

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ÇİFT ÜSTEL ANALİZ

YÜKSEK LİSANS

Yusuf GÜVEN

ŞUBAT-2024
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ÇİFT ÜSTEL ANALİZ

DOUBLE EXPONENTIAL ANALYSIS

YÜKSEK LİSANS

Yusuf GÜVEN

**ŞUBAT-2024
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ÇİFT ÜSTEL ANALİZ

DOUBLE EXPONENTIAL ANALYSIS

YÜKSEK LİSANS

Yusuf GÜVEN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK

**ŞUBAT-2024
GÜMÜŞHANE**

KABUL VE ONAY

X

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Çift Üstel Analiz**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

01/02/2024

.....
Yusuf GÜVEN

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında bana yol gösteren danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde benden desteklerini esirgemeyen babama, anneme ve eşime minnettarım.

Yusuf GÜVEN
GÜMÜŞHANE – 2024



ÖZET

Bu tez çalışmasının konusu çift üstel fonksiyon ile üretilen Newtonyen olmayan analizdir. Tezde ilk olarak 1967 ve 1970 yılları arasında Michael Grossman ve Robert Katz tarafından ortaya atılan Newtonyen olmayan analizler ve bu analizlerden biri olan geometrik analizdeki temel tanım ve teoremler verilmiştir. Sonrasında çift üstel fonksiyonlarla çalışmak için klasik analiz ve geometrik analiz yerine bir alternatif olarak $\alpha(t) = \exp\{k \cdot \exp(t)\}$ çift üstel fonksiyonunun üretici olduğu Newtonyen olmayan analiz tanıtılmıştır. Bu analiz çift üstel analiz olarak isimlendirilmiştir. Tezde çift üstel analizde temel işlemler, çift üstel türev, çift üstel integral verilmiştir. Son olarak klasik analizdeki kavramlar ve temel teoremlerin bu analizde karşılıkları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çift üstel analiz, Çift üstel fonksiyon, Çift üstel integral, Çift üstel türev, Newtonyen olmayan analiz

SUMMARY

The subject of this thesis is non-Newtonian analysis produced by the double exponential function. In the thesis, non-Newtonian analyzes first put forward by Michael Grossman and Robert Katz between 1967 and 1970 and the basic definitions and theorems of geometric analysis, one of these analyses, are given. Subsequently, non-Newtonian analysis, which is the generator of the double exponential function $\alpha(t) = \exp\{k \cdot \exp(t)\}$, was introduced as an alternative to classical analysis and geometric analysis to work with double exponential functions. This analysis is called double exponential analysis. In the thesis, basic operations in double exponential analysis, double exponential derivative and double exponential integral are given. Finally, the equivalents of the basic definitions and theorems in this analysis in regard to those of derivatives and integrals in classical analysis were examined.

Keywords: Double exponential analysis, Double exponential function, Double exponential integral, Double exponential derivative, Non-Newtonian analysis

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	IX
1. GİRİŞ	1
2. NEWTONTEN OLMAYAN ANALİZ	3
2.1. α Aritmetik.....	3
2.2. $\star$ Analiz	4
2.3. Geometrik Analiz.....	7
3. ÇİFT ÜSTEL ARİTMETİK.....	10
3.1. Çift Üstel Sayılar.....	10
3.1.1. Çift Üstel Sıralama.....	11
3.1.2. Parametresi $k = 1$ Olan Çift Üstel Sayılar	11
3.1.3. Parametresi $k = -1$ Olan Çift Üstel Sayılar	11
3.1.4. Çift Üstel Aritmetiğin Temel İşlemleri	12
4. ÇİFT ÜSTEL ANALİZ.....	17
4.1. Çift Üstel Mutlak Değer.....	17
4.2. Çift Üstel Limit ve Çift Üstel Süreklilik	18
4.3. Çift Üstel Türev	19
4.4. Çift Üstel Türevin Özellikleri.....	25
4.5. Çift Üstel İntegral.....	38
4.5.1. Çift Üstel Belirsiz İntegral.....	38
4.5.2. Çift Üstel Belirli İntegral.....	41
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	43
KAYNAKÇA	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}_\alpha$: α reel sayılar kümesi

$\mathbb{Z}_\alpha$: α tam sayılar kümesi

$|x|_\alpha$: α mutlak değer fonksiyonu

$\iota: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$: $\mathbb{R}_\alpha$ dan $\mathbb{R}_\beta$ ya tanımlı izomorfizma

$M_\alpha\{\dots\}$: α ortalama

$[u, v]_\alpha$: α aralık

$M_\beta f[u, v]_\alpha$: f fonksiyonunun $[u, v]_\alpha$ α -aralığında $\star$ -ortalaması

$\mathbb{R}_{\exp}$: Üstel reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}_{\exp}^+$: Üstel pozitif reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}_{\exp}^-$: Üstel negatif reel sayılar kümesi

$|x|_*$: Geometrik mutlak değer

$* \lim_{x \rightarrow a} f(x)$: Geometrik limit

$f^*(x)$: Geometrik türev

$^{d,k} \lim_{x \rightarrow a} f(x)$: f fonksiyonunun a noktasındaki çift üstel limiti

$f'^{d,k}(x_0)$: f fonksiyonunun x_0 noktasındaki çift üstel türevi

$^{d,k} \int f(x) dx$: f fonksiyonunun çift üstel belirsiz integrali

1. GİRİŞ

Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz'in oluşturduğu analizde (Newton analizi) bir büyüklükte meydana gelen küçük değişimler (artışlar) çıkarma işlemiyle hesaplanmaktadır. Bu analiz bir büyüklüğün anlık değişim hızını hesaplamak (veya iki büyüklükteki anlık değişimleri karşılaştırmak) için çıkarma işlemiyle bulunan farkların bölümüne dayanan türevi kullanmaktadır. Geometrik olarak (Kartezyen düzlemde) bir noktada fonksiyona yaklaşım o noktada fonksiyonun grafiğine teğet olan (polinom olarak) doğrusal bir fonksiyon ile yapılır. Keşfedildiği 17. Yüzyılın sonundan günümüze toplamsal türev ve integrale dayanan Newtonyen diferansiyel ve integral hesabı bilimin en önemli araçlarından biri haline gelmiştir. (Gürbulak, 2023)

Michael Grossman ve Robert Katz, Newtonyen olmayan analizleri (geometrik analiz, harmonik analiz, kuadratik analizi ve diğerlerini) 1970 yılı ve öncesinde tanımlamışlar ve önemli temel bilgileri vermişlerdir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1979).

Geometrik analiz önemli bir Newtonyen olmayan analizdir. Dick Stanley ve Duff Campbell'ın bu analiz ile ilgili çalışmaları vardır (Stanley, 1999; Campbell, 1999). Bu analiz ile ilgili bir diğer önemli çalışma Bashirov ve arkadaşlarının 2008'de yaptıkları çalışmadır (Bashirov vd., 2008). Son yıllarda çarpımsal analiz ve onun çeşitli bilim dallarındaki uygulamalarını içeren pek çok sayıda çalışma yapılmıştır (Gürefe, 2009; Filip ve Piatecki, 2014; Córdova-Lepe, 2006; Córdova-Lepe vd., 2015; Florack ve van Assen, 2012; Çakmak ve Başar, 2012; Goktas vd., 2022; Göktaş vd., 2022; Gulsen vd., 2022; Gülşen, 2023; Yalçın, 2016; Duyar ve Erdoğan, 2020; Yalçın, 2021; Yalçın ve Dedetürk, 2021; Yılmaz vd., 2023; Güngör ve Durmaz, 2020; Yalcın ve Dedetürk, 2023; Bal, Yalçın ve Dedetürk, 2023).

Malthus nüfus modeli, radyoaktif maddelerin bozunması gibi problemler üzerinde çalışılırken polinomlardan daha hızlı artan (veya daha hızlı azalan) $h(t) = N_0 e^{kt}$; $N_0 > 0, k \in \mathbb{R}$ biçiminde üstel fonksiyonlar karşımıza çıkar. Fakat bu üstel fonksiyonlardan daha hızlı artan (veya daha hızlı azalan) fonksiyonlar da vardır. Örneğin $f(t) = a^{(b^t)}$; $a, b > 0$ fonksiyonu $h(t)$ biçimindeki fonksiyonlardan daha hızlı artmaktadır (daha hızlı azalmaktadır). Bir sabitin kuvvetine bir üstel fonksiyon yazılarak oluşturulan bu fonksiyonlar (yani $f(t)$ biçimindeki fonksiyonlar) çift üstel fonksiyon olarak adlandırılır. Bu tez çalışmasında çift üstel fonksiyonlarla çalışmak için klasik analiz ve geometrik analiz yerine bir alternatif olarak üretici $\alpha(x) = e^{k \cdot \exp(x)}$, $k \in \{-1, 1\}$ olan

Newtonyen olmayan analiz tanıtılmıştır. Bu analiz çift üstel analiz olarak isimlendirilmiştir. Bu üretcin ters fonksiyonu $\alpha^{-1}(x) = \ln[k \ln x]$ fonksiyonudur.

Pozitif büyüme oranına sahip fonksiyonlar incelenirken üreteç fonksiyonda $k = 1$ alınmalıdır. Bu şekilde oluşturulan analize parametresi $k = 1$ olan çift üstel analiz denilmiştir. Negatif büyüme oranına sahip fonksiyonlar incelenirken üreteç fonksiyonda $k = -1$ alınmalıdır. Bu şekilde oluşturulan analize parametresi $k = -1$ olan çift üstel analiz denilmiştir.

Tez çalışmasında çift üstel analizde kullanılan temel işlemler verildikten sonra klasik analiz hesabıyla alakalı kavramlar ve teoremlerin çift üstel analizde karşılıkları verilmiştir.



2. NEWTONTEN OLMAYAN ANALİZ

Bu bölümde α aritmetik, $\star$ analiz ve geometrik analiz ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bunun için Grossman ve Katz'ın kitabı (Grossman ve Katz, 1972), Murat Erdoğan'ın yüksek lisans tezi (Erdoğan, 2016), Tekin ve Başar'ın makalesi (Tekin ve Başar, 2013), Bashirov ve arkadaşlarının makalesi (Bashirov vd., 2008) ve Stanley'in kitabı (Stanley, 1999) kaynak olarak kullanılmıştır.

2.1. α Aritmetik

Tanım 2.1: $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ birebir ve örten fonksiyon olsun. α toplama ($\dot{+}$), α çıkarma ($\dot{-}$), α çarpma ($\dot{\times}$), α bölme ($\dot{/}$) işlemleri aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

- i) $x \dot{+} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y))$,
- ii) $x \dot{-} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y))$,
- iii) $x \dot{\times} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y))$,
- iv) $x \dot{/} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) / \alpha^{-1}(y))$, $y \neq \alpha(0)$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.2: $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ birebir ve örten fonksiyon olsun. α sıralama bağıntısı ($\dot{<}$) aşağıdaki biçimde tanımlanır: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$x \dot{<} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.3: $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ birebir ve örten fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ tam sıralı cisim ise bu cisim aritmetik veya α -aritmetik olarak adlandırılır. Ayrıca α bir üreteç olarak adlandırılır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.4: α sayı kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972):

- a) α reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}\}$,
- b) α pozitif reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha^+ = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$,
- c) α negatif reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha^- = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}, x < 0\}$,
- d) α negatif olmayan reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha^{+,0} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$,
- e) α pozitif olmayan reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_\alpha^{-,0} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$,
- f) α tam sayılar kümesi: $\mathbb{Z}_\alpha = \{\alpha(n) | n \in \mathbb{Z}\}$

Gösterim 2.1: $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ aritmetiği verilsin. $a \in \mathbb{R}$ bir reel sayı olmak üzere $\dot{a}$ ile

$$\dot{a} = \alpha(a)$$

α reel sayısı gösterilecektir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.5: $|\cdot|_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$, α mutlak değer fonksiyonu

$$|x|_\alpha = \begin{cases} x, & x \dot{>} \dot{0} \text{ veya } x = \dot{0}, \\ \dot{0} \dot{-} x, & x \dot{<} \dot{0}. \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

2.2. ★ Analiz

İki keyfi aritmetik α aritmetik = $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ ve β aritmetik = $(\mathbb{R}_\beta, \ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{<})$ olarak alınsın. ★ (yıldız) ise bu iki aritmetiğin ★ = (α aritmetik, β aritmetik) biçiminde sıralı ikilisi olsun. ★ analizde fonksiyonların tanım kümesi α aritmetikte bir küme ($\mathbb{R}_\alpha$ 'nın bir alt kümesi) ve değer kümesi ise β aritmetikte bir küme ($\mathbb{R}_\beta$ 'nin bir alt kümesi) olarak alınacaktır. Bu bölümde keyfi bir f fonksiyonu

$$f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$$

olarak kabul edilecektir (Grossman ve Katz, 1972).

