H_1 H_2 (b-a)^{r+s}}{(r+s+1)(r+s+2)}. \quad (3.21)$$

İspat: Teorem 3.1.8 koşulları yardımıyla her $x, y \in [a, b]$ için

$$|(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))| \leq H_1 H_2 |x - y|^{s+r}$$

yazılır. Böylece, eşitsizliğin her iki tarafını $[a, b]^2$ üzerinde çift katlı integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \right| \\ & \leq \int_a^b \int_a^b |(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))| dx dy \\ & \leq H_1 H_2 \int_a^b \int_a^b |x - y|^{s+r} dx dy \end{aligned}$$

olur. Buradan da sağdaki integrali aşağıdaki şekilde hesaplanılırsa:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_a^b |x-y|^{s+r} dx dy \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b |x-y|^{s+r} dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b |x-y|^{s+r} dy + \int_a^b |y-x|^{s+r} dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left[\frac{(x-a)^{r+s+1} (b-x)^{r+s+1}}{r+s+1} \right] dx \\
&= \frac{2(b-a)^{r+s+1}}{(r+s+1)(r+s+2)}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_a^b ((f(x)-f(y))(g(x)-g(y))) dx dy \\
&= (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla istenilen (3.21) eşitsizliği elde edilir.

3.1.5. f' ve g' nin L_p Uzayına Ait Olduğu Durum

Bu bölümde ilk olarak $L_\infty(a,b)$ ye ait olan fonksiyonlar için Grüss tipi bazı eşitsizliklere dikkat çekiyoruz.

Teorem 3.1.9. f ve g (a,b) üzerinde differansiyellenebilir iki fonksiyon ve $p : [a,b] \rightarrow [0,\infty)$ tanımlı ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durum da $f', g' \in L_\infty(a,b)$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) \left| \int_x^y |f'(t)| dt \right| \left| \int_x^y |g'(z)| dz \right| dx dy \\
& \leq \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \left[\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) x^2 dx - \left(\int_a^b p(x) x dx \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Her $x, y \in [a,b]$ için ,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) = \int_x^y \int_x^y f'(t)g'(z)dt dz$$

bağıntısının sağlanıldığı kolayca görülür. Buradan da $f', g' \in L_\infty(a, b)$ olduğu gözönüne alınırsa her $x, y \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} & p(x)p(y)|(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))| \\ & \leq \left| \int_x^y |f'(t)| dt \right| \left| \int_x^y |g'(z)| dz \right| p(x)p(y) \\ & \leq \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty (x - y)^2 p(x)p(y) \end{aligned}$$

olur. Modülün özellikleri ile

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \\ & \leq \int_a^b \int_a^b p(x)p(y) \left| \int_x^y |f'(t)| dt \right| \left| \int_x^y |g'(z)| dz \right| dx dy \\ & \leq \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \int_a^b \int_a^b (x - y)^2 p(x)p(y) dx dy \end{aligned} \quad (3.23)$$

istenilen (3.22) eşitsizliği elde edilir.

(3.22) eşitsizliğini kanıtlamak için, $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \alpha x + \beta$, $g(x) = \gamma x + \delta$ ($\alpha, \gamma > 0, \beta, \delta \in \mathbb{R}$) tanımlansın. Basit bir hesaplama ile;

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \\ & = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y) \left| \int_x^y |f'(t)| dt \right| \left| \int_x^y |g'(z)| dz \right| dx dy \\ & = \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \left[\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) x^2 dx - \left(\int_a^b p(x) x dx \right)^2 \right] \\ & = \frac{\alpha\gamma}{2} \int_a^b \int_a^b (x - y)^2 p(x)p(y) dx dy \end{aligned}$$

olur. Bu da (3.22)'deki tüm eşitsizliklerde eşitlik sağlayabileceğimizi kanıtlar.

Sonuç 3.1.10: f ve g fonksiyonlar Teorem 3.1.9'daki şartlar sağlansın, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \left| \int_x^y |f'(t)|dt \right| \left| \int_x^y |g'(z)|dz \right| dx dy \\
& \leq \frac{\|f'\|_\infty \|g'\|_\infty}{12} (b-a)^2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

dır. Sırasıyla $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{12}$ sabitleri mümkün olan en iyi sabittir.

