



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

CİRO-HİPERBOLLER ÜZERİNE

Melike KONUK

BURDUR, 2022

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

CİRO-HİPERBOLLER ÜZERİNE

Melike KONUK

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

BURDUR, 2022

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Ciro-Hiperboller Üzerine**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

01/07/2022

(İmza)

Melike KONUK

TEŞEKKÜR

Tez çalışma süreci boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, karşılaştığım her zorlukta destek olan ve çalışmamı titizlikle takip eden çok değerli danışman hocam Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı öğretim üyesi Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimime başlamamda etkili olan, yardım ve desteğini benden hiç esirgemeyen, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana ışık olan Doç. Dr. İlknur KOCA'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz, 2022

Melike KONUK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİL DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
3. CİRO-BARİSANTRİK KOORDİNATLAR VE CİRO-ÜÇGENLER	14
3.1. Barisantrik ve Ciro-barisantrik Koordinatlar	14
3.2. Ciro-Üçgenler.....	16
4. CİRO-HİPERBOLLER	18
5. SONUÇ.....	25
KAYNAKLAR.....	26

ŞEKİL DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1: Einstein düzleminde Einstein ciro-doğrusu	11
Şekil 2.2. Einstein düzleminde Einstein ciro-doğru parçası.....	11
Şekil 4.1. Einstein düzleminde ciro-hiperbol.	18



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$gyr[a, b]$	: Cirasyon dönüşümü
$(G, \oplus)$	: Ciro-grup
$)F_1F_2F_3($	: Ciro-hiperbol
$d_{\oplus}(a, b)$	: ciro-uzaklık
$(G, \oplus, \otimes)$	: Ciro-vektör uzayı
$(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$	: Einstein ciro-vektör düzlemi
$\ominus$	: Einstein farkı
$\otimes$	: Einstein skalar çarpımı
$\oplus$	: Einstein toplamı
γ_u	: Gama çarpanı
$Aut(S, +)$	: Grupoidin tüm otomorfizmlerinin kümesi
$)c, b($	:Kanonik ciro-hiperbol
$\cdot$	: Nokta çarpım
$\ \quad \ $	: Norm
$\mathbb{R}_s^n$	: Öklid uzayının s-yarıçaplı yuvarı
:	: Öyle ki
$: =$	:Sol taraftaki öge sağ taraftaki ögeye eşit olarak tanımlanır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**Ciro-Hiperboller Üzerine
Melike KONUK**

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

Temmuz, 2022

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışılan konu, tezin amacı ile ilgili bilgi ve literatür araştırmalarına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, ciro-gruplar ve ciro-vektör uzayları tanıtılmış ve ciro-teorideki bazı kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, ciro-hiperbollerin çalışılmasında önemli bir yere sahip ciro-barisantrik koordinatların tanımları verilmiş, ciro-açı, ciro-üçgen gibi bazı ciro-geometrik yapıların inşası incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Einstein ciro-vektör uzayındaki ciro-hiperbolün tanımı ve bazı özellikleri kullanılarak Öklidyen düzlemdeki hiperbole ait bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise elde edilen veriler ışığında literatür kazanımları ve sonuçlarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ciro-gruplar, Ciro-vektör uzayları, ciro-hiperbol, Gama çarpanı

SUMMARY

M. Sc. Thesis

**On Gyrohyperbolas
Melike KONUK**

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Dr. Zafer ŞANLI

July, 2022

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, information and literature researches about the subject studied and the aim of the thesis are given.

In the second chapter, gyrogroups and gyrovector spaces are introduced and some basic concepts and propositions used in gyroalgebra are given.

In the third chapter, the definitions of barycentric coordinates which have an important place in the study of gyrohyperbolas are given and the construction of some hyperbolic structures such as gyroangles and gyrotriangles are examined.

In the fourth chapter, some results of hyperbolas in Euclidean plane were obtained by using definition and some properties of gyrohyperbolas in Einstein gyrovector spaces.

In the fifth and last chapter, the contributions to the literature and the results are given in the light of the obtainments.

Keywords: Gyrogroups, gyrovector spaces, gyrohyperbolas, gama factor.

1. GİRİŞ

On dokuzuncu yüzyıl matematiğinin en kayda değer keşiflerinden biri, üzerinde Öklid uzayında doğruların oynadığı rolü oynayan geodezikler bulunduran aykırı kürenin (psudosphere), Öklid geometrisine yakından benzeyen bir geometriye sahip olmasıdır. Aslında Öklid geometrisi ile en yakın benzerlik aykırı kürenin hiperbolik veya Öklid dışı geometri olarak adlandırılan daha geniş bir geometri içine yerleştirilmesiyle elde edilir. Bu durumda Öklid geometrisi “paralellik aksiyomu” dışındaki tüm aksiyomlarının hiperbolik geometride de geçerli olduğu görülür. (Pressley, 2000).

Hiperbolik geometrideki bir çok formülüzasyonu Eugenio Beltrami, Felix Klein, ve Henri Poincare ortaya koymuş olsa da bu geometri, birbirinden bağımsız ve neredeyse eş-zamanlı olarak Macar matematikçi Janos Bolyai ve Rus Matematikçi Nicolai Lobachevski tarafından keşfedilmiştir. Yirminci yüzyılın en büyük matematikçilerinden birisi olan David Hilbert, Öklid dışı geometrinin keşfinin “Geçen yüzyılın en anlamlı ve dikkate değer başarısından birisi” olduğunu ifade etmiştir. Bu keşif paralellik aksiyomunu Öklid geometrisinin diğer aksiyomlarını çıkarmaya yönelik, Yunan, Arap ve daha sonra Batılı matematikçilerin yüzyıllardır süren girişimlerini sona erdirmiş ve geometriye bakışımızı derinden değiştirmiştir (Pressley, 2000).

Einstein 1905 te özel görecelilik kuramını tanımlamıştır. Bu fiziksel kuramdaki hız toplamı klasik fiziğe aykırı olarak ne değişme ne de birleme özelliğine sahip bir işlemdir. Einstein toplamı bu bağlamda, daha sonraları tanımlanacak olan ciro-grup ve ciro-vektör uzayları olarak bilinen cebirsel yapılara daha uygun yapıda bir işlem olacaktır (Ungar, 2015).

Vektör uzaylarının Öklid geometrisi için bir cebirsel alt yapı sağladığı gibi Einstein ciro-vektör uzayları da hiperbolik geometri için benzer bir rol oynamaktadır. Bu sebeple ciro-vektör uzayları için elde edilecek cebirsel sonuçların hiperbolik geometriye katkısı önemlidir (Ungar, 2015).

Bu tez çalışmasında, Einstein ciro-vektör uzaylarında tanımlanan ciro-hiperbollerin özellikleri incelenmiş ve Einstein toplamının özellikleri kullanılarak bazı sonuçlar verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda, grup ve vektör uzaylarının Öklidyen geometriye sağladığı cebirsel alt-yapıya benzer şekilde, hiperbolik geometriye cebirsel bir altyapı sağlayan ciro-vektör uzayları tanıtılacak bazı tanım ve teoremleri verilecektir. Bu tanım ve teoremler Abraham A. Ungar'ın "Analytