



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

CİRO-ELİPS ÜZERİNE

Nazlıcan KAYA

BURDUR, 2022

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

CİRO-ELİPS ÜZERİNE

Nazlıcan Kaya

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

BURDUR, 2022

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Ciro-Elips Üzerine**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğumu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

01/07/2022

(İmza)

Nazlıcan KAYA

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, karşılaştığım her zorlukta destek olan ve çalışmamı titizlikle takip eden çok değerli danışman hocam Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI' ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve desteğini benden hiç esirgemeyen, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalı Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN'e ve Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz, 2022

Nazlıcan KAYA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL DİZİNİ	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
3. BAZI CİRO-TRİGONOMETRİK ÖZELLİKLER VE BARİSANTRİK KOORDİNATLAR	15
3.1. Bazı Ciro-Trigonometrik Özellikler	15
3.2. Ciro-Barisantrik Koordinatlar	17
4. CİRO-ELİPSLER	20
5. SONUÇ	28
KAYNAKLAR	29

ŞEKİL DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1: Einstein düzleminde Einstein ciro-doğrusu	11
Şekil 2.2. Einstein düzleminde Einstein ciro-doğru parçası.....	11
Şekil 2.3. Düzlemde elips.....	13
Şekil 3.1. Ciro-kosinüs kuralı.....	16
Şekil 4.1. Einstein ciro-vektör uzayında ciro-elips.	20
Şekil 4.2. Ciro-elipsin parametrik gösterimi	24
Şekil 4.3. Ciro-elipsin ciro-asal tepeleri.....	25



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$gyr[a, b]$	: Cirasyon dönüşümü
$(G, \oplus)$	: Ciro-grup
$(F_1 F_2 F_3)$	: Ciro-elips
$d_{\oplus}(a, b)$	: ciro-uzaklık
$(G, \oplus, \otimes)$	: Ciro-vektör uzayı
$(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$	: Einstein ciro-vektör düzlemi
$\ominus$	: Einstein farkı
$\otimes$	: Einstein skalar çarpımı
$\oplus$	: Einstein toplamı
γ_u	: Gama çarpanı
$Aut(S, +)$	: Grupoidin tüm otomorfizmlerinin kümesi
$\cdot$	: Nokta çarpım
$\ \quad \ $	: Norm
$\mathbb{R}_s^n$	: Öklid uzayının s-yarıçaplı yuvarı
:	: Öyle ki
$:=$	:Sol taraftaki öge sağ taraftaki ögeye eşit olarak tanımlanır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Ciro-Elips Üzerine

Nazlıcan KAYA

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

Temmuz, 2022

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışılan konu, tezin amacı ile ilgili bilgi ve literatür araştırmalarına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, ciro-gruplar ve ciro-vektör uzayları tanıtılmış ve ciro-teorideki bazı kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, ciro-elipslerin çalışılmasında önemli bir yere sahip ciro-barisantrik koordinatların tanımları verilmiş, bazı ciro-trigonometrik özellikler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Einstein ciro-vektör uzayındaki ciro-elips tanımı ve bazı özellikleri verilmiş, Öklidyen düzlemdeki elipse ait bazı sonuçlar ciro-elips için elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise elde edilen veriler ışığında literatür kazanımları ve sonuçlarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ciro-vektör uzayı, Einstein ciro-vektör uzayı, gama-çarpanı, ciro-elips.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

On Gyroellipses

Nazlıcan Kaya

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Dr. Zafer ŞANLI

July, 2022

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, information and literature researches about the subject studied and the aim of the thesis are given.

In the second chapter, gyrogroups and gyrovector spaces are introduced and some basic concepts and propositions used in gyroalgebra are given

In the third chapter, the definitions of barycentric coordinates which have an important place in the study of gyroellipses are given and some gyrotrigonometric identities are examined..

In the fourth chapter, some results of ellipses in Euclidean plane were obtained by using definition and some properties of gyroellipses in Einstein gyrovector spaces.

In the fifth and last chapter, the contributions to the literature and the results are given in the light of the obtainments.

Keywords: Gyrovector spaces, Einstein gyrovector spaces, gama factor, gyroellipses.

1. GİRİŞ

Ciro-teorinin temelleri 1988 de A.A. Ungar tarafından, Einstein toplamının grup işlemine benzer bazı özelliklere sahip olduğunu keşfetmesi ve ciro-değişmeli ciro-grup yapısını tanımlamasıyla atılmıştır. Ciro-değişmeli ciro-gruplar, Öklid geometrisinin cebirsel tabanını oluşturan vektör uzaylarına benzer şekilde hiperbolik geometriye cebirsel altyapı sağlayan ciro-vektör uzaylarının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Ciro-gruplar ve ciro-vektör uzaylarının, grup ve vektör uzaylarına benzer yapılar olması sebebiyle temel matematiksel araçları elde edilmiştir (Ungar, 2015).

Öklid geometrideki paralellik aksiyomu bir l doğrusu üzerinde bulunmayan bir p noktası ve p noktasından geçen ve l doğrusunu kesmeyen, yani alışlagelmiş anlamda l doğrusuna paralel olan bir ve yalnız bir doğrunun olduğunu ifade eder. Bu aksiyom dışındaki bir çok özellik hiperbolik geometride geçerliliğini sürdürmektedir (Pressley, 2000).

Hiperbolik geometrideki bir çok formülüzasyonu Eugenio Beltrami, Felix Klein, ve Henri Poincare ortaya koymuş olsa da bu geometri, birbirinden bağımsız ve neredeyse eş-zamanlı olarak Macar matematikçi Janos Bolyai ve Rus Matematikçi Nicolai Lobachevski tarafından keşfedilmiştir (Pressley, 2000). Sonraları, bu formülüzasyonların ciro-vektör uzaylarının yapısıyla uyumlu olduğu keşfedilmiş ve başlangıçta her ne kadar zayıf özelliklere sahip olduğu düşünülse de aslında çok daha “zengin” özelliklere sahip bir matematiksel yapı olduğu gözlenmiştir. Bu zengin özelliklere sahip ciro-vektör uzayları ile ilgili, başta Ungar olmak üzere bir çok araştırmacı yeni matematiksel araçlar elde etmişlerdir (Ungar, 2014).

Bu çalışmada, Einstein ciro-vektör uzaylarındaki ciro-elipsler üzerine bazı özellikler incelenmiştir. Bu bağlamda, ilk olarak ciro-vektör uzaylarının tanımı verilmiş ve üzerinde tanımlı gerekli bazı tanım ve teoremler verilmiştir. 3. Kısımda hiperbolik nesnelerin tanımlanmasında önemli bir yere sahip, ciro-barisantrik koordinatlar tanıtılmış ve bu koordinatların hesaplanmasında kullanılan ciro-trigonometrik araçlar verilmiştir. Son olarak, Öklidyen elipslerin motivasyonu ile Einstein ciro-vektör uzaylarında tanımlanan ciro-elipsler ve özellikleri tanıtılmıştır. Dahası, elipsler için tanımlı elipsin parametresi kavramı ciro-elipslere uyarlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

İlk olarak bu kısımda, bu tez çalışması boyunca gerekli olan ciro-değişmeli grup, ciro-vektör uzayı, gama çarpanı ve özellikleri gibi temel ciro-cebir kavramlarını vereceğiz. Burada verilecek olan tanım ve bazı teoremlerinin ispatına A.A. Ungar'ın "Analytic Hyperbolic Geometry in N Dimensions" isimli kitabından incelenebilir.

Tanım 2.1. (İkili işlem) S boş olmayan bir küme olmak üzere S kümesi üzerinde tanımlı bir

$$+: S \times S \rightarrow S \quad (2.1)$$

fonksiyonuna S kümesi üzerinde bir ikili işlem denir. Bu ikili işlem ile birlikte S kümesi grupoid olur ve $(S, +)$ ile gösterilir (Ungar, 2009).

Tanım 2.2.(Grupoid otomorfizmi) $(S, +)$ grupoidi üzerinde tanımlı birebir ve örten $\phi: S \rightarrow S$ dönüşümü eğer grupoid işlemini koruyorsa, yani $\forall a, b \in S$ için

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \quad (2.2)$$

oluyorsa ϕ dönüşümüne $(S, +)$ grupoidinin bir otomorfizmi denir. Bir $(S, +)$ grupoidinin tüm otomorfizmlerinin kümesi $Aut(S, +)$ ile gösterilir (Ungar, 2009).

Tanım 2.3. (Birimli grupoid) $(S, +)$ bir grupoid olsun. $\forall s \in S$ için

$$0 + s = s + 0 = s \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir $0 \in S$ elemanına S grupoidinin birimi; $(S, +)$ grupoidine de birimli grupoid denir (Ungar, 2009).

Tanım 2.4. (Döngü) Birim elemanlı bir $(S, +)$ grupoidinde

$$a + x = b \text{ ve } y + a = b \quad (2.4)$$

denklemlerinin x ve y bilinmeyenleri için bir tek çözümü varsa $(S, +)$ grupoidine bir döngü adı verilir (Ungar, 2009).

Tanım 2.5. (Grup) Bir $(G, +)$ grupoidinin $+$ ikili işlemi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa grup adını alır:

$\forall a \in G$ için

$$0 + a = a \dots (G_1) \quad (2.5)$$

olacak şekilde tek bir $0 \in G$ elemanı vardır. Bu elemana sol birim adı verilir.

$\forall a \in G$ için öyle bir $-a \in G$ vardır ki

$$-a + a = 0 \dots (G_2) \quad (2.6)$$

dır. Burada $-a \in G$ elemanına a nın sol tersi denir.