Uyarı 3.1.9: Klasik Grüss eşitsizliği tarafından verilen farklı hesaplamalar için

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$$

farkının en iyi işlemlerinin anlaşılması için aşağıdaki örneği verelim. (3.24) eşitsizliği için bir tahmin yapalım:

$f, g : [0,1] \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonları

$$f(x) = x^p, g(x) = x^q, \quad p, q > 1.$$

şeklinde verilsin. O halde

$$\begin{aligned}
\phi &= \inf_{x \in [0,1]} f(x) = 0, & \phi &= \sup_{x \in [0,1]} f(x) = 1; \\
\gamma &= \inf_{x \in [0,1]} g(x) = 0, & \tau &= \sup_{x \in [0,1]} g(x) = 1
\end{aligned}$$

bulunur ayrıca

$$f'(x) = px^{p-1}, \quad g'(x) = qx^{q-1}, \quad x \in [0,1]$$

olup ve bu fonksiyonların sınırlılıkları

$$\|f'\|_\infty = p, \|g'\|_\infty = q$$

olur. Şimdi bunu yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(\phi - \gamma)(\tau - \gamma) &= \frac{1}{4} \\
\frac{\|f'\|_\infty \|g'\|_\infty}{12} (b-a)^2 &= \frac{pq}{12}
\end{aligned}$$

sonuç olarak eğer $pq > 3$ ise, Grüss eşitsizliği tarafından sağlanan sınırlı, (3.24) tarafından sağlanan sınırdan daha iyidir. Eğer $pq < 3$ ise (3.24) eşitsizliği (3.1)'den daha iyidir.

Uyarı 3.1.10: (3.24) eşitsizliği aynı zamanda (3.11) eşitsizliğinde yer alan Cebaysev eşitsizliğinin de bir iyileştirilmesidir.

Teorem 3.1.11. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı (a, b) aralığında türevlenebilir iki fonksiyon ve $p : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ de $[a, b]$ aralığında integrallebilir fonksiyondur. Eğer $f' \in L_\alpha(a, b)$, $g' \in L_\beta(a, b)$ ile $\alpha > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b \int_a^b p(x) p(y) |x - y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
& \quad \times \left(\int_a^b \int_a^b p(x) p(y) |x - y| \left| \int_x^y |g'(t)|^\beta dt \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \leq \frac{1}{2} \|f'\|_\alpha \|g'\|_\beta \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) |x - y| dx dy
\end{aligned} \tag{3.25}$$

dır. (3.25)'teki ilk eşitsizlik en iyi eşitsizliktir.

İspat: Hölder eşitsizliğini çift katlı integraller için kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_x^y \int_x^y |f'(t) g'(z)| dt dz \right| \\
& \leq \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right|^{\frac{1}{\alpha}} \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right|^{\frac{1}{\beta}} \\
& = |x - y|^{\frac{1}{\alpha}} \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right|^{\frac{1}{\alpha}} |x - y|^{\frac{1}{\beta}} \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right|^{\frac{1}{\beta}} \\
& = |x - y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right|^{\frac{1}{\alpha}} \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right|^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

yazılır. Şimdi, (3.22) eşitsizliğinin ispatında olduğu gibi

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \right| \\
& \leq \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) \left| \int_x^y |f'(t) g'(z)| dt dz \right| dx dy \\
& \leq \int_a^b \int_a^b \left\{ p(x) p(y) |x - y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right|^{\frac{1}{\alpha}} \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right|^{\frac{1}{\beta}} \right\} dx dy
\end{aligned}$$

olur. Çift katlı integrallerde Hölder eşitsizliğini tekrar kullanarak

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right|^{\frac{1}{\alpha}} \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right|^{\frac{1}{\beta}} dx dy \\
& \leq \left(\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
& \quad \times \left(\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

yazılır ve benzer olarak

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dx dy \\
& = 2 \left\{ \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \right. \\
& \quad \left. - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \right\}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

bulunur. (3.26) ve (3.27) eşitsizliği (3.25)'te ilk eşitsizliği sağlar. Şimdi bunu gözlemleyelim: her $x, y \in [a, b]$ için

$$\left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right| \leq \|f'\|_\alpha^\alpha, \quad \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right| \leq \|g'\|_\beta^\beta$$

olup buradan da

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\} \\
& \leq \|f'\|_\alpha \left(\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| dx dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
& \quad \times \|g'\|_\beta \left(\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| dx dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& = \|f'\|_\alpha \|g'\|_\beta \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| dx dy
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da (3.25)'teki ikinci eşitsizlik de ispat edilmiş olur.

