

**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERDE MATRİS
KARAKTERİZASYONU VE ÇEKİRDEK
TEOREMLERİ**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**NEVZAT KIZIL
EYLÜL 2009**

Çift İndisli Dizilerde Matris Karakterizasyonu ve Çekirdek Teoremleri

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Kuddusi KAYADUMAN**

**Nevzat KIZIL
Eylül 2009**

ÖZET

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERDE MATRİS KARAKTERİZASYONU VE ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

KIZIL Nevzat

Yüksek Lisans Tezi, Matematik A.B.D.

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Eylül 2009, 56 sayfa

Dört bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümünde sonsuz matris yardımıyla elde edilen dönüşüm dizisi tarif edilerek regülerlik, hemen hemen yakınsaklık, kuvvetli regülerlik ve hemen hemen regülerlik hakkında yapılmış tanımlar verildi. Ayrıca sınırlı bir dizinin Knopp ve Banach çekirdeklerinin tanımları yapılarak bu iki çekirdek arasındaki ilişkileri veren ve daha önce elde edilen teorem ve sonuçlar verildi.

İkinci bölümde; çift indisli dizinin ve dönüşüm dizisinin tanımları yapılarak çift dizilerde regülerlik, hemen hemen yakınsaklık, kuvvetli regülerlik, hemen hemen regülerlik ve hemen hemen kuvvetli regülerlik ile ilgili tanımlar ve ayrıca bölüm sonunda çift indisli bir dizinin Pringsheim çekirdeği ve MR-çekirdeği tanımları verildi.

Üçüncü bölümde; (c_2^∞, c_2^∞) -regüler, (f_2, c_2^∞) -kuvvetli regüler, (c_2^∞, f_2) -hemen hemen regüler ve (f_2, f_2) -hemen hemen kuvvetli regüler matris sınıfları karakterize edildi.

Son bölümde ise; x sınırlı ve çift indisli bir dizi olmak üzere $MR - Çek(Ax) \subseteq P - Çek(x)$, $MR - Çek(Ax) \subseteq MR - Çek(x)$ ve $P - Çek(Ax) \subseteq MR - Çek(x)$ kapsama bağıntılarının geçerli olması için A matrisinin taşıması gereken şartlar belirlendi.

Anahtar Kelimeler: Çift indisli dizi, hemen hemen yakınsaklık, kuvvetli regülerlik, hemen hemen kuvvetli regülerlik, P-çekirdek, MR-çekirdek.

ABSTRACT

MATRIX CHARACTERIZATION IN DOUBLE SEQUENCES AND THE CORE THEOREMS

KIZIL Nevzat

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assit. Prof. Kuddusi KAYADUMAN

September 2009, 56 pages

In this study, that is prepared as four chapter, after the definitions of a transformation sequence that is obtained with an infinite matrix, regularity, almost convergence, strongly regularity, almost regularity; the Knopp core and the Banach core of a bounded sequence are defined and some covering theorems and results between these are also presented in the first chapter.

In the second chapter; in addition to the definitions of a double sequence and a transformation sequence that is obtained with a four dimensional matrix, regularity, almost convergence, strongly regularity, almost regularity, strongly almost regularity of a four dimensional matrix, the P-core and the MR-core of a double sequence are defined.

In the third chapter; (c_2^∞, c_2^∞) -regular, (f_2, c_2^∞) -strongly regular, (c_2^∞, f_2) -almost regular and (f_2, f_2) -almost strongly regular matrix sets are characterized.

In the fourth chapter; supposing x is a bounded double sequence, the properties of a four dimensional matrix A should have, for the covering relations that is $MR - \check{C}ek(Ax) \subseteq P - \check{C}ek(x)$, $MR - \check{C}ek(Ax) \subseteq MR - \check{C}ek(x)$ and $P - \check{C}ek(Ax) \subseteq MR - \check{C}ek(x)$ to be hold are established.

Key Words: Double sequence, almost convergence, strongly regularity, almost strongly regularity, P-core, MR-core.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL ve KISALTMALAR LİSTESİ	iv
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 1: TEMEL TANIM ve TEOREMLER	3
1.1. Matris Dönüşümleri.....	5
1.2. Hemen Hemen Yakınsaklık.....	6
1.3. Çekirdek Kavramı.....	8
BÖLÜM 2: ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER	11
2.1. Çift İndisli Dizilerde P-Yakınsaklık	12
2.2. Iraksak Çift Seriler.....	16
2.3. Çift Dizilerde Hemen Hemen Yakınsaklık	20
2.4. Çift Dizilerde Çekirdek Kavramı	23
BÖLÜM 3: 4-BOYUTLU MATRİS SINIFLARININ KARAKTERİZASYONU	25
BÖLÜM 4 : ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERDE ÇEKİRDEK TEOREMLERİ.....	43
KAYNAKLAR	55

SEMBOL ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
c	Tek indisli yakınsak dizi uzayı
l_{∞}	Tek indisli sınırlı dizi uzayı
F	Tek indisli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
F_0	Tek indisli sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
(l^{∞}, l^{∞})	Sınırlı tek indisli dizileri sınırlı dizi uzayına taşıyan matris sınıfı
(l^{∞}, c)	Sınırlı tek indisli dizileri yakınsak dizi uzayına taşıyan matris sınıfı
$(c, c)_{reg}$	İki boyutlu regüler matris sınıfı
$(F, c)_{reg}$	İki boyutlu kuvvetli regüler matris sınıfı
$(c, F)_{reg}$	İki boyutlu hemen hemen regüler matris sınıfı
$(F, F)_{reg}$	F-regüler matris sınıfı
(E, F)	E'den F'ye tanımlı bütün matrislerin sınıfı
$(F, E)_{reg}$	F'den E'ye tanımlı regüler matris sınıfı
Ω	Çift indisli dizi uzayı
c_2	Yakınsak çift dizi uzayı
l_2^{∞}	Sınırlı çift dizi uzayı
c_2^{∞}	Sınırlı-yakınsak çift dizi uzayı
f_2	Hemen hemen yakınsak çift dizi uzayı
$(c_2^{\infty}, c_2^{\infty})$	Dört boyutlu regüler matris sınıfı
(f_2, c_2^{∞})	Dört boyutlu kuvvetli regüler matris sınıfı
(c_2^{∞}, f_2)	Dört boyutlu hemen hemen regüler matris sınıfı
(f_2, f_2)	Dört boyutlu hemen hemen kuvvetli regüler matris sınıfı

$h.h.y$	Hemen hemen yakınsak
$h.h.regüler$	Hemen hemen regüler
$h.h.k.regüler$	Hemen hemen kuvvetli regüler
$K - çek$	Tek indisli bir dizinin Knopp çekirdeği
$P - çek$	Bir çift dizinin Pringsheim çekirdeği
$MR - çek$	Bir çift dizinin MR-çekirdeği

GİRİŞ

Yeni bir dizi uzayı inşa etmek ve bu uzayın diğer uzaylar arasındaki yerini belirleyecek şekilde kapsama bağıntılarını vermek, bu uzay üzerindeki ve bu uzay içine matris dönüşümlerini karakterize etmek ve ayrıca bir dizinin çekirdeğinin incelenmesi, nitelikli problemler arasındadır.

1911 yılında Alman matematikçi O. Toeplitz[1] dizi uzayları üzerindeki matris dönüşümleri ile ilgili problemleri çözmek için lineer uzay teorisi metodunu ortaya attı ve $A \in (c, c; p)$ matris sınıfını karakterize etti. 1948 yılında Lorentz[2], Banach limitlerinden hareketle hemen hemen yakınsaklık denilen yeni bir yakınsaklık kavramı tanımladı ve bu matris sınıfına ait matrislerin karakterizasyonunu verdi. 1946'da J. P. King[3] hemen hemen regülerlik tanımını vererek matris sınıfını karakterize etti.

Dizinin çekirdeği kavramı, toplanabilme teorisinin önemli konularından biridir. İlk olarak 1926 yılında Knopp[4], yakınsaklık kavramından hareketle dizinin çekirdeğini (K- çek) tanımladı. Knopp daha sonra, dönüşüm dizisinin çekirdeğinin esas dizinin çekirdeği tarafından kapsandığını ifade eden teoremi verdi. 1979 yılında, Knopp Çekirdek Teoremi'nin Maddox[5] tarafından bir eşitsizlik problemi olarak görülüp yeniden ispatlanmasından sonra, bu kavram ilgi görmeye başladı.

1948 yılında Lorentz [2] tarafından verilen hemen hemen yakınsaklığın karakterizasyonuna dayanarak 1987'de Das [6], sınırlı bir dizinin Banach çekirdeğini (B-çek) tanımladı. Sonraki yıllarda K ve B-çekirdekleriyle ilgili birçok çalışma yapıldı.

$x=(x_{nk})$ gibi çift indisli dizilerde yakınsaklık tanımı ilk olarak 1900'de Pringsheim [7] tarafından verildi ve bu dizilerin yakınsaklığı $P\text{-}\lim x_{nk}$ şeklinde ifade edildi. Çift dizi kavramı ile beraber çift dizilerin dönüşüm dizisinin tanımlanması, yukarıda bahsedilen kavramların bu uzay içerisinde tekrar ele alınması problemini doğurdu ve bu anlamda 1921'de Robison [8] (c_2^∞, c_2^∞) -regüler matris sınıfını karakterize eden

teoremi verdikten sonra, 1998’de Moricz ve Rhoades[9] çift indisli dizilerde hemen hemen yakınsaklığı tanımlayarak $A \in (f_2, c_2^\infty)$ kuvvetli regüler matris sınıfını karakterize eden şartları verdi. Bunların dışında, 2003 yılında Mursaleen ve Savaş[] hemen hemen regülerlik kavramını ortaya atarak bu matris sınıfını $A \in (c_2^\infty, f_2)$ şeklinde ifade etti.

Çift dizilere çekirdek konusunu ilk olarak, 1999 yılında Patterson [11] taşıdı ve bir çift dizinin çekirdeğini P-çekirdek şeklinde tanımlayarak, $A \in (c_2^\infty, c_2^\infty)$ -regüler matris sınıfı şartlarından faydalanarak dönüşüm dizisinin esas dizinin çekirdeği tarafından kapsandığını ifade eden teoremi verdi. 2004 yılında Mursaleen ve Edely [12], bir çift dizinin MR-çekirdeğini tanımladıktan sonra Pringsheim çekirdeği ile MR-çekirdek arasındaki kapsama ilişkilerini verdi.

Bu çalışmada; sonsuz matris yardımıyla elde edilen dönüşüm dizisi tarif edilerek regülerlik, hemen hemen yakınsaklık, hemen hemen regülerlik, kuvvetli regülerlik ve sınırlı bir dizinin Knopp ve Banach çekirdekleri tanımları yapılarak bu iki çekirdek arasındaki ilişkileri veren ve daha önce elde edilmiş teorem ve sonuçlar yer aldı. Ayrıca; çift indisli dizinin ve dönüşüm dizisinin tanımları yapılarak çift indisli dizilerde regülerlik, hemen hemen yakınsaklık, hemen hemen regülerlik, kuvvetli regülerlik ve hemen hemen kuvvetli regülerlik ile ilgili tanımlar ve ayrıca bölüm sonunda çift indisli bir dizinin Pringsheim çekirdeği ve MR-çekirdeği tanımları verildi.

Son olarak; (c_2^∞, c_2^∞) -regüler, (f_2, c_2^∞) -kuvvetli regüler, (c_2^∞, f_2) -hemen hemen regüler ve (f_2, f_2) -hemen hemen kuvvetli regüler matris sınıfları karakterize edilerek x sınırlı ve çift indisli bir dizi olmak üzere, $MR-Çek(Ax) \subseteq P-Çek(x)$, $MR-Çek(Ax) \subseteq MR-Çek(x)$ ve $P-Çek(Ax) \subseteq MR-Çek(x)$ kapsama bağıntılarının geçerli olması için A matrisinin taşıması gereken şartlar belirlendi.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlar verildi.

Tanım 1.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları, eğer $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

$$L1) \quad x + y = y + x ,$$

$$L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z) ,$$

$$L3) \quad x + \alpha = x \text{ olacak şekilde bir } \alpha \in X \text{ vardır,}$$

$$L4) \quad x + (-x) = \alpha \text{ olacak } (-x) \in X \text{ vardır,}$$

$$L5) \quad x.1 = x ,$$

$$L6) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y ,$$

$$L7) \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x ,$$

$$L8) \quad \lambda(\mu.x) = (\lambda.\mu)x ,$$

şartlarını sağlarsa X kümesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir ([13], sf. 69).

X , $\mathbb{C}$ cismi üzerinde vektör uzayı ve $Y \subset X$ ise, Y kümesinin de X üzerinde tanımlanan $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında vektör uzayı olması için $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $y_1, y_2 \in Y$ alındığında $\lambda y_1 + y_2 \in Y$ sağlanması yeterlidir.

Tanım 1.2. X bir vektör uzayı ve $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve $\lambda_n \in \mathbb{C}$ için,

- P1) $g(\theta) = 0$,
- P2) $g(x) = g(-x)$,
- P3) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$,
- P4) $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ ve $x_n \rightarrow x_0$ olduğunda $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$,

şartlarını sağlıyorsa, g fonksiyonuna X üzerinde bir “*paranorm*” ve (X, g) ikilisine de “*paranormlu uzay*” denir ([13], sf. 69).

Tanım 1.3. X bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve her λ skaleri için;

- YN1) $\|x\| \geq 0$,
- YN2) $\|\theta\| = 0$,
- YN3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- YN4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir “*yarı-norm*” ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de “*yarı-normlu uzay*” denir. Eğer $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ şartı sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir “*norm*”, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de “*normlu uzay*” denir ([13], sf. 103).