α aritmetik = $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ ve β aritmetik = $(\mathbb{R}_\beta, \ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{<})$ tam sıralı cisim olduklarından birbirlerine izomorftur. Tek türlü belirli olan $\iota: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ izomorfizması, birebir ve örten fonksiyondur ve aşağıdaki şartları sağlar: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$

- i) $\iota(x \dot{+} y) = \iota(x) \ddot{+} \iota(y)$,
- ii) $\iota(x \dot{-} y) = \iota(x) \ddot{-} \iota(y)$,
- iii) $\iota(x \dot{\times} y) = \iota(x) \ddot{\times} \iota(y)$,
- iv) $\iota(x \dot{/} y) = \iota(x) \ddot{/} \iota(y), y \neq \dot{0}$,
- v) $x \dot{<} y \Leftrightarrow \iota(x) \ddot{<} \iota(y)$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.6: Eğer her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ için $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} x_0|_\alpha \dot{<} \delta$ iken $|f(x) \ddot{-} L|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ kalacak şekilde $\delta \dot{>} \dot{0}$ varsa f fonksiyonunun $x, x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasına yaklaşırken ★ limiti L 'dir

denir

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir (Tekin ve Başar, 2013).

Tanım 2.7: Eğer $\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonuna $x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasında $\star$ süreklidir denir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.8: $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki $\star$ limit var ise $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında f 'nin $\star$ türevi

$$\star Df(x_0) = \star \lim_{x \rightarrow x_0} \{ [f(x) \dot{-} f(x_0)] / [l(x) \dot{-} l(x_0)] \}$$

olarak tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.9: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_\alpha$, verilmiş n tane α -reel sayı olsun. Bu n tane sayının α -ortalaması

$$(x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n) / \dot{n}$$

formülü ile bulunan α -sayısıdır (Grossman ve Katz, 1972).

Gösterim 2.2: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_\alpha$ sayılarının α -ortalamasını göstermek için

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = (x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n) / \dot{n}$$

kullanılacaktır.

Önerme 2.1: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_\alpha$ sayılarının α -ortalaması için

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n)}{n} \right)$$

eşitliği geçerlidir (Grossman ve Katz, 1972).

İspat:

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = (x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n) / \dot{n}$$

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha(\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n)) / \alpha(n)$$

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha\left(\frac{\alpha^{-1}[\alpha(\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n))]}{\alpha^{-1}(\alpha(n))}\right)$$

$$M_\alpha\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \alpha\left(\frac{\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n)}{n}\right).$$

Tanım 2.10: $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ terimleri $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinden seçilen bir sonlu dizi ve $K \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. Eğer bu dizinin ardışık herhangi iki teriminin

$$x_{n+1} \dot{-} x_n = K, n = 1, 2, \dots, m-1,$$

farkı sabit ise bu sonlu diziye bir α -ilerleme denir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.11: $\{x \in \mathbb{R}_\alpha | u \dot{\leq} x \dot{\leq} v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$ kümesi bir α -aralık olarak adlandırılır ve

$$[u, v]_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_\alpha | u \dot{\leq} x \dot{\leq} v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$$

ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972).

Reel sayılarda olduğu gibi uç noktaların dahil olup olmamasına göre açık, kapalı ve yarı-açık α -aralıklar tanımlanabilir.

Altta α -parçalanışın tanımı verilecektir. Bu tanım Grossman ve Katz'ın verdiği tanımdan farklıdır.

Tanım 2.12: $[u, v]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha$ kapalı α -aralığı verilsin. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin terimlerinden oluşan bir $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ sonlu dizisi için

$$u = x_1 \dot{<} x_2 \dot{<} x_3 \dot{<} \dots \dot{<} x_m = v$$

sıralaması geçerli olsun. Bu durumda $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ sonlu dizisine $[u, v]_\alpha$ aralığının bir α -parçalanışı (bölüntüsü) denir.

Tanım 2.13: m terimden oluşan bir α -parçalanışa m -katlı denir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.14: $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ sonlu dizisi $[u, v]_\alpha$ aralığının bir α -parçalanışı olsun. Eğer $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ bir α -ilerleme ise bu α -parçalanışa tekdüzedir (uniformdur) denir.

Tanım 2.15: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ terimleri $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinde olan sonsuz bir dizi ve $x \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. Eğer x elemanının içinde bulunduğu her açık α -aralık aynı zamanda sonlu sayıdaki

terimleri hariç (x_n) dizisinin bütün terimlerini içeriyorsa x elemanına (x_n) dizisinin α -limiti denir. (x_n) dizisi, x elemanına α -yakınsar denir (Grossman ve Katz, 1972).

Aşağıda $\star$ -sürekli bir fonksiyonun kapalı $[u, v]_\alpha$ α -aralığında $\star$ -ortalamasının tanımı verilecektir. Bu tez çalışmasında bu ortalama $M_\beta f[u, v]_\alpha$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.16: $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu $\star$ -sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $(x_n)_{1 \leq n \leq m}$ dizisi $[u, v]_\alpha \subset A$ aralığının m -katlı tekdüze α -parçalanışı olsun. Bu durumda f fonksiyonunun kapalı $[u, v]_\alpha$ α -aralığında $\star$ -ortalaması eğer yakınsak ise

$$M_\beta f[u, v]_\alpha = {}^\beta \lim_{m \rightarrow \infty} M_\beta \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\}$$

biçimindeki β -limit ile tanımlanır ve $M_\beta f[u, v]_\alpha$ ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.17: $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir $\star$ -sürekli fonksiyon olsun. f 'nin $[u, v]_\alpha \subset A$ kapalı aralığında $\star$ integrali

$$\int_{[u, v]_\alpha}^* f = [\iota(v) \dot{-} \iota(u)] \dot{\times} M_\beta f[u, v]_\alpha$$

olarak tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

2.3. Geometrik Analiz

Bu bölümde $\alpha(x) = I(x)$ (birim fonksiyon) ve $\beta(x) = \exp(x)$ üreteçleri için oluşturulan ve geometrik analiz olarak isimlendirilen $\star$ analiz verilecektir. (Bu kısımda ilgili yerlerde $\star$ (yıldız) yerine $*$ (asteriks) işareti kullanılacaktır.)

Tanım 2.18: Üstel sayı kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

- a) Üstel reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_{exp} = \{e^x | x \in \mathbb{R}\}$,
- b) Üstel pozitif reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_{exp}^+ = \{e^x | x \in \mathbb{R}, x > 0\} = (1, \infty)$,
- c) Üstel negatif reel sayılar kümesi: $\mathbb{R}_{exp}^- = \{e^x | x \in \mathbb{R}, x < 0\} = (0, 1)$

(Türkmen ve Başar, 2012).

Tanım 2.19: Aşağıda üstel dört işlem tanımı verilmiştir (Çakmak ve Başar, 2012):

$$\forall u, v \in \mathbb{R}_{exp}$$

$$\text{a) } u \oplus v = e^{\ln(u) + \ln(v)} = u \cdot v,$$

$$\text{b) } u \ominus v = e^{\ln(u) - \ln(v)} = \frac{u}{v},$$

$$\text{c) } u \odot v = e^{\ln(u) \cdot \ln(v)} = u^{\ln(v)},$$

d) $u \oslash v = e^{\frac{\ln(u)}{\ln(v)}} = u^{\frac{1}{\ln(v)}}, v \neq 1.$

Tanım 2.20: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f: A \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ fonksiyonuna bir geometrik fonksiyon denir.

Bir geometrik fonksiyonunun tanım kümesi reel sayıların bir alt kümesi iken değer kümesi üstel reel sayılardır.

Tanım 2.21: $|\cdot|_*: \mathbb{R}_{exp} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}^{+,0} \cup \{1\}$ tanımlı $|x|_* = \exp(|\ln(x)|)$ fonksiyonuna geometrik mutlak değer fonksiyonu denir.

Bu tanıma göre

$$|x|_* = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ \frac{1}{x}, & x < 1. \end{cases}$$

yazılabilir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.22: Eğer $\forall \varepsilon > 1$ seçildiğinde $0 < |x - x_0| < \delta$ için $\left| \frac{f(x)}{L} \right|_* < \varepsilon$ kalacak biçimde $\delta > 0$ varsa f geometrik fonksiyonunun $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ noktasına yaklaşırken geometrik limiti L 'dir denir ve

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.23: Eğer $* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f geometrik fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında geometrik sürekli olduğu söylenir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.24: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ fonksiyonu verilsin. $(a, b) \subset \mathbb{R}$, bir açık aralık ve $x \in (a, b)$ olsun. Var olduğu durumda

$$f^*(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+r)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{r}}$$

limiti x noktasında f 'nin geometrik türevi olarak adlandırılır (Bashirov vd., 2008).

Geometrik analizde klasik türevlenebilme ile geometrik anlamda türevlenebilme arasındaki ilişki için aşağıdaki önerme verilmiştir.

Önerme 2.2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu klasik türevlenebilir ise geometrik anlamda türevlenebilir ve aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$f^*(x) = e^{(\ln \circ f)'(x)}$$

(Stanley, 1999).

Tanım 2.25: $f(x)$ bir geometrik fonksiyon olsun.

$$F^*(x) = f(x)$$

eşitliğini sağlayan bir $F(x)$ fonksiyonuna f 'nin bir geometrik ters türevi denir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.26: $F(x)$, $f(x)$ geometrik fonksiyonunun bir geometrik ters türevi olsun. Bu durumda $f(x)$ 'in en genel ters türevine $f(x)$ 'in geometrik belirsiz integrali denir ve

$$* \int f(x)^{dx} = C \cdot F(x)$$

ile gösterilir. Burada $C \in \mathbb{R}_{exp}$ bir üstel keyfi sabittir (Stanley, 1999).

Önerme 2.3: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ fonksiyonu için ilgili integraller tanımlı ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$* \int f(x)^{dx} = e^{\int (\ln \circ f)(x) dx}$$

(Stanley, 1999).

Aşağıda belirli integralin geometrik analizdeki karşılığı verilmiştir.

Tanım 2.27: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ fonksiyonu $[u, v] \subset \mathbb{R}$ kümesinde geometrik sürekli olsun. Bu durumda

$$* \int_u^v f(x)^{dx} = e^{\int_u^v (\ln \circ f)(x) dx}$$

şeklinde tanımlanan integrale $f(x)$ geometrik fonksiyonunun u 'dan v 'ye geometrik belirli integrali denir (Stanley, 1999).

3. ÇİFT ÜSTEL ARİTMETİK

Bu bölümde üretici $\alpha(x) = e^{k \cdot \exp(x)}$, $k \in \{-1, 1\}$ olan α aritmetik tanıtılmıştır. Bu aritmetik çift üstel aritmetik olarak adlandırılmıştır. Bu üretcin ters fonksiyonu $\alpha^{-1}(x) = \ln[k \ln x]$ fonksiyonudur.

Çift üstel sayı kümeleri, bu sayı kümelerinde sıralama bağıntıları, çift üstel aritmetikte kullanılan temel işlemler aşağıda verilmiştir.

3.1. Çift Üstel Sayılar

Çift üstel aritmetikte dört işlem ve diğer işlemleri yapabilmek için önce çift üstel sayılar tanımlanmalıdır. Aşağıda çift üstel aritmetik için reel sayı, tam sayı ve doğal sayı kümeleri tanımlanacaktır.