(3.25)'deki ilk eşitsizliğin netliği için $f, g : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı fonksiyonlar $f(x) = mx + n$, $g(x) = sx + z$ ile $m, s > 0$ olacak şekilde alalım. O zaman

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \frac{1}{2} ms \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) (x - y)^2 dx dy \end{aligned}$$

ve

$$\left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right| = m^\alpha |x - y|, \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right| = s^\beta |x - y|$$

daha sonra

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\int_a^b \int_a^b p(x) p(y) |x - y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. \\ & \times \left. \left(\int_a^b \int_a^b p(x) p(y) |x - y| \left| \int_x^y |g'(z)|^\beta dz \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\} \\ &= ms \left(\int_a^b \int_a^b p(x) p(y) |x - y|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ & \times \left(\int_a^b \int_a^b p(x) p(y) |x - y|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= ms \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) (x - y)^2 dx dy \end{aligned}$$

ve eşitsizlikdeki ilk eşitlik (3.25)'te gerçekleşmiştir.

Sonuç 3.1.12: f ve g fonksiyonlar Teorem 3.1.11'deki koşullar sağlıyor olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
& \quad \times \left(\frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-y| \left| \int_x^y |g'(t)|^\beta dt \right| dx dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
& \leq \frac{1}{6} \|f'\|_\alpha \|g'\|_\beta (b-a).
\end{aligned}$$

Burada, (3.28)'deki ilk eşitsizlik en iyi sabittir.

Teorem 3.1.13. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı (a, b) aralığında türevlenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_\infty(a, b)$ ve $g' \in L_1(a, b)$ ise aşağıdaki eşitsizliğe sahip vardır;

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \right. \\
& \quad \left. - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \sup_{t \in [x, y]} |f'(t)| \left| \int_x^y |g'(z)| dz \right| dx dy \\
& \leq \frac{1}{2} \|f'\|_\infty \|g'\|_1 \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| dx dy
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Burada, (3.29)'deki ilk eşitsizlik en iyi sabittir.

Sonuç 3.1.14: f ve g fonksiyonları Teorem 3.1.13'deki koşulları sağlıyor olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \\
& \leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \sup_{t \in [x, y]} |f'(t)| \left| \int_x^y |g'(z)| dz \right| dx dy \\
& \leq \frac{1}{6} \|f'\|_\infty \|g'\|_1 (b-a)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

dır. Burada, (3.30)'deki ilk eşitsizlik en iyi sabittir.

Uyar 3.1.11: (3.30) eşitsizliğinde verilen üst sabit, (3.29) eşitsizliğindeki üst sınırdan daha iyi olduğuna dikkat edelim. Gerçekten de, $f, g : [0, 1] \rightarrow R$ fonksiyonların

$$f(x) = x^p, \quad g(x) = x^q \quad (p, q > 1)$$

olarak seçelim. O halde $\alpha, \beta > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için

$$f'(x) = px^{p-1}, \quad g'(x) = qx^{q-1}, \quad \|f'\|_{\infty} = p, \quad \|g'\|_1 = 1,$$

$$\|f'\|_{\alpha} = \frac{p}{[\alpha(p-1)+1]^{\frac{1}{q}}}$$

ve

$$\|g'\|_q = \frac{q}{[\beta(q-1)+1]^{\frac{1}{\beta}}}$$

bulunur. Ayrıca

$$A := \frac{1}{6} \|f'\|_{\infty} \|g'\|_1 (b-a) = \frac{P}{6}$$

ve

$$\begin{aligned} B &:= \frac{1}{6} \|f'\|_{\infty} \|g'\|_1 (b-a) \\ &= \frac{pq}{6[\alpha(p-1)+1]^{\frac{1}{q}} [\beta(q-1)+1]^{\frac{1}{\beta}}} \end{aligned}$$

dır. Eğer $\alpha = \beta = 2$ alınırsa

$$\frac{A}{B} = \frac{[(2p+1)(2q+1)]^{\frac{1}{2}}}{q}$$

dır. Diğer durumda $p, q > 1$ değerleri için 1 den büyük veya küçük olabilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

1935 yılında Grüss aşağıdaki (4.1) eşitsizliği kanıtlamıştır [4]:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma). \quad (4.1)$$

Burada, f ve g 'nin $[a, b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon olmak şartıyla her $x \in [a, b]$ için

$$\varphi \leq f(x) \leq \Phi \text{ ve } \gamma \leq g(x) \leq \Gamma$$

koşulunu sağlamalıdır. Ayrıca eşitsizlikteki $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi sabittir.

Diğer yandan, 1882 de P .L. Chebysev [21] (4.1) eşitsizliğini aşağıdaki şekilde verdi:

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{12}(b-a)^2 \|f'\|_{\infty} \|g'\|_{\infty}.$$

Bu eşitsizlikte, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı f ve g fonksiyonlar birinci türevleri sınırlı olan mutlak sürekli fonksiyonlar olup

$$T(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right)$$

bu ifadeye de literatürde Chebysev fonksiyoneli olarak bilinir. Ayrıca, (4.1) eşitsizliğindeki $\|\cdot\|_{\infty}$ normu $\|p\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |p(t)|$ ile tanımlanır [21].