Tanım 1.4. X boş olmayan bir küme $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

- M1) $d(x, y) > 0$,
- M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- M3) $d(x, y) = d(y, x)$,
- M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir “*metrik*”, (X, d) ikilisine de bir

“metrik uzay” denir.

Tanım 1.5. (X, d) metrik uzayında bir $x = (x_n) \in X$ dizisi için $n, k \rightarrow \infty$ olduğunda $d(x_n, x_k) \rightarrow 0$ oluyorsa, yani $\forall \varepsilon > 0$ için $d(x_n, x_k) < \varepsilon$ ise x dizisine bir Cauchy dizisi denir ([13], sf. 104).

Tanım 1.6. Eğer $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X normlu uzayına “tam normlu uzay” veya “Banach uzayı” denir ([13], sf. 104).

Teorem 1.1. $f_n, I \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak bir fonksiyon dizisi olsun. f_n ’nin I üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek yeter şart,

$$\limsup_n \sup_{x \in I} |f_n - f| = 0 \quad (1.1)$$

olmasıdır ([13], sf. 18).

1.1. Matris Dönüşümleri

Tanım 1.1.1. $A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her n için,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k \quad (1.1.1)$$

serileri yakınsak ise, $(A_n(x))$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir. İleri konularda karışıklığa neden olmaması için bir $A = (a_{nk})$ matrisi ihtiyaç duyulduğunda $A = (a_{n,k})$ şeklinde de ifade edilecektir.

E ve F herhangi iki dizi uzayı ve A bir sonsuz matris olsun. $\forall x \in E$ alındığında $(A_n(x)) \in F$ ise, A matrisi E ’den F ’ye tanımlıdır denir ve $A \in (E, F)$ yazılır. E ’den F ’ye tanımlı bütün matrislerin sınıfı (E, F) ile ifade edilir.

Eğer E ve F üzerinde limit ve toplam var ise, (E, F) 'nin elemanlarının limiti koruması halinde $(E, F)_{reg}$ yazılır. Mesela; $A \in (c, c)_{reg}$ ise, her $x \in c$ için $Ax \in c$ ve $\lim x = \lim A_n(x)$ dir. Bu sınıftaki matrislere regüler matrisler denir. Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 1.1.1. *Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart*

- i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$
- ii) $\lim_n a_{nk} = 0$ (her k için)
- iii) $\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$

olmasıdır ([13], sf. 221).

Teorem 1.1.2. $A \in (l^\infty, l^\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \quad (1.1.2)$$

olmasıdır ([13], sf. 222).

Teorem 1.1.3. $A \in (l^\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum_k |a_{nk}|$ serisinin n 'ye göre düzgün yakınsak ve $\lim_n a_{nk} = 0$ olmasıdır ([13], sf. 223).

1.2. Hemen Hemen Yakınsaklık

Tanım 1.2.1. $X, \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne bir reel fonksiyonel denir. Her $x, y \in X$ için,

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad (1.1.3)$$

ise, f 'ye alt toplamsal ve

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1.1.4)$$

ise, f 'ye toplamsaldır denir ([13], sf. 222).

Eğer $\alpha \geq 0$ ve her $x \in X$ için $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ise f 'ye homojendir denir. Alt-toplamsal ve homojen bir fonksiyonele alt lineer, toplamsal ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için homojen olan bir fonksiyonele de lineerdir denir.

Tanım 1.2.2. $L : l^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineer olsun. Eğer,

- i) $x = (x_n)$ olmak üzere her n için $x_n \geq 0$ ise $L(x) \geq 0$,
- ii) $e = (1, 1, 1, \dots)$ için $L(e) = 1$,
- iii) $(Sx)_n = x_{n+1}$ olmak üzere $L[(Sx)_n] = L(x)$,

şartlarını sağlıyorsa L 'ye bir Banach limiti denir. Bütün Banach limitleri eşit olan diziye “*hemen hemen yakınsaktır*” denir [2].

Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı F , sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı da F_0 ile ifade edilir. Eğer x dizisi bir a değerine hemen hemen yakınsak ise $F - \lim x = a$ yazılır.

Teorem 1.2.1. $F - \lim x = a$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p x_{n+i} = a \quad (n' \text{ ye göre düzgün}) \quad (1.1.5)$$

olmasıdır [2].

Tanım 1.2.3. Eğer $A \in (F, c)_{reg}$ ise A 'ya “*kuvvetli regülerdir*” denir [2].

Teorem 1.2.2. *Regüler bir matrisin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_n \sum_k |a_{n,k} - a_{n,k+1}| = 0 \quad (1.1.6)$$

olmasıdır [2].

Tanım 1.2.4. Eğer $A \in (c, F)_{reg}$ ise A 'ya “*hemen hemen regülerdir*” denir [3].

Teorem 1.2.3. *Bir A matrisinin hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şart*

Teorem 1.1.1.(i) şartı ile birlikte

$$i) \quad F - \lim a_{nk} = 0 \quad (\text{her } k \text{ için})$$

$$ii) \quad F - \lim_n \sum_k a_{nk} = 1$$

şartlarının sağlanmasıdır [3].

Tanım 1.2.5. Eğer $A \in (F, F)$ ise A 'ya F -regülerdir denir [14].

1.4. Çekirdek Kavramı

Bu kısımda; sınırlı bir dizinin Knopp çekirdeği (kısaca K -çek) ve Banach çekirdeği (kısaca B -çek) tanımları verildikten sonra, çekirdekler arasındaki kapsama bağıntıları verildi.

Tanım 1.4.1. $L(x) = \limsup x$ ve $l(x) = \liminf x$ olmak üzere, sınırlı bir x dizisinin K -çekirdeği $[l(x), L(x)]$ kapalı aralıktır ([4], sf. 138).

Bu tanımdan sonra Knopp, dönüşüm dizisinin çekirdeğinin esas dizinin çekirdeği tarafından kapsandığını ispatlayan aşağıdaki teoremi verdi.

Teorem 1.4.1. *Eğer A matrisi regüler ve pozitif terimli ise, her $x \in l^\infty$ için ,*

$$K - çek(Ax) \subseteq K - çek(x)$$

olur ([4], sf. 138).

Eğer, $\forall x \in l^\infty$ için $L(Ax) \leq L(x)$ ise, $l(x) \leq l(Ax) \leq L(Ax) \leq L(x)$ eşitsizliği elde edilir. Böylece $L(Ax) \leq L(x)$ olması $K - çek(Ax) \subseteq K - çek(x)$ ile aynı anlamdadır. Buna dayanarak Maddox, 1979'da Knopp'un[4] çekirdek teoremini bir eşitsizlik problemi olarak ele aldı ve aşağıdaki gibi ispatladı.

Teorem 1.4.2. *$L(Ax) \leq L(x)$ olması için gerek ve yeter şart , A 'nın regüler olması ve*

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1 \quad (1.4.1)$$

şartını sağlamasıdır [5].

Tanım 1.4.2. P ve Q , l^∞ üzerinde sırasıyla alt lineer ve lineer fonksiyoneller olsunlar. Her $x \in l^\infty$ için $Q(x) \leq P(x)$ eşitsizliği, Q 'nun Banach limiti olmasını zorunlu kılıyorsa, P 'ye Banach limitlerini üretir denir. Eğer her Q Banach limiti ve $x \in l^\infty$ için $Q(x) \leq P(x)$ oluyorsa, P 'ye Banach limitlerine baskındır denir [6].

Eğer P hem Banach limitlerini üretir hemde Banach limitlerine baskın ise, bir sınırlı x dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart $-P(-x) = P(x)$ olmasıdır. Ayrıca, sınırlı bir x dizisinin Banach çekirdeği $[-P(-x), P(x)]$ kapalı aralığı ile tanımlanır.

$$q(x) = \inf_{n_1, n_2, \dots, n_p} \limsup_k \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{k+n_i} \quad (1.4.2)$$

ile tanımlanan q alt lineer fonksiyoneli hem Banach limitlerini üretir hemde Banach limitlerine baskındır. Dolayısıyla, sınırlı bir x dizisinin B-çekirdeği $[-q(-x), q(x)]$ kapalı aralığı ile tanımlanır.

Ayrıca l^∞ üzerinde,

$$L^1(x) = \limsup_p \sup_n \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p x_{n+i} \quad (1.4.3)$$

şeklinde tanımlanan alt lineer fonksiyoneli de Banach limitlerine baskındır ve Banach limitlerini üretir. Bu nedenle dizinin B-çekirdeği aynı zamanda $[-L^1(-x), L^1(x)]$ şeklinde de verilir.

Teorem 1.4.3. Her $x \in l^\infty$ alındığında $K-\text{çek}(Ax) \subseteq K-\text{çek}(x)$ olması için gerek ve yeter şart, A 'nın regüler olması ve (1.1.1)'in sağlanmasıdır [5].

Teorem 1.4.4. Her $x \in l^\infty$ alındığında $K-\text{çek}(Ax) \subseteq B-\text{çek}(x)$ olması için gerek ve yeter şart A 'nın kuvvetli regüler olması ve (1.1.1)'in sağlanmasıdır [15].

Teorem 1.4.5. Her $x \in l^\infty$ alındığında $B-\text{çek}(Ax) \subseteq K-\text{çek}(x)$ olması için gerek ve yeter şart A 'nın hemen hemen regüler ve

$$\limsup_p \sum_n \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=0}^p a_{n+i,k} \right| = 1 \quad (1.4.4)$$

olmasıdır [15].

Teorem 1.4.6. Her $x \in l^\infty$ alındığında $B-\text{çek}(Ax) \subseteq B-\text{çek}(x)$ olması için gerek ve yeter şart A 'nın F -regüler olması ve (1.1.2)'nin sağlanmasıdır [15].

BÖLÜM 2

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER

Bu bölümde, çift indisli dizinin tanımı, Pringsheim yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, dizinin Pringsheim çekirdeği ve MR-çekirdeği kavramları detaylı olarak verildi.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir cümle olmak üzere,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (n, k) &\rightarrow f(n, k) = x_{nk} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir “*çift indisli dizi*” denir. Bundan sonraki kısımlarda çift indisli dizi yerine kısaca çift dizi veya dizi ifadesi kullanılacaktır. Bir x çift dizisinin x_{nk} elemanları,

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1k} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2k} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünülebilir. Kompleks veya reel terimli bütün çift dizilerin kümesi Ω ile ifade edilecektir. Buna göre;

$$\Omega = \{x = (x_{nk}) : \forall n, k \in \mathbb{N} \text{ için } x_{nk} \in \mathbb{C}\}$$

olup bu küme $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in \Omega$ için $\alpha.x = (\alpha x_{nk})$ ve $x + y = (x_{nk} + y_{nk})$ işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

2.1. Çift Dizilerde P-Yakınsaklık

Tek dizilerdeki durumun tersine, çift dizilerde birden fazla yakınsaklık kavramı mevcuttur. Bunlardan en çok çalışılanı *Pringsheim* ve *regüler* yakınsaklıktır. Bu çalışmada kullanılan yakınsaklık *Pringsheim* anlamında yakınsaklık olduğundan sadece bu yakınsama türü tanımlanacaktır.

Tanım 2.1.1. Reel veya kompleks terimli $x = (x_{nk})$ çift dizisi, verilen bir $\varepsilon > 0$ için $n, k > N$ olduğunda,

$$|x_{nk} - l| < \varepsilon \quad (2.1.1)$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı bulunabiliyor ise, $x = (x_{nk})$ dizisine *Pringsheim* anlamında yakınsak, l 'ye ise x dizisinin *Pringsheim limiti* denir [7].

Pringsheim anlamında yakınsak bir diziye kısaca *P-yakınsak* denir ve x dizisinin yakınsak olması $P\text{-}\lim x = l$ ile ifade edilir. *Pringsheim* anlamında yakınsak dizilerin kümesi c_2 olup bu küme,

$$c_2 = \{x = (x_{nk}) \in \Omega : \exists p_x \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists K \in \mathbb{N}, \forall n, k \geq K \ni |x_{nk} - p_x| < \varepsilon\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.2. $x = (x_{nk})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere, $\sup_{n, k \geq 0} |x_{nk}| < \infty$ oluyorsa x dizisine “*sınırlıdır*” denir [11].

Bütün sınırlı çift dizilerin cümlesi l_2^∞ ile ifade edilecektir. Buna göre;

$$l_2^\infty = \left\{ x = (x_{nk}) \in \Omega : \|x\|_\infty = \sup_{n,k \geq 0} |x_{nk}| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. *Pringsheim* anlamında yakınsak bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir. x, l 'ye *Pringsheim* anlamında yakınsak ve ilave olarak $\sup_{n,k} |x_{nk}| < \infty$ oluyorsa x dizisine l noktasına *Pringsheim* anlamında sınırlı yakınsaktır denir. Bu şekildeki dizilerin kümesi c_2^∞ olup bu küme,

$$c_2^\infty = \left\{ x = (x_{nk}) \in c_2 : \|x\|_\infty = \sup_{n,k \geq 0} |x_{nk}| < \infty \right\} = c_2 \cap l_2^\infty$$

şeklinde ifade edilir. c_2 kümesi koordinatsal toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.2. Keyfi bir $G > 0$ için $n_1 \leq n$ ve $k_1 \leq k$ iken $|x_{nk}| > G$ olacak şekilde n_1 ve k_1 doğal sayıları varsa $x = (x_{nk})$ çift dizisine *kesin ıraksak dizi* denir ve $P\text{-}\lim x_{nk} = \infty$ şeklinde ifade edilir [7].