Tanım 3.1: Çift üstel aritmetik için reel sayı, tam sayı ve doğal sayı kümeleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathbb{R}_{d,k} = \{e^{k \exp(r)} \mid r \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{Z}_{d,k} = \{e^{k \exp(n)} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \dots, e^{\frac{k}{e^2}}, e^{\frac{k}{e}}, e^k, e^{k \cdot e}, e^{k \cdot e^2}, \dots \right\},$$

$$\mathbb{N}_{d,k} = \{e^{k \exp(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{e^k, e^{k \cdot e}, e^{k \cdot e^2}, \dots\}.$$

Çift üstel pozitif ve çift üstel negatif sayılar sırasıyla aşağıdaki biçimde gösterilecektir.

$$\mathbb{R}_{d,k}^+ = \{e^{k \exp(r)} \mid r \in \mathbb{R}^+\} = \{e^{ke^r} \mid r \in \mathbb{R}, r > 0\},$$

$$\mathbb{R}_{d,k}^- = \{e^{k \exp(r)} \mid r \in \mathbb{R}^-\} = \{e^{ke^r} \mid r \in \mathbb{R}, r < 0\},$$

$$\mathbb{Z}_{d,k}^+ = \{e^{k \exp(n)} \mid n \in \mathbb{Z}^+\} = \{e^{ke^n} \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\},$$

$$\mathbb{Z}_{d,k}^- = \{e^{k \exp(n)} \mid n \in \mathbb{Z}^-\} = \{e^{ke^n} \mid n \in \mathbb{Z}, n < 0\}.$$

Ayrıca, çift üstel aritmetikte negatif olmayan ve pozitif olmayan reel sayılar ile tam sayılar şu şekilde verilir:

$$\mathbb{R}_{d,k}^{+,0} = \{e^{k \exp(r)} \mid r \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}_{d,k}^{-,0} = \{e^{k \exp(r)} \mid r \leq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_{d,k}^{+,0} = \{e^{k \exp(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_{d,k}^{-,0} = \{e^{k \exp(n)} \mid n \in \mathbb{Z}, n \leq 0\}.$$

3.1.1. Çift Üstel Sıralama

Tanım 3.2: $\mathbb{S} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{S}_{d,k}$ sayı kümesinde sıralama aşağıdaki biçimde tanımlanır: $\forall x, y \in \mathbb{S}_{d,k}$

$$x <_{d,k} y \Leftrightarrow \ln(k \cdot \ln x) < \ln(k \cdot \ln y)$$

3.1.2. Parametresi $k = 1$ Olan Çift Üstel Sayılar

Reel sayılardaki sıralama ile $\mathbb{R}_{d,1}$ reel sayı kümesindeki sıralama aynı şekildedir:

$\forall x, y \in \mathbb{S}_{d,1}$ için $(x <_{d,1} y \Leftrightarrow x < y)$ dir. Çünkü

$$x <_{d,1} y \Leftrightarrow \ln(\ln x) < \ln(\ln y)$$

$$\Leftrightarrow \ln x < \ln y$$

$$\Leftrightarrow x < y$$

Reel sayılardaki sıralama ile $\mathbb{R}_{d,1}$ reel sayı kümesindeki sıralama aynı şekilde olduğundan çalışmanın devamında $<_{d,1}$ sıralaması yerine $<$ kullanılacaktır.

Önerme 3.1: Parametresi ($k = 1$) olan çift üstel reel sayılar için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\mathbb{R}_{d,1} = \{e^{\exp(r)} \mid r \in \mathbb{R}\} = (1, \infty),$$

$$\mathbb{R}_{d,1}^+ = \{e^{\exp(r)} \mid r > 0\} = (e, \infty),$$

$$\mathbb{R}_{d,1}^- = \{e^{\exp(r)} \mid r < 0\} = (1, e),$$

3.1.3. Parametresi $k = -1$ Olan Çift Üstel Sayılar

Reel sayılardaki sıralama ile $\mathbb{R}_{d,-1}$ reel sayı kümesindeki sıralama zıt şekildedir:

$\forall x, y \in \mathbb{S}_{d,k}$ için $(x <_{d,-1} y \Leftrightarrow x > y)$ dir. Çünkü

$$x <_{d,-1} y \Leftrightarrow \ln(-\ln x) < \ln(-\ln y)$$

$$\Leftrightarrow -\ln x < -\ln y$$

$$\Leftrightarrow \ln x > \ln y$$

$$x <_{d,-1} y \Leftrightarrow x > y$$

$\mathbb{R}_{d,-1}$ reel sayı kümesindeki sayı aralıklarının $<_{d,-1}$ sıralamasıyla bulunan küçük ve büyük değerleri bildiğimiz reel sayılardaki $<$ sıralamasıyla bulunanın tersidir. Bu sebeple $\mathbb{R}_{d,-1}$ deki sayı aralıkları için bu dikkate alınmalıdır. Örneğin;

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)_{d,-1} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left[\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right]_{d,-1} = \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{4}\right].$$

Önerme 3.2: Parametresi ($k = -1$) olan çift üstel reel sayılar için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\mathbb{R}_{d,-1} = \{e^{-\exp(r)} \mid r \in \mathbb{R}\} = (1, 0)_{d,-1},$$

$$\mathbb{R}_{d,-1}^+ = \{e^{-\exp(r)} \mid r > 0\} = (e^{-1}, 0)_{d,-1},$$

$$\mathbb{R}_{d,-1}^- = \{e^{-\exp(r)} \mid r < 0\} = (1, e^{-1})_{d,-1},$$

Önerme 3.3: $0 < a \neq 1$ sayısı verilsin. $k = \text{sgn}(\ln a)$ için $a \in \mathbb{R}_{d,k}$ dır.

İspat: $0 < a < 1$, ($a \in \mathbb{R}_{d,-1}$) durumu için $\ln a < 0$ ve $k = \text{sgn}(\ln a) = -1$ olur.

Bu durumda $a \in \mathbb{R}_{d,k}$ sağlanır.

$a > 1$, ($a \in \mathbb{R}_{d,1}$) durumu için $\ln a > 0$, $k = \text{sgn}(\ln a) = 1$ olur ve böylelikle $a \in \mathbb{R}_{d,k}$ sağlandığı görülür.

3.1.4. Çift Üstel Aritmetiğin Temel İşlemleri

Tanım 3.3: $x, y \in \mathbb{R}_{d,k}$ ($k = -1, 1$) olmak üzere çift üstel aritmetiğin dört temel işlemi aşağıda verilmiştir:

- i) $x \oplus_{d,k} y = e^{k \exp\{\ln(k \ln x) + \ln(k \ln y)\}}$
- ii) $x \ominus_{d,k} y = e^{k \exp\{\ln(k \ln x) - \ln(k \ln y)\}}$
- iii) $x \odot_{d,k} y = e^{k \exp\{\ln(k \ln x) \cdot \ln(k \ln y)\}}$
- iv) $x \oslash_{d,k} y = e^{k \exp\{\ln(k \ln x) \div \ln(k \ln y)\}}, y \neq e^k$

Tanım 3.4: $x \in \mathbb{R}_{d,k}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x^{n \odot_{d,k}} = e^{k \exp\{[\ln(k \ln x)]^n\}}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanıma göre

$$x^{0\odot_{d,k}} = e^{k \exp\{\ln(k \ln x)\}^0} = e^{k \cdot e}$$

$$x^{1\odot_{d,k}} = e^{k \exp\{\ln(k \ln x)\}^1} = x$$

olur. Diğer taraftan kuvvet alma işlemi çift üstel çarpma yapılarak da hesaplanabilir.

Örneğin,

$$x^{2\odot_{d,k}} = x \odot_{d,k} x,$$

$$x^{3\odot_{d,k}} = (x \odot_{d,k} x) \odot_{d,k} x.$$

Verilen bu tanım, kuvvetler, reel sayı olacak şekilde genelleştirilebilir.

Tanım 3.5: $x \in \mathbb{R}_{d,k}$ ve $r \in \mathbb{R}$ için kuvvet alma işlemi şu şekilde verilir:

$$x^{r\odot_{d,k}} = e^{k \exp\{\ln(k \ln x)\}^r}$$

Önerme 3.4: $k = 1$ parametrelili çift üstel aritmetiğin temel işlemlerinin klasik aritmetikte karşılıkları aşağıda verilmiştir.

i) $x \oplus_{d,1} y = x^{\ln y}$

ii) $x \ominus_{d,1} y = x^{\frac{1}{\ln y}}$

iii) $x \odot_{d,1} y = \exp\{(\ln x)^{\ln(\ln y)}\}$

iv) $x \oslash_{d,1} y = \exp\{(\ln x)^{1/\ln(\ln y)}\}$

v) $x^{r\odot_{d,1}} = e^{\exp\{[\ln(\ln x)]^r\}}$

İspat:

i)

$$x \oplus_{d,1} y = e^{\exp\{\ln(\ln x) + \ln(\ln y)\}} = e^{\exp\{\ln(\ln x \cdot \ln y)\}}$$

$$x \oplus_{d,1} y = e^{\ln x \cdot \ln y} = (e^{\ln x})^{\ln y}$$

$$x \oplus_{d,1} y = x^{\ln y}$$

ii)

$$x \ominus_{d,1} y = e^{\exp\{\ln(\ln x) - \ln(\ln y)\}} = e^{\exp\left\{\ln\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)\right\}}$$

$$x \ominus_{d,1} y = e^{\frac{\ln x}{\ln y}} = (e^{\ln x})^{\frac{1}{\ln y}}$$

$$x \ominus_{d,1} y = x^{\frac{1}{\ln y}}$$

iii)

$$x \odot_{d,1} y = e^{\exp\{\ln(\ln x) \cdot \ln(\ln y)\}} = e^{\exp\{\ln(\ln x)^{\ln(\ln y)}\}} = e^{\{(\ln x)^{\ln(\ln y)}\}}$$

$$x \odot_{d,1} y = \exp\{(\ln x)^{\ln(\ln y)}\}$$

iv) $y \neq e$ için

$$x \oslash_{d,1} y = e^{\exp\{\ln(\ln x) \div \ln(\ln y)\}} = e^{\exp\left\{\ln(\ln x)^{\frac{1}{\ln(\ln y)}}\right\}} = e^{\left\{(\ln x)^{\frac{1}{\ln(\ln y)}}\right\}}$$

$$x \oslash_{d,1} y = \exp\left\{(\ln x)^{\frac{1}{\ln(\ln y)}}\right\}$$

v) Reel üslerin tanımından aşağıdaki eşitlik açıktır:

$$x^{r \odot_{d,1}} = e^{\exp\{[\ln(\ln x)]^r\}}$$

Önerme 3.5: $k = 1$ parametrelili çift üstel toplama işlemine göre

i) etkisiz eleman “ e ” sayıdır,

ii) $x \in \mathbb{R}_{d,1}$ elemanın tersi ise “ $e^{1/\ln x}$ ” sayıdır.