Beesack ve diğerleri ilk türevleri L_p uzayına ait olan sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki Chebysev eşitsizliğini

$$|T(f, g)| \leq \frac{(b-a)}{4} \left(\frac{2^p - 1}{p(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2^q - 1}{q(q+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \|g\|_q \quad (4.2)$$

ispatladılar. Burada ki $\|\cdot\|_p$ normu $\|h\|_p = \left(\int_a^b |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlı ve her $p > 1$ ve

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ dir.}$$

Tezin bu kısmında , Chebyshevs fonksiyonel ile ilgili bazı eşitsizlikler ispatlanacaktır. Özellikle, türevleri ve kendisi $L_p[a, b]$ ait olan $1 \leq p \leq \infty$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlar için bir çok yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

4.1. CHEBYSHEV-GRÜSS TIPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALAR

Teorem 4.1. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $|f'|$ ve $|g'|$ fonksiyonlar $[a, b]$ aralığında konveks olsun. Bu durumda

i) Eğer $f, f', g, g' \in L_\infty[a, b]$ ise, o zaman

$$|T(f, g)| \leq \frac{(b-a)}{6} [\|g\|_\infty \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \|g'\|_\infty] \quad (4.3)$$

ii) Eğer $f, f', g, g' \in L_p[a, b]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise o zaman

$$|T(f, g)| \leq \frac{2^{\frac{1}{q}-2} (b-a)^{\frac{2}{q}-1}}{[(q+1)(q+2)]^{\frac{1}{q}}} \left[(b-a)^{\frac{1}{p}} (\|gf'\|_p + \|fg'\|_p) + \|g\|_p \|f'\|_p + \|f\|_p \|g'\|_p \right], \quad (4.4)$$

iii) Eğer $f, f', g, g' \in L_1[a, b]$ ise o zaman

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{4} [\|gf'\|_1 + \|fg'\|_1] + \frac{1}{4(b-a)} [\|g\|_1 \|f'\|_1 + \|f\|_1 \|g'\|_1] \quad (4.5)$$

İspat: Herhangi bir $x, t \in [a, b]$, $x \neq t$, için

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \frac{1}{x - t} \int_t^x f'(u) du$$

yazılır. Buradan da $u = (1 - \lambda)x + \lambda t$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \frac{1}{x - t} \int_t^x f'(u) du = \int_0^1 f'[(1 - \lambda)x + \lambda t] d\lambda$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f(x) = f(t) + (x - t) \int_0^1 f'[(1 - \lambda)x + \lambda t] d\lambda \quad (4.6)$$

dır. (4.6)'i tekrar g fonksiyonu için de sağlanacağından

$$g(x) = g(t) + (x - t) \int_0^1 g'[(1 - \lambda)x + \lambda t] d\lambda \quad (4.7)$$

dır. (4.6) ifadesini $g(x)$ ile ve (4.7) ifadesini de $f(x)$ ile çarpıp, çıkan sonuçları toplayarak

$$\begin{aligned} 2f(x)g(x) &= g(x)f(t) + f(x)g(t) + g(x)(x-t) \int_0^1 f'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda \\ &\quad + f(x)(x-t) \int_0^1 g'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda \end{aligned}$$

yazılır. Buradan da bu son eşitliğin her iki taraf $x, t \in [a, b]$ aralığında integralini alınarak, $(b-a)^2$ ile de bölünürse,

$$\begin{aligned} &2 \int_a^b \int_a^b f(x)g(x) dt dx \\ &= \int_a^b \int_a^b g(x)f(t) dt dx + \int_a^b \int_a^b f(x)g(t) dt dx \\ &\quad + \int_a^b \int_a^b g(x)(x-t) \int_0^1 f'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda dt dx \\ &\quad + \int_a^b \int_a^b f(x)(x-t) \int_0^1 g'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda dt dx \end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b g(x) dx \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b g(x)(x-t) \int_0^1 f'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda dt dx \\ &\quad + \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(x)(x-t) \int_0^1 g'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda dt dx \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafını

$$\begin{aligned} T(f, g) &= \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (x-t)g(x) \int_0^1 f'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda dt dx \\ &\quad + \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (x-t)f(x) \int_0^1 g'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda dt dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece, modülün özelliklerini kullanmasıyla,

$$\begin{aligned} &|T(f, g)| \\ &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| |g(x)| \int_0^1 |f'[(1-\lambda)x + \lambda t]| d\lambda dt dx \\ &\quad + \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| |f(x)| \int_0^1 |g'[(1-\lambda)x + \lambda t]| d\lambda dt dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