Tanım 2.1.3. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $n, k, p, q > N$ olduğunda

$$|x_{nk} - x_{pq}| < \varepsilon \quad (2.1.2)$$

kalacak şekilde bir N doğal sayısı varsa, $x = (x_{nk})$ kompleks terimli diziye bir *P-Cauchy dizisi* denir.

Teorem 2.1.1. *Kompleks terimli bir $x = (x_{nk})$ dizisinin P-yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir P-Cauchy dizisi olmasıdır.*

Tanım 2.1.4. $x = (x_{kl})$ reel sayıların bir çift dizisi ve

$$\alpha_n = \sup_n \{x_{kl} : k, l \geq n\}, \quad \beta_n = \inf_n \{x_{kl} : k, l \geq n\}$$

olsun. Bu durumda; en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) < \infty$ ve $\beta_n(x) > -\infty$ ise $x=(x_{kl})$ dizisi, Pringsheim anlamında bir üst ve bir alt limite sahiptir. Buna göre; bir $x=(x_{kl})$ dizisinin Pringsheim üst limiti,

1) Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = +\infty$ ise $P\text{-}\limsup x_{kl} = +\infty$,

2) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ 'ler için $\alpha_n < \infty$ ise $P\text{-}\limsup x_{kl} = \inf_n \{\alpha_n\}$

ve Pringsheim alt limiti,

1) Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n = -\infty$ ise $P\text{-}\liminf x_{kl} = -\infty$,

2) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ 'ler için $\beta_n \geq -\infty$ ise $P\text{-}\liminf x_{kl} = \sup_n \{\beta_n\}$

şeklinde tanımlanır [11].

Aşağıdaki örnekte, bir çift dizinin alttan ve üstten sınırsız olmasına rağmen Pringsheim üst ve alt limitlerinin var olacağı anlatılmaktadır.

Örnek 2.1.1. $x=(x_{kl})$ çift dizisi,

$$x_{kl} = \begin{cases} k, & l=0 \text{ için,} \\ -l, & k=0 \text{ için,} \\ (-1)^k, & l=k>0 \text{ için,} \\ 0, & \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $\sup x_{kl} = +\infty$ ve $\inf x_{kl} = -\infty$ olduğu halde $n \geq 2$ için $\alpha_n(x)=1$ ve $\beta_n(x)=-1$ bulunduğundan, $P\text{-}\liminf x_{kl} = -1$ ve $P\text{-}\limsup x_{kl} = 1$ olur [11].

Teorem 2.1.2. i) $\lim_{N \rightarrow \infty} (\sup_{n,k \geq N} x_{nk}) = L$ olması için gerek ve yeter şart verilen $\forall \varepsilon > 0$ için ,

(a) Yeteri kadar büyük seçilebilen her $n,k \geq N$ için $x_{nk} < L + \varepsilon$ ve

(b) Sonsuz çoklukta (n,k) için $x_{nk} > L + \varepsilon$ olmasıdır .

ii) $\lim_{N \rightarrow \infty} (\inf_{n,k \geq N} x_{nk}) = K$ olması için gerek ve yeter şart verilen $\forall \varepsilon > 0$ için ,

(a) Yeteri kadar büyük seçilebilen her $n,k \geq N$ için $x_{nk} > K + \varepsilon$ ve

(b) Sonsuz çoklukta (n, k) için $x_{nk} < K + \varepsilon$ olmasıdır .

Tanım 2.1.5. $X \neq \emptyset$ bir küme ve

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (n, k) &\rightarrow f(n, k) = x_{nk} \end{aligned}$$

dizisi verilmiş olsun.

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\rightarrow i(n) = i_n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} j : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ k &\rightarrow j(k) = j_k \end{aligned}$$

artan iki fonksiyon (dizi) olmak üzere;

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (n, k) &\rightarrow h(n, k) = (i_n, j_k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (n, k) &\rightarrow f \circ h(n, k) = x_{i_n j_k} \end{aligned}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{nk}) dizisinin bir alt dizisi denir.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinin sonsuz çoklukta (i_n, j_k) elemanı olduğundan, bir (x_{nk}) dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Burada alt dizi, orijinal diziden satır ve sütun a-

tılarak elde edilmektedir. $(x_{i_n j_k})$ alt dizisinin her teriminin (x_{nk}) dizisinin bir terimi olduğu açıktır.

Örnek 2.1.1. n, k 'inci terimi $y_{nk} = 1$ ve her n, k için $z_{nk} = -1$ şeklinde tanımlanmış diziler, n, k 'inci terimi $x_{nk} = (-1)^{n+k}$ olan x dizisinin birer alt dizisidir. Gerçektende 1 ve -1 için tanımlanmış her çift dizi x 'in alt dizisidir [11].

Teorem 2.1.3. *Yakınsak bir çift dizinin her alt dizisi yakınsaktır.*

Teorem 2.1.4.[11] $x = (x_{nk})$ reel değerli bir çift dizi olsun. Bu durumda dizinin P -limitleri arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur ;

- (1) $\liminf x \leq \limsup x$,
- (2) $P - \lim x = L \Leftrightarrow \liminf x = L = \limsup x$,
- (3) $\limsup(-x) = -\liminf x$,
- (4) $\limsup(x + y) \leq \limsup x + \limsup y$,
- (5) $\liminf(x + y) \geq \liminf x + \liminf y$,
- (6) *Eğer z , x çift dizisinin bir alt dizisi ise*

$$\liminf x \leq \liminf z \leq \limsup z \leq \limsup x .$$

Tanım 2.1.6. $n \leq n'$ ve $k \leq k'$ olduğunda $x_{nk} \leq x_{n'k'}$ oluyorsa (x_{nk}) dizisine monoton artan, $n \geq n'$ ve $k \geq k'$ olduğunda $x_{nk} \geq x_{n'k'}$ oluyorsa (x_{nk}) dizisine monoton azalan dizi denir.

Teorem 2.1.5. *Artan bir çift dizi üstten sınırlı ise limiti supremumuna , azalan bir çift dizinin limiti infimumuna eşittir .*

2.2. Iraksak Çift Seriler

Cesaro ve Hölder anlamında, iraksak seriler için yapılan bir çok tanımlama sonsuz matrisler ile tanımlanmış lineer dönüşümler tarafından tanımlanabilir. Aşağıda üçgen

ve kare olmak üzere bu tip matrislere ait iki örnek verilmiştir.

$$T = \begin{array}{cccc} & & & \\ a_{11} & & & \\ & a_{21} & a_{22} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

T üçgen matris

$$S = \begin{array}{cccccc} & & & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

S üçgen kare matris

Herhangi bir x_n dizisi için ;

$$y_n = \sum_{k=1}^n a_{n,k} \cdot x_k \rightarrow (T \text{ matrisi için}) \quad (2.2.1)$$

ve

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \cdot x_k \rightarrow (S \text{ matrisi için}) \quad (2.2.2)$$

şeklinde, aşağıdaki anlama sahip yeni bir y_n dizisi kurulmuş olsun. Eğer T tipindeki herhangi bir matrise $a_{nk} = 0$ ($k > n$) olacak şekilde elemanlar bitştirilirse S tipinde bir matris elde edilir. Bu ekleme transformasyonu etkilemeyeceğinden T tipine ait herhangi bir dönüşüm, S tipine ait özel bir dönüşüm olarak kabul edilebilir. Eğer başka bir dönüşüm için $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ var ise, bu limite x_n dizisinin genelleştirilmiş değeri denir. İki boyutlu bir A matrisinin regülerliği, T ve S dönüşümleri için sıra ile aşağıdaki gibi verilebilir.

$$T \text{ dönüşümü regülerdir} \Leftrightarrow 1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad \text{her } k \text{ için}, \quad (2.2.3)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$$

$$3) \sum_{k=1}^n |a_{nk}| < A \quad \text{her } n \text{ için ,}$$

$$S \text{ dönüşümü regülerdir} \Leftrightarrow 1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \quad \text{her } n \text{ için yakınsaktır ,}$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < A \quad \text{her } n \text{ için ,}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

Bir tek serinin toplanabilme tanımına tekabül eden bu açıklamalardan sonra aşağıda ıraksak çift seri için bir tanım elde edilecektir.

$$\begin{aligned} & U_{11} + U_{12} + U_{13} + U_{14} + \dots \\ & + U_{21} + U_{22} + U_{23} + U_{24} + \dots \\ & + U_{31} + U_{32} + U_{33} + U_{34} + \dots \\ & + U_{41} + U_{42} + U_{43} + U_{44} + \dots \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

şeklinde bir seri tanımlansın. Bu seriden hareketle x_{nk} çift dizisi,

$$x_{nk} = \sum_{i=1, j=1}^{n,k} U_{i,j} \quad \text{veya} \quad x_{nk} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k U_{i,j} \quad (2.2.6)$$

şeklinde yazılır. Buradan;

$$U_{n,k} = x_{n,k} - x_{n-1,k-1} - x_{n,k-1} - x_{n-1,1} \quad (2.2.7)$$

$$U_{1,k} = x_{1,k} - x_{1,k-1} \quad k > 1$$

$$U_{n,1} = x_{n,1} - x_{n-1,1} \quad n > 1$$

$$U_{1,1} = x_{1,1}$$

yazılabilir.

Tanım 2.2.2. $A = [a_{n,k,i,j}]$ ($n, k, i, j = 0, 1, 2, 3, \dots$) reel terimli 4-boyutlu bir matris ve $x = (x_{nk})$ kompleks veya reel değerli bir çift dizi olsun.

$$y_{nk} = (Ax)_{nk} = \sum_{i=1, j=1}^{n,k} a_{n,k,i,j} x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k a_{n,k,i,j} x_{i,j} \quad (2.2.8)$$

şeklinde tanımlanmış y_{nk} dizisine, A matrisi ile elde edilen *dönüşüm dizisi* denir [8].

Bu dönüşüm ve dönüşümün matrisi $A = [a_{n,k,i,j}]$ gibi olup T tipinde matris şeklinde okunur. Burada $i \leq n$ ve $j \leq k$ dır. Yukarıda tanımlanmış y_{nk} dönüşümünü,

$$y_{nk} = (Ax)_{nk} = \sum_{i=1, j=1}^{\infty, \infty} a_{n,k,i,j} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,k,i,j} x_{i,j} \quad (2.2.9)$$

şeklinde de tanımlamak mümkündür. Bu durumda dönüşüm ve dönüşüm matrisi S tipinde A matrisi olarak adlandırılır. T tipinde herhangi bir dönüşüm S tipi dönüşümün özel halidir. Aşağıdaki şartlarda S tipi matrisin özel halleri elde edilir;

$$\begin{aligned} a_{n,k,i,j} &= 0 & n < i, \quad k < j & \quad (\text{her } i \text{ ve } j \text{ için}) \\ a_{n,k,i,j} &= 0 & 1 \leq i \leq n, \quad k < n & \quad (\text{her } i \text{ ve } j \text{ için}) \\ a_{n,k,i,j} &= 0 & n < i, \quad 1 \leq j \leq k & \quad (\text{her } i \text{ ve } j \text{ için}) \end{aligned}$$

Eğer (y_{nk}) dizisinin limiti varsa bu limite (x_{nk}) dizisinin dönüşümle elde edilmiş limiti denir. Eğer bir seri yakınsaksa buna tekabül eden dizi sınırlıdır, fakat çift serilerde bu durum zorunlu değildir. Örneğin U_{nk} serisi;

$$\begin{aligned} U_{1k} &= 1 \\ U_{2k} &= (-1) \\ U_{nk} &= 0 \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu seri yakınsak fakat tekabül eden dizi sınırlı değildir. Bu sebeple ıraksak bir çift seri, tekabül eden dizilerin sınırlı veya sınırsız olmasına bağlı olarak iki sınıfa ayrılır. Bir dönüşümün regülerliği için yapılacak tanım, yakınsak-sınırlı bir dizi üzerinde oluşturulmuştur.

Tanım 2.2.3. $A = [a_{n,k,i,j}]$ matrisi ve sınırlı, yakınsak olan $x = (x_{nk})$ çift dizisi için $x \rightarrow t$ iken $y_{nk} \rightarrow t$ oluyor ise A matrisine “*regülerdir*” denir ve $A \in (c_2^\infty, c_2^\infty)$ şeklinde ifade edilir [8].

Bu matris sınıfının karakterizasyonu Robison[8] tarafından yapılmıştır.

2.3. Çift Dizilerde Hemen Hemen Yakınsaklık

Bu kısımda çift dizilerde hemen hemen yakınsaklık, kuvvetli regülerlik, hemen hemen regülerlik ve hemen hemen kuvvetli regülerliğin tanımları verilmiştir.

Tanım 2.3.1. $x = (x_{ij})$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{n,k \geq 0} \left| \frac{1}{pq} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{ij} - a \right| = 0 \quad (2.3.1)$$

ise x çift dizisine a ’ya “*hemen hemen yakınsaktır*” denir ve $f_2 - \lim x = a$ ile ifade edilir [9].

Hemen hemen yakınsak çift dizilerin uzayı f_2 ile ifade edilecek ve kısaca “h.h.yakınsak” veya “h.h.y.” ifadeleri kullanılacaktır. Yukarıda verilen tanım için (x_{ij}) ’nin $(i, j) : n \leq i \leq n+p-1, k \leq j \leq k+q-1$ dikdörtgeni üzerinden alınan ortalama değerinin limitinin $p, q \rightarrow \infty$ için, n ve k ’ya göre düzgün şekilde a ’ya yakınsaması gibi bir irdeleme yapılabilir. “Tek indisli dizilerde olduğu gibi hemen hemen yakınsak bir çift dizi sınırlıdır. Yakınsak bir çift dizi sınırlı olmak zorunda olmadığı gibi, tek indisli dizilerdeki durumun tersine, yakınsak bir çift dizi hemen hemen yakınsak olmak zorunda değildir”[9].