Ayrıca ikili işlem birleşme özelliğini sağlar, yani $\forall a, b, c \in G$ için

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

dır (Ungar, 2009).

Tanım 2.6. (Değişmeli grup) $(G, +)$ bir grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için

$$a + b = b + a \quad (2.7)$$

oluyorsa $(G, +)$ grubuna değişmeli grup adı verilir (Ungar, 2009).

Tanım 2.7. (Ciro-grup) Bir $(G, \oplus)$ grupoidinin $\oplus$ ikili işlemi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa ciro-grup adını alır:

$\forall a \in G$ için

$$0 \oplus a = a \dots (G_1) \quad (2.8)$$

olacak şekilde tek bir $0 \in G$ elemanı vardır. Bu elemana sol birim adı verilir.

$\forall a \in G$ için öyle bir $\ominus a \in G$ vardır ki

$$\ominus a \oplus a = 0 \dots (G_2) \quad (2.9)$$

dır. Burada $\ominus a \in G$ elemanına a nın sol tersi denir.

$\forall a, b, c \in G$ için öyle bir tek $gyr[a, b]c \in G$ elemanı vardır ki

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr[a, b]c \quad (2.10)$$

dır. Bu özelliğe sol ciro-birleşme özelliği denir.

$gyr[a, b]: G \rightarrow G, c \rightarrow gyr[a, b]c$ dönüşümü $(G, \oplus)$ grupoidinin bir otomorfizmidir.

Yani,

$$gyr[a, b] \in Aut(G, \oplus) \dots (G_4) \quad (2.11)$$

dır. G nin $gyr[a, b]$ otomorfizmine, a ve b elemanları tarafından üretilen cirasyonu veya cirootomorfizmi denir.

$$gyr: G \times G \rightarrow Aut(G, \oplus) \quad (2.12)$$

operatörüne G nin ciroatörü adı verilir. $a, b \in G$ tarafından üretilen $gyr[a, b]$ cirasyonu sol döngü özelliğini sağlar (Ungar, 2009):

$$gyr[a, b] = gyr[a \oplus b, b] \dots (G_5) \quad (2.13)$$

Tanım 2.8. (Ciro-değişmeli ciro-grup) $(G, \oplus)$ bir ciro-grup olsun. $\forall a, b \in G$ için

$$a \oplus b = gyr[a, b](b \oplus a) \dots (G_6) \quad (2.14)$$

oluyorsa bu ciro-gruba ciro-değişmeli ciro-grup adı verilir. (G_6) özelliğine de ciro-değişme özelliği denir (Ungar, 2009).

Notasyon 2.9. Grup teoride olduğu gibi ciro-grup teoride de

$$a \ominus b = a \oplus (\ominus b) \quad (2.15)$$

gösterimi kullanılır (Ungar, 2009).

(Değişmeli) grupların, tüm ciro-otomorfizmleri aşıkâr olan dejerene (ciro-değişmeli) ciro-gruplar olduğu açıktır. Tanım 2.7. ve Tanım 2.8. deki $gyr[a, b]$ cirasyonu yerine özel olarak $I \in Aut(G, \oplus)$ birim otomorfizmi alınırsa ciro-gruplardan klasik grup yapısı elde edilir. Bu yüzden ciro-grupların bu cebirsel yapısı grupların cebirsel yapısından daha zengin bir yapıdır (Ungar, 2009).

Tanım 2.10. (Einstein hız toplamı) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ doğal toplama ve skalarla çarpımla birlikte Öklidyen n – uzay ve $s > 0$ her hangi belirli bir sabit olmak üzere

$$\mathbb{R}_s^n = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| < s\} \quad (2.16)$$

olsun. $\mathbb{R}_s^n$ yuvarı üzerinde $\forall u, v \in \mathbb{R}_s^n$ için

$$u \oplus v = \frac{1}{1 + \frac{u \cdot v}{s^2}} \left\{ u + \frac{1}{\gamma_u} v + \frac{1}{s^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} (u \cdot v) v \right\} \quad (2.17)$$

olarak tanımlı $\oplus$ ikili işlemine Einstein hız toplamı denir. Buradaki

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|u\|^2}{s^2}}} \geq 1 \quad (2.18)$$

reel sayısına da gama çarpanı denir. $\oplus$ ikili işlemi ile birlikte $\mathbb{R}_s^n$ s-yuvarı bir grupoid olup Einstein grupodi olarak adlandırılır (Ungar, 2015).

Lemma 2.11. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının $\mathbb{R}_s^n$ s-yuvarı, üzerinde tanımlı $\oplus$ Einstein toplamı ile birlikte bir ciro-değişmeli cirogruptur (Ungar, 2015).

Analitik hiperbolik geometride $s > 0$ parametresi, özel görecelik teorisinde ışığın boşluktaki hızı c ile aynı anlamdadır. Öklidyen limit halinde $n \rightarrow \infty$ iken $\mathbb{R}_s^n$ yuvarı Öklidyen n-uzayına dönüşürken, $\mathbb{R}_s^n$ yuvarı üzerinde tanımlı $\oplus$ Einstein hız toplamı da $\mathbb{R}^n$ üzerindeki vektör toplama işlemine dönüşür (Ungar, 2015).

Tanım 2.12. (Ciro-vektör uzayı) $(G, \oplus)$ bir ciro-değişmeli ciro-grup olsun. Eğer $(G, \oplus)$ aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise bir ciro-vektör uzayı adını alır ve $(G, \oplus, \otimes)$ ile gösterilir.

- 1) G kümesi, V reel iç çarpım uzayının bir alt kümesi olmak üzere $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ için
 $(V_1) \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \mathbf{a} \cdot \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (iç çarpımın ciro-invaryantlığı)
- 2) G kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\otimes$ skalar çarpım vardır: $\forall \mathbf{a} \in G$ ve $\forall r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ için
 $(V_2) 1 \otimes \mathbf{a} = \mathbf{a}$ (Birim skalar çarpım)
 $(V_3) (r_1 + r_2) \otimes \mathbf{a} = (r_1 \otimes \mathbf{a}) \oplus (r_2 \otimes \mathbf{a})$ (Skaların dağılma kuralı)
 $(V_4) (r_1 r_2) \otimes \mathbf{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \mathbf{a})$ (skaların birleşme kuralı)
 $(V_5) \frac{|r| \otimes \mathbf{a}}{\|r \otimes \mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $r \neq 0$ (Oran özelliği)
 $(V_6) \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] (r \otimes \mathbf{a}) = r \otimes \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] (\mathbf{a})$ (ciro-otomorfizm özelliği)
 $(V_7) \text{gyr}[r_1 \otimes \mathbf{v}, r_2 \otimes \mathbf{v}] = I$ (Aşık ciro-otomorfizm)

- 3) 1- boyutlu vektörlerin kümesi

$$(V_8) \|G\| := \{\mp \|\mathbf{a}\| : \mathbf{a} \in G\} \quad (2.19)$$

kümesi üzerinde $\oplus$ vektör toplamı ve $\otimes$ vektör çarpımı ile birlikte 1-boyutlu vektör uzayıdır. Öyle ki $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ ve $\forall r \in \mathbb{R}$ için

$$(V_9) \quad \|r \otimes a\| = |r| \otimes \|a\|$$

$$(V_{10}) \quad \|a \oplus b\| \leq \|a\| \oplus \|b\|$$

dır (Ungar, 2015).

Yukarıdaki sonuçta verilen her iki toplam hem değişmeli hem de birleşmelidir. Buna göre kısıtlanmış Einstein toplamı Einstein'ın ifade ettiği gibi bir işlemidir. Buna karşın Einstein, paralel olması gerekmeyen hız vektörlerinin toplamı için herhangi bir yorumda bulunmamıştır. Gerçekte genel Einstein toplamı, bir grup işlem değil bir ciro-değişmeli ciro-grup işlemidir ve bu matematiksel yapı 80 yıl sonra 1988 de keşfedilmiştir.

Einstein toplamı ve Lorentz gamma çarpanı, gamma özdeşliği ile bağıntılıdır.

Lemma 2.13.(Gamma Özdeşliği) $\forall u, v \in \mathbb{R}_s^n$ için

$$\gamma_{u \oplus v} = \gamma_u \gamma_v \left(1 + \frac{u \cdot v}{s^2} \right) \quad (2.20)$$

ve

$$\gamma_{\ominus u \oplus v} = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{u \cdot v}{s^2} \right) \quad (2.21)$$

dır. Ayrıca

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{\|v\|}{s^2} = \frac{\gamma_v^2 - 1}{\gamma_v^2} \quad (2.22)$$

ve

$$\gamma_{\ominus u \oplus v} = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{u \cdot v}{s^2} \right) \quad (2.23)$$

dır.

Gamma özdeşliği, hiperbolik geometri ve özel rölativite arasındaki köprü olup, Roble un tanımladığı terminoloji ile hız Sommerfold ve Varicah tarafından çalışılmıştır. Bu terminoloji $\frac{v}{s}$ parametresinin ϕ_v ile değiştirilip

$$\phi_v = \tanh^{-1} \frac{\|v\|}{s} \quad (2.24)$$

olarak tanımlı v nin süratidir. Bu taktirde $v \in \mathbb{R}_s^n$ in γ_v gamma çarpanı v nin ϕ_v sürati ile aşağıdaki gibi bağıntılıdır (Ungar, 2015):

$$\cosh \phi_v = \gamma_v \quad (2.25)$$

$$\sinh \phi_v = \gamma_v \frac{\|v\|}{s} \quad (2.26)$$

Gamma özdeşliği, Hiperbolik geometride Öklid geometrisindeki kosinüs kuralına benzer bir rol oynar. Tarihsel açıdan gamma özdeşliği Lobachevsky ve Bolyai'nin hiperbolik geometrisi ile özel görecelilik arasındaki ilk bağıntı durumundadır (Ungar, 2015).