olur. $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan

$$|f'|[(1-\lambda)x + \lambda t] \leq (1-\lambda)|f'(x)| + \lambda|f'(t)|$$

olup buradan da

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [(1-\lambda)|f'(x)| + \lambda|f'(t)|] d\lambda \\ &= \int_0^1 [|f'(x)| - \lambda|f'(x)| + \lambda|f'(t)|] d\lambda \\ &= \left[\lambda|f'(x)| - \frac{\lambda^2|f'(x)|}{2} + \frac{\lambda^2|f'(t)|}{2} \right]_0^1 \\ &= |f'(x)| - \frac{|f'(x)|}{2} + \frac{|f'(t)|}{2} \\ &= \frac{|f'(x)| + |f'(t)|}{2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

dır. Benzer şekilde, $|g'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [(1-\lambda)|g'(x)| + \lambda|g'(t)|] d\lambda \\ &= \int_0^1 [|g'(x)| - \lambda|g'(x)| + \lambda|g'(t)|] d\lambda \\ &= \left[\lambda|g'(x)| - \frac{\lambda^2|g'(x)|}{2} + \frac{\lambda^2|g'(t)|}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{|g'(x)| + |g'(t)|}{2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Eğer bu (4.10) ve (4.11) değerleri (4.9)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |T(f, g)| &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| |g(x)| \int_0^1 [(1-\lambda)|f'(x)| + \lambda|f'(t)|] d\lambda dt dx \\ &\quad + \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| |f(x)| \int_0^1 [(1-\lambda)|g'(x)| + \lambda|g'(t)|] d\lambda dt dx \\ &= \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| |g(x)| \left[\frac{|f'(x)| + |f'(t)|}{2} \right] dt dx \\ &\quad + \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| |f(x)| \left[\frac{|g'(x)| + |g'(t)|}{2} \right] dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| [|g(x)| |f'(x)| + |g(x)| |f'(t)|] dt dx \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| [|f(x)| |g'(x)| + |f(x)| |g'(t)|] dt dx \\
&\leq \frac{1}{4(b-a)^2} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a,b]} [|g(x)| |f'(x)| + |f(x)| |g'(x)|] \int_a^b \int_a^b |x-t| dx dt \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a,b]} |g(x)| \int_a^b \int_a^b |x-t| |f'(t)| dx dt \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a,b]} |f(x)| \int_a^b \int_a^b |x-t| |g'(t)| dx dt. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Burada son integraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b |x-t| dx dt &= \int_a^b \left[\int_a^b (t-x) dx + \int_a^b (x-t) dx \right] dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{(t-a)^2 + (b-t)^2}{2} \right] dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlik (4.12) yerine yazılırsa her $x, t \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
|T(f, g)| &\leq \frac{1}{4(b-a)^2} [\|g\|_\infty \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \|g'\|_\infty] \int_a^b \left[\frac{(t-a)^2 + (b-t)^2}{2} \right] dt \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \|g\|_\infty \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,b]} |f'(t)| \int_a^b \left[\frac{(t-a)^2 + (b-t)^2}{2} \right] dt \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \|f\|_\infty \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,b]} |g'(t)| \int_a^b \left[\frac{(t-a)^2 + (b-t)^2}{2} \right] dt \\
&= \frac{(b-a)}{6} [\|g\|_\infty \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \|g'\|_\infty]
\end{aligned}$$

bulunur ki bu eşitsizlik de (4.3) ispat edilmiş olur.

ii) Yukarıdaki gibi $T(f, g)$ özdeşliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|T(f, g)| &\leq \frac{1}{4(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| [|g(x)| |f'(x)| + |f(x)| |g'(x)|] dt dx \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| [|g(x)| |f'(t)| + |f(x)| |g'(t)|] dt dx \tag{4.13}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için (4.13) eşitsizliğinde Hölder'in eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
|T(f, g)| &\leq \frac{1}{4(b-a)^2} \frac{2^{\frac{1}{q}}(b-a)^{1+\frac{2}{q}}}{[(q+1)(q+2)]^{\frac{1}{q}}} \\
&\quad \times \left\{ \left(\int_a^b \int_a^b [|g(x)||f'(x)| + |f(x)||g'(x)|]^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^p |f'(t)|^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p |g'(t)|^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{q}}(b-a)^{1+\frac{2}{q}}}{[(q+1)(q+2)]^{\frac{1}{q}}} \\
&\quad \times \left\{ \left(\int_a^b (b-a) [|g(x)||f'(x)| + |f(x)||g'(x)|]^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_a^b |g(x)|^p \int_a^b |f'(t)|^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f(x)|^p \int_a^b |g'(t)|^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{q}-2}(b-a)^{\frac{2}{q}-1}}{[(q+1)(q+2)]^{\frac{1}{q}}} \left[(b-a)^{\frac{1}{p}} [\|gf'\|_p + \|fg'\|_p] + \|g\|_p \|f'\|_p + \|f\|_p \|g'\|_p \right]
\end{aligned}$$

olup bu eşitsizlik de istenilen (4.4) eşitsizliğinin ispatı olur.