Tanım 2.3.2. Hemen hemen yakınsak $x = (x_{nk})$ dizisinin A matrisi ile elde edilmiş dönüşüm dizisi $(Ax)_{nk}$, x ile aynı değere yakınsıyor ise A matrisine “*kuvvetli regülerdir*” denir ve kısaca $A \in (f_2, c_2^\infty)$ şeklinde ifade edilir [9].

Örnek 2.3.1. $x = (x_{ij})$ dizisi

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{tek olan } i \text{ ve } \forall j \text{ için,} \\ 0, & \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu dizi $\frac{1}{2}$ ye hemen hemen yakınsaktır [12].

Örnek 2.3.2. $x_{ij} = (-1)^i$ (*her j için*) şeklinde tanımlanırsa bu dizi 0’a hemen hemen yakınsaktır [12].

Örnek 2.3.3. Eğer $A = [a_{n,k,i,j}]$ 4-boyutlu matrisi,

$$a_{n,k,i,j} = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n = k \text{ ve } i, j \leq n (\text{çift}), \\ \frac{1}{n^2 - n}, & n = k \text{ ve } i \neq j \text{ ve } i, j \leq n (\text{tek}), \\ 0, & \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, kuvvetli regülerlik şartlarını sağladığı kolaylıkla ispatlanabilir.

Örnek 2.3.1. deki dizi için,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} &= a_{nn,11} \cdot x_{11} + a_{nn,12} \cdot x_{12} + \dots + a_{nn,1n} \cdot x_{1n} \\ &\quad + a_{nn,21} \cdot x_{21} + a_{nn,22} \cdot x_{22} + \dots + a_{nn,2n} \cdot x_{2n} \\ &\quad + a_{nn,31} \cdot x_{31} + a_{nn,32} \cdot x_{32} + \dots + a_{nn,3n} \cdot x_{3n} \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\quad + a_{nn,n-1,1} \cdot x_{n-1,1} + a_{nn,n-1,2} \cdot x_{n-1,2} + \dots + a_{nn,n-1,n} \cdot x_{n-1,n} \end{aligned}$$

$$+a_{nn,n1} \cdot x_{n1} + a_{nn,n2} \cdot x_{n2} + \dots + a_{nn,nn} \cdot x_{nn}$$

$$= \frac{n}{n^2} \cdot \frac{n}{2} (\text{eğer } n \text{ çift ise})$$

buradan $n, k \rightarrow \infty$ için limit alınır, limit $\frac{1}{2}$ olur.

Benzer şekilde,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} = \frac{n-1}{n^2-n} \cdot \frac{n+1}{2} \quad (\text{eğer } n \text{ tek ise})$$

$n, k \rightarrow \infty$ iken $\rightarrow \frac{1}{2}$ olur. P - $\lim Ax = f_2$ - $\lim x = \frac{1}{2}$ olduğundan A matrisi kuvvetli regülerdir [12].

Örnek 2.3.4. $A = [a_{n,k,i,j}]$ 4-boyutlu matrisi,

$$a_{n,k,i,j} = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & , \quad n = k \text{ ve } i + j = \text{çift ve } i, j \leq n(\text{çift}), \\ \frac{1}{n^2 - n} & , \quad n = k \text{ ve } i \neq j \text{ ve } i, j \leq n(\text{tek}), \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa sınırlı-regülerdir fakat kuvvetli regüler olmaz. Regülerlik şartlarını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Fakat,

$$\lim_{n,k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{n,k,i,j} - a_{n,k,i+1,j}| = \begin{cases} 2, & n \text{ çift ise,} \\ 0, & n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

ve aynı zamanda

$$\lim_{n,k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{n,k,i,j} - a_{n,k,i,j+1}| = \begin{cases} 2, & n \text{ çift ise,} \\ 0, & n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

olduğundan, A kuvvetli regüler değildir [12].

Tanım 2.3.3. $A = [a_{n,k,i,j}]$ 4-boyutlu matris ve $x \in c_2^\infty$ olmak üzere, $(Ax)_{nk} \in f_2$ ve $f_2 - \lim Ax = \lim x$ ise A 'ya *hemen hemen regülerdir* (kısaca *h.h.regüler*) denir ve $A \in (c_2^\infty, f_2)$ şeklinde ifade edilir [].

Tanım 2.3.4. $A = [a_{n,k,i,j}]$ 4-boyutlu matris, $x = (x_{ij}) \in f_2$ ve $Ax \in f_2$ olmak üzere, $f_2 - \lim Ax = f_2 - \lim x$ ise A 'ya *hemen hemen kuvvetli regülerdir* (kısaca *h.h.k.regüler*) denir ve $A \in (f_2, f_2)$ şeklinde ifade edilir [16].

Lema 2.3.1. $A = [a_{n,k,i,j}]$ *hemen hemen regüler bir matris olsun. Şu halde*

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{u,v \geq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(i, j, p, q, u, v) x_{ij} = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{u,v \geq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| \text{ ve}$$

$$\|x\| \leq 1 \text{ olacak şekilde bir } x = (x_{ij}) \in l^\infty \text{ mevcuttur []}.$$

2.4. Çift Dizilerde Çekirdek Kavramı

Bu kısımda, Knopp'un[4] çekirdek kavramını, çift indisli dizilere taşıyan Patterson [11]'nin Pringsheim çekirdeği ve Mursaleen'nin [12]'de tanımladığı çift dizilerin MR-çekirdeği tanımları verilecektir.

Tanım 2.4.1. $x = (x_{nk})$ çift indisli dizisinin $P - \lim[y] = \beta$ olan $[y]$ alt dizisi varsa β 'ya x 'in “*Pringsheim limit noktası*” denir [11].

“ Pringsheim limit noktasının tanımı ile, ‘ β ’nın Pringsheim limit noktası olabilmesi için gerek ve yeter şart $p - \lim [x_{n_p k_p}] = \beta$ olacak şekilde artan iki n_p ve k_p indeks dizisinin var olmasıdır.’ tanımı ile eşanlamlıdır” [11].

Tanım 2.4.2. $P - C_n \{x\}$ kümesi her $i, j > n$ için bütün x_{kl} noktalarını ihtiva eden en küçük kapalı konveks küme olsun. $x = (x_{ij})$ çift dizisinin *Pringsheim çekirdeği*,

$$P-C\{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[P-C_n\{x\}\right] \quad (2.4.1)$$

şeklindedir [11].

Klasik limsup ve liminf tanımlarına benzer olarak çift indisli dizilerde limsup ve liminf tanımları kullanılarak Pringsheim çekirdeği, $[P\text{-lim inf}, P\text{-lim sup}]$ kapalı aralığı olarak da tanımlanabilir.

Tanım 2.4.3. l_2^∞ üzerinde,

$$L^*(x)=\lim_{p,q\rightarrow\infty}\sup_{n,k\geq 0}\sup\frac{1}{p.q}\sum_{i=n}^{n+p-1}\sum_{j=k}^{k+q-1}x_{ij} \quad (2.4.2)$$

şeklinde tanımlı bir alt lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda reel değerli-sınırlı bir çift dizi olan x 'in MR -çekirdeği $[-L^*(-x), L^*(x)]$ kapalı aralığıdır [12].

BÖLÜM 3

4-BOYUTLU MATRİS SINIFLARININ KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, Robison[8], Moricz ve Rhoades[9], Mursaleen ve Savaş[] ve Mursaleen[12] tarafından verilen matris sınıflarının karakterizasyonu incelendi.

T tipindeki bir dönüşümün regülerliğine ait kriterler aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.1.[8] T tipindeki bir dönüşümün regüler olması için gerek ve yeter şart

- a) $\lim_{n,k \rightarrow \infty} a_{n,k,i,j} = 0 \quad (\forall i, j \text{ için}),$
- b) $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n,k} a_{n,k,i,j} = 1,$
- c) $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k |a_{n,k,i,j}| = 0 \quad (\forall i \text{ için}),$
- d) $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_{n,k,i,j}| = 0 \quad (\forall j \text{ için}),$
- e) $\sum_{i=1}^{n,k} |a_{n,k,i,j}| \leq A \quad (A \text{ bir sabit}),$

İspat: (Şart gerektir);

a) x_{nk} dizisi;

$$x_{nk} = 1 \quad (n = p \text{ ve } k = q \text{ için})$$

$$x_{nk} = 0 \quad (n \neq p \text{ ve } k \neq q \text{ için})$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} x_{nk} = 0 \quad \text{ve} \quad y_{nk} = a_{n,k,i,j} \quad (3.1)$$

olur.

$$y_{nk} = \sum_{i=1, j=1}^{n,k} a_{n,k,i,j} \cdot x_{n,k} \quad (3.2)$$

olduğu hatırlanırsa, $n = p$ ve $k = q$ dışındaki değerlerde $x_{nk} = 0$ olduğundan

$$y_{nk} = a_{n,k,i,j} \quad (3.3)$$

elde edilir. Buradan $\lim_{n,k \rightarrow \infty} y_{nk} = 0$ olabilmesi her p ve q için $\lim_{n,k \rightarrow \infty} a_{n,k,i,j} = 0$ olması-

nı zorunlu kılar. O halde (a) şartı sağlanır.

b) Özel olarak $x_{nk} = 1$ olarak alınırsa,

$$y_{nk} = \sum_{i=1, j=1}^{n,k} a_{n,k,i,j} \quad (3.4)$$

ve $\lim_{n,k \rightarrow \infty} y_{nk} = 1$ olduğundan, $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{i=1, j=1}^{n,k} a_{n,k,i,j} = 1$ elde edilir.

c) (d) şartının ispatı için a 'nın sağlandığı fakat (d) 'nin sağlanmadığı kabulünden

çelişkiye ulaşılabacaktır. Bunun için, $j = j_0$ (herhangi bir sabit tamsayı) için $\sum_{i=1}^n |a_{n,k,i,j}|$

'nin sıfıra yakınsamadığı kabul edilirse, önceden belirlenen sabit $h > 0$ için bu dizinin her elemanı h 'den büyük bir *alt dizisi* olmalıdır, öyle ki; n_1 ve k_1 sayılarının seçiminden dolayı

$$\sum_{i=1}^{n_1} |a_{n_1,k_1,i,j_0}| > h \quad (3.5)$$

ve $n_2 > n_1$, $k_2 > k_1$ sayılarının seçiminden,

$$\sum_{i=1}^{n_1} |a_{n_2,k_2,i,j_0}| \leq \frac{h}{2} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n_2} |a_{n_2,k_2,i,j_0}| > h$$

ve genel halde $n_p > n_{p-1}$, $k_p > k_{p-1}$ sayılarının seçimi ile

$$\sum_{i=1}^{n_{p-1}} |a_{n_p, k_p, i, j_0}| < \frac{h}{2^{p-1}} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n_p} |a_{n_p, k_p, i, j_0}| > h \quad (3.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır. (3.6)'dan;

$$\sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} |a_{n_p, k_p, i, j_0}| > h - \frac{h}{2^{p-1}} = h \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) \quad (3.7)$$

elde edilir. Şu halde (x_{nk}) dizisi;

$$\begin{aligned} x_{nk} &= 0 & (k \neq j_0) \\ x_{nk} &= \text{sgn } a_{n_1, k_1, i, j_0} & (n < n_1) \\ x_{nk} &= \text{sgn } a_{n_2, k_2, i, j_0} & (n_1 < n \leq n_2) \\ &\vdots & \vdots \\ x_{nk} &= \text{sgn } a_{n_p, k_p, i, j_0} & (n_{p-1} < n \leq n_p) \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır ise,

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} x_{nk} = 0 \quad (3.9)$$

ve x_{nk} dizisi için,

$$\begin{aligned} y_{n_p, k_p} &= \sum_{i=1}^{n_p} a_{n_p, k_p, i, j_0} \cdot x_{i, j_0} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{p-1}} a_{n_p, k_p, i, j_0} \cdot x_{i, j_0} + \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{n_p, k_p, i, j_0} \cdot x_{i, j_0} \end{aligned}$$

dir. (3.6), (3.7) ve (3.8)'den;

$$\left| \sum_{i=1}^{n_{p-1}} a_{n_p, k_p, i, j_0} \cdot x_{i, j_0} \right| \leq \sum_{i=1}^{n_{p-1}} |a_{n_p, k_p, i, j_0}| \leq \frac{h}{2^{p-1}} \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{n_p, k_p, i, j_0} x_{i, j_0} = \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} |a_{n_p, k_p, i, j_0}| \geq h \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) \quad (3.12)$$

olur. Buradan,

$$y_{n_p, k_p} \geq h \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) - \frac{1}{2^{p-1}} = h \left(1 - \frac{1}{2^{p-2}} \right) \quad (3.13)$$

yazılabilir. Böylece y_{nk} 'nın limiti sıfır değildir. Bu sonuç (c) 'nin sağlandığını ispat eder.

d) Yukarıdaki ispatta, matrisin satır ve sütunlarının yer değiştirmesiyle (c) 'de ispat edilir.