İspat:

i) $\forall x \in \mathbb{R}_{d,1}$ için

$$x \oplus_{d,1} e = x^{\ln e} = x$$

$$e \oplus_{d,1} x = e^{\ln x} = x$$

ii) $x \in \mathbb{R}_{d,1}$ için

$$x \oplus_{d,1} e^{1/\ln x} = x^{\ln(e^{1/\ln x})} = x^{1/\ln x} = (e^{\ln x})^{1/\ln x} = e$$

$$e^{1/\ln x} \oplus_{d,1} x = (e^{1/\ln x})^{\ln x} = e^{\ln x / \ln x} = e$$

Önerme 3.6: $k = -1$ parametrelı çift üstel aritmetiğın temel işlemlerinin klasik aritmetikte karşılıkları aşağıda verilmiştir.

i) $x \oplus_{d,-1} y = x^{-\ln y}$

ii) $x \ominus_{d,-1} y = x^{-1/\ln y}$

iii) $x \odot_{d,-1} y = \exp\{-(\ln x^{-1})^{\ln(\ln y^{-1})}\}$

iv) $x \oslash_{d,-1} y = \exp\{-(\ln x^{-1})^{1/\ln(\ln y^{-1})}\}$

v) $x^{r \odot_{d,-1}} = e^{-\exp\{[\ln(\ln x^{-1})]^r\}}$

İspat:

i)

$$x \oplus_{d,-1} y = e^{-\exp\{\ln(-\ln x) + \ln(-\ln y)\}}$$

$$x \oplus_{d,-1} y = e^{-\exp\{\ln(\ln x \cdot \ln y)\}}$$

$$x \oplus_{d,-1} y = e^{-\ln x \cdot \ln y}$$

$$x \oplus_{d,-1} y = (e^{\ln x})^{-\ln y}$$

$$x \oplus_{d,-1} y = x^{-\ln y}$$

ii)

$$x \ominus_{d,-1} y = e^{-\exp\{\ln(-\ln x) - \ln(-\ln y)\}}$$

$$x \ominus_{d,-1} y = e^{-\exp\left\{\ln\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)\right\}}$$

$$x \ominus_{d,-1} y = e^{\frac{\ln x}{\ln y}}$$

$$x \ominus_{d,-1} y = (e^{\ln x})^{\frac{-1}{\ln y}}$$

$$x \ominus_{d,-1} y = x^{-1/\ln y}$$

iii)

$$x \odot_{d,-1} y = e^{-\exp\{\ln(-\ln x) \cdot \ln(-\ln y)\}} = e^{-\exp\{\ln(\ln x^{-1}) \cdot \ln(\ln y^{-1})\}}$$

$$x \odot_{d,-1} y = e^{-\exp\{(\ln(\ln x^{-1}))^{\ln(\ln y^{-1})}\}} = e^{\{-(\ln x^{-1})^{\ln(\ln y^{-1})}\}}$$

$$x \odot_{d,-1} y = \exp\{-(\ln x^{-1})^{\ln(\ln y^{-1})}\}$$

iv)

$$x \oslash_{d,-1} y = e^{-\exp\{\ln(-\ln x) \div \ln(-\ln y)\}} = e^{-\exp\{\ln(\ln x^{-1}) \div \ln(\ln y^{-1})\}}$$

$$x \oslash_{d,-1} y = e^{-\exp\{\ln(\ln x^{-1})^{1/\ln(\ln y^{-1})}\}} = e^{\{-(\ln x^{-1})^{1/\ln(\ln y^{-1})}\}}$$

$$x \oslash_{d,-1} y = \exp\{-(\ln x^{-1})^{1/\ln(\ln y^{-1})}\}$$

v)

$$x^{r \odot_{d,-1}} = e^{-\exp\{\ln(-\ln x)]^r\}} = e^{-\exp\{\ln(\ln x^{-1})]^r\}}$$

Önerme 3.7: $k = -1$ parametrelili çift üstel toplama işlemine göre

i) etkisiz eleman “ e^{-1} ” sayıdır,

ii) $x \in \mathbb{R}_{d,-1}$ elemanın tersi ise “ $e^{1/\ln x}$ ” sayıdır.

İspat:

i) $\forall x \in \mathbb{R}_{d,-1}$ için

$$x \oplus_{d,-1} e^{-1} = x^{-\ln e^{-1}} = x$$

$$e^{-1} \oplus_{d,-1} x = (e^{-1})^{-\ln x} = e^{\ln x} = x$$

ii) $x \in \mathbb{R}_{d,-1}$ için

$$x \oplus_{d,-1} e^{1/\ln x} = x^{-\ln(e^{1/\ln x})} = x^{-1/\ln x} = (e^{\ln x})^{-1/\ln x} = e^{-1}$$

$$e^{1/\ln x} \oplus_{d,-1} x = (e^{1/\ln x})^{-\ln x} = e^{-\ln x / \ln x} = e^{-1}$$

Gösterim 3.1: x elemanın hem $\mathbb{R}_{d,1}$ deki çift üstel toplamaya hem de $\mathbb{R}_{d,-1}$ deki çift üstel toplamaya göre tersi aynı ve $e^{1/\ln x}$ eşittir ve bu ters eleman $\ominus_d x$ ile gösterilecektir:

$$\ominus_d x = e^{1/\ln x}.$$

4. ÇİFT ÜSTEL ANALİZ

Tanım 4.1: $X \subset \mathbb{R}$ bir küme olsun. Bu durumda $g: X \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu çift üstel fonksiyon olarak adlandırılır.

4.1. Çift Üstel Mutlak Değer

Bu kısımda çift üstel mutlak değer tanımı ve özellikleri ile birlikte örnekler verilecektir.

Tanım 4.2: $|\cdot|_{d,k}: \mathbb{R}_{d,k} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}^{+,0}$ tanımlı ve

$$|u|_{d,k} = \begin{cases} u, & e^k \leq_{d,k} u, \\ \ominus_d u, & 1 <_{d,k} u <_{d,k} e^k \end{cases}$$

biçimindeki fonksiyona k parametrelili çift üstel mutlak değer fonksiyonu denir.

Önerme 4.1: $k = 1$ parametrelili çift üstel mutlak değer fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$|u|_{d,1} = \begin{cases} u, & e \leq u < \infty, \\ e^{1/\ln u}, & 1 < u < e. \end{cases}$$

Örnek 4.1: Aşağıda iki sayının çift üstel mutlak değerleri hesaplanmıştır.

$$|5|_{d,1} = 5,$$

$$|e^{1/2}|_{d,1} = e^{1/\ln(e^{1/2})} = e^{\frac{1}{1/2}} = e^2.$$

Önerme 4.2: $k = -1$ parametrelili çift üstel mutlak değer fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$|u|_{d,-1} = \begin{cases} u, & 0 < u \leq e^{-1}, \\ e^{-1/\ln u}, & e^{-1} < u < 1. \end{cases}$$

Örnek 4.2: Aşağıda iki sayının çift üstel mutlak değerleri hesaplanmıştır.

$$|e^{-4}|_{d,-1} = e^{-4},$$

$$|e^{-1/8}|_{d,-1} = e^{1/\ln(e^{-1/8})} = e^{\frac{1}{-1/8}} = e^{-8}.$$

Önerme 4.3: $u, v \in \mathbb{R}_{d,k}$ olmak üzere çift üstel mutlak değer fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $|u|_{d,k} \geq_{d,k} e^k$,
- $|u|_{d,k} = e^k \Leftrightarrow u = e^k$,
- $|u \odot_{d,k} v|_{d,k} = |u|_{d,k} \odot_{d,k} |v|_{d,k}$,
- $|x \oplus_{d,k} y|_{d,k} \leq_{d,k} |x|_{d,k} \oplus_{d,k} |y|_{d,k}$

4.2. Çift Üstel Limit ve Çift Üstel Süreklilik

Tanım 4.3: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun $x, a \in \mathbb{R}_{d,k}$ noktasına yaklaşırken k parametrelili çift üstel limiti $L \in \mathbb{R}_{d,k}$ sayıdır denir eğer $\forall \varepsilon >_{d,k} e^k$ sayısı seçildiğinde

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$$

için

$$f(x) \in (L \ominus_{d,k} \varepsilon, L \oplus_{d,k} \varepsilon)_{d,k} = \left(L^{\frac{k}{\ln \varepsilon}}, L^{\frac{\ln \varepsilon}{k}} \right)_{d,k}$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunursa. Çift üstel limit için

$${}^{d,k}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

gösterimi kullanılacaktır.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun $x, a \in \mathbb{R}$ noktasına yaklaşırken çift üstel limiti için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$${}^{d,k}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\lim_{x \rightarrow a} (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x)\right\}}.$$

Tanım 4.4: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ noktasında k parametresi ile çift üstel süreklidir denir eğer

$${}^{d,k}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

eşitliği varsa. f bir açık I aralığındaki her noktada çift üstel sürekli ise I aralığı üzerinde çift üstel süreklidir denir.

Örnek 4.3: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,1}$, $g(x) = 6^{4 \cdot 5^x}$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyon her yerde çift üstel süreklidir.

Çözüm: $x_0 \in \mathbb{R}_{d,k}$ keyfi olarak alalım. Keyfi $\varepsilon >_{d,1} e$ için $\delta = \frac{\ln(\ln \varepsilon)}{\ln 5}$ alınsın $|x - x_0| < \delta$ için

$$\ln g(x_0) = \ln(6^{4 \cdot 5^{x_0}}) = 4 \cdot 5^{x_0} \cdot (\ln 6) = (4 \ln 6) \cdot 5^{x_0}$$

ve

$$|g(x) \ominus_{d,1} g(x_0)|_{d,1} = \left| [g(x)]^{\frac{1}{\ln g(x_0)}} \right|_{d,1} = \left| [6^{4 \cdot 5^x}]^{\frac{1}{(4 \ln 6) \cdot 5^{x_0}}} \right|_{d,1}$$

$$|g(x) \ominus_{d,1} g(x_0)|_{d,1} = \left| 6^{\frac{4 \cdot 5^x}{(4 \ln 6) \cdot 5^{x_0}}} \right|_{d,1} = \left| (6^{1/\ln 6})^{\frac{5^x}{5^{x_0}}} \right|_{d,1}$$

$$|g(x) \ominus_{d,1} g(x_0)|_{d,1} = |e^{(5^x - x_0)}|_{d,1} = e^{(5^{|x-x_0|})} < e^{(5^\delta)}$$

$$|g(x) \ominus_{d,1} g(x_0)|_{d,1} <_{d,1} e^{\left[5^{\frac{\ln(\ln \varepsilon)}{\ln 5}} \right]} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylelikle $|x - x_0| < \delta$ iken $|g(x) \ominus_{d,1} g(x_0)|_{d,1} < \varepsilon$ olduğu görülür. x_0 noktasında fonksiyon süreklidir. x_0 keyfi alındığından fonksiyonun her yerde sürekli olduğu ispatlanmış olur.

4.3. Çift Üstel Türev

f sürekli fonksiyonu için

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

limiti varsa bu limit değerine $f(x)$ fonksiyonunun klasik anlamda türevi denir.

Tanım 4.5: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu verilsin. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $x_0 \in I$ ise varlığı halinde

$$f'^{d,k}(x_0) = {}^{d,k}\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) \ominus_{d,k} f(x_0)] \oslash_{d,k} e^{ke^h}$$

limitiyle bulunan sayıya f fonksiyonunun x_0 noktasındaki k parametrelili çift üstel türevi (veya kısaca çift üstel türevi) denir.

Gösterim 4.1: $f(x), f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki k parametrelili çift üstel türevi

$$f'^{d,k}(x_0) \text{ veya } (f(x))'_{x=x_0}{}^{d,k}$$

ile gösterilecektir.

Gösterim 4.2: $D_{d,k}f(x)$ ile $f(x)$ fonksiyonunun çift üstel türev fonksiyonu gösterilecektir.

Tek taraflı çift üstel türevler, çift üstel limit kullanılarak klasik analizdeki tek taraflı türevlere benzer şekilde tanımlanır.