Einstein toplamı, değişmeli olmamasına karşın norm altında değişmelidir. Yani, genel olarak

$$u \oplus v \neq v \oplus u \quad (2.27)$$

iken

$$\|u \oplus v\| = \|v \oplus u\| \quad (2.28)$$

olur (Ungar, 2015).

Gamma özdeşliğinin bir uygulaması olarak, Einstein ciro-üçgen eşitsizliği ispatlanabilir:

Teorem 2.14. (Ciro-üçgen eşitsizliği) $\forall u, v \in (\mathbb{R}_s^n, \oplus)$ için

$$\|u \oplus v\| \leq \|u\| \oplus \|v\| \quad (2.29)$$

Dır (Ungar, 2015).

İspat: Gamma özdeşliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği göz önüne alınsın.

$\forall u, v \in (\mathbb{R}_s^n, \oplus)$ için

$$\begin{aligned} \gamma_{\|u\| \oplus \|v\|} &= \gamma_u \gamma_v \left(1 + \frac{\|u\| \|v\|}{s^2} \right) \\ &\geq \gamma_u \gamma_v \left(1 + \frac{u \cdot v}{s^2} \right) \\ &= \gamma_{u \oplus v} \\ &= \gamma_{\|u \oplus v\|} \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan $\gamma_x = \gamma_{\|x\|}$, $0 \leq \|x\| < s$ olmak üzere $\|x\|$ azalan bir fonksiyonu olduğundan $\forall u, v \in \mathbb{R}_s^n$ için

$$\|u \oplus v\| \leq \|u\| \oplus \|v\| \quad (2.30)$$

elde edilir (Ungar, 2015).

Teorem 2.15. $(\mathbb{R}_s^n, \oplus)$ Einstein ciro-grubu üzerinde tanımlı Einstein skalar çarpımı $\otimes$ ile bir Einstein ciro-vektör uzayıdır. Bu uzay $\mathbb{R}_s^n = (\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$, $n = 1, 2, \dots, n$ ile gösterilir. Özel olarak $n = 2$ için bu uzaya Einstein ciro-vektör uzayı veya Einstein düzlemi adı verilir (Ungar, 2015).

İspat: $(\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ ciro-vektör uzayının Tanım 2.11.deki aksiyomları sağladığını göstereceğiz.

(V_1) İç çarpım ciro-invaryantlığı.

(V_2) Birim skalar çarpım: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_s^n$ olsun. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ise tanım gereği $1 \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$ olup (V_2) aksiyomunu sağlar. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ için

$$1 \otimes \mathbf{a} = \text{stanh} \left(\tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\|\mathbf{a}\|}{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$$

olduğundan $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}_s^n$ için aksiyom sağlanır.

(V_3) Skalar dağılım kuralı : $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ise

$$(r_1 + r_2) \otimes \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

ve

$$r_1 \otimes \mathbf{a} \oplus r_2 \otimes \mathbf{a} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Olduğundan (V_3) aksiyomu sağlanır. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ için Einstein skalar çarpımının tanımı, hiperbolik tanjant fonksiyonunun toplamı ve kısıtlanmış Einstein toplamı gereğince

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \otimes \mathbf{a} &= \text{stanh} \left([r_1 + r_2] \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \text{stanh} \left(r_1 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} + r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= s \frac{\tanh \left(r_1 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) + \tanh \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right)}{1 + \tanh \left(r_1 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \tanh \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right)} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \frac{r_1 \otimes \mathbf{a} + r_2 \otimes \mathbf{a}}{1 + \frac{1}{s^2} \|r_1 \otimes \mathbf{a}\| \|r_2 \otimes \mathbf{a}\|} \\ &= r_1 \otimes \mathbf{a} \oplus r_2 \otimes \mathbf{a} \end{aligned}$$

olup (V_3) ciro-vektör uzayı aksiyomu sağlanır.

(V_4) Skalar birleşme kuralı: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ için (V_4) aksiyomu açıktır. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ olsun.

$$\mathbf{b} = r_1 \otimes \mathbf{a} = \text{stanh} \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

dersek ,

$$\frac{\|\mathbf{b}\|}{s} = \tanh \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right)$$

ve dolayısıyla

$$\frac{b}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{a}{\|\mathbf{a}\|}$$

olacaktır. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
r_1 \otimes (r_2 \otimes \mathbf{a}) &= r_1 \otimes \mathbf{b} \\
&= \operatorname{stanh} \left(r_1 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{b}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \\
&= \operatorname{stanh} \left(r_1 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \right) \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\
&= \operatorname{stanh} \left(r_1 r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\
&= (r_1 \otimes r_2) \otimes \mathbf{a}
\end{aligned}$$

(V₅)Oran özelliği : Einstein skalar çarpımının tanımı gereğince, $r \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ için

$$\begin{aligned}
|r| \otimes \mathbf{a} &= \operatorname{stanh} \left(|r| \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\
|r| \otimes \|\mathbf{a}\| &= \left| \operatorname{stanh} \left(|r| \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \right| \\
\|r \otimes \mathbf{a}\| &= \left| \operatorname{stanh} \left(r \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \right| \\
&= \left| \operatorname{stanh} \left(|r| \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \right|
\end{aligned}$$

olduğundan, birinci ve üçüncü eşitlikten istenen elde edilir.

(V₆)Ciro-otomorfizm özelliği: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ iken aksiyomu sağladığı açıktır. $\mathbb{R}_s^n \subset \mathbb{R}^n$ olduğundan

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümü iç çarpımı, dolayısıyla da normu koruyan lineer tersinir bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_s^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ olsun. Bu taktirde, Einstein skalar çarpımının tanımı gereğince, $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_s^n$ için

$$\begin{aligned}
\phi(r \otimes \mathbf{a}) &= \phi \left[s \frac{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r - \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r}{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r + \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right] \\
&= s \frac{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r - \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r}{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r + \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r} \cdot \frac{\phi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} \\
&= s \frac{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r - \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r}{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r + \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r} \cdot \frac{\phi(\mathbf{v})}{\|\phi(\mathbf{v})\|} \\
&= r \otimes \phi(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

olur. Burada ϕ , $\mathbb{R}^n$ in kendi üzerine dönüşümü olduğundan yukarıdaki anlamda $\mathbb{R}_s^n$ ye kısıtlanabilir.

$\mathbb{R}_s^n$ nin her cirsyon dönüşümü $\mathbb{R}^n$ in bir lineer dönüşümüne genişletilebildiğinden, $\mathbb{R}^n$ in ϕ dönüşümü bir cirsyon iken $\forall a \in \mathbb{R}^n$ ve belli $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için $\phi(a) = \text{gyr}[u, v]a$ dir. Böylece (V_6) aksiyomu sağlanır.

(V_7) Birim ciro-otomorfizm:

$$(V_6)\text{gyr}[u, v](r \otimes a) = r \otimes \text{gyr}[u, v](a) \text{ (ciro-otomorfizm özelliği)}$$

$$(V_7)\text{gyr}[r_1 \otimes v, r_2 \otimes v] = I \quad (\text{Aşık ciro-otomorfizm})$$

3) 1- boyutlu vektörlerin kümesi

$$(V_8)\|G\| := \{\mp \|a\| : a \in G\}$$

kümesi üzerinde $\oplus$ vektör toplamı ve $\otimes$ skalar çarpımı ile birlikte 1-boyutlu vektör uzayıdır. Öyle ki $\forall a, b \in G$ ve $\forall r \in \mathbb{R}$ için

$$(V_9)\|r \otimes a\| = |r| \otimes \|a\|$$

$$(V_{10})\|a \oplus b\| \leq \|a\| \oplus \|b\|$$

özellikleri sağlanır (Ungar, 2015).

Tanım 2.16.(Ciro-metrik) $(G, \oplus, \otimes) = G$ bir ciro-vektör uzayı olsun. Bu uzayın ciro-metriği

$$d_{\oplus} : G \times G \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\} \quad (2.31)$$

ciro-uzaklık fonksiyonu yardımıyla $\forall a, b \in G$ için

$$d_{\oplus}(a, b) = \|\ominus a \oplus b\| = \|b \ominus a\| \quad (2.32)$$

olarak tanımlanır. Burada $d_{\oplus}(a, b)$ reel sayısı a ' dan b ' ye kadar olan ciro-uzaklıktır ((Ungar, 2009).

Lemma 2.17. $d_{\oplus}$ ciro-uzaklık fonksiyonunun temel özellikleri şu şekildedir: $\forall a, b \in G$ için

- 1) $d_{\oplus}(a, b) \geq 0$
- 2) $d_{\oplus}(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- 3) $d_{\oplus}(a, b) = d_{\oplus}(b, a)$
- 4) $d_{\oplus}(a, c) \leq d_{\oplus}(a, b) \oplus d_{\oplus}(b, c)$

(Ungar, 2009).