e) (a) ve (b) 'nin sağlandığı fakat (c) 'nin sağlanmadığı kabul edilsin. Buradan, n_1 ve k_1 tam sayıları,

$$\sum_{i=1, j=1}^{n_1, k_1} |a_{n_1, k_1, i, j}| \geq 1 \quad (3.14)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilebilir. Benzer şekilde $n_2 > n_1$ ve $k_2 > k_1$ olacak şekilde n_2 ve k_2 sayılarıda,

$$\sum_{i=1, j=1}^{n_1, k_1} |a_{n_2, k_2, i, j}| \leq 2 \quad , \quad \sum_{i=1, j=1}^{n_2, k_2} |a_{n_2, k_2, i, j}| \geq 2^4 \quad (3.15)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde seçilebilir ve genel olarak $n_p > n_{p-1}$, $k_p > k_{p-1}$ sayıları,

$$\sum_{i=1, j=1}^{n_{p-1}, k_{p-1}} |a_{n_p, k_p, i, j}| \leq 2^{p-1} \quad , \quad \sum_{i=1, j=1}^{n_p, k_p} |a_{n_p, k_p, i, j}| \geq 2^{2p} \quad (3.16)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde seçilirse, (3.16)'dan;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1, j=n_{p-1}+1}^{n_{p-1}, k_p} |a_{n_p, k_p, i, j}| + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=1}^{n_p, k_{p-1}} |a_{n_p, k_p, i, j}| + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=k_{p-1}+1}^{n_p, k_p} |a_{n_p, k_p, i, j}| &\geq 2^{2p} - 2^{p-1} \quad (3.17) \\
&\geq 2^{2p} - 2^{2p-1} \\
&= 2^{2p-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{i=1, j=1}^{n_{p-1}, k_{p-1}} |a_{n_p, k_p, i, j}| \leq 2^{p-1} \quad (p > 1) \quad (3.18)$$

ve

$$\sum_{i=1, j=k_{p-1}+1}^{n_{p-1}, k_p} |a_{n_p, k_p, i, j}| + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=1}^{n_p, k_{p-1}} |a_{n_p, k_p, i, j}| + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=k_{p-1}+1}^{n_p, k_p} |a_{n_p, k_p, i, j}| \geq 2^{2p-1} \quad (3.19)$$

toplamlarını sağlayacak şekilde

$$\begin{aligned}
n_1 &< n_2 < n_3 < n_4 < \dots \\
k_1 &< k_2 < k_3 < k_4 < \dots
\end{aligned}$$

gibi iki tamsayı dizisi elde edilebilir. Şimdi x_{nk} dizisi,

$$\begin{aligned}
x_{nk} &= \operatorname{sgn} a_{n_1, k_1, i, j} & i \leq n_1, \quad j \leq k_1 \\
x_{nk} &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn} a_{n_2, k_2, i, j} & \begin{cases} n_1 < i \leq n_2 & 1 \leq j \leq k_1 \\ 1 \leq i \leq n_1 & k_1 < j \leq k_2 \\ n_1 < i \leq n_2 & k_1 < j \leq k_2 \end{cases} \\
&\vdots & \vdots \quad \vdots \\
x_{nk} &= \frac{1}{2^{p-1}} \operatorname{sgn} a_{n_p, k_p, i, j} & \begin{cases} n_{p-1} < i \leq n_p & 1 \leq j \leq k_{p-1} \\ 1 \leq i \leq n_{p-1} & k_{p-1} < j \leq k_p \\ n_{p-1} < i \leq n_p & k_{p-1} < j \leq k_p \end{cases} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ise $\lim_{n, k \rightarrow \infty} x_{nk} = 0$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned}
y_{n_p k_p} &= \sum_{i=1, j=1}^{n_p, k_p} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j} = \sum_{i=1, j=1}^{n_{p-1}, k_{p-1}} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j} + \sum_{i=1, j=k_{p-1}+1}^{n_{p-1}, k_p} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j} + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=1}^{n_p, k_{p-1}} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j} \\
&\quad + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=k_{p-1}+1}^{n_p, k_p} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

toplamı göz önüne alınırsa, (3.19) ve (3.20)'den

$$\left| \sum_{i=1, j=1}^{n_{p-1}, k_{p-1}} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j} \right| \leq \sum_{i=1, j=1}^{n_{p-1}, k_{p-1}} |a_{n_p, k_p, i, j}| \leq 2^{p-1} \tag{3.22}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1, j=n_{p-1}+1}^{n_{p-1}, k_p} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j} + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=1}^{n_p, k_{p-1}} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j} + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=k_{p-1}+1}^{n_p, k_p} a_{n_p, k_p, i, j} \cdot x_{i, j} = \\
&\frac{1}{2^{p-1}} \left[\sum_{i=1, j=k_{p-1}+1}^{n_{p-1}, k_p} |a_{n_p, k_p, i, j}| + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=1}^{n_p, k_{p-1}} |a_{n_p, k_p, i, j}| + \sum_{i=n_{p-1}+1, j=1}^{n_p, k_p} |a_{n_p, k_p, i, j}| \right] \geq \frac{1}{2^{p-1}} 2^{2p-1} = 2^p
\end{aligned} \tag{3.23}$$

yazılıp,

$$|y_{n_p k_p}| \geq 2^p - 2^{p-1} = 2^{p-1} \tag{3.24}$$

sonucuna varılır. Bu, $\lim_{p \rightarrow \infty} |y_{n_p k_p}| = \infty$ olduğunu ve dolayısı ile y_{nk} 'nin alt dizisi olan $y_{n_p k_p}$ 'nin ıraksak olmasından dolayı y_{nk} 'nin da ıraksak olacağını ifade eder. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü regülerlikten y_{nk} 'nin limiti “0” olmalıydı. Çelişki (e)'nin sağlanmadığı kabulünden çıkmıştır. Şu halde (e) sağlanır.

(Şart yeterdir); Yakınsak olan x_{nk} dizisinin limiti x olsun. O halde;

$$y_{nk} - x = \sum_{i=1, j=1}^{n, k} a_{n, k, i, j} \cdot x_{n, k} - x \tag{3.25}$$

ve (b) şartından,

$$\sum_{i=1, j=1}^{n,k} a_{n,k,i,j} + r_{nk} = 1 \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} r_{nk} = 0 \text{ kabul edilmek üzere} \right) \quad (3.26)$$

yazılabilir. Böylece;

$$y_{nk} - x = \sum_{i=1, j=1}^{n,k} a_{n,k,i,j} (x_{ij} - x) - r_{nk} \cdot x \quad (3.27)$$

ve

$$\begin{aligned} |y_{nk} - x| &\leq \left| \sum_{i=1, j=1}^{p,q} a_{n,k,i,j} \cdot (x_{ij} - x) \right| + \left| \sum_{i=1, j=q+1}^{p,k} a_{n,k,i,j} \cdot (x_{ij} - x) \right| + \left| \sum_{i=p+1, j=1}^{n,q} a_{n,k,i,j} \cdot (x_{ij} - x) \right| \\ &+ \left| \sum_{i=p+1, j=q+1}^{n,k} a_{n,k,i,j} \cdot (x_{ij} - x) \right| + |r_{nk} \cdot x| \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde yazmak mümkündür ve $x_{nk} \rightarrow x$ olduğundan sabit $\varepsilon > 0$ için

$$|x_{ij} - x| < \frac{\varepsilon}{5 \cdot A} \quad (i \geq p, j \geq q) \quad (3.29)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde yeterince büyük p ve q sayıları seçilebilir. $|x_{ij} - x|$ sayılarının ($\forall i, j$ için) en büyüğü L kabul edilirse, her $n > N$ ve her $k > K$ için;

$$i) \quad \sum_{i=1, j=1}^{p,q} |a_{n,k,i,j}| < \frac{\varepsilon}{5 \cdot p \cdot q \cdot L} \quad (a \text{ şartından})$$

$$ii) \quad |r_{nk}| < \frac{\varepsilon}{5 \cdot |x|} \quad (3.26 \text{ dan})$$

$$iii) \quad \sum_{i=1}^n |a_{n,k,i,j}| < \frac{\varepsilon}{5 \cdot q \cdot L} \quad (j = 1, 2, \dots, q) \quad (c \text{ şartından})$$

$$iv) \quad \sum_{j=1}^k |a_{n,k,i,j}| < \frac{\varepsilon}{5 \cdot p \cdot L} \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (d \text{ şartından})$$

ifadeleri sağlanacak şekilde N ve K sayıları seçilebilir. Burada $n > N$ ve $k > K$ olduğunda,

$$|y_{nk} - x| \leq \frac{\varepsilon}{5pqL} \cdot pqL + \frac{\varepsilon}{5pL} \cdot pL + \frac{\varepsilon}{5qL} \cdot qL + \frac{\varepsilon}{5A} \cdot A + \frac{\varepsilon}{5|x|} \cdot |x| = \varepsilon \quad (3.30)$$

elde edilir ki bu da $\lim_{n,k \rightarrow \infty} y_{nk} - x = 0$, yani $y_{nk} \rightarrow x$ demektir.

Teorem 3.2.[9] *Sınırlı yakınsak her çift dizi hemen hemen yakınsaktır.*

İspat: x_{ij} “ a ” ya yakınsak bir çift dizi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için yeteri kadar büyük sabit N sayısı alındığında ve her $n, k > N$ olduğunda,

$$|x_{ij} - a| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.31)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, $B = \sup_{n,k} |x_{ij} - a|$ şeklinde tanımlanır ve

$$\frac{BN}{p} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ve} \quad \frac{BN}{q} < \frac{\varepsilon}{3}$$

ifadeleri sağlanacak şekilde yeteri kadar büyük p ve q sayıları seçilebilir. Böylece h.h.yakınsaklığın tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{p \cdot q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{ij} - a \right| &\leq \frac{1}{p \cdot q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} |x_{ij} - a| = \frac{1}{p \cdot q} \left(\sum_{i=n}^N \sum_{j=k}^{k+q-1} + \sum_{i=N+1}^{n+p-1} \sum_{j=k}^N + \sum_{i=N+1}^{n+p-1} \sum_{j=N+1}^{k+q-1} \right) |x_{ij} - a| \\ &\leq \frac{BN}{p} + \frac{BN}{q} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned} \quad (3.32)$$

elde edilir. Sağ taraf n ve k ’dan bağımsız olduğundan x_{ij} hemen hemen yakınsak olur.

Teorem 3.3.[9] *A matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart*

1) A sınırlı-regülerdir

$$2) \lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{n,k,i,j} - a_{n,k,i+1,j}| = 0$$

$$3) \lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{n,k,i,j} - a_{n,k,i,j+1}| = 0$$

sağlanmasıdır .

İspat: (Şart gerektir); x 'in a 'ya h.h.yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu durumda, y_{nk} 'nın yakınsak ve sınırlı olduğu ispat edilecektir.

H.h.yakınsaklık tanımından, sabit $p, q \geq 2$ tamsayıları için;

$$\frac{1}{p.q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{i,j} = a + \eta_{n,k} \quad \left[|\eta_{n,k}| < \varepsilon(n, k = 0, 1, \dots) \text{ olmak üzere} \right] \quad (3.33)$$

yazılabilir. Böylece;

$$\frac{1}{p.q} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{i,j} = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} \cdot \eta_{n,k} \quad (3.34)$$

yazılıp,

$$A_{N,K} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} \quad (3.35)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{p,q}^{N,K} = \frac{1}{p.q} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{i,j} = a A_{N,K} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} \cdot \eta_{n,k} \quad (3.36)$$

elde edilir. (3.36) eşitliğinin sol tarafındaki n ve k 'ya bağlı toplamlar ile i ve j 'ye bağlı toplamlar yer değiştirilip tekrar yazılarak düzenlenirse,

$$\frac{1}{p.q} \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} x_{i,j} \sum_{n=0}^i \sum_{k=0}^j a_{N,K,n,k} + \frac{1}{p.q} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} x_{i,j} \sum_{n=j-p+1}^i \sum_{k=0}^j a_{N,K,n,k} + \frac{1}{p.q} \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=q-1}^{\infty} x_{i,j} \sum_{n=0}^i \sum_{k=j-q+1}^j a_{N,K,n,k}$$

$$+ \frac{1}{pq} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} x_{i,j} \sum_{n=j-p+1}^i \sum_{k=j-q+1}^j a_{N,K,n,k} \quad (3.37)$$

dir. Teorem 3.1.(a)'dan dolayı, [eğer $\text{minimum}(N, K) \geq N_1$ ise]

$$\left| \frac{1}{pq} \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} x_{i,j} \sum_{n=0}^i \sum_{k=0}^j a_{N,K,n,k} \right| \leq \frac{(p-1)(q-1)}{pq} \|x\| \sum_{n=0}^{p-2} \sum_{k=0}^{q-2} |a_{N,K,n,k}| \leq \|x\| \sum_{n=0}^{p-2} \sum_{k=0}^{q-2} |a_{N,K,n,k}| \leq \varepsilon \quad (3.38)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.(d)'den; [eğer $\text{minimum}(N, K) \geq N_2$ ise]

$$\left| \frac{1}{pq} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} x_{i,j} \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=0}^j a_{N,K,n,k} \right| \leq \frac{(q-1)\|x\|}{pq} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=0}^{q-2} |a_{N,K,n,k}|$$

$$\leq \|x\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{q-2} |a_{N,K,n,k}| \leq \varepsilon \quad (3.39)$$

yazılabilir. Benzer şekilde Teorem 3.1.(c)'den; [eğer $\text{minimum}(N, K) \geq N_3$ ise]

$$\left| \frac{1}{pq} \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=q-1}^{\infty} x_{i,j} \sum_{n=0}^i \sum_{k=j-q+1}^{\infty} a_{N,K,n,k} \right| \leq \varepsilon \quad (3.40)$$

ve son olarak;

$$\frac{1}{pq} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} x_{i,j} \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=j-q+1}^j a_{N,K,n,k} = \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} x_{i,j} \left\{ \frac{1}{pq} \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=j-q+1}^j a_{N,K,n,k} - a_{N,K,i,j} \right\}$$

$$+ y_{N,K} - \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} a_{N,K,i,j} x_{i,j} - \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} a_{N,K,i,j} x_{i,j} - \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=q-1}^{\infty} a_{N,K,i,j} x_{i,j} \quad (3.41)$$

yazılabilir. Burada, Teorem 3.1.(a), (b) ve (d)'den [eğer $\text{minimum}(N, K) \geq N_1$ ise]

$$\left| \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} a_{N,K,i,j} x_{i,j} \right| \leq \|x\| \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} |a_{N,K,i,j}| \leq \varepsilon \quad (3.42)$$

ve $[eğer\ minimum(N, K) \geq N_2\ ise]$

$$\left| \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} a_{N,K,i,j} x_{i,j} \right| \leq \|x\| \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} |a_{N,K,i,j}| \leq \varepsilon \quad (3.43)$$

$$\left| \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=q-1}^{\infty} a_{N,K,i,j} x_{i,j} \right| \leq \varepsilon \quad [eğer\ minimum(N, K) \geq N_3\ ise] \quad (3.44)$$

elde edilir. Bu aşamadan sonra amaç, (3.41)'in sağ tarafındaki ilk çift toplamın, $N, K \rightarrow \infty$ iken istenilen kadar küçük kalacağını ispatlanmasıdır. Bunun için;