Teorem 4.1: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu hem klasik anlamda hem de çift üstel anlamda türevlenebilir olsun. Bu durumda bu iki türev için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\text{i) } f'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{d}{dx}(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x)\right\}}$$

$$\text{ii) } f'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{(\ln \circ f)'(x)}{(\ln \circ f)(x)}\right\}}$$

$$\text{iii) } f'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{f'(x)}{f(x) \cdot (\ln \circ f)(x)}\right\}}$$

$$\text{iv) } f'(x) = f(x) \cdot (\ln \circ f)(x) \cdot (\ln \circ k \cdot \ln \circ f'^{d,k})(x)$$

İspat:

i)

$$f'^{d,k}(x) = {}^{d,k}\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) \ominus_{d,k} f(x)] \oslash_{d,k} e^{ke^h}$$

$$f'^{d,k}(x) = {}^{d,k}\lim_{h \rightarrow 0} [e^{k \exp\{\ln[k \ln(f(x+h))] - \ln[k \ln(f(x))]\}}] \oslash_{d,k} e^{ke^h}$$

$$f'^{d,k}(x) = {}^{d,k}\lim_{h \rightarrow 0} e^{k \exp\left\{\frac{\ln[k \ln(f(x+h))] - \ln[k \ln(f(x))]}{h}\right\}}$$

$$f'^{d,k}(x) = e^{k \exp\left\{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln[k \cdot \ln(f(x+h))] - \ln[k \cdot \ln(f(x))]}{h}\right\}}$$

$$f'^{d,k}(x) = e^{k \exp\left\{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x+h) - (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x)}{h}\right\}}$$

$$f'_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{d}{dx}(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x)\right\}}$$

ii)

$$f'_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)'(x)\}}$$

$$f'_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{[k \cdot (\ln \circ f)]'(x)}{k \cdot (\ln \circ f)(x)}\right\}}$$

$$f'_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{(\ln \circ f)'(x)}{(\ln \circ f)(x)}\right\}}$$

Böylelikle

$$f'_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{(\ln \circ f)'(x)}{(\ln \circ f)(x)}\right\}}$$

eşitliği elde edilir.

iii) İkinci şıktan sonuç açıktır.

iv) Üçüncü şıktaki eşitlikten $f'(x)$ türevi

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln \circ f)(x) \cdot (\ln \circ k \cdot \ln \circ f'_{d,k})(x)$$

olarak hesaplanır.

■

Sonuç 4.1: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu hem klasik anlamda hem de çift üstel anlamda türevlenebilir olsun. Bu durumda bu iki türev arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$(\ln \circ k \cdot \ln \circ f'_{d,k})(x) = (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)'(x).$$

İspat:

$$f'_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{d}{dx}(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x)\right\}}$$

$$f'_{d,k}(x) = \exp\left\{k \exp\left[\frac{d}{dx}(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x)\right]\right\}$$

$$(\ln \circ k \cdot \ln \circ f'_{d,k})(x) = (\ln \circ k \cdot \ln \circ \exp)\{k \exp[(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)'(x)]\}$$

Buradan

$$(\ln \circ k \cdot \ln \circ f'_{d,k})(x) = (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)'(x)$$

eşit olduğu görülür. ■

Teorem 4.2: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında çift üstel türevlenebilirdir ancak ve ancak o noktada klasik anlamda türevlenebilirdir.

İspat: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu keyfi bir x noktasında çift üstel türevlenebilir olsun. Bu durumda $f'^{d,k}(x) \in \mathbb{R}_{d,k}$, $(\ln \circ k \cdot \ln \circ f'^{d,k})(x) \in \mathbb{R}$ olur. Ayrıca $0 < f(x) \neq 1$ olduğundan $f(x)$ 'in logaritması tanımlıdır. Böylelikle

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln \circ f)(x) \cdot (\ln \circ k \cdot \ln \circ f'^{d,k})(x)$$

eşitliğinin sağ tarafının tanımlı olduğu görülür yani f fonksiyonunun x noktasındaki klasik türevi vardır.

Diğer yandan, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$, x noktasında klasik türevlenebilir ise $0 < f(x) \neq 1$ ve $(\ln \circ f)(x) \neq 0$ olur. Bundan dolayı

$$f'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{f'(x)}{f(x) \cdot (\ln \circ f)(x)}\right\}}$$

eşitliğinin sağ tarafının tanımlı olduğu görülür yani f fonksiyonunun x noktasındaki çift üstel türevi vardır. ■

Teorem 4.3: Sırasıyla çift üstel anlamda türevlenebilir ve klasik anlamda türevlenebilir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. $h(x) = (f \circ g)(x)$, fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$h'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{(f' \circ g)(x) \cdot g'(x)}{(f \circ g)(x) \cdot (\ln \circ f \circ g)(x)}\right\}}.$$

İspat:

$$h'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ h)'(x)\}}$$

$$h'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ (f \circ g))'(x)\}}$$

$$h'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{(k \cdot \ln \circ (f \circ g))'(x)}{(k \cdot \ln \circ (f \circ g))(x)}\right\}}$$

$$h'^{d,k}(x) = \exp \left\{ k \exp \left[\frac{k \cdot [(f \circ g)'(x)/(f \circ g)(x)]}{k \cdot (\ln \circ f \circ g)(x)} \right] \right\}$$

$$h'^{d,k}(x) = e^{k \exp \left\{ \frac{(f' \circ g)(x) \cdot g'(x)}{(f \circ g)(x) \cdot (\ln \circ f \circ g)(x)} \right\}}$$

eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.4: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,1}$, $f(x) = 2^{3 \cdot 4^x}$ fonksiyonunun çift üstel türevini bulunuz.

Çözüm: Önce $f(x)$ fonksiyonunun logaritmasını ve türevini hesaplayalım:

$$(\ln \circ f)(x) = 3 \cdot 4^x \cdot \ln 2 = 3 \cdot \ln 2 \cdot 4^x$$

ve

$$(\ln \circ f)'(x) = 3 \cdot \ln 2 \cdot (\ln 4 \cdot 4^x) = 3 \cdot \ln 2 \cdot \ln 4 \cdot 4^x$$

Çift üstel türevin tanımından,

$$\begin{aligned} f'^{d,1}(x) &= e^{\exp \left\{ \frac{(\ln \circ f)'(x)}{(\ln \circ f)(x)} \right\}} \\ &= e^{\exp \left\{ \frac{3 \cdot \ln 2 \cdot \ln 4 \cdot 4^x}{3 \cdot \ln 2 \cdot 4^x} \right\}} \\ &= e^{\exp \{ \ln 4 \}} \\ &= e^4 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.5: $f(x) = 7^x$, $x \in (-\infty, 0)$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun $k = -1$ parametresi için çift üstel türevini bulunuz.

Çözüm:

Önce $f(x)$ fonksiyonunun logaritması ve logaritmasının türevi

$$(\ln \circ f)(x) = (\ln 7) \cdot x,$$

$$(\ln \circ f)'(x) = \ln 7$$

olarak hesaplanır. Şimdi çift üstel türevin tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
f'^{d,-1}(x) &= e^{-\exp\left\{\frac{(\ln \circ f)'(x)}{(\ln \circ f)(x)}\right\}} \\
&= e^{-\exp\left\{\frac{\ln 7}{\ln 7 \cdot x}\right\}} \\
&= e^{-\exp(1/x)}
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Örnek 4.6: Tanım kümesi $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n \cdot \pi; n \in \mathbb{Z}\}$ olan $f(x) = e^{c \sin x}, c \in \mathbb{R}$, fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun çift üstel türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
f'^{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{(c \sin x)'}{c \sin x}\right\}} \\
&= e^{k \exp\left\{\frac{\cos x}{\sin x}\right\}} \\
&= e^{k \exp\{\cot x\}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Gösterim 4.3: $g''^{d,k}$ ile $g'^{d,k}$ (birinci mertebeden çift üstel türev) fonksiyonunun çift üstel türevi gösterilir ve g fonksiyonunun ikinci mertebeden çift üstel türevi olarak adlandırılır.

Tanım 4.6: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun $x \in \mathbb{R}$ noktasında n kez tekrarlanan türev alma işlemi ile n . mertebeden çift üstel türevi

$$g^{(n)d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{d^n}{dx^n}(\ln \circ k \cdot \ln \circ g)(x)\right\}}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.4: f fonksiyonunun a noktasında çift üstel türevi varsa bu noktada klasik anlamda süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun a noktasında çift üstel türevi varsa klasik anlamda da türevi vardır. Bu sebeple f fonksiyonunun a noktasında klasik anlamda sürekli olduğu görülür. ■

f fonksiyonu a noktasında klasik anlamda sürekli olup fakat bu noktada çift üstel türevi var olmayabilir.

Örnek 4.7: Aşağıdaki parçalı fonksiyon verilsin.

$$g(x) = \begin{cases} \exp(4^{7x+2}), & x \geq 0, \\ \exp(2^{9x+4}), & 0 < x. \end{cases}$$

Bu fonksiyonun $x = 0$ noktasında sürekli olduğunu ancak çift üstel türevlenemeyeceğini gösteriniz.

Çözüm: g fonksiyonunun $x = 0$ noktasına sağdan yaklaşırken limiti ile soldan yaklaşırken limiti fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değerine yani $g(0) = 16$ 'ya eşit olduğundan fonksiyon bu noktada sürekli dir. Sağ taraftan çift üstel türev

$$\begin{aligned} {}^{d,1}\lim_{h \rightarrow 0^+} (D_{d,1} \exp\{4^{7x+2}\})_{x=h} &= {}^{d,1}\lim_{h \rightarrow 0^+} (\exp\{(4^{7x+2})'_{d,1}\})_{x=h} \\ &= {}^{d,1}\lim_{h \rightarrow 0^+} (\exp\{4^7\})_{x=h} \\ &= {}^{d,1}\lim_{h \rightarrow 0^+} \exp\{4^7\} \\ &= \exp\{4^7\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer yandan sol taraftan çift üstel türev

$$\begin{aligned} {}^{d,1}\lim_{h \rightarrow 0^-} (D_{d,1} \exp\{2^{9x+4}\})_{x=h} &= {}^{d,1}\lim_{h \rightarrow 0^-} (\exp\{(2^{9x+4})'_{d,1}\})_{x=h} \\ &= {}^{d,1}\lim_{h \rightarrow 0^-} (\exp\{2^9\})_{x=h} \\ &= {}^{d,1}\lim_{h \rightarrow 0^-} \exp\{2^9\} \\ &= \exp\{2^9\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Tek taraflı çift üstel türevler eşit olmadığından $g'^{d,1}(0)$ tanımlı değildir.

4.4. Çift Üstel Türevin Özellikleri

Teorem 4.5: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu verilsin. $f'^{d,k}(x) = e^k$ eşittir ancak ve ancak $f(x) = C \in \mathbb{R}_{d,k}$ şeklinde sabit bir fonksiyondur.

İspat: $f(x) = C \in \mathbb{R}_{d,k}$ ise

$$\begin{aligned} f'^{d,k}(x) &= e^{k \cdot \exp\left\{\frac{f'(x)}{f(x) \cdot (\ln \circ f)(x)}\right\}} \\ &= e^{k \cdot \exp\left\{\frac{C'}{C \cdot \ln(C)}\right\}} \\ &= e^{k \cdot 1} \\ &= e^k \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan $f'^{d,k}(x) = e^k$ ise

$$\begin{aligned}
 f'^{d,k}(x) &= e^k \\
 e^{k \cdot \exp\left\{\frac{f'(x)}{f(x) \cdot (\ln \circ f)(x)}\right\}} &= e^k \\
 \exp\left\{\frac{f'(x)}{f(x) \cdot (\ln \circ f)(x)}\right\} &= 1 \\
 \frac{f'(x)}{f(x) \cdot (\ln \circ f)(x)} &= 0 \\
 f'(x) &= 0 \\
 f(x) &= C
 \end{aligned}$$

eşit olur. ■

Teorem 4.6: $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ çift üstel türevlenebilir ve $a \in \mathbb{R}_{d,k}$ ise $(a \cdot g)$, $(g \cdot h)$ fonksiyonlarının çift üstel türevleri için

$$\begin{aligned}
 \text{i) } (a \cdot g)'^{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{g'(x)}{g(x)[\ln(a) + (\ln \circ g)(x)]}\right\}}, \\
 \text{ii) } (g \cdot h)'^{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{\frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}}{(\ln \circ g)(x) + (\ln \circ h)(x)}\right\}},
 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat:

i)

$$\begin{aligned}
 (a \cdot g)'^{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx} \ln[a \cdot g(x)]}{\ln[a \cdot g(x)]}\right\}} \\
 (a \cdot g)'^{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx} [\ln(a) + \ln(g(x))]}{\ln(a) + \ln(g(x))}\right\}} \\
 (a \cdot g)'^{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{0 + \frac{g'(x)}{g(x)}}{\ln(a) + \ln(g(x))}\right\}} \\
 (a \cdot g)'^{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{g'(x)}{g(x)[\ln(a) + (\ln \circ g)(x)]}\right\}}
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

ii)

$$\begin{aligned}
(g \cdot h)'_{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{(\ln \circ (g \cdot h))'(x)}{(\ln \circ (g \cdot h))(x)}\right\}} \\
(g \cdot h)'_{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{[(\ln \circ g) + (\ln \circ h)]'(x)}{[(\ln \circ g) + (\ln \circ h)](x)}\right\}} \\
(g \cdot h)'_{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{(\ln \circ g)'(x) + (\ln \circ h)'(x)}{(\ln \circ g)(x) + (\ln \circ h)(x)}\right\}} \\
(g \cdot h)'_{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{\frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}}{(\ln \circ g)(x) + (\ln \circ h)(x)}\right\}}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. ■

Teorem 4.7: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,-k}$ çift üstel türevlenebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda, $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$ fonksiyonu k parametrelili çift üstel türevlenebilirdir ve bu fonksiyonun çift üstel türevi

$$\left(\frac{g}{h}\right)'_{d,k}(x) = e^{k \exp\left\{\frac{\frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)}}{(\ln \circ g)(x) - (\ln \circ h)(x)}\right\}},$$

biçimindeki formül ile hesaplanır.