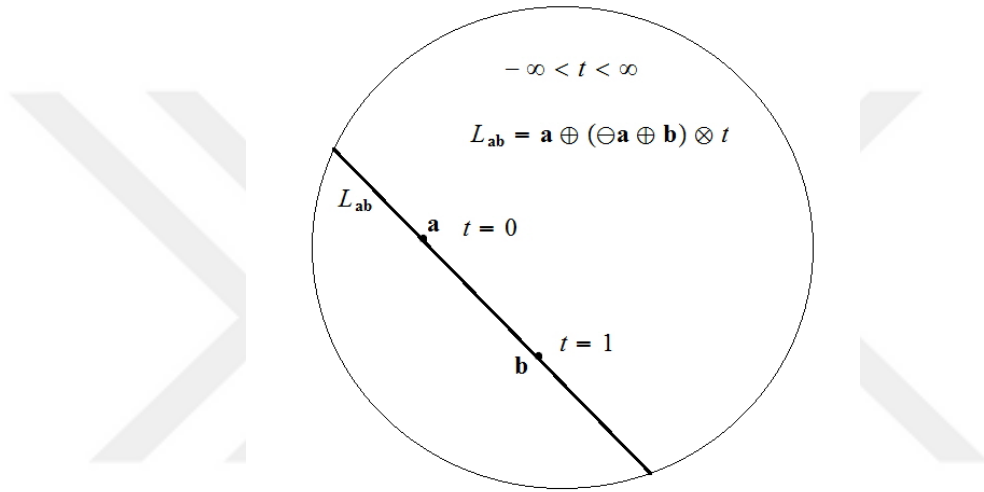
Tanım 2.18.(Einstein Ciro-doğruları) Bir $\mathbb{R}_s^n = (\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ ciro-vektör uzayında $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ iki farklı ciro-nokta olsun. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ ciro-noktalarından geçen $\mathbb{R}_s^n$ ciro-vektör uzayındaki Einstein ciro-doğrusu, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$L_{ab} = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t \quad (2.33)$$

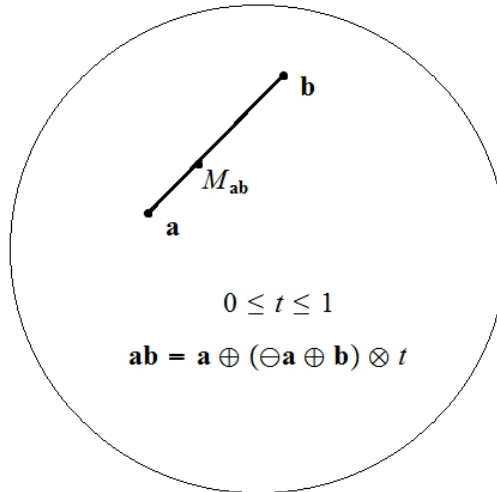
olarak tanımlanır. Bu eşitlikte, $0 \leq t \leq 1$ için elde edilen ciro-noktaların belirlediği kümeye uç noktaları $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{b}$ ciro-noktaları olan ciro-doğru parçası elde edilir. $\mathbf{ab}$ ciro-doğru parçasının ciro-doğru uzunluğu $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{b}$ ciro-noktaları arasındaki ciro-uzaklıktır:

$$|\mathbf{ab}| = d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \quad (2.34)$$

(Ungar, 2015).



Şekil 2.1. Einstein düzleminde Einstein ciro-doğrusu



Şekil 2.2. Einstein düzleminde Einstein ciro-doğru parçası

$\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ ciro-noktalarından geçen Einstein ciro-doğrusu $\mathbb{R}$ reel eksenin $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayına bir dönüşümüdür. $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayında bir ciro-doğrular hiperbolik geometrinin Beltrami-Klein yuvar düzlemin geodezikleri olarak karşımıza çıkar. Bu geodezikler Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 de görüldüğü üzere, Öklidyen doğruların doğru parçaları durumundadır (Ungar, 2009).

Teorem 2.19.(Einstein Ciro-orta Noktası) Bir $\mathbb{R}_s^n = (\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ ciro-vektör uzayında $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ iki farklı ciro-nokta olsun. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ ciro-noktalarının M_{ab} ciro-orta noktası

$$M_{ab} = \frac{\gamma_a \mathbf{a} + \gamma_b \mathbf{a}}{\gamma_a + \gamma_b} \quad (2.35)$$

denklemleri ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının Öklid geometrisindeki noktalar ve vektörler arasında ilişki ve $\mathbb{R}_s^n$ in, $n = 2, 3, \dots$, $\mathbb{R}_s^n$ yuvarının hiperbolik geometrisinin ciro-noktaları ve ciro-vektörleri arasındaki ilişki denklik bağıntısına ve nokta çiftlerinin denklik sınıfları kavramlarından elde edilir.

Tanım 2.20.(Denklik Bağıntısı ve Denklik Sınıfları) S boştan farklı bir küme olmak üzere, $S \times S$ kartezyan çarpım kümesinin bir R altkümesine S kümesi üzerinde bir bağıntı denir ve $(a, b) \in R$ ise $a \sim b$ olarak yazılır. Eğer bir S kümesi üzerindeki “ $\sim$ ” bağıntısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa S kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı adını alır:

- (1) $\forall a \in S$ için $a \sim a$
- (2) $\forall a, b \in S$ için $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
- (3) $\forall a, b, c \in S$ için $a \sim b$ ve $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Bir S kümesi üzerinde bir “ $\sim$ ” denklik bağıntısı denklik sınıflarını ortaya çıkartır. Bir $a \in S$ nin denklik sınıfı $\bar{a} := \{x \in S : a \sim x\}$ kümesidir (Ungar, 2009).

$\mathbb{R}_s^n \subset \mathbb{R}^n$ yuvarının noktalarını özel olarak ciro-noktalar olarak adlandıracakız. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının noktalarından yola çıkılarak $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının vektörlerinin inşasında olduğu gibi $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayının ciro vektörleri inşa edilebilir. Öklidyen halde olduğu gibi, başlangıç noktası P bitiş noktası Q olan ciro-vektör $\overrightarrow{PQ} = \ominus P \oplus Q$ olarak tanımlanır (Ungar, 2009).

Tanım 2.21.(Ciro-vektörler) $(G, \oplus)$ bir ciro-değişmeli ciro-grup olsun. G kümesi üzerinde “ $\sim$ ” denklik bağıntısı

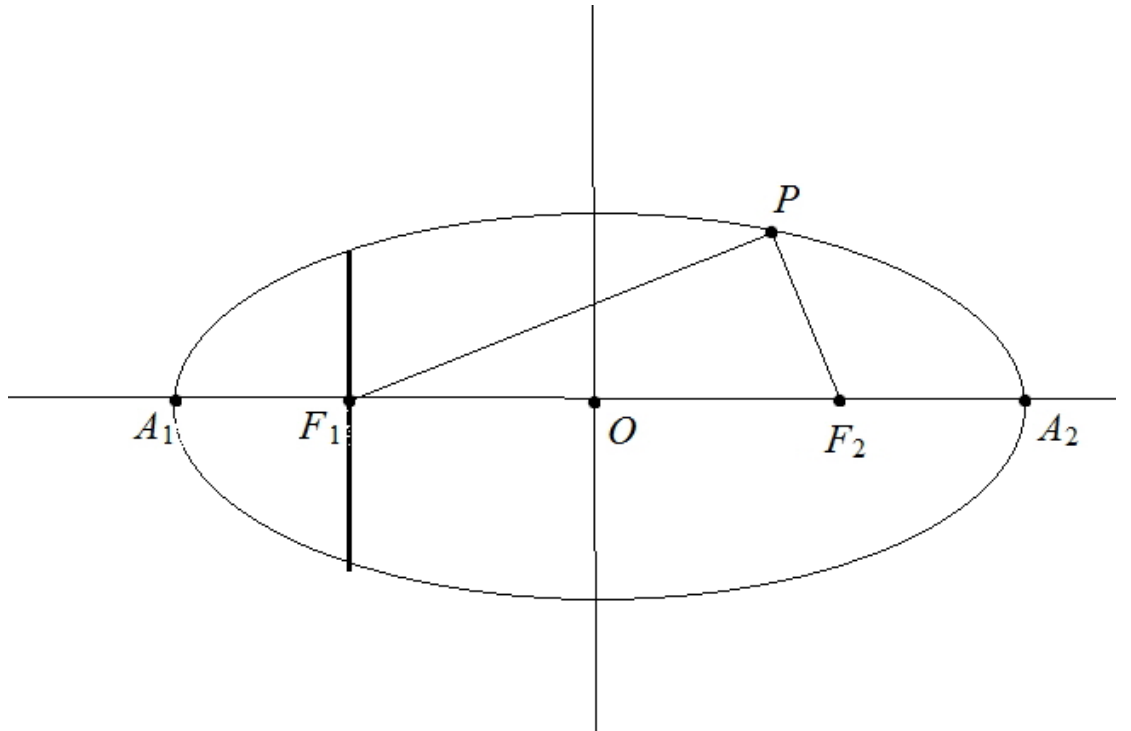
$$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \ominus P \oplus Q \ominus R \oplus S$$

olarak tanımlanırsa, bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına ciro-vektör denir. $(G, \oplus)$ ciro-değişmeli ciro-grubunun bir P ciro-noktası, başlangıç noktası(oriijin) olarak seçilen bir O noktası için $\ominus O \oplus P$ ciro-vektörü ile özdeşleştirilebilir (Ungar, 2015).

Bu bölümde son olarak, bu çalışmamızın motivasyonu olan Öklidyen elips ve bazı özelliklerini vereceğiz:

Tanım 2.22. (Elips) Düzlemde F_1 ve F_2 noktaları ile pozitif bir k reel sayısı verilmiş olsun. F_1 ve F_2 noktalarına uzaklıkları toplamı, k sayısına eşit olan P noktalarının kümesine bir elips denir (Sabuncuoğlu, 2007).

F_1 ve F_2 noktalarına bu elipsin odakları; $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta noktasına elipsin merkezi denir. F_1F_2 doğrusunun elipsi kestiği noktalar olan A_1 ve A_2 noktalarına bu elipsin asal tepeleri; $[A_1A_2]$ doğru parçasına da elipsin asal eksenı adı verilir (Sabuncuoğlu, 2007).