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} x_{ij} \left\{ \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=j-q+1}^j a_{N,K,n,k} - a_{N,K,i,j} \right\} \right| \leq \frac{\|x\|}{p \cdot q} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} \left| \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=j-q+1}^j a_{N,K,n,k} - p \cdot q a_{N,K,i,j} \right| \\ & \leq \frac{\|x\|}{p \cdot q} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=j-q+1}^j |a_{N,K,n,k} - a_{N,K,i,j}| \\ & = \frac{\|x\|}{p \cdot q} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{\rho=0}^{q-1} |a_{N,K,k+i-p+1,\rho+j-q+1} - a_{N,K,i,j}| \\ & = \frac{\|x\|}{p \cdot q} \sum_{\pi=0}^{p-1} \sum_{\rho=0}^{q-1} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} |a_{N,K,\pi+i-p+1,\rho+j-q+1} - a_{N,K,i,j}| \\ & \leq \frac{\|x\|}{p \cdot q} \sum_{\pi=0}^{p-1} \sum_{\rho=0}^{q-1} \left\{ (p-\pi-1) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{N,K,i,j} - a_{N,K,i+1,j}| \right. \\ & \quad \left. + (q-\rho-1) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{N,K,i,j} - a_{N,K,i,j+1}| \right\} \leq \varepsilon \quad (3.45) \end{aligned}$$

$$[eğer\ minimum(N, K) \geq N_4\ ise]$$

yazılabilir. Yukarıda,

$$\begin{aligned} a_{N,K,\pi+i-p+1,\rho+j-q+1} - a_{N,K,i,j} &= \sum_{\sigma=\pi+i-p+1}^{i-1} a_{N,K,\sigma,\rho+j-q+1} - a_{N,K,\sigma+1,\rho+j-q+1} \\ &+ \sum_{\tau=\rho+j-q+1}^{j-1} a_{N,K,i,\tau} - a_{N,K,i,\tau+1} \quad (3.46) \end{aligned}$$

olarak alınmıştır. (3.36), (3.45) toplanarak, $[eğer\ minimum(N, K) \geq \max(N_1, N_2, N_3, N_4)\ ise]$

$$\left| y_{N,K} - aA_{N,K} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} \eta_{n,k} \right| \leq 7.\varepsilon \quad (3.47)$$

sonucu, Teorem 3.1. (b), (e) ve (3.33) hesaba katılarak, eğer $\text{minimum}(N, K) \geq N_5$ olarak seçilirse;

$$\left| aA_{N,K} - a \right| = |a| \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} - 1 \right| \leq |a| \varepsilon \quad (3.48)$$

ve

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,K,n,k} \eta_{n,k} \right| \leq \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N,K,n,k}| \leq \varepsilon.C \quad (N, K=0,1,2,\dots) \quad (3.49)$$

elde edilir. Son iki eşitsizlikle beraber (3.47) dikkate alınırsa;

$$\left| y_{N,K} - a \right| \leq (7 + |a| + C) \cdot \varepsilon \quad [\text{eğer } \text{minimum}(N, K) \geq \max(N_1, N_2, \dots)] \quad (3.50)$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan bu sonuç $N, K \rightarrow \infty$ için y_{nk} 'nin a 'ya yakınsadığı sonucunu verir. y_{nk} 'nin sınırlılığı ise (e) ve x 'in sınırlılığından elde edilir.

(Şart yeterdir); $A = [a_{n,k,i,j}]$ sınırlı ve regüler bir matris olsun. Şu halde A , Teorem 3.1. (a)-(e) şartlarını sağlar. Öncelikle (2) 'nin sağlanmadığı durum ele alınacaktır. O zaman öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki her sonsuza yaklaşan N, K çifti için;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N,K,n,k} - a_{N,K,n+1,k}| \geq 12\varepsilon \quad (3.51)$$

yazılabilir. Böylece her N, K için;

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{N,K,2i,j} - a_{N,K,2i+1,j}| \geq 6\varepsilon \quad (3.52)$$

veya

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{N,K,2i+1,j} - a_{N,K,2i+2,j}| \geq 6\varepsilon \quad (3.53)$$

yazılabilir. Genellikten bir şey kaybetmeden (3.52) eşitsizliğinin geçerli olduğu kabul edilebilir. (e) ve (3.52) kullanılarak, pozitif tamsayılarda artan, N_r , K_r ve p_r gibi üç dizi kurulduğunda, önce $P_0=0$ alınmasından sonra N_1 , K_1 ve P_1 'in seçiminden

$$\sum_{i=0}^{p_1-1} \sum_{j=0}^{p_1-1} |a_{N_1,K_1,2i,j} - a_{N_1,K_1,2i+1,j}| \geq 5\varepsilon \quad (3.54)$$

ve

$$\sum_{i=2p_1}^{\infty} \sum_{j=p_1}^{\infty} |a_{N_1,K_1,i,j}| \leq \varepsilon \quad (3.55)$$

sağlanır. Eğer $\rho = 1, 2, \dots, r-1$ için N_ρ, K_ρ ve P_ρ sayıları tanımlanırsa N_r , K_r ve P_r

$$\sum_{i=0}^{p_{r-1}-1} \sum_{j=0}^{p_{r-1}-1} |a_{N_r,K_r,i,j}| \leq \varepsilon \quad , \quad \sum_{i=p_{r-1}}^{p_r-1} \sum_{j=p_{r-1}}^{p_r-1} |a_{N_r,K_r,i,j} - a_{N_r,K_r,i+1,j}| \geq 5\varepsilon \quad (3.56)$$

ve

$$\sum_{i=2p_r}^{\infty} \sum_{j=p_r}^{\infty} |a_{N_r,K_r,i,j}| \leq \varepsilon \quad (3.56)$$

ifadeleri sağlanacak şekilde seçilebilir. Bu seçimler Teorem 3.1. (a), (e) ve (3.52)'den dolayı yapılabilir. Şimdi x_{ij} dizisi;

$$\begin{aligned} x_{2P_{r-1}+2i, P_{r-1}+j} &= (-1)^r \operatorname{sgn}(a_{N_r, K_r, 2p_{r-1}+2i, p_{r-1}+j} - a_{N_r, K_r, 2p_{r-1}+2i+1, p_{r-1}+j}) \\ x_{2P_{r-1}+2i+1, P_{r-1}+j} &= -x_{2P_{r-1}+2i, P_{r-1}+j} \quad (i, j = 0, 1, \dots, p_r - p_{r-1} - 1 \text{ ve } r = 1, 2, \dots) \\ x_{ij} &= 0 \quad (\text{diğer hallerde}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

şeklinde tanımlanır ve $(r = 2, 3, 4, \dots \text{ için}) \operatorname{sgn} y_{N_r, K_r} = (-1)^r$, olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |y_{N_r, K_r}| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{N_r, K_r, i, j} x_{i, j} \right| \geq \sum_{i=p_{r-1}}^{p_r-1} \sum_{j=p_{r-1}}^{p_r-1} |a_{N_r, K_r, 2i, j} - a_{N_r, K_r, 2i+1, j}| - 2 \sum_{i=0}^{2p_{r-1}-1} \sum_{j=0}^{p_{r-1}-1} |a_{N_r, K_r, i, j}| \\ &\quad - 2 \sum_{i=2p_r}^{\infty} \sum_{j=p_r}^{\infty} |a_{N_r, K_r, i, j}| \geq 5\varepsilon - 2\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon \end{aligned} \quad (3.58)$$

elde edilir. $r = 1$ olması durumunda benzer yolla $|y_{N_1, K_1}| \geq 3\varepsilon$ olduğu görülebilir. Bu şekilde $y_{N, K}$ dizisi $N, K \rightarrow \infty$ için ıraksak olacaktır. Diğer taraftan x_{ij} dizisinin sınırlı ve “0” a h.h.yakınsak olduğu kolayca kontrol edilebilir. Bu, (2) şartının gerek olduğunu ifade eder. (3) şartının varlığı benzer yolla elde edilebilir.

Teorem 3.4. $A = [a_{n, k, i, j}]$ 4-boyutlu matris ve

$$\alpha(i, j, p, q, u, v) = \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n, k, i, j} \quad (3.59)$$

olmak üzere, A matrisinin h.h. regüler yani $A \in (c_2^\infty, f_2)$ olması için gerek ve yeter şart

- i) $\lim_{p, q \rightarrow \infty} \alpha(i, j, p, q, u, v) = 0$ ($i, j = 0, 1, \dots$), ($u, v = 0, 1, \dots$ için düzgün)
- ii) $\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(i, j, p, q, u, v) = 1$ ($u, v = 0, 1, \dots$ için düzgün)
- iii) $\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| = 0$ ($j = 0, 1, \dots$), ($u, v = 0, 1, \dots$ için düzgün)
- iv) $\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| = 0$ ($i = 0, 1, \dots$), ($u, v = 0, 1, \dots$ için düzgün)
- v) $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{n, k, i, j}| \leq C < \infty$ ($n, k = 0, 1, \dots$)

sağlanmasıdır.

İspat: (Şart yeterdir); $(i)-(v)$ şartları sağlansın ve $x = (x_{ij}) \in c_2^\infty$ için $\lim_{i,j} x_{ij} = L$ kabul edilsin. O halde yakınsaklığın tanımından $\forall \varepsilon > 0$ için ve $i, j > N$ olduğunda,

$$|x_{ij}| < |L| + \varepsilon \quad (3.59)$$

olacak şekilde bir $N > 0$ vardır. Şimdi;

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x_{i,j} \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n,k,i,j} \\ &= \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} \alpha(i, j, p, q, u, v) \cdot x_{i,j} + \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} \alpha(i, j, p, q, u, v) \cdot x_{i,j} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=q-1}^{\infty} \alpha(i, j, p, q, u, v) \cdot x_{i,j} + \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} \alpha(i, j, p, q, u, v) \cdot x_{i,j} \end{aligned} \quad (3.60)$$

yazılabilir. Şu halde,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \right| &\leq \|x\| + \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| \\ &\quad + \|x\| \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=q-1}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| + (|L| + \varepsilon) \left| \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} \alpha(i, j, p, q, u, v) \right| \end{aligned} \quad (3.61)$$

eşitsizliğinden ve şartlar dikkate alınarak $p, q \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \right| \leq |L| + \varepsilon \quad (3.62)$$

ifadesine ulaşılır. ε keyfi olduğundan

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} = \lim_{p,q \rightarrow \infty} x_{ij} = L \quad (3.63)$$

elde edilir. Bu ise $f_2 - \lim x = \lim_{p,q \rightarrow \infty} x = L$, yani $A \in (c_2^\infty, f_2)$ demektir. Şu halde A

hemen hemen regülerdir ki bu da şart yeterdir.

(Şart gerektir); d, z, w ve h dizileri

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & ; ij - \text{inci noktada,} \\ 0 & ; \text{diğer noktalarda,} \end{cases} \quad z_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \text{ ise,} \\ 0 & ; \text{diğer noktalarda,} \end{cases}$$

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & ; j - \text{inci sütünde,} \\ 0 & ; \text{diğer noktalarda,} \end{cases} \quad h_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i - \text{inci satırda,} \\ 0 & ; \text{diğer noktalarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, $d, z, w, h \in c_2^\infty$ ve dönüşüm dizileri f_2 'ye aittir. Buradan $d \in c_2^\infty$ (i)'i, $z \in c_2^\infty$ (ii)'yi, $w \in c_2^\infty$ (iii)'ü ve $h \in c_2^\infty$ (iv)'ü verir. Her bir pozitif tamsayı r için $y = (y_{ij})$ dizisi,

$$y_{ij} = \begin{cases} \text{sgn } a_{n,k,i,j} & , 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq r, \\ 0 & , \text{diğer noktalarda } (n, k = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $y \in c_2^\infty$ ve $\|y\| = 1$ dir. Aynı zamanda $\|A\| = \sup_{n,k \geq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{n,k,i,j}|$ olduğundan,

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,k,i,j} \cdot y_{i,j} \right| = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r |a_{n,k,i,j}| \quad (3.64)$$

ve

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,k,i,j} \cdot y_{i,j} \right| \leq \|A\| \cdot \|y\| = \|A\| \quad (3.65)$$

yazılır. Dönüşüm dizisi sınırlı olduğundan,

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,k,i,j} \cdot y_{i,j} \right| \leq \|A\| \leq C \quad (3.66)$$

elde edilir. Böylece (v) sağlanmış olur ve ispat biter.