iii) (4.13) eşitsizliğini yeniden incelenir ve $f, f', g, g' \in L_1[a, b]$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|T(f, g)| &\leq \frac{1}{4(b-a)} \int_a^b [|g(x)||f'(x)| + |f(x)||g'(x)|] \sup_{t \in [a, b]} |x-t| dx \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \int_a^b \sup_{t \in [a, b]} |x-t| \int_a^b [|g(x)||f'(t)| + |f(x)||g'(t)|] dt dx \\
&= \frac{1}{4(b-a)} \int_a^b [|g(x)||f'(x)| + |f(x)||g'(x)|] \max\{x-a, b-x\} dx \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \int_a^b \max\{x-a, b-x\} [|g(x)||f'|_1 + |f(x)||g'|_1] dx \\
&= \frac{1}{4(b-a)} \int_a^b [|g(x)||f'(x)| + |f(x)||g'(x)|] \left(\frac{(b-a) + |2x-b-a|}{2} \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{4(b-a)^2} \int_a^b \left(\frac{(b-a) + |2x-b-a|}{2} \right) [|g(x)||f'|_1 + |f(x)||g'|_1] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{8} [\|gf'\|_1 + \|fg'\|_1] + \frac{1}{8(b-a)} [\|g\|_1 \|f'\|_1 + \|f\|_1 \|g'\|_1] \\
&\quad + \frac{1}{8(b-a)} \sup_{x \in [a,b]} \theta |2x - b - a| \int_a^b [g(x) |f'(x)| + |f(x)| |g'(x)|] dx \\
&\quad + \frac{1}{(b-a)} \int_a^b [g(x) \|f'\|_1 + |f(x)| \|g'\|_1] dx \\
&= \frac{1}{4} [\|gf'\|_1 + \|fg'\|_1] + \frac{1}{4(b-a)} [\|g\|_1 \|f'\|_1 + \|f\|_1 \|g'\|_1]
\end{aligned}$$

olup istenilen (4.5) eşitsizliği ispat edilmiş olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2. $f, g : [a, b] \rightarrow R$ tanımlı $[a, b]$ mutlak sürekli bir fonksiyon $|f'|^p$ ve $|g'|^p$ ile $p > 1$ olup $[a, b]$ aralığında konveks olsun. Bu durumda,

i) Eğer $f, f', g, g' \in L_\infty[a, b]$ ise

$$|T(f, g)| \leq \frac{(b-a)}{6} [\|g\|_\infty \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \|g'\|_\infty] \quad (4.14)$$

ii) Eğer $f, f', g, g' \in L_p[a, b]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
|T(f, g)| &\leq \frac{2^{\frac{1}{q}-1} (b-a)^{\frac{2}{q}-1}}{[(q+1)(q+2)]^{\frac{1}{q}}} \\
&\quad \times \left\{ \left((b-a) \|gf'\|_p^p + \|g\|_p^p \|f'\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left((b-a) \|fg'\|_p^p + \|f\|_p^p \|g'\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

iii) Eğer $f, f', g, g' \in L_p[a, b]$ ise

$$|T(f, g)| \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}}}{2} \left\{ [\|f'\|_p^p + \|gf'\|_p^p]^{\frac{1}{p}} + [\|g'\|_p^p + \|fg'\|_p^p]^{\frac{1}{p}} \right\}. \quad (4.16)$$

İspat: İlk olarak Hölder eşitsizliğini uygular ve daha sonrada integralin iç kısmına

$|f'|^p$ 'nin konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f'[(1-\lambda)x + \lambda t] d\lambda &\leq \left(\int_0^1 1^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |f'[(1-\lambda)x + \lambda t]|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 |f'[(1-\lambda)x + \lambda t]|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^1 [(1-\lambda)|f'(x)|^p + \lambda|f'(t)|^p] d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{|f'(x)|^p + |f'(t)|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

yazılır. (4.8) özdeşliği ele alınır ve yukarıdaki sonuç bu özdeşlikte yerine yazılırsa her $x, t \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
|T(f, g)| &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| |g(x)| \left(\frac{|f'(x)|^p + |f'(t)|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} dt dx \\
&\quad + \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x-t| |f(x)| \left(\frac{|g'(x)|^p + |g'(t)|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} dt dx
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olur.