Şekil 2.3. Düzlemde elips

Tanım 2.23.(Elipsin parametresi) Düzlemde verilen F_1 ve F_2 odaklı bir elipsin odaklarından birinden asal eksene dik olarak çizilen kirişin uzunluğunun yarısına elipsin parametresi denir (Sabuncuoğlu, 2007).

Sonuç 2.24. $b^2x_1^2 + a^2x_2^2 = b^2a^2$ denklemi ile verilen kanonik elipsin parametresi $\frac{b^2}{a}$ dır (Sabuncuoğlu, 2007).

İspat. Kanonik elipsin odakları $F_1 = (-c, 0)$ ve $F_2 = (c, 0)$ olduğundan $x_1 = c$ doğrusu ile elipsin arakesitini bulmamız gerekmektedir. Buna göre elipsle bu doğrunun arakesit noktalarından birisin $Q = (q_1, q_2)$ olduğunu kabul edelim.

$$b^2q_1^2 + a^2q_2^2 = b^2a^2$$

$$q_1 = c$$

denklemleri ortak çözülürse

$$a^2q_2^2 = b^2(a^2 - c^2) = b^4$$

olup

$$q_2 = \pm \frac{b^2}{a}$$

olduğundan elipsin parametresi $\frac{b^2}{a}$ olur (Sabuncuoğlu, 2007).

3. BAZI CİRO-TRİGONOMETRİK ÖZELLİKLER VE BARİ-SANTRİK KOORDİNATLAR

Bu kısımda, ilk olarak ciro-açı, ciro-üçgen gibi hiperbolik kavramlar ciro-trigonometrik bazı özellikler verilecektir. Sonraki bölümde ise, çalışmada önemli bir rolü olan bir ciro-noktanın ciro-barisantrik koordinatları kavramları verilecektir.

3.1. Bazı Ciro-Trigonometrik Özellikler

Tanım 3.1.(Ciro-açı) $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayında $\ominus A_1 \oplus A_2$ ve $\ominus A_1 \oplus A_3$ iki ciro-vektör olsun. Bu iki ciro-vektörün belirlediği $\alpha_1 = \angle A_2 A_1 A_3 = \angle A_3 A_1 A_2$ ciro-açısının radyan olarak ölçüsü

$$\cos \alpha_1 = \frac{\ominus A_1 \oplus A_2 \cdot \ominus A_1 \oplus A_3}{\|\ominus A_1 \oplus A_2\| \|\ominus A_1 \oplus A_3\|} \quad (3.1)$$

veya

$$\alpha_1 = \cos^{-1} \left(\frac{\ominus A_1 \oplus A_2 \cdot \ominus A_1 \oplus A_3}{\|\ominus A_1 \oplus A_2\| \|\ominus A_1 \oplus A_3\|} \right) \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. Buradaki $\cos$ ve $\cos^{-1}$ fonksiyonları trigonometrinin standart kosinüs ve arkkosinüs fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlara, ciro-trigonometrinin ciro-kosinüs ve ciro-arkkosinüs fonksiyonları olarak adlandıracağız (Ungar, 2015).

Tanım 3.2.(Ciro-üçgen) $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayında $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız küme olmak üzere, ciro-köşeleri bu ciro-noktalar ve ciro-kenarları ciro-köşeleri birleştiren ciro-doğru parçalarının meydana getirdiği şekle ciro-üçgen denir ve $F_1 F_2 F_3$ ile gösterilir (Ungar, 2015).

Notasyon 3.3. $\gamma_{\ominus F_1 \oplus F_1} = \gamma_0 = 1$ dir. Ayrıca ciro-üçgen indenks kavramının $F_1 F_2 F_3$ ciro-üçgenine uygulanması ile $i, j = 1, 2, 3$ için

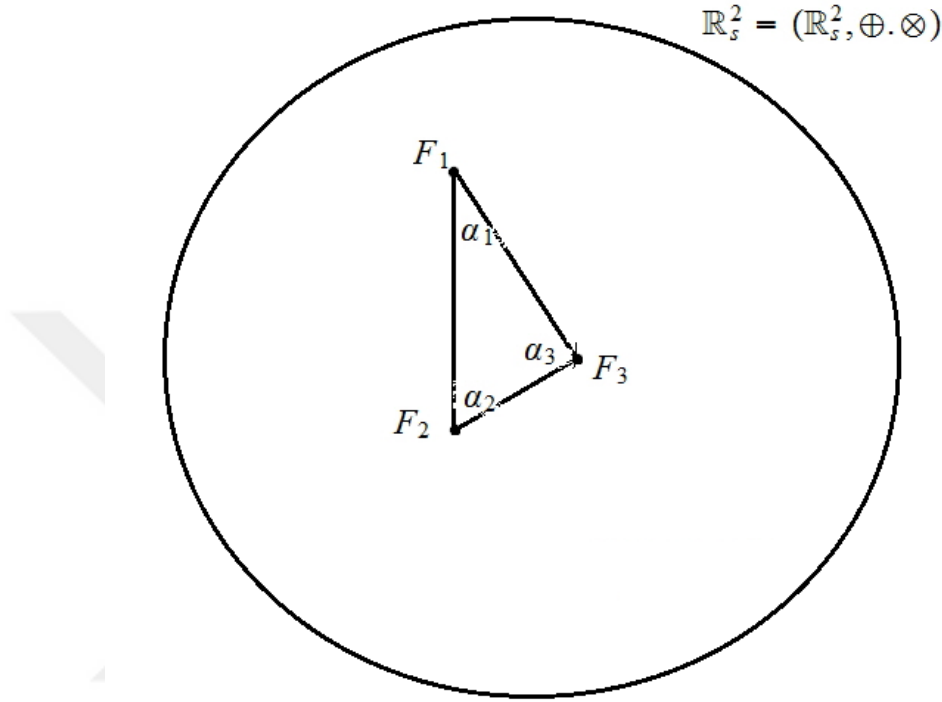
$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{ij}} &= \ominus F_i \oplus F_j \\ a_{ij} &= \|\overrightarrow{a_{ij}}\| = \|\ominus F_i \oplus F_j\| \\ \gamma_{ij} &= \gamma_{\overrightarrow{a_{ij}}} = \gamma_{a_{ij}} \end{aligned} \quad (12.4)$$

olur (Ungar, 2015).

Teorem 3.3.(Ciro-kosinüs kuralı) $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayında $F_1F_2F_3$ ciro-üçgeni verilsin (Şekil 3.1). Bu takdirde

$$\cos(\alpha_1) = \frac{-\gamma_{23} + \gamma_{13}\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{13}^2 - 1}\sqrt{\gamma_{12}^2 - 1}} \quad (3.3)$$

Olur (Ungar, 2015).



Şekil 3.1. Ciro-kosinüs kuralı

Tanım 3.4.(Dik ciro-üçgen) Bir $F_1F_2F_3$ ciro-üçgeninde ciro-açılarından birisinin radyan olarak ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ ise bu üçgene dik ciro-üçgen denir (Ungar, 2015).

Öklidyen halde bir dik üçgende verilen Pisagor Teoremi Einstein ciro-vektör uzayında şu şekilde verilir.

Teorem 3.5. (Einstein-Pisagor Teoremi) $\mathbb{R}_s^n, n \geq 2$, Einstein ciro-vektör uzayında $F_1F_2F_3$ ciro-üçgeni verilsin. Buna göre $F_1F_2F_3$ ciro-üçgeninin, ciro-dik ciro-kenarları a_{13} ve a_{12} , ciro-hipotenüsü a_{23} olan bir dik ciro-üçgen olması için gerek ve yeter koşul

$$\gamma_{23} = \gamma_{13}\gamma_{12}$$

Olmasıdır (Ungar, 2015).

3.2. Ciro-Barisantrik Koordinatlar

Tanım 3.6. $n \geq 2$ için $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayındaki N tane noktanın bir

$$S = \{A_1, \dots, A_N\}$$

kümesi verilsin. Bu taktirde $N-1$ tane vektörden oluşan

$$\{-A_1 + A_2, -A_1 + A_3, \dots, -A_1 + A_N\}$$

vektör kümesinin elemanları lineer bağımsız ise S kümesi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında barisantrik lineer bağımsızdır denir (Ungar, 2010).

Tanım 3.7. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayındaki N tane noktanın bir barisantrik bağımsız kümesi, $n \geq N - 1$ için

$$S = \{A_1, \dots, A_N\}$$

olsun.

$$\sum_{k=1}^N m_k \neq 0$$

olacak şekilde $m_k, k = 1, 2, \dots, N$ skalarları ve $P \in \mathbb{R}^n$ noktası için

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k A_k}{\sum_{k=1}^N m_k} \quad (3.4)$$

oluyorsa $m_k, k = 1, 2, \dots, N$ skalarlarına $P \in \mathbb{R}^n$ noktasının S kümesine göre barisantrik koordinatları adı verilir.

$P \in \mathbb{R}^n$ noktasının S kümesine göre barisantrik koordinatları homojendir. Yani $(m_1, \dots, m_N)$ barisantrik koordinatları $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ için $(\lambda m_1, \dots, \lambda m_N)$ barisantrik koordinatlarına denktir. Barisantrik koordinatlar

$$\sum_{k=1}^N m_k = 1 \quad (3.5)$$

olacak şekilde normalleştirilebilir. Bu koordinatlara özel barisantrik koordinatlar denir.

$$m_P = \sum_{k=1}^N m_k \quad (3.6)$$

sabitine $P \in \mathbb{R}^n$ noktasının S kümesine göre barisantrik temsiliinin sabiti denir (Ungar, 2010).