Teorem 3.5.[16] $A = [a_{n,k,i,j}]$ matrisi $h.h.k$ -regüler olması için gerek ve yeter şart , A 'nın $h.h.$ regüler ve

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sum_i \sum_j |\alpha(i, j, p, q, u, v) - \alpha(i+1, j, p, q, u, v)| \quad (u, v \geq 0 \text{ ' göre düzgün}) \\ ii) \quad & \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sum_i \sum_j |\alpha(i, j, p, q, u, v) - \alpha(i, j+1, p, q, u, v)| \quad (u, v \geq 0 \text{ ' göre düzgün}) \end{aligned}$$

şartlarını sağlamasıdır .

İspat: (Şart yeterdir); $x = (x_{ij})$ çift dizisi için $f_2 - \lim x = L$ olsun. Moricz ve Rhoades[9]'in ispat yöntemi ve $h.h.$ regülerliğin şartları ile beraber (i) , (ii) şartları da kullanılarak

$$y_{nk} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \quad (3.67)$$

olmak üzere, $n, k \rightarrow \infty$ iken $y_{nk} \rightarrow L$ ve y_{nk} 'nın sınırlı olduğu gösterilebilir. Sınırlı-yakınsak bir çift dizi aynı zamanda hemen hemen yakınsak olduğundan, $Ax \in f_2$ ve $f_2 - \lim Ax = L$ yazılabilir. Böylece A , $h.h.k.$ regülerdir.

(Şart gerektir); $A \in (f_2, f_2)_{reg}$ olsun. $(f_2, f_2)_{reg} \subset (c_2^{\infty}, f_2)_{reg}$ olduğundan $A \in (c_2^{\infty}, f_2)_{reg}$ dır. Böylece A matrisi $h.h.$ regülerdir. (i)'nin ispatı için, aşağıda $x = x_{ij}$ dizisi $u, v > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_{2v_{r-1}+2j, v_{r-1}+k} &= (-1)^r \operatorname{sgn} [\alpha(2v_{r-1}+2j, v_{r-1}+k, p_r, q_r, u, v) - \alpha(2v_{r-1}+2j+1, v_{r-1}+k, p_r, q_r, u, v)] \\ x_{2v_{r-1}+2j+1, v_{r-1}+k} &= -x_{2v_{r-1}+2j, v_{r-1}+k} \quad (i, j = 1, 2, \dots, v_r - v_{r-1} \text{ ve } r = 1, 2, \dots \text{ için}) \\ x_{ij} &= 0 \quad (\text{diğer hallerde}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

şeklinde tanımlanırsa x sınırlı ve 0 'a $h.h.$ yakınsak ve aynı zamanda $\|x\| \leq 1$ olur. A , $h.h.k.$ regüler olduğundan,

$$f_2 - \lim Ax = f_2 - \lim x = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak Lemma 2.3.1'den

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{u,v \geq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(i, j, p, q, u, v) - \alpha(i+1, j, p, q, u, v) \cdot x_{ij} \\
&= \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{u,v \geq 0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v) - \alpha(i+1, j, p, q, u, v)| \quad (3.69)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısı ile (i) şartı sağlanır. (ii)'nin de sağlandığı benzer şekilde ispat edilebilir.

BÖLÜM 4

ÇİFT İDİSLİ DİZİLERDE ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

Bu bölümde, ilk olarak çift indisli bir x dizisinin Pringsheim çekirdeği yani, P - $\check{C}ek(Ax) \subseteq P$ - $\check{C}ek(x)$, daha sonra

$$L^*(x) = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{n,k \geq 0} \frac{1}{p \cdot q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{ij} \quad (4.1)$$

l_2^∞ üzerinde tanımlı altlineer fonksiyonel olmak üzere, sınırlı her x çift dizisi için, MR - $\check{C}ek(Ax) \subseteq P$ - $\check{C}ek(x)$, MR - $\check{C}ek(Ax) \subseteq MR$ - $\check{C}ek(x)$ ve P - $\check{C}ek(Ax) \subseteq MR$ - $\check{C}ek(x)$ çekirdek teoremleri incelendi. Aslında bu sonuçlar, önceki bölümde karakterize edilen matris sınıflarının bir alt sınıfının belirlenmesi ile ilgilidir.

Öncelikle sonuçlarda kullanılacak bir Lemma verilecektir.

Lemma 4.1.[12] *Eğer $A = [a_{n,k,i,j}]$ reel veya kompleks değerli 4-boyutlu bir matris ve*

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k |a_{n,k,i,j}| = 0, \\ ii) \quad & \lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_{n,k,i,j}| = 0 \quad \text{ve} \\ iii) \quad & P\text{-}\lim_{n,k} \sup \sum_{i=0, j=0}^{\infty, \infty} |a_{n,k,i,j}| = G \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa, herhangi bir sınırlı çift x dizisi için

$$P\text{-}\lim \sup |Ax| \leq G \cdot (P\text{-}\lim \sup |x|)$$

dır.

Teorem 4.1.[11] *A negatif terimli olmayan 4-boyutlu regüler bir matris olsun .*

Şu halde sınırlı olan bir x çift dizisi için

$$P - C_n \{Ax\} \subseteq P - C_n \{x\} \quad (4.2)$$

olacak şekilde (Ax) mevcuttur .

İspat: Eğer $P - C\{x\}$ kompleks düzlemde ise sonuç açıktır. x 'in sınırlı ve sınırsız olma durumları ayrı şekilde incelenecektir.

Eğer w için $w \notin P - C_q \{x\}$ şartını sağlayan bir q varsa, $w \notin P - C_p \{Ax\}$ şartını sağlayan bir p vardır. x sınırlı olduğunda $P - C\{x\}$ kompleks düzlem olmayıp bir $w \notin P - C\{x\}$ mevcut olacaktır. Bu, $w \notin P - C_n \{x\}$ olacak şekilde bir q olduğu anlamını taşır. w sonlu olduğundan ve A 'nın lineerliğinden $w=0$ kabul edilebilir. Aynı zamanda $P - C_q \{x\}$ bir konveks küme olduğunda $P - C_q \{x\}$ ihmal edilebilir öyle ki, sıfırdan $P - C_q \{x\}$ ya olan uzaklık $\{|y| : y \in P - C_q \{x\}\}$ 'in minimumu ve pozitif x ekseninde, $3d$ olsun. $P - C_q \{x\}$ konveks olduğu için $P - C_q \{x\}$ 'in bütün noktaları en az $3d$ kadar reel bir kısma sahip olur. $F = \max \{|x_{ij}|\}$ olsun. Eğer $a_{n,k,i,j} \geq 0$ ve regülerliğin $(a)-(d)$ şartları dikkate alınırsa $n,k > N$ için,

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(i, j) : 0 \leq i \leq i_0 \quad \text{ve} \quad 0 \leq j < j_0\} \\ I_2 &= \{(i, j) : i_0 < i < \infty \quad \text{ve} \quad 0 \leq j < j_0\} \\ I_3 &= \{(i, j) : 0 < i \leq i_0 \quad \text{ve} \quad j_0 \leq j < \infty\} \\ I_4 &= \{(i, j) : i_0 < i \leq \infty \quad \text{ve} \quad j_0 \leq j < \infty\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olmak üzere;

$$\sum_{i,j \in I_1} a_{n,k,i,j} < \frac{d}{3F} \quad , \quad \sum_{i,j \in I_2} a_{n,k,i,j} < \frac{d}{3F}$$

$$\sum_{i,j \in I_3} a_{n,k,i,j} < \frac{d}{3F} \quad , \quad \sum_{i,j \in I_4} a_{n,k,i,j} < \frac{3d}{3} \quad (4.4)$$

sağlayan bir N vardır. Böylece $n, k > N$ için;

$$\begin{aligned} \Re \left[\sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \right] &= \Re \left[\sum_{i,j \in I_1} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \right] + \Re \left[\sum_{i,j \in I_2} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \right] \\ &\quad + \Re \left[\sum_{i,j \in I_3} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \right] + \Re \left[\sum_{i,j \in I_4} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \right] \\ &> -F \sum_{i,j \in I_1} a_{n,k,i,j} - F \sum_{i,j \in I_2} a_{n,k,i,j} - F \sum_{i,j \in I_3} a_{n,k,i,j} + 3d \sum_{i,j \in I_4} a_{n,k,i,j} \\ &> -F \frac{3d}{3F} + 3.d.\frac{2}{3} = d \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\Re \{Ax\} > d$ olur ki bu sonuç $P-C_p \{Ax\}$ 'in dışında $w = 0$ 'ı sağlayan bir p 'nin var olması anlamına gelir.

Şimdi x 'in sınırlı olmadığı kabul edilsin. w sonsuzda veya sonsuzda olmayan bir nokta olabilir. Eğer sonsuzda olmayan bir nokta ise $n, k > N$ için

$$\sum_{i,j \in I_1} a_{n,k,i,j} < \frac{d}{3F} \quad , \quad \sum_{i,j \in I_2 \cup I_3 \cup I_4} a_{n,k,i,j} > \frac{2}{3} \quad (4.6)$$

sağlayan bir N seçilebilir. İspatın birinci kısımda elde edilen sonuç gibi $\Re \{Ax\} \geq d$ elde edilir. w 'nin sonsuzda olan bir nokta olduğu durumda bütün q 'lar için $P-C_q \{x\}$ sınırlı olur ki bu $i, j > q$ için x 'in sınırlı olacağı anlamına gelir. Genellikten bir şey kaybetmeksizin $B > 0$ için $|x| < B$ kabul edilebilir ve yeteri kadar büyük seçilen n ve k için

$$\left| \sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} \right| \leq \sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{n,k,i,j} |x_{i,j}| \leq B. \sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} a_{n,k,i,j} < \infty \quad (4.7)$$

eşitsizliği ve böylece $P-C_p \{Ax\}$ dışında sonsuza ait bir p 'nin varlığı elde edilir. Bu da ispatı bitirir.

Teorem 4.2.[12] x sınırlı bir çift dizi olmak üzere , $P-\text{Çek}(Ax) \subseteq MR-\text{Çek}(x)$ olması için gerek ve yeter şart

$$i) A = [a_{n,k,i,j}] \text{ kuvvetli regüler ,} \quad (4.8)$$

$$ii) P-\lim_{n,k \rightarrow \infty} \sum_{i=0, j=0}^{\infty, \infty} |a_{n,k,i,j}| = 1$$

sağlanmasıdır .

İspat: (Şart gerektir); x sınırlı ve a 'ya hemen hemen yakınsak bir çift dizi olsun. O halde $L^*(x) = -L^*(-x)$ yazılabilir. (4,8)'den

$$a = -L^*(-x) \leq -L(-Ax) \leq L(Ax) \leq L^*(x) = a$$

elde edilir. Buradan (Ax) , P -yakınsak ve $P-\lim(Ax) = f_2 - \lim x = a$ olduğu için A kuvvetli regülerdir. Yani (i) şartı sağlanır.

Her kuvvetli regüler matris ayrıca sınırlı - regüler olduğundan, *Lemma 4.1*'den

$$\lim |x| = 1 \text{ ve } P-\lim(Ax) = G \text{ (} G \text{ bir sabit)}$$

şartlarını sağlayan bir x çift dizisi vardır. Böylece,

$$1 \leq P-\lim_{n,k} \inf \sum_{i=0, j=0}^{\infty, \infty} |a_{n,k,i,j}| \leq P-\lim_{n,k} \sup \sum_{i=0, j=0}^{\infty, \infty} |a_{n,k,i,j}| \leq 1 \quad (4.8)$$

elde edilir. Yani (ii) şartı da sağlanır.

(Şart yeterdir); Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için ,

$$\frac{1}{p \cdot q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{i,j} < L^*(x) + \varepsilon \quad (4.7) \quad (4.9)$$

olacak şekilde sabit $p, q \geq 2$ tamsayıları bulunabilir. Şimdi [9]'da olduğu gibi,

$$\begin{aligned}
\sum_1 &= \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=0, k=0}^{\infty, \infty} a_{N, K, n, k} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{i, j}, & \sum_6 &= \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} a_{N, K, i, j} \cdot x_{i, j} \\
\sum_2 &= \frac{-1}{p \cdot q} \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} x_{i, j} \sum_{n=0}^i \sum_{k=0}^j a_{N, K, n, k}, & \sum_7 &= \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} a_{N, K, i, j} \cdot x_{i, j} \\
\sum_3 &= \frac{-1}{p \cdot q} \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} x_{i, j} \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=0}^j a_{N, K, n, k}, & \sum_8 &= - \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=q-1}^{\infty} a_{N, K, i, j} \cdot x_{i, j} \\
\sum_4 &= \frac{-1}{p \cdot q} \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=q-1}^{\infty} x_{i, j} \sum_{n=0}^i \sum_{k=j-q+1}^j a_{N, K, n, k}, \\
\sum_5 &= - \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=q-1}^{\infty} x_{i, j} \left\{ \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=i-p+1}^i \sum_{k=j-q+1}^j a_{N, K, n, k} - a_{N, K, i, j} \right\}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$y_{N, K} = \sum_{i=0, j=0}^{\infty, \infty} a_{N, K, i, j} \cdot x_{i, j} = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 + \sum_5 + \sum_6 + \sum_7 + \sum_8 \quad (4.11)$$

yazılabilir. A 'nın kuvvetli regülerlik şartları kullanılarak, yani Teorem 3.1-(a)'dan,

$$|\sum_2| \leq \|x\| \sum_{n=0}^{p-2} \sum_{k=0}^{q-2} |a_{N, K, n, k}| \rightarrow 0 \quad (N, K \rightarrow \infty) \quad (4.12)$$

ve

$$|\sum_6| \leq \|x\| \sum_{i=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{q-2} |a_{N, K, i, j}| \rightarrow 0 \quad (4.13)$$