İspat: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,-k}$ çift üstel türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g}{h}\right)'_{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{(\ln \circ (g \div h))'(x)}{(\ln \circ (g \div h))(x)}\right\}} \\
\left(\frac{g}{h}\right)'_{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{[(\ln \circ g) - (\ln \circ h)]'(x)}{[(\ln \circ g) - (\ln \circ h)](x)}\right\}} \\
\left(\frac{g}{h}\right)'_{d,k}(x) &= e^{k \exp\left\{\frac{(\ln \circ g)'(x) - (\ln \circ h)'(x)}{(\ln \circ g)(x) - (\ln \circ h)(x)}\right\}} \\
\left(\frac{g}{h}\right)'_{d,k}(x) &= \exp\left\{k \exp\left[\frac{\frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)}}{(\ln \circ g)(x) - (\ln \circ h)(x)}\right]\right\}
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 4.8: $a \in \mathbb{R}_{d,\tilde{k}}$ bir sabit sayı ve $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$ ise

i) $(a)'_{d,k} = e^k, k = \tilde{k},$

ii) $(a^x)'_{d,k} = e^{k \exp\{\frac{1}{x_0}\}}, k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}(x_0)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat:

i)

$$(a)'_{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx}[\ln a]}{\ln a}\right\}}$$

$$(a)'_{d,k} = e^{k \exp(0)}$$

$$(a)'_{d,k} = e^k$$

ii) $k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}(x_0)$ için $a^{x_0} \in \mathbb{R}_{d,k}$ olur.

$$(a^x)'_{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx}[\ln(a^x)]}{\ln(a^x)}\right\}}_{x=x_0}$$

$$(a^x)'_{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx}[x \ln a]}{x \ln a}\right\}}_{x=x_0}$$

$$(a^x)'_{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{\ln a}{x \ln a}\right\}}_{x=x_0}$$

$$(a^x)'_{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{1}{x_0}\right\}}$$

■

Örnek 4.8: Aşağıda verilen fonksiyonların çift üstel türevlerini hesaplayınız.

a) $f(x) = 8$ sabit fonksiyonunun çift üstel türevini hesaplayınız.

b) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ fonksiyonunun $x_0 = -2$ noktasındaki çift üstel türevini hesaplayınız.

Çözüm:

a) $a = 8$ dir. $\tilde{k} = \text{sgn}(\ln 8) = 1$ bulunur (Yani $a = 8 \in \mathbb{R}_{d,1}$ dir). Buradan çift üstel türev

$$f'_{d,1}(x) = (8)'_{d,1} = e^1 = e$$

olarak elde edilir.

b) $a = \frac{2}{3}$ dür. $\tilde{k} = \text{sgn}\left(\ln \frac{2}{3}\right) = -1$ bulunur (Yani $a = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}_{d,-1}$ dir). k parametresi

$$k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}(x_0) = -1 \cdot \text{sgn}(-2) = (-1) \cdot (-1) = 1$$

olarak hesaplanır. Buradan çift üstel türev

$$\left[\left(\frac{2}{3} \right)^x \right]_{x=-2}^{'d,1} = e^{\exp(-\frac{1}{2})}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.9: $a \in \mathbb{R}_{d,\tilde{k}}$, $0 \neq r \in \mathbb{R}$ ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ klasik anlamda türevlenebilir bir fonksiyon, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,\tilde{k}}$ çift üstel türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca $x_0 \in \mathbb{R}$, $h(x_0) \neq 0$ olan bir nokta olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

- i) $(a^{h(x)})_{x=x_0}^{'d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{h'(x_0)}{h(x_0)}\right\}}, k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}\{h(x_0)\},$
- ii) $(g(x)^r)_{x=x_0}^{'d,k} = (g'_{d,\tilde{k}}(x_0))^{\text{sgn}(r)}, k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}(r),$
- iii) $(g(x)^{h(x)})_{x=x_0}^{'d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{h'(x_0)}{h(x_0)} + \frac{g'(x_0)}{g(x_0) \cdot (\ln \circ g)(x_0)}\right\}}, k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}\{h(x_0)\}$

İspat:

i) $k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}\{h(x_0)\}$ için $g(x_0) = a^{h(x_0)} \in \mathbb{R}_{d,k}$ olur.

$$\begin{aligned} (a^{h(x)})_{x=x_0}^{'d,k} &= e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx}[\ln(a^{h(x)})]}{\ln(a^{h(x)})}\right\}}_{x=x_0} \\ (a^{h(x)})_{x=x_0}^{'d,k} &= \exp\left\{k \exp\left[\frac{[\ln(a) \cdot h(x)]'}{\ln(a) \cdot h(x)}\right]_{x=x_0}\right\} \\ (a^{h(x)})_{x=x_0}^{'d,k} &= \exp\left\{k \exp\left[\frac{\ln(a) \cdot h'(x)}{\ln(a) \cdot h(x)}\right]_{x=x_0}\right\} \\ (a^{h(x)})_{x=x_0}^{'d,k} &= \exp\left\{k \exp\left[\frac{h'(x_0)}{h(x_0)}\right]\right\} \end{aligned}$$

ii) Öncelikle $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,\tilde{k}}$ için $\tilde{k} = \text{sgn}((\ln \circ g)(x))$ olduğu gösterilsin. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,\tilde{k}}$ ise $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) \in \mathbb{R}_{d,\tilde{k}}$ dir. İki durumda inceleyelim. $\tilde{k} = -1$ için

$$\begin{aligned} g(x) &\in (0,1) \\ \ln(g(x)) &< 0 \\ \text{sgn}(\ln(g(x))) &= -1 \\ \text{sgn}((\ln \circ g)(x)) &= -1 \end{aligned}$$

olur ve $\tilde{k} = 1$ için

$$\begin{aligned} g(x) &\in (1, \infty) \\ \ln(g(x)) &> 0 \\ \text{sgn}(\ln(g(x))) &= 1 \\ \text{sgn}((\ln \circ g)(x)) &= 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\tilde{k} = \text{sgn}((\ln \circ g)(x))$$

eşitliği bulunur.

Şimdi $g(x)^r$ fonksiyonunun değer kümesi olan çift üstel reel sayıların parametresi hesaplınsın:

$$\begin{aligned} k &= \text{sgn}[\ln(g(x)^r)] \\ &= \text{sgn}[r \cdot \ln(g(x))] \\ &= \text{sgn}[r \cdot (\ln \circ g)(x)] \\ &= \text{sgn}(r) \cdot \text{sgn}((\ln \circ g)(x)) \\ k &= \tilde{k} \cdot \text{sgn}(r) \end{aligned}$$

Yani $g(x)^r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ tanımlıdır öyle ki $k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}(r)$ dir. Son olarak fonksiyonun çift üstel türevi x_0 noktasında

$$\begin{aligned} (g(x)^r)'_{x=x_0}{}^{d,k} &= e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx} \ln(g(x)^r)}{\ln(g(x)^r)}\right\}_{x=x_0}} \\ &= e^{k \exp\left\{\frac{[r \ln(g(x))]' }{r \ln(g(x))}\right\}_{x=x_0}} \\ &= e^{k \exp\left\{\frac{r \cdot \frac{d}{dx} (\ln \circ g)(x)}{r \cdot (\ln \circ g)(x)}\right\}_{x=x_0}} \\ &= e^{\tilde{k} \cdot \text{sgn}(r) \cdot \exp\left\{\frac{(\ln \circ g)'(x)}{(\ln \circ g)(x)}\right\}_{x=x_0}} \end{aligned}$$

$$= \left(e^{\tilde{k} \cdot \exp\left\{\frac{(\ln \circ g)'(x)}{(\ln \circ g)(x)}\right\}_{x=x_0}} \right)^{\text{sgn}(r)}$$

$$(g(x)^r)'_{x=x_0}^{d,k} = (g'_{d,\tilde{k}}(x_0))^{\text{sgn}(r)}$$

şeklinde bulunur.

iii) Önce $g(x_0)^{h(x_0)}$ değerinin ait olduğu çift üstel reel sayıların parametresi hesaplınsın:

$$k = \text{sgn}\{\ln[g(x_0)^{h(x_0)}]\}$$

$$k = \text{sgn}\{h(x_0) \cdot \ln[g(x_0)]\}$$

$$k = \text{sgn}\{h(x_0)\} \cdot \text{sgn}\{\ln[g(x_0)]\}$$

$$k = \text{sgn}\{h(x_0)\} \cdot \text{sgn}\{(\ln \circ g)(x_0)\}$$

$$k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}\{h(x_0)\}$$

olarak bulunur. Yani $k = \tilde{k} \cdot \text{sgn}\{h(x_0)\}$ için $g(x_0)^{h(x_0)} \in \mathbb{R}_{d,k}$ olur. Ayrıca çift üstel türev

$$(g(x)^{h(x)})'_{x=x_0}^{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{(\ln \circ g^h)'(x)}{(\ln \circ g^h)(x)}\right\}_{x=x_0}}$$

$$(g(x)^{h(x)})'_{x=x_0}^{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx}[\ln(g(x)^{h(x)})]}{\ln(g(x)^{h(x)})}\right\}_{x=x_0}}$$

$$(g(x)^{h(x)})'_{x=x_0}^{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{\frac{d}{dx}[h(x) \cdot \ln(g(x))]}{h(x) \cdot \ln(g(x))}\right\}_{x=x_0}}$$

$$(g(x)^{h(x)})'_{x=x_0}^{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{h'(x) \cdot (\ln \circ g)(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}}{h(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right\}_{x=x_0}}$$

$$(g(x)^{h(x)})'_{x=x_0}^{d,k} = e^{k \exp\left\{\frac{h'(x_0)}{h(x_0)} + \frac{g'(x_0)}{g(x_0) \cdot (\ln \circ g)(x_0)}\right\}}$$

olarak hesaplanır.

■

Örnek 4.9: $g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}_{d,1}$, $g(x) = e^{2 \cos x}$ fonksiyonunun çift üstel türevini bulunuz.

Çözüm: $k = 1$ parametresi için

$$(e^{2 \cos x})'_{d,1} = e^{\exp\left\{\frac{(2 \cos x)'}{2 \cos x}\right\}} = e^{\exp\left\{\frac{-2 \sin x}{2 \cos x}\right\}} = e^{\exp(-\tan x)}$$

olur.

Önerme 4.4: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her noktada türevi olsun. $a \in \mathbb{R}_{d,k}$, $b > 0$ ve $g(x) = a^{[b^{h(x)}]}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $g(x)$ fonksiyonunun çift üstel türevi

$$\left(a^{[b^{h(x)}]}\right)'_{d,k} = e^{k \cdot b^{h'(x)}}$$

fonksiyonudur.