Tanım 3.8. $n \geq 2$ için $\mathbb{R}_s^n$ ciro-vektör uzayında N tane ciro-noktanın bir

$$S = \{A_1, \dots, A_N\}$$

kümesi verilsin. Bu taktirde $\mathbb{R}_s^n$ ciro-vektör uzayın $N-1$ tane ciro-vektöründen oluşan

$$\{\ominus A_1 \oplus A_2, \ominus A_1 \oplus A_3, \dots, \ominus A_1 \oplus A_N\}$$

ciro-vektör kümesi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında lineer bağımsız ise S kümesi $\mathbb{R}_S^n$ ciro-vektör uzayında ciro-barisantrik lineer bağımsızdır denir (Ungar, 2010).

Tanım 3.9. $\mathbb{R}_S^n$ Einstein ciro-vektör uzayında N tane ciro-noktanın bir ciro-barisantrik bağımsız kümesi, $n \geq N - 1$ için

$$S = \{A_1, \dots, A_N\}$$

olsun.

$$\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k} \neq 0 \quad (3.7)$$

olacak şekilde $m_k, k = 1, 2, \dots, N$ skalarları ve $P \in \mathbb{R}_S^n$ ciro-noktası için

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k} A_k}{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k}} \quad (3.8)$$

oluyorsa $m_k, k = 1, 2, \dots, N$ skalarlarına $P \in \mathbb{R}_S^n$ ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik koordinatları adı verilir. $P \in \mathbb{R}_S^n$ ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik koordinatları homojendir. Yani $(m_1, \dots, m_N)$ ciro-barisantrik koordinatları $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ için $(\lambda m_1, \dots, \lambda m_N)$ ciro-barisantrik koordinatlarına denktir. Ciro-barisantrik koordinatlar

$$\sum_{k=1}^N m_k = 1 \quad (3.9)$$

olacak şekilde normalleştirilebilir. Bu koordinatlara özel ciro-barisantrik koordinatlar denir.

$$m_P = \sqrt{(\sum_{k=1}^N m_k)^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N m_j m_k (\gamma_{\ominus A_j \oplus A_k} - 1)} \quad (3.10)$$

sabitine $P \in \mathbb{R}_S^n$ ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik temsilinin sabiti denir (Ungar, 2010).

Öklidyen limit halinde $s \rightarrow \infty$, gamma faktörleri 1 e yakınsarken $\mathbb{R}_S^n$ s-yuvarı $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişler. Bu yüzden ciro-barisantrik koordinatlar barisantrik koordinatlara ve yukarıdaki m_P ciro-barisantrik temsil sabiti de m_P barisantrik temsil sabitine dönüşür.

Teorem 3.10. $\mathbb{R}_S^n$ Einstein ciro-vektör uzayında N tane ciro-noktanın bir ciro-barisantrik bağımsız kümesi, $n \geq N - 1$ için $S = \{A_1, \dots, A_N\}$ ve $P \in \mathbb{R}_S^n$ olsun. $P \in \mathbb{R}_S^n$ ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik temsili

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k} A_k}{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k}} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Bu taktirde

$$\gamma_P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k}}{m_P} \quad (3.12)$$

ve

$$\gamma_P P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k} A_k}{m_P} \quad (3.13)$$

olur. Burada

$$m_P = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N m_k\right)^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N m_j m_k (\gamma_{\ominus A_j \oplus A_k} - 1)} = \sqrt{\sum_{k=1}^N m_k^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N m_j m_k \gamma_{\ominus A_j \oplus A_k}}$$

dir. Ayrıca $\forall X \in \mathbb{R}_S^n$ için

$$X \oplus P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{X \oplus A_k} (X \oplus A_k)}{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{X \oplus A_k}} \quad (3.14)$$

$$\gamma_{X \oplus P} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{X \oplus A_k}}{m_P} \quad (3.15)$$

$$\gamma_{X \oplus P} (X \oplus P) = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{X \oplus A_k} (X \oplus A_k)}{m_P} \quad (3.16)$$

ve

$$m_P = \sqrt{(\sum_{k=1}^N m_k)^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N m_j m_k (\gamma_{\ominus (X \oplus A_j) \oplus (X \oplus A_k)} - 1)} \quad (3.17)$$

olur (Ungar, 2010).

4. CİRO-ELİPSLER

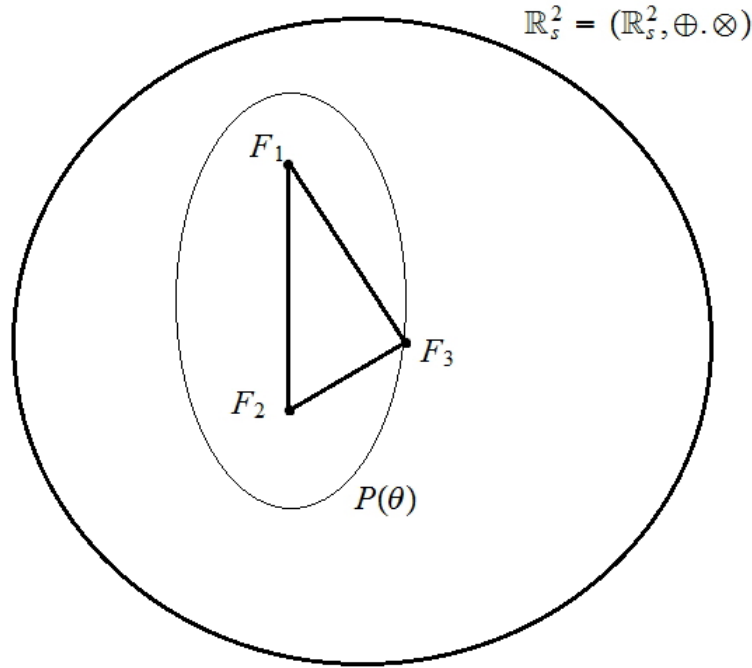
Bu kısımda ilk olarak, A. A. Ungar tarafından tanımlanmış olan ciro-elips kavramı tanımlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1 $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi ve $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_s^2$ iki farklı ciro-nokta olsun. F_1 ve F_2 ciro-noktalarına ciro-uzaklıklarının ciro-toplamı sabit olan $P \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktalarının geometrik yerine bir ciro-elips adı verilir. Diğer bir ifadeyle bir ciro-elips, $a_0 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\|\ominus F_1 \oplus P\| \oplus \|\ominus F_2 \oplus P\| = a_0 \quad (4.1)$$

önermesini sağlayan $P \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktalarının geometrik yeridir. Buradaki F_1 ve F_2 ciro-noktalarına ciro-elipsin ciro-odakları denir.

Eğer $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız kümesi ve F_1 ve F_2 ciro-odaklı ciro-elips $F_3 \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktasından geçiyor ise bu ciroelips (F_1, F_2, F_3) ile gösterilir (Ungar, 2015).



Şekil 4.1. Einstein ciro-vektör düzleminde ciro-elips

$(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ Einstein ciro-vektör düzleminde bir ciro-elips (F_1, F_2, F_3) olsun. Bu ciro-elips üzerindeki $P(\theta)$ keyfî cironoktasının $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ cirobarisantrik bağımsız kümesine göre ciro-barisantrik koordinatları (m_1, m_2, m_3) ise P ciro-noktasının ciro-barisantrik temsili

$$P = \frac{m_1 \gamma_{F_1 F_1} + m_2 \gamma_{F_2 F_2} + m_3 \gamma_{F_3 F_3}}{m_1 \gamma_{F_1} + m_2 \gamma_{F_2} + m_3 \gamma_{F_3}} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Teorem 3.6. gereğince, $X = \ominus F_1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \gamma_{\ominus F_1 \oplus P} &= \frac{\sum_{k=1}^3 m_k \gamma_{\ominus F_1 \oplus F_k}}{m_p} \\ &= \frac{m_1 + m_2 \gamma_{12} + m_3 \gamma_{13}}{m_p} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur.

$$\begin{aligned} \vec{a}_k &= \ominus F_k \oplus P \\ a_k &= \|\vec{a}_k\| \end{aligned}$$

$\gamma_{\vec{a}_k} = \gamma_{a_k}$, $k = 1, 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma_{a_1} &:= \gamma_{\ominus F_1 \oplus P} = \frac{m_1 + m_2 \gamma_{12} + m_3 \gamma_{13}}{m_p} \\ \gamma_{a_2} &:= \gamma_{\ominus F_2 \oplus P} = \frac{m_1 \gamma_{12} + m_2 + m_3 \gamma_{23}}{m_p} \end{aligned}$$

olarak bulunur (Ungar, 2015).