Teorem 3.1- (d)'den,

$$|\sum_3| \leq \|x\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{q-2} |a_{N, K, n, k}| \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

ve

$$|\sum_7| \leq \|x\| \sum_{i=p-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-2} |a_{N,K,i,j}| \rightarrow 0 \quad (4.15)$$

Teorem 3.1- (c)'den ;

$$|\sum_4| \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad |\sum_8| \rightarrow 0 \quad (4.16)$$

olduğu gözlenebilir. Şu halde, Teorem 3.3.'ün (2) ve (3) şartlarının dikkate alınması ile

$$|\sum_5| \leq \frac{\|x\|}{p.q} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{t=0}^{q-1} \left\{ (p-r-1) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{n,k,i,j} - a_{n,k,i+1,j}| + (q-t-1) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{n,k,i,j} - a_{n,k,i,j+1}| \right\} \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

elde edilir. Böylece (4.11)'den ;

$$\begin{aligned} L(Ax) &\leq \lim_{N,K} \sup \sum_{n=0, k=0}^{\infty, \infty} a_{N,K,n,k} \frac{1}{p.q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{i,j} \\ &\leq \lim_{N,K} \sup \left| \sum_{n=0, k=0}^{\infty, \infty} \left(\frac{|a_{N,K,n,k}| + a_{N,K,n,k}}{2} + \frac{|a_{N,K,n,k}| - a_{N,K,n,k}}{2} \right) \frac{1}{p.q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{i,j} \right| \\ &\leq \lim_{N,K} \sup \left\{ \sum_{n=0, k=0}^{\infty, \infty} |a_{N,K,n,k}| \left| \frac{1}{p.q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{i,j} \right| + \|x\| \sum_{n=0, k=0}^{\infty, \infty} (|a_{N,K,n,k}| - a_{N,K,n,k}) \right\} \quad (4.18) \end{aligned}$$

yazılabilir. Sonuçta Teorem 3.1'in (a) ve (c) şartları dikkate alınarak

$$L(Ax) \leq L^*(x) + \varepsilon \quad (4.19)$$

yazılıp, ε keyfi seçildiğinden,

$$L(Ax) \leq L^*(x) \quad (4.20)$$

elde edilir.

Örnek 4.1. Teorem 4.2'de verilen kuvvetli regülerlik şartının sınırlı-regülerlik olmayacağı,

$$a_{n,k,i,j} = \begin{cases} \frac{2}{n^2} , & n = k \text{ ve } i + j = \text{çift ve } i, j \leq n(\text{çift}), \\ \frac{1}{n^2 - n} , & n = k \text{ ve } i \neq j \text{ ve } i, j \leq n(\text{tek}), \\ 0 , & \text{diğer hallerde}, \end{cases}$$

şeklinde bir 4-boyutlu A matrisi tanımlanarak açıklanabilir. Bu matris, sınırlı-regüler olup kuvvetli regüler değildir ve aynı zamanda,

$$P\text{-}\lim_{n,k} \sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} |a_{n,k,i,j}| = 1 \quad (4.21)$$

olduğundan Teorem 4.2'nin (ii) şartı sağlanır. Eğer x dizisi $x_{ij} = (-1)^{i+j}$ şeklinde tanımlanırsa bu dizinin 0'a h.h yakınsak olduğu bilindiği için $L^*(x) = 0$ olur. Şimdi,

$$\sum_{i,j} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} = \begin{cases} \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot n , & n \text{ çift ise}, \\ \frac{-1}{n^2 - n} \cdot n , & n \text{ tek ise}, \end{cases}$$

şeklinde yazılırsa,

$$\limsup_{n,k} \sum_{i,j} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} = 1 \quad (4.22)$$

ve

$$\liminf_{n,k} \sum_{i,j} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} = 0 \quad (4.23)$$

olacağından $L(Ax) = 1$ ve buradan $L(Ax) \geq L^*(x)$ olur. Bu ise Teorem 4.2'nin sağlanmayacağı anlamına gelir.

Teorem 4.3. x sınırlı bir çift dizi olmak üzere , $MR\text{-}\check{C}ek(Ax) \subseteq P\text{-}\check{C}ek(x)$

(veya $L^*(Ax) \leq L(x)$) olması için gerek ve yeter şart

i) $A = [a_{n,k,i,j}]$ hemen hemen regülerdir,

ii) $\lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup \sum_{i,j=0,0}^{\infty,\infty} |\alpha(i,j,p,q,u,v)| = 1$ ($u,v = 0,1,\dots$ için düzgün).

sağlanmasıdır. Burada, $\alpha(i,j,p,q,u,v) = \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n,k,i,j}$ dir.

İspat: (Şart gerektir); λ gibi reel bir sayıya yakınsayan sınırlı bir çift dizi olarak x seçilsin. Bu durumda

$$\lambda = -L(-x) \leq -L^*(-Ax) \leq L^*(Ax) \leq L(x) = \lambda \quad (4.24)$$

yazılabilir. Buradan Ax hemen hemen yakınsak ve $f_2 - \lim Ax = \lim x = \lambda$ olduğundan A , hemen hemen regülerdir. Lemma (4.1)'den; $\|x\| \leq 1$ ve

$$L^*(x) = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup \sup_{n,k \geq 0} \frac{1}{p \cdot q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{ij} \quad (4.25)$$

olacak şekilde bir $x \in l_2^\infty$ vardır. Eğer $x = v = (v_{ij})$ dizisi,

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = j \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlar,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $l^*(x) = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \inf \sup_{n,k \geq 1} \frac{1}{pq} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{ij}$ dikkate alınır

$$1 = l^*(Av) \leq \lim_{p,q \rightarrow \infty} \inf \sup_{u,v \geq 1} \sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} |\alpha(i,j,p,q,u,v)| \leq L^*(Ax) \leq L(x) \leq \|x\| \leq 1 \quad (4.26)$$

elde edilir. Böylece (ii) sağlanmış olur.

(Şart yeterdir); $N, K > 1$ seçilerek

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{pq} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n,k,i,j} x_{i,j} \right| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{|\alpha(i,j,p,q,u,v)| + \alpha(i,j,p,q,u,v)}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{|\alpha(i,j,p,q,u,v)| - \alpha(i,j,p,q,u,v)}{2} \right) x_{ij} \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha(i,j,p,q,u,v)| |x_{ij}| \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (|\alpha(i,j,p,q,u,v)| - \alpha(i,j,p,q,u,v)) |x_{ij}| \\
&\leq \|x\| \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^K |\alpha(i,j,p,q,u,v)| \\
&\quad + \|x\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^K |\alpha(i,j,p,q,u,v)| \\
&\quad + \|x\| \sum_{i=0}^N \sum_{j=N+1}^{\infty} |\alpha(i,j,p,q,u,v)| \\
&+ \sup_{i,j \geq N,K} |x_{ij}| \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} |\alpha(i,j,p,q,u,v)| + \|x\| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (|\alpha(i,j,p,q,u,v)| - \alpha(i,j,p,q,u,v)) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Hemen hemen regülerliğin şartları ve (ii) kullanılarak,

$$L^*(Ax) \leq L(x) \quad (4.28)$$

elde edilir. Bu ise ispatı bitirir.

Teorem 4.4.[16] x sınırlı-reel değerli bir çift dizi olmak üzere, $MR-\text{Çek}(Ax) \subseteq$

$MR-\text{Çek}(x)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $A = [a_{n,k,i,j}]$ hemen hemen kuvvetli regülerdir.

ii) $\lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup \sum_{i=0, j=0}^{\infty, \infty} |\alpha(i,j,p,q,u,v)| = 1$ ($u, v = 1, 2, \dots$ için düzgün)

sağlanmasıdır.

İspat: (Şart gerektir); Reel değerli-sınırlı x çift dizisi λ gibi bir reel sayıya yakın-

sadığı kabul edilsin. Bu durumda $L^*(Ax) \leq L^*(x)$ olduğundan

$$\lambda = -L^*(-x) \leq -L^*(-Ax) \leq L^*(Ax) \leq L^*(x) = \lambda \quad (4.29)$$

yazılabilir. Buradan, Ax , h.h.yakınsak ve $f_2 - \lim Ax = f_2 - \lim x = \lambda$ olduğundan A , h.h.k. regülerdir. Lemma 2.3.1.'den $\|x\| \leq 1$ ve

$$L^*(Ax) = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{u,v \geq 0} \sum_{i,j=0}^{\infty, \infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| \quad (4.30)$$

olacak şekilde bir $x \in l_2^\infty$ vardır. Eğer $x = (x_{ij})$ dizisi,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \text{ ise,} \\ 0 & , \quad \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $l^*(x) = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \inf_{n,k \geq 0} \sup \frac{1}{p \cdot q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{ij}$ dikkate alınır,

$$1 = l^*(Ax) = \lim_{p,q \rightarrow \infty} \inf_{u,v \geq 0} \sup_{i,j=0}^{\infty, \infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| \leq L^*(Ax) \leq L^*(x) \leq \|x\| \leq 1 \quad (4.31)$$

elde edilir. Bu şekilde (ii) şartı sağlanmış olur.

(Şart yeterdir); Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{p \cdot q} \sum_{i=n}^{n+p-1} \sum_{j=k}^{k+q-1} x_{ij} < L^*(x) + \varepsilon \quad (4.32)$$

olacak şekilde $p, q \geq 2$ sabit tamsayıları bulunabilir. $N, K > 1$ için,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=u}^{u+p-1} \sum_{k=v}^{v+q-1} a_{n,k,i,j} \cdot x_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{|\alpha(i, j, p, q, u, v)| + \alpha(i, j, p, q, u, v)}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{|\alpha(i, j, p, q, u, v)| - \alpha(i, j, p, q, u, v)}{2} \Big) .x_{ij} \\
& \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| .x_{i,j} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (|\alpha(i, j, p, q, u, v)| - \alpha(i, j, p, q, u, v)) .x_{ij} \\
& \leq \|x\| \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^K |\alpha(i, j, p, q, u, v)| + \|x\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^K |\alpha(i, j, p, q, u, v)| \\
& \quad + \|x\| \sum_{i=0}^N \sum_{j=K+1}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| + \|x\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| .x_{ij} \\
& \quad + \|x\| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (|\alpha(i, j, p, q, u, v)| - \alpha(i, j, p, q, u, v)) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

yazılabilir. H.h.regülerlik şartları ile (ii) şartı (A, h.h.k.regüler olduğundan) kullanılarak,

$$L^*(Ax) \leq \lim_{p,q \rightarrow \infty} \sup_{u,v \geq 0} \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| x_{ij} \quad (4.34)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| .x_{ij} \\
& = \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} (|\alpha(i, j, p, q, u, v)| - \alpha(i-n-1, j-k-1, p, q, u, v)) .x_{ij} \\
& = \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \alpha(i-n-1, j-k-1, p, q, u, v) .x_{ij} \\
& \leq \Sigma' + (L^*(x) + \varepsilon) . \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v)| .x_{i,j} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

dikkate alındığında, (4.32)'den

$$\Sigma' = \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} (|\alpha(i, j, p, q, u, v)| - \alpha(i-n-1, j-k-1, p, q, u, v)) .x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x\| \cdot \sum_{t=1}^{N+1} \sum_{r=1}^{K+1} \left((N-t+1) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v) - \alpha(i+1, j, p, q, u, v)| \right. \\
&\quad \left. + (K-r+1) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha(i, j, p, q, u, v) - \alpha(i, j+1, p, q, u, v)| \right) \quad (4.36)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.34)-(4.35) ile h.h.k. regülerlik şartları kullanılarak ve ε keyfi olduğundan,

$$L^*(Ax) \leq L^*(x) \quad (4.37)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Toeplitz, O., Über allgomeine lineare Mittelbuldingen, *Prace Matematyczno - Fizyczne* , **22**, 113-119 (1911)
- [2] Lorentz, G. G., A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Mathematica* , **80**, 167-190 (1948)
- [3] King, J. P., Almost summable sequences, *Proceedings of the American Mathematical Society* , **26**, 75-83, (1972)
- [4] Cooke, R. G., *Infinite matrices and sequence spaces* , Macmillan and Company, London (1950)
- [5] Maddox I. J., Some analogues of Knopp's core theorem, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* , Vol. **2**, No: 4, 605-614 (1979)
- [6] Das, G., Sublinear functionals and a class of concervative matrices, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica* , **15**, 89-106 (1987)
- [7] Pringsheim, A., Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, *Mathematische Annalen* , **53**, No: 3, 289-321 (1900)
- [8] Robison, G. M., Divergent double sequences and series, *Transactions of the American Mathematical Society* , **28**, 50-73 (1926)
- [9] Moricz, F. and Rhoades, B. E., Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* , **104**, 283-293 (1988)

- [] Mursaleen, M. and Savaş, E., Almost regular matrices for double sequences, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* , **40**, 205-212 (2003)

- [11] Patterson, R. F. Double Sequences Core Teorems, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* , Vol: **22**, No: 4, 785-793 (1999)

- [12] Mursaleen, M. and Edely O. H. H., Almost convergence and a core theorem for double sequences, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* , **293**, 532-540 (2004)

- [13] Maddox, I. J., *Elements of functional analysis* , Cambridge University Press, Cambridge (1970)

- [14] Duran, J. E., Infinite matrices and almost convergence, *Mathematische Zeitschrift* , **128**, 75-83 (1972)

- [15] Orhan, C., Sublinear functionals and Knopp's core theorem, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* , **3**, 461-468 (1990)

- [16] Mursaleen, M. Almost strongly regular matrices and a core theorem for double sequences, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* , **293**, 523-531 (2004)