İspat: $a \in \mathbb{R}_{d,k}$ ve $b > 0$ için $g(x) = a^{[b^{h(x)}]} \in \mathbb{R}_{d,k}$ olur.

$$(\ln \circ g)(x) = (\ln a) \cdot b^{h(x)}$$

$$(\ln \circ g)'(x) = (\ln a) \cdot (\ln b) \cdot b^{h(x)} \cdot h'(x)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g'_{d,k}(x) &= \exp \left\{ k \exp \left[\frac{(\ln \circ g)'(x)}{(\ln \circ g)(x)} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ k \exp \left[\frac{(\ln a) \cdot (\ln b) \cdot b^{h(x)} \cdot h'(x)}{(\ln a) \cdot b^{h(x)}} \right] \right\} \\ &= \exp \{ k \exp [(\ln b) \cdot h'(x)] \} \\ &= \exp \{ k \exp [\ln b^{h'(x)}] \} \\ &= \exp \{ k \cdot b^{h'(x)} \} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 4.5: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ bir fonksiyonu verilsin. $g'_{d,k}(x) = e^k$ eşittir ancak ve ancak $g'(x) = 0$ eşittir.

İspat: $g'_{d,k}(x) = e^k$ ise

$$g'^{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right\}} = e^k$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right\} &= 1 \\ \frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)} &= 0 \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan $g'(x) = 0$ ise

$$\begin{aligned} g'^{d,k}(x) &= e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right\}} \\ g'^{d,k}(x) &= e^{k \cdot \exp\left\{\frac{0}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right\}} \\ g'^{d,k}(x) &= e^k \end{aligned}$$

bulunur.

■

Teorem 4.10: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun (u, v) açık aralığında çift üstel türevlenebilir ve bu fonksiyon $[u, v]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu durumda $g(u) = g(v)$ ise $g'^{d,k}(c) = e^k$ eşitliğini sağlayacak en az bir $c \in (u, v)$ sayısı vardır.

İspat: g fonksiyonunun (u, v) açık aralığında çift üstel türevi var ise aynı aralıkta klasik anlamda da türevi vardır. Aynı zamanda g fonksiyonu $[u, v]$ kapalı aralığında sürekli ve $g(u) = g(v)$ olduğundan klasik analizdeki Rolle teoremi gereği $g'(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in (u, v)$ vardır. Böylelikle $g'^{d,k}(c) = e^k$ sağlayan bir $c \in (u, v)$ noktasının varlığı ispatlanır.

■

Teorem 4.10, çift üstel Rolle teoremi olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.11: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun (u, v) açık aralığında çift üstel türevi var ve bu fonksiyon $[u, v]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu durumda

$$g'^{d,k}(c) = \exp \left\{ k \left[\frac{(\ln \circ g)(v)}{(\ln \circ g)(u)} \right]^{\frac{1}{v-u}} \right\}$$

eşitliğini sağlayan en az bir $c \in (u, v)$ sayısı vardır.

İspat: Aşağıdaki iki fonksiyon

$$G(x) = g(a) \oplus_{d,k} \left\{ [g(b) \ominus_{d,k} g(a)] \odot_{d,k} e^{k \exp\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} \right\},$$

$$H(x) = G(x) \ominus_{d,k} g(x)$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $G(a) = g(a)$, $G(b) = g(b)$ ve $H(a) = H(b) = e^k$ eşitlikleri vardır. Çift üstel Rolle teoreminden $H'^{d,k}(c) = e^k$ eşitliğini sağlayan $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

$$H'^{d,k}(c) = e^k$$

$$G'^{d,k}(c) \ominus g'^{d,k}(c) = e^k$$

eşitliğinden $g'^{d,k}(c) = G'^{d,k}(c)$ elde edilir. İspat

$$\begin{aligned} g'^{d,k}(c) &= \left\{ g(a) \oplus_{d,k} \left([g(b) \ominus_{d,k} g(a)] \odot_{d,k} e^{k \exp\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} \right) \right\}'_{x=c} \\ &= \left\{ e^k \oplus_{d,k} \left([g(b) \ominus_{d,k} g(a)] \odot_{d,k} \left[e^{k \exp\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} \right]'_{x=c} \right) \right\}_{x=c} \\ &= \left\{ [g(b) \ominus_{d,k} g(a)] \odot_{d,k} e^{k \exp\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} \right\}'_{x=c} \\ &= [g(b) \ominus_{d,k} g(a)] \odot_{d,k} e^{k \exp\left(\frac{1}{b-a}\right)} \\ &= \exp \left\{ k \cdot \left[k \ln \left(g(b) \ominus_{d,k} g(a) \right) \right]^{1/(b-a)} \right\} \\ &= \exp \left\{ k \cdot \left[k \ln \left(g(b)^{\frac{k}{(\ln \circ g)(a)}} \right) \right]^{1/(b-a)} \right\} \\ &= \exp \left\{ k \left[\frac{(\ln \circ g)(b)}{(\ln \circ g)(a)} \right]^{\frac{1}{b-a}} \right\} \end{aligned}$$

eşitliğiyle biter.

■

Teorem 4.11, çift üstel ortalama değer teoremi olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.12: $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$, (a, b) açık aralığında çift üstel türevi olan ve tanımlı olduğu kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$g'^{d,k}(c) \oslash_{d,k} h'^{d,k}(c) = [g(b) \ominus_{d,k} g(a)] \oslash_{d,k} [h(b) \ominus_{d,k} h(a)]$$

eşitliğini sağlayan en az bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

İspat: $(\ln \circ k \cdot \ln \circ g)$ ve $(\ln \circ k \cdot \ln \circ h)$, verilen kapalı aralıkta süreklidir. Ayrıca ilgili açık aralıkta bu iki fonksiyonun klasik türevi vardır. Cauchy Teoreminden (klasik analizde) bir $c \in (a, b)$ sayısı için

$$\frac{(\ln \circ k \cdot \ln \circ g)'(c)}{(\ln \circ k \cdot \ln \circ h)'(c)} = \frac{(\ln \circ k \cdot \ln \circ g)(b) - (\ln \circ k \cdot \ln \circ g)(a)}{(\ln \circ k \cdot \ln \circ h)(b) - (\ln \circ k \cdot \ln \circ h)(a)}$$

eşitliği sağlanır. Böylelikle bu c sayısı için

$$e^{k \exp \left[\frac{(\ln \circ k \cdot \ln \circ g)'(c)}{(\ln \circ k \cdot \ln \circ h)'(c)} \right]} = e^{k \exp \left[\frac{(\ln \circ k \cdot \ln \circ g)(b) - (\ln \circ k \cdot \ln \circ g)(a)}{(\ln \circ k \cdot \ln \circ h)(b) - (\ln \circ k \cdot \ln \circ h)(a)} \right]}$$

$$g'^{d,k}(c) \oslash_{d,k} h'^{d,k}(c) = [g(b) \ominus_{d,k} g(a)] \oslash_{d,k} [h(b) \ominus_{d,k} h(a)]$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Önerme 4.6: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ çift üstel türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- $g'^{d,k}(x) > e^k$ ise g klasik anlamda artan bir fonksiyondur,
- $g'^{d,k}(x) \geq e^k$ ise g klasik anlamda azalmayan bir fonksiyondur,
- $g'^{d,k}(x) < e^k$ ise g klasik anlamda azalan bir fonksiyondur,
- $g'^{d,k}(x) \leq e^k$ ise g klasik anlamda artmayan bir fonksiyondur.

İspat: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,1}$ ($k = 1$ için) çift üstel türevi olan bir fonksiyon olduğu kabul edilsin. Bu durumda $g'^{d,1}(x) > e^k = e$ ise $g'(x) > 0$ olduğunu gösterelim:

$$g'^{d,1}(x) > e$$

$$e^{\exp \left[\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)} \right]} > e$$

$$\exp \left[\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)} \right] > 1$$

$$\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)} > 0$$

$g(x) > 0$ ve $(\ln \circ g)(x) > 0$ olduğundan

$$g'(x) > 0$$

bulunur. Benzer şekilde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,1}$ fonksiyonu için $g'^{d,1}(x) < e^k = e$ ise $g'(x) < 0$ olduğu gösterilir.

Şimdi $k = -1$ parametresi için durumu inceleyelim. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,-1}$ çift üstel türevi olan bir fonksiyon olduğu kabul edilsin. Bu durumda $g'^{d,-1}(x) > e^k = e^{-1}$ ise $g'(x) > 0$ gösterelim:

$$\begin{aligned} g'^{d,-1}(x) &> e^{-1} \\ e^{-\exp\left[\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right]} &> e^{-1} \\ -\exp\left[\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right] &> -1 \\ \exp\left[\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right] &< 1 \\ \frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)} &< 0 \end{aligned}$$

$g(x) > 0$ ve $(\ln \circ g)(x) < 0$ olduğundan

$$g'(x) > 0$$

bulunur. Benzer şekilde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,-1}$ fonksiyonu için $g'^{d,-1}(x) < e^k = e^{-1}$ ise $g'(x) < 0$ olduğu gösterilir. ■

Önerme 4.7: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ çift üstel türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $c \in \mathbb{R}$ için

- i) Eğer $g'^{d,k}(c) = e^k$ ve $g''^{d,k}(c) > e^k$ ise c noktasında g 'nin bir yerel minimumu vardır,
- ii) Eğer $g'^{d,k}(c) = e^k$ ve $g''^{d,k}(c) < e^k$ ise c noktasında g 'nin bir yerel maksimumu vardır.

İspat: $g(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden çift üstel türevi

$$g'_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g'(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)}\right\}}$$

$$g''_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g''(x)g(x)(\ln \circ g)(x) - g'(x)[g(x)(\ln \circ g)(x)]'}{[g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)]^2}\right\}}$$

$$g''_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g''(x)g(x)(\ln \circ g)(x)}{[g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)]^2} - \frac{g'(x)\left[g'(x)(\ln \circ g)(x) + g(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right]}{[g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)]^2}\right\}}$$

$$g''_{d,k}(x) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g''(x)}{g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)} - \frac{[g'(x)]^2[(\ln \circ g)(x) + 1]}{[g(x) \cdot (\ln \circ g)(x)]^2}\right\}}$$

olarak hesaplanır.

i) $g'_{d,k}(c) = e^k$ ve $g''_{d,k}(c) > e^k$ olduğu kabul edilsin. Burada $g'_{d,k}(c) = e^k$ olduğundan

$$g'(c) = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$g''_{d,k}(c) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g''(c)}{g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)} - \frac{[g'(c)]^2[(\ln \circ g)(c) + 1]}{[g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)]^2}\right\}}$$

$$g''_{d,k}(c) = e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g''(c)}{g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)}\right\}}$$

eşitliği ve $g''_{d,k}(c) > e^k$ eşitsizliği kullanıldığında

$$e^{k \cdot \exp\left\{\frac{g''(c)}{g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)}\right\}} > e^k$$

$$k \cdot \exp\left\{\frac{g''(c)}{g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)}\right\} > k$$

elde edilir. Burada $k = 1$ ($(\ln \circ g)(c) > 0$) için

$$\exp\left\{\frac{g''(c)}{g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)}\right\} > 1$$

$$\frac{g''(c)}{g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)} > 0$$

$$g''(c) > 0$$

ve aynı şekilde $k = -1$ ($(\ln \circ g)(c) < 0$) için

$$\exp \left\{ \frac{g''(c)}{g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)} \right\} < 1$$

$$\frac{g''(c)}{g(c) \cdot (\ln \circ g)(c)} < 0$$

$$g''(c) > 0$$

bulunur. $g'(c) = 0$ ve $g''(c) > 0$ olduğu için c bir yerel minimum noktasıdır.

ii) İlk şıkka benzer şekilde ispat yapılır. ■

4.5. Çift Üstel İntegral

Bu bölümde çift üstel ters türev tanıtılmış, çift üstel belirsiz integral kavramı verilip klasik analizdeki karşılığı ile ilişkisi verilmiştir. Ayrıca çift üstel belirli integral tanımı ve alakalı teoremler verilmiştir.

4.5.1. Çift Üstel Belirsiz İntegral

Tanım 4.7: $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ olsun. Eğer $F'^{d,k}(x) = f(x)$ ise F fonksiyonu, f fonksiyonunun bir çift üstel ters türevi olarak adlandırılır.