i) $f, f', g, g' \in L_\infty[a, b]$ alırsak, (4.17) ifadesi her $x, t \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
|T(f, g)| &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} |g(x)| \\
&\quad \times \operatorname{ess\,sup}_{x, t \in [a, b]} \left(\frac{|f'(x)|^p + |f'(t)|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \int_a^b \int_a^b |x-t| dt dx \\
&\quad + \frac{1}{2(b-a)^2} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} |f(x)| \\
&\quad \times \operatorname{ess\,sup}_{x, t \in [a, b]} \left(\frac{|g'(x)|^p + |g'(t)|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \int_a^b \int_a^b |x-t| dt dx \\
&\leq \frac{(b-a)}{6} [\|g\|_\infty \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \|g'\|_\infty]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) Eğer $f, f', g, g' \in L_p[a, b]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o zaman (4.17) eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
|T(f, g)| &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \left(\int_a^b \int_a^b |x-t|^q dt dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^p \left(\frac{|f'(x)|^p + |f'(t)|^p}{2} \right) dt dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p \left(\frac{|g'(x)|^p + |g'(t)|^p}{2} \right) dt dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{2^{1+\frac{1}{p}}(b-a)^2} \left(\int_a^b \frac{(x-a)^{q+1} + (b-x)^{q+1}}{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left((b-a) \|gf'\|_p^p + \|g\|_p^p \|f'\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left((b-a) \|fg'\|_p^p + \|f\|_p^p \|g'\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1} (b-a)^{\frac{2}{q}-1}}{[(q+1)(q+2)]^{\frac{1}{q}}} \left\{ \left((b-a) \|gf'\|_p^p + \|g\|_p^p \|f'\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \left((b-a) \|fg'\|_p^p + \|f\|_p^p \|g'\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur ki bu da istenilen (4.15) eşitsizliği sağlanılmış olur.

iii) $f, f', g, g' \in L_p[a, b]$ olsun. O halde, (4.17) ve Hölder eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
&|T(f, g)| \\
&\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |x-t| \int_a^b |g(x)| \left(\frac{|f'(x)|^p + |f'(t)|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |x-t| \int_a^b |f(x)| \left(\frac{|g'(x)|^p + |g'(t)|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} dx dt \\
&= \frac{1}{2^{1+\frac{1}{p}}(b-a)^2} \int_a^b \max\{t-a, b-t\} \int_a^b |g(x)| \left(|f'(x)|^p + |f'(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2^{1+\frac{1}{p}}(b-a)^2} \int_a^b \max\{t-a, b-t\} \int_a^b |f(x)| \left(|g'(x)|^p + |g'(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} dx dt \\
&\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \left(\frac{(b-a) + |2t-b-a|}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(\int_a^b |g(x)|^p \left(|f'(x)|^p + |f'(t)|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b 1^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right] dt \\
& + \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \left(\frac{(b-a) + |2t-b-a|}{2} \right) \\
& \times \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p \left(|g'(x)|^p + |g'(t)|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b 1^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right] dt \\
& \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}-2}}{2} \sup_{t \in [a,b]} \left(\frac{(b-a) + |2t-b-a|}{2} \right) \int_a^b \left[(b-a) |f'(t)|^p + \|gf'\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} dt \\
& + \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}-2}}{2} \sup_{t \in [a,b]} \left(\frac{(b-a) + |2t-b-a|}{2} \right) \int_a^b \left[(b-a) |g'(t)|^p + \|fg'\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} dt \\
& \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}-1}}{2} \left(\int_a^b \left[(b-a) |f'(t)|^p + \|gf'\|_p^p \right] dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}-1}}{2} \left(\int_a^b \left[(b-a) |g'(t)|^p + \|fg'\|_p^p \right] dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{(b-a)^{\frac{1}{q}}}{2} \left\{ \left[\|f'\|_p^p + \|gf'\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\|g'\|_p^p + \|fg'\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} \right\}
\end{aligned}$$

istenilen (4.16) eşitsizliği ispatlanmış olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Eşitsizlik konusu son zamalarda ciddi bir anlamda çalışma alanına sahip olup yapılan her çalışma yoğun bir ilgi odağına sahiptir. Bu eşitsizliklerden en önemlisi olan Chebyshev ve Grüss eşitsizlikleri yoğun bir çalışma konusudur. Farklı türden fonksiyonlar için bu eşitsizlikler elde edilmeye ve yeni genellemeler yapılmaktadır. Bu tezimizde, Chebyshev ve Grüss tipli integral eşitsizliklerinin genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu çalışmalar farklı konveks uzaylarda da yapılabilir.