$a_0 > 0$ sayısı Tanım 4.1deki ciro-elips sabiti olmak üzere (F_1, F_2, F_3) ciro-elipsi üzerinde bir P cironoktasının bulunması koşulu

$$a_1 \oplus a_2 = a_0 \quad (4.4)$$

olur. Ayrıca a_0 , P cironoktasının konumundan bağımsızdır. Verilen F_3 cironoktası (F_1, F_2, F_3) ciroelipsi üzerinde olduğundan

$$a_{13} \oplus a_{23} = a_0 \quad (4.5)$$

eşitliği sağlanır. Buna göre

$$\begin{aligned} \gamma_{a_0} &= \gamma_{a_1 \oplus a_2} := \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \left\{ 1 + \frac{a_1 a_2}{s^2} \right\} \\ &= \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\gamma_{a_1}^2 - 1} \sqrt{\gamma_{a_2}^2 - 1}}{\gamma_{a_1} \gamma_{a_2}} \right\} \end{aligned}$$

olup, düzenlenirse

$$(\gamma_{a_1}^2 - 1)(\gamma_{a_2}^2 - 1) = (\gamma_{a_1} \gamma_{a_2} - \gamma_{a_0})^2 \quad (4.6)$$

veya denk olarak

$$\gamma_{a_1}^2 + \gamma_{a_2}^2 - 2\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{a_0} + \gamma_{a_0}^2 - 1 = 0 \quad (4.7)$$

elde edilir. Benzer düşünce ile

$$\gamma_{a_0} = \gamma_{13}\gamma_{23} + \sqrt{(\gamma_{13}^2 - 1)(\gamma_{23}^2 - 1)} \quad (4.8)$$

veya denk olarak

$$\gamma_{a_{13}}^2 + \gamma_{a_{23}}^2 - 2\gamma_{a_{13}}\gamma_{a_{23}}\gamma_{a_0} + \gamma_{a_0}^2 - 1 = 0 \quad (4.9)$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen son deklemlerle γ_{a_1} ve γ_{a_2} ifadeleri yukarıdaki eşitlite yerine yazılıp $\gamma_{a_{23}}^2$ terimleri yok edildiğinde elde edilen eşitlik m_3 bilinmeyeni için bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse

$$m_3 = \frac{1}{2} \frac{(m_1^2 + m_2^2)(\gamma_{12} - \gamma_{a_0}) - 2m_1m_2(\gamma_{12}\gamma_{a_0} - 1)}{m_1(\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) + m_2(\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13})} \quad (4.10)$$

çözümü elde edilir. Bu eşitlik

$$\frac{m_3}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = \frac{1}{2} \frac{(\gamma_{12} - \gamma_{a_0}) - 2 \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} (\gamma_{12}\gamma_{a_0} - 1)}{\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} (\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) + \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} (\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13})} \quad (4.11)$$

eşitliğine denktir. Yukarıdaki m_k cirobarisantrik koordinatların homojenliği gereğince , $k = 1, 2, 3$ için

$$\frac{m_k}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = m'_k \quad (4.12)$$

olarak yeniden yazıldığında ve m'_k ler yeniden m_k olarak yazıldığında

$$m_3 = \frac{1}{2} \frac{(\gamma_{12} - \gamma_{a_0}) - 2m_1m_2(\gamma_{12}\gamma_{a_0} - 1)}{m_1(\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) + m_2(\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13})} \quad (4.13)$$

elde edilir. Buradan m_1 ve m_2

$$m_1^2 + m_2^2 = 1 \quad (4.14)$$

denklemleri ile bağlantılıdır. Bu bağlantı gereğince, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olacak şekilde bir θ ciro-açısal parametre cinsinden

$$m_1 = \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.15)$$

$$m_2 = \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.16)$$

ifade dileyebilir. Bu halde

$$m_3 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{a_0} - \gamma_{12} + \sin \theta (\gamma_{12}\gamma_{a_0} - 1)}{\cos \frac{\theta}{2} (\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) + \sin \frac{\theta}{2} (\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13})} \quad (4.17)$$

olarak elde edilir. Ciro-barisantrik koordinatların homojenliği gereğince bu denklemler sağ taraftaki ifadenin paydası ile çarpılabilir. Bu halde

$$m_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13}) + 2(\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) \quad (4.18)$$

$$m_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) + 2 \sin \frac{\theta^2}{2} (\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13}) \quad (4.19)$$

$$m_3 = -\sin \theta (\gamma_{12}\gamma_{a_0} - 1) + \gamma_{12} - \gamma_{a_0} \quad (4.20)$$

olup trigonometrik ve ciro-trigonometrik özdeşlikler ile

$$m_1 = \sin \theta (\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13}) + (1 + \cos \theta) (\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) \quad (4.21)$$

$$m_2 = \sin \theta (\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) + (1 - \cos \theta) (\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13}) \quad (4.22)$$

$$m_3 = -\sin \theta (\gamma_{12}\gamma_{a_0} - 1) + \gamma_{12} - \gamma_{a_0} \quad (4.23)$$

olarak bulunur. Burada ciro-barisantrik koordinatlar göz önüne alındığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Teorem 4.3. $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi ve $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ kümesi ciro-barisantrik bağımsız olmak üzere $F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{R}_s^2$ olsun. Ayrıca, F_1 ve F_2 ciro-odaklarına sahip F_3 den geçen ciro-elips (F_1, F_2, F_3) olsun. Bu takdirde (F_1, F_2, F_3) ciro-elipsi ciro-barisantrik koordinatları aşağıdaki gibi verilen $P(\theta)$ noktalarının geometrik yeridir.

$$P(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i(\theta) \gamma_{F_i} F_i}{\sum_{i=1}^3 m_i(\theta) \gamma_{F_i}}$$

$$m_1(\theta) = -\sin \theta (\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13}) + (1 + \cos \theta) (\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23})$$

$$m_2(\theta) = \sin \theta (\gamma_{13}\gamma_{a_0} - \gamma_{23}) + (1 - \cos \theta) (\gamma_{23}\gamma_{a_0} - \gamma_{13})$$

$$m_3(\theta) = -\sin \theta (\gamma_{12}\gamma_{a_0} - 1) + \gamma_{12} - \gamma_{a_0}$$

ve

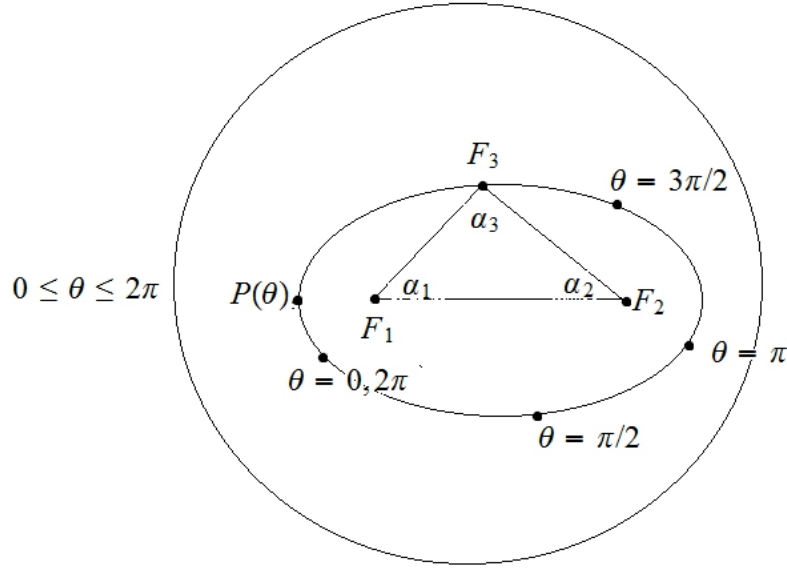
$$\gamma_{a_0} = \gamma_{13}\gamma_{23} \sqrt{(\gamma_{13}^2 - 1)(\gamma_{23}^2 - 1)}$$

olmak üzere

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

dir. Ayrıca, Şekil 4.2. de olduğu gibi

1. $P(0)$ ciro-noktası F_3 den farklı F_1 ve F_3 ciro-noktalarından geçen ciro-doğru ile ciro-elipsin arakesitidir.
2. $P(\pi)$ cironoktası F_3 den farklı F_2 ve F_3 cironoktalarından geçen ciro-doğru ile ciro-elipsin arakesitidir.
3. $P(2\pi) = P(0)$ (Ungar, 2015).



Şekil 4.2. Ciro-elipsin parametrik gösterimi

$s \rightarrow \infty$ Öklidyen limit halinde, gamma çarpanları 1' e yakınsadığından , $k = 1,2,3$ için Teorem 4.3 deki $m_k \rightarrow 0$. Bu yüzden yukarıdaki $P(\theta)$ belirlenemez. Dolayısıyla da hiperbolik geometrideki elipsler Öklidyen geometrideki elipslere dönüşmez. Bunun için ciro-elipsin $P(\theta)$ ciro-noktasının ciro-trigonometrik ciro-barisantrik temsillerine ihtiyaç duyulur.

Teorem 4.4. $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktaları $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız küme olacak şekilde ciro-noktalar olsun. Ayrıca $ca(F_1, F_2, F_3)$ ile F_3 den geçen F_1 ve F_2 ciro-odaklı ciro-elips gösterilsin. Bu taktirde (F_1, F_2, F_3) ciro-elipsi S ye göre ciro-barisantrik temsili

$$P(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i(\theta) \gamma_{F_i} F_i}{\sum_{i=1}^3 m_i(\theta) \gamma_{F_i}}$$

olan $P(\theta)$ ciro-noktasının geometrik yeridir. Burada $0 \leq \theta \leq 2\pi$, α_i , $i = 1,2,3$ olmak üzere ciro-açıları $F_1 F_2 F_3$ ciro-üçgeninin ciro-açıları olmak üzere

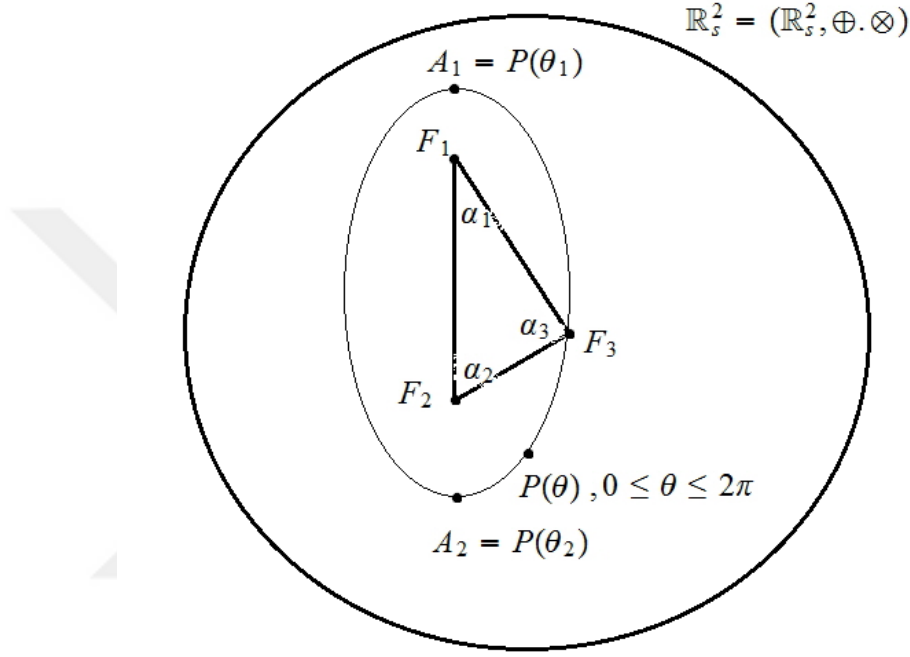
$$m_1(\theta) = \sin \theta \sin \alpha_1 + (1 + \cos \theta) \sin \alpha_2$$

$$m_2(\theta) = \sin \theta \sin \alpha_2 + (1 - \cos \theta) \sin \alpha_1$$

$$m_3(\theta) = \frac{-\sin \alpha_3}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} \{ \sin \theta (1 + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \}$$

dir (Ungar, 2015).