Tanım 4.8: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun tüm çift üstel ters türevlerinin kümesi f fonksiyonunun çift üstel belirsiz integrali olarak adlandırılır ve

$${}^{d,k} \int f(x) dx$$

biçiminde gösterilir.

Önerme 4.8: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun çift üstel belirsiz integrali için

$${}^{d,k} \int f(x) dx = e^{k \exp \{ \int (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x) dx \}}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun bir keyfi çift üstel ters türevi F olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} F'^{d,k}(x) &= f(x) \\ e^{k \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ F)'(x)\}} &= f(x) \\ (\ln \circ k \cdot \ln \circ F)'(x) &= (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x) \\ (\ln \circ k \cdot \ln \circ F)(x) &= \int (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x) dx \\ F(x) &= e^{k \exp\{\int (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x) dx\}} \end{aligned}$$

$F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonunun çift üstel ters türevlerinden keyfi olarak seçildiğinden

$$^{d,k} \int f(x) dx = e^{k \exp\{\int (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x) dx\}}$$

eşit olduğu görülür.

Örnek 4.10: $f(x) = e^k, k \in \{-1, 1\}$ fonksiyonunun çift üstel belirsiz integrali nedir?

Çözüm: $e^k \in \mathbb{R}_{d,k}$ olduğundan k parametrelili çift üstel integrali hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} ^{d,k} \int e^k dx &= e^{k \exp \int \ln[k \cdot \ln e^k] dx} \\ &= e^{k \exp \int \ln[k \cdot k] dx} \\ &= e^{k \exp \int \ln[1] dx} \\ &= e^{k \exp \int 0 dx} \\ &= e^{k \exp(c)} \\ &= K \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c \in \mathbb{R}$ ve $K = e^{k \exp(c)} > 0$ bir çift üstel keyfi sabittir.

Önerme 4.9: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun bir çift üstel ters türevi $F(x)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda f fonksiyonunun çift üstel belirsiz integrali için

$$^{d,k} \int f(x) dx = F(x)^C$$

eşitliği geçerlidir. Burada $C > 0$ çift üstel integral için bir keyfi sabittir.

İspat:

$$\begin{aligned}
{}^{d,k} \int f(x) dx &= e^{k \exp \int (\ln \circ k \cdot \ln \circ f')(x) dx} \\
&= e^{k \exp \int (\ln \circ k \cdot \ln \circ F'^{d,k})(x) dx} \\
&= e^{k \exp \int (\ln \circ k \cdot \ln \circ F)'(x) dx} \\
&= e^{k \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ F)(x) + c\}}
\end{aligned}$$

Yukarıda kullanılan c klasik integral için bir keyfi sabittir. $0 < C = e^c$ olarak tanımlayalım bu durumda

$$\begin{aligned}
{}^{d,k} \int f(x) dx &= e^{k \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ F)(x) + c\}} \\
&= e^{k \cdot e^c \cdot \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ F)(x)\}} \\
&= e^{k \cdot C \cdot \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ F)(x)\}} \\
&= [e^{k \cdot \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ F)(x)\}}]^C \\
&= F(x)^C
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dikkat edilirse çift üstel belirsiz integral hesaplanırken keyfi sabit, toplam olarak değil üs olarak yazılmaktadır.

Örnek 4.11: $f(x) = a, a \in \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun çift üstel belirsiz integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\ln a$ ile k aynı işaretlidir. $k \ln a > 0$ ve $k \ln a = |\ln a|$ eşitliği vardır.

$$\begin{aligned}
{}^{d,k} \int f(x) dx &= e^{k \exp \int \ln[k \cdot \ln a] dx} \\
&= e^{k \exp\{x \cdot \ln[k \cdot \ln a] + c\}} \\
&= e^{k \exp\{\ln[k \cdot \ln a]^x + c\}} \\
&= e^{k \exp\{\ln[k \cdot \ln a]^x\} \cdot C} \\
&= [e^{k |\ln a|^x}]^C
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C = e^c > 0$ çift üstel integral için bir keyfi sabittir.

4.5.2. Çift Üstel Belirli İntegral

Tanım 4.9: Verilen bir $[u, v] \subset \mathbb{R}$ aralığında çift üstel sürekli olan bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonunun bu aralık üzerindeki k parametrelili **çift üstel integrali** aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$${}^{d,k} \int_u^v f(x) dx = M_{d,k} f[u, v] \odot_{d,k} e^{k \exp(v-u)}$$

(Grossman ve Katz, 1972).

Önerme 4.10: Verilen bir $[u, v] \subset \mathbb{R}$ aralığında çift üstel sürekli olan bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$${}^{d,k} \int_u^v f(x) dx = e^{k \exp \left\{ \int_u^v (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x) dx \right\}}$$

İspat: $(x_n)_{1 \leq n \leq m}, [u, v]$ aralığının m katlı tekdüze parçalanışı olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^{d,k} \int_u^v f(x) dx &= M_{d,k} f[u, v] \odot_{d,k} e^{k \exp(v-u)} \\ &= {}^{d,k} \lim_{m \rightarrow \infty} M_{d,k} \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\} \odot_{d,k} e^{k \exp(v-u)} \\ &= {}^{d,k} \lim_{m \rightarrow \infty} e^{k \exp \left(\frac{\sum_{n=1}^m (\ln \circ k \cdot \ln)(f(x_n))}{m} \right)} \odot_{d,k} e^{k \exp(v-u)} \\ &= {}^{d,k} \lim_{m \rightarrow \infty} e^{k \exp \left(\frac{v-u}{m} \sum_{n=1}^m (\ln \circ k \cdot \ln)(f(x_n)) \right)} \\ &= {}^{d,k} \lim_{m \rightarrow \infty} e^{k \exp \left(\sum_{n=1}^m \frac{v-u}{m} \cdot (\ln \circ k \cdot \ln)(f(x_n)) \right)} \\ &= e^{k \exp \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \frac{v-u}{m} \cdot (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x_n) \right) \right\}} \\ &= e^{k \exp \left\{ \int_u^v (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(x) dx \right\}} \end{aligned}$$

Teorem 4.13: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{d,k}$ fonksiyonu $[u, v]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [u, v]$ için

$$g(x) = {}^{d,k} \int_u^x f(x) dx$$

eşit olsun. Bu durumda $\forall x \in (u, v)$ için

$$g'^{d,k}(x) = f(x)$$

sağlanır.

Teorem 4.14: $f'^{d,k}$ çift üstel türevi $[u, v]$ aralığında sürekli ise

$${}^{d,k}\int_u^v f'^{d,k}(x)dx = f(v)^{k/(\ln \circ f)(u)}$$

eşitliği vardır.

İspat:

$$\begin{aligned} {}^{d,k}\int_u^v f'^{d,k}(x)dx &= {}^{d,k}\int_u^v e^{k \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)'(x)\}}dx \\ &= e^{k \exp\left\{\int_u^v (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)'(x)dx\right\}} \\ &= e^{k \exp\{(\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(v) - (\ln \circ k \cdot \ln \circ f)(u)\}} \\ &= e^{k \exp\{\ln[k \cdot \ln(f(v))] - \ln[k \cdot \ln(f(u))]\}} \\ &= e^{k \exp\left\{\ln\left[\frac{k \ln(f(v))}{k \ln(f(u))}\right]\right\}} \\ &= e^{k \left[\frac{\ln(f(v))}{\ln(f(u))}\right]} \\ &= e^{k \cdot \ln(f(v))/\ln(f(u))} \\ &= [e^{\ln(f(v))}]^{k/\ln(f(u))} \\ &= f(v)^{k/(\ln \circ f)(u)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tezde ilk olarak Michael Grossman ve Robert Katz tarafından 1967 ve 1970 yılları arasında tanıtılan Newtonyen olmayan analizler ve bu analizlerden biri olan geometrik analizdeki temel tanım ve teoremler verilmiştir. Sonrasında çift üstel fonksiyonlarla çalışmak için klasik analiz ve geometrik analiz yerine bir alternatif olarak $\alpha(t) = \exp\{k \cdot \exp(t)\}$ çift üstel fonksiyonunun üretici olduğu Newtonyen olmayan analiz tanıtılmıştır. Bu analiz çift üstel analiz olarak isimlendirilmiştir. Tezde çift üstel analizde temel işlemler, çift üstel türev, çift üstel integral verilmiştir. Son olarak klasik analizdeki kavramlar ve temel teoremlerin bu analizde karşılıkları incelenmiştir.



KAYNAKÇA

- Bal, A., Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2023). Solutions of multiplicative integral equations via the multiplicative power series method. *Politeknik Dergisi*, 26 (1), 311-320.
- Bashirov, A. E., Kurpinar, E. M. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337(1), 36-48.
- Campbell, D. (1999). Multiplicative calculus and student projects. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 327-332.
- Córdova-Lepe, F. (2006). The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics. *TEMAT-Theaeteto Atheniensi Mathematica*, 2(3).
- Cordova-Lepe, F., Robledo, G. ve Cabrera-Villegas, J. (2015). Population growth modeling with boom and bust patterns: the impulsive differential equation formalism. *Journal of Biological Systems*, 23(supp01), 135-149.
- Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1), 1-17.
- Duyar, B. S. ve Erdogan, F. (2020). On non-Newtonian power series and its applications. *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), 294-303.
- Erdoğan M. (2016). *Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller. Yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (437950).*
- Filip, D. ve Piatecki, C. (2014). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth. hal-00945781f.
- Florack, L. ve van Assen, H. (2012). Multiplicative calculus in biomedical image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42(1), 64-75.
- Goktas, S., Yilmaz, E. ve Yar, A. C. (2022). Multiplicative derivative and its basic properties on time scales. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(4), 2097-2109.
- Göktaş, S., Kemaloğlu, H. ve Yilmaz, E. (2022). Multiplicative conformable fractional Dirac system. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(3), 973-990.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*. Lee Press, Pigeon Cove, MA
- Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 10(4), 525-528.
- Grossman, J., Grossman, M. ve Katz, R. (1983). *Averages: a new approach*. Non-Newtonian Calculus.

- Gulsen, T., Yilmaz, E. ve Goktas, S. (2022). Multiplicative Dirac system. *Kuwait Journal of Science*, 49(3).
- Gülşen, T. (2023). Some approaches for solving multiplicative second-order linear differential equations with variable exponentials and multiplicative Airy's equation. *Turkish Journal of Science and Technology*, 18(2), 301-309.
- Gürbulak M.E. (2023). Geometrik (çarpımsal) sayısal analizde bağ (spline) ara değer bulma yöntemi. Yüksek lisans tezi, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gümüşhane, (812552).
- Gürefe, Y. (2009). Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, (252639).
- Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 310-326.
- Tekin, S. ve Başar, F. (2013). Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field. *Abstract and Applied Analysis* 2013(739319), 1-11. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/739319>.
- Turkmen, C. ve Basar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A*, 1, 17-34.
- Yalcin, N., Celik, E. ve Gokdogan, A. (2016). Multiplicative Laplace transform and its applications. *Optik*, 127(20), 9984-9995.
- Yalçın, N. (2016). Çarpımsal Türev ve Çarpımsal Lineer Diferensiyel Denklemler, Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, (434858).
- Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2021). Solutions of multiplicative ordinary differential equations via the multiplicative differential transform method. *Aims Mathematics*, 6(4), 3393-3409.
- Yalcın, N. ve Dedetürk, M. (2023). Solutions of multiplicative linear differential equations via the multiplicative power series method. *Sigma*, 41(4), 837-847.
- Yilmaz, E., Gulsen, T. ve Goktas, S. (2023). Reconstruction of Green's function for multiplicative Sturm-Liouville problem. *Filomat*, 37(3), 761-773.

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf Güven, ilk ve orta öğrenimini Mersin Kıbrıs İlk ve Ortaokulunda, lise öğrenimini Mersin Mareşal Fevzi Çakmak Çok Programlı Lisesinde tamamladı. Üniversite öğrenimini Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı. 2009 yılından itibaren özel sektörde çeşitli kurumlarda matematik öğretmeni olarak görev yaptı.