6. KAYNAKLAR

- [1] P. Cerone and S. S. Dragomir, “New bounds for the Cebyev functional,” *Applied Mathematics Letters*, c. 18, sayı 6, ss. 603-611, 2005.
- [2] P. Cerone and S. Dragomir, “A refinement of the Grüss inequality and applications”, *Tamkang Journal of Mathematics*, c. 38, sayı 1, ss. 37-49, 2007.
- [3] S. Erden, M. Sarikaya and H. Budak, “Grüss type inequalities for generalized fractional integrals”, *AIP Conference Proceedings*, c. 1726, sayı 1, s. 020061, 2016.
- [4] G. Grüss, “über das Maximum des absoluten Betrages von”
 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$, *Mathematische Zeitschrift*, c. 39, sayı 1, ss. 215-226, 1935.
- [5] M.A. Khan, N. Latif, J. Pecaric & I.Peric. “On Sapogovs Extension of Cebysev’s Inequality and Related Results.” *Thai Journal of Mathematics*, c.10, sayı 3, ss. 617-633, 2012.
- [6] M.A. Khan, J. Khan and J.Pecaric., “Generalization of Jensen's and Jensen-Steffensen's inequalities by generalized majorization theorem”, *Journal of Mathematical Inequalities*, sayı 4, ss. 1049-1074, 2017.
- [7] M. Özdemir, E. Set, A. Akdemir and M. Sarıkaya, “Some new Chebyshev type inequalities for functions whose derivatives belongs to $L\{p\}$ $L p$ spaces”, *Afrika Matematika*, c. 26, sayı 7-8, ss. 1609-1619, 2014.
- [8] M. Sarikaya, N. Aktan and H. Yildirim, “On weighted Chebyshev-Grüss type inequalities on time scales”, *Journal of Mathematical Inequalities*, c. 2, sayı 2, ss. 185-195, 2008.
- [9] M. Sarikaya and H. Yaldiz, “New generalization fractional inequalities of Ostrowski-Grüss type”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, c. 34, sayı 4, ss. 326-331, 2013.
- [10] E. Set, M. Tomar and M. Sarikaya, “On generalized Grüss type inequalities for k-fractional integrals”, *Applied Mathematics and Computation*, c. 269, ss. 29-34, 2015.
- [11] T. Tunç, F. Usta, H. Budak and M. Sarikaya, “On Grüss type inequalities utilizing generalized fractional integral operators”, *AIP Conference Proceedings*, c. 1833, sayı 1, s. 020054, 2017.
- [12] F. Usta, H. Budak and M. Sarikaya, “On Chebychev type inequalities for fractional integral operators”, *AIP Conference Proceedings*, c. 1833, sayı 1, s. 020045, 2017.
- [13] D. Mitrinovic, A. Fink and J. Pecaric, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Dordrecht, Hollanda: Kluwer Academic Publications, 1993.
- [14] J. E. Pecaric, F. Prochan and Y. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statical Applications*, Academic Press, San Diego, 1992.

- [15] P. Cerone and S. Dragomir, “Trapezoidal type rules from an inequalities point of view”, in *Analytic Computational Method in Applied Mathematics*, Edited by G. Anastassiou, New York : CRC Press, 2000, ss. 65–134.
- [16] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley and Sons, 2nd ed., 1989.
- [17] H. Engels, *Numerical Quadrature and Cubature*, New York, USA : Academic Press, 1980.
- [18] B.G. Pachpatte, “A Note on a Trapezoid Type Integral Inequality”, *Bulletin of The Greek Mathematical Society*, c. 49, ss. 85–90, 2004.
- [19] A.G. Azpeitia, “Convex functions and the Hadamard inequality”, *Revista Colombiana de Mathematicas*, c. 28, ss. 7-12, 1994.
- [20] D.S. Mitrinovic, *Analytic Inequalities*, New York, USA: Springer-Verlag, 1970.
- [21] P. L. Chebyshev, “Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mmes limites”, *Proceeding Mathematical Society in Charkov*, c. 2, ss. 93-98, 1882.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Sümeýra Kaplan
Doğum Tarihi ve Yeri :13.05.1991
Yabancı Dili :
E-posta :sumeyrakaplan81@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik Bölüm	Atatürk Üniversitesi	2014
Lise	Sayısal	Düzce Lisesi	2009

YAYINLAR

M. Zeki Sarıkaya and Sümeýra Kaplan, *Some estimations Čebysev-Grüss type inequalities involving functions and their derivatives*, **Open Journal of Mathematical Sciences (OMS)**, Pages 146-155, Publication Date: 11-06-2018.