Tanım 4.5.(Ciro-asal eksen, ciro-asal tepeler) $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktaları $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız küme olacak şekilde ciro-noktalar olsun. Ayrıca (F_1, F_2, F_3) ile F_3 den geçen F_1 ve F_2 ciro-odaklı ciro-elips gösterilsin. Bu taktirde, (F_1, F_2, F_3) ciro-elipsinin F_1 ve F_2 ciro-odaklarından geçen $L_{F_1 F_2}$ ciro-doğrusuna bu ciro-elipsin ciro-asal eksenidir. Ciro-asal eksenin ciro-elipsi kestiği A_1 ve A_2 ciro-noktalarına ciro-elipsin ciro-asal tepeleri denir (Ungar, 2015).



Şekil 4.3. Ciro-elipsin ciro-asal tepeleri

A_1 ve A_2 ciro-asal tepeleri ciro-elipsin ciro-noktaları olduğundan, $P(\theta_1) = A_1$ ve $P(\theta_2) = A_2$ olacak şekilde öyle bir θ_1 ve θ_2 sayıları vardır ki

$$m_3(\theta_1) = m_3(\theta_2) = \theta \quad (4.24)$$

eşitliğini sağlarlar (Ungar, 2015).

Teorem 4.6. $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktaları $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız küme olacak şekilde ciro-noktalar olsun. Ayrıca (F_1, F_2, F_3) ile F_3 den geçen F_1 ve F_2 ciro-odaklı ciro-elips gösterilsin. Bu taktirde $i = 1, 2, 3$ olmak üzere α_i ler $F_1 F_2 F_3$ ciroüçgeninin ciro-açıları olsun. Ayrıca a_0 ciro-elips sabiti olmak üzere ciro-elipsin her P ciro-noktası için

$$\|\ominus F_1 \oplus P\| \oplus \|\ominus F_2 \oplus P\| = a_0$$

eşitliğini sağlasın. Bu taktirde $k = 1,2$ için A_k ciro-asal tepelerinin $\{F_1, F_2\}$ ye göre ciro-barisantrik temsilleri

$$A_k = P(\theta_k) = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i(\theta_k) \gamma_{F_i} F_i}{\sum_{i=1}^2 m_i(\theta_k) \gamma_{F_i}} \quad (4.25)$$

olup buradaki

$$m_1(\theta_1) = \{-\sin \alpha_1^2 + (1 + \cos \alpha_1)(1 + \cos \alpha_2)\} \sin \alpha_2 \quad (4.26)$$

$$m_2(\theta_1) = \{-\sin \alpha_2^2 + (1 - \cos \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2)\} \sin \alpha_1 \quad (4.27)$$

ve

$$m_1(\theta_2) = \{-\sin \alpha_1^2 + (1 - \cos \alpha_1)(1 - \cos \alpha_2)\} \sin \alpha_2 \quad (4.28)$$

$$m_2(\theta_2) = \{-\sin \alpha_2^2 + (1 + \cos \alpha_1)(1 + \cos \alpha_2)\} \sin \alpha_1 \quad (4.29)$$

olur (Ungar, 2015).

Tanım 4.7.(Ciro-elipsin ciro-parametresi) $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktaları $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız küme olacak şekilde ciro-noktalar olsun. Ayrıca (F_1, F_2, F_3) ile F_3 den geçen F_1 ve F_2 ciro-odaklı ciro-elips gösterilsin. Bu taktirde $i = 1,2,3$ olmak üzere α_i ler $F_1 F_2 F_3$ ciro-üçgeninin ciro-açıları olsun. Ayrıca a_0 ciro-elips sabiti olmak üzere ciro-elipsin her P ciro-noktası için

$$\|\ominus F_1 \oplus P\| \oplus \|\ominus F_2 \oplus P\| = a_0$$

eşitliğini sağlasın. Bu taktirde $k = 1,2$ için F_k ciro-odaklarından ciro-asal eksene hiperbolik anlamda dik olan ciro-kirişin ciro-uzunluğunun ciro-yarısına (F_1, F_2, F_3) ciro-elipsinin ciro-parametresi denir.

Önerme 4.8. $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör uzayında (F_1, F_2, F_3) , F_3 den geçen F_1 ve F_2 ciro-odaklı ciro-elips olsun. Bu taktirde $i = 1,2,3$ için α_i ler $F_1 F_2 F_3$ ciro-üçgeninin ciro-açıları ve a_0 ciro-elips sabiti olmak üzere ciro-elipsin her P ciro-noktası için

$$\|\ominus F_1 \oplus P\| \oplus \|\ominus F_2 \oplus P\| = a_0$$

eşitliğini sağlasın. Bu taktirde, bu ciro-elipsin ciro-parametresi,

$$m_1(0) = 2 \sin \alpha_2 \quad (4.30)$$

$$m_3(0) = \frac{-\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}{\cos \alpha_2} \quad (4.31)$$

iken

$$P(0) = \frac{m_1(0) \gamma_{F_1} F_1 + m_3(0) \gamma_{F_3} F_3}{m_1(0) \gamma_{F_1} + m_3(0) \gamma_{F_3}} \quad (4.32)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2} \otimes \| \ominus F_3 \oplus P(0) \| \quad (4.33)$$

dir.

İspat: $F_1 F_2 F_3$ ciro-üçgeninde $\alpha_1 = \pi/2$ alınırsa $F_1 F_2 F_3$ ciro-üçgeni bir dik ciro-üçgeni olur. Diğer taraftan Teorem 4.3 gereğince $P(0)$ noktası F_1 ile F_3 den geçen ciro-doğru ile ciro-elipsin arakesitidir. Buna göre $P(0)F_3$ ciro-doğru parçası ciro-elipsin F_1 ciro-odağından geçen, hiperbolik anlamda ciro-asal eksene dik olan ciro-elipsin bir ciro-kirişidir. Bu halde Teorem 4.4. gereğince

$$P(0) = \frac{m_1(0)\gamma_{F_1}F_1 + m_3(0)\gamma_{F_3}F_3}{m_1(0)\gamma_{F_1} + m_3(0)\gamma_{F_3}}$$

Olacaktır. Burada

$$m_1(0) = 2 \sin \alpha_2$$

$$m_3(0) = \frac{-\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}{\cos \alpha_2}$$

dir. Tanım 4.7 ve Ciro-vektör uzaylarının homejenliği gereğince

$$\frac{1}{2} \otimes (\ominus F_3 \oplus P(0)) = \frac{1}{2} \otimes \| \ominus F_3 \oplus P(0) \|$$

elde edilir. ■

5. SONUÇ

Yapılan bu tez çalışması ile birlikte hiperbolik geometrinin cebirsel tabanı niteliğinde olan ciro-vektör uzayları ve özel olarak Einstein ciro-vektör uzayları ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, ciro-elips geometrik yapısı ciro-barisantrik koordinatlar cinsinden detaylı olarak ele alınmıştır. Son olarak, Einstein ciro-vektör uzayında ciro-elipsin ciro-parametresi tanımlanmış ve bu ciro-parametre ifade edilmiştir.

Bu çalışmada verilen ciro-parametre kavramı yardımıyla gama çarpanı için yeni özellikler verilebileceği ve bu özelliklerin ciro-trigonometri de kullanılabileceği düşünülmektedir.

Matematik ve teorik fizikte, özellikle de ciro-cebir alanında ve temel oluşturan bu konuların Einstein ciro-düzlemindeki yeni çalışmalarda temel bir kaynak olacağı ve yapılacak olan üst düzey çalışmalar için yararlı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Pressley, A.N., 2000. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag, Great Britain, 468 s.
- Sabuncuoğlu, A., 2007. *Analitik Geometri*. Nobel Yayınevi, Ankara, 392 s.
- Ungar, A.A., 2008. *Analytic Hyperbolic Geometry and Alber Einstein's Speacial Theory of Relativity*. World Scientific, USA, 628 s.
- Ungar, A.A., 2009. *A Gyrovector Space Approach to Hyperbolic Geometry*. Morgan&Claypool Publishers, California, USA, 182 s.
- Ungar, A.A., 2010. *Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry*. World Scientific , NJ, USA, 360 s.
- Ungar, A.A., 2015. *Analytic Hyperbolic Geometry in N Dimensions*. CRC Press, 593 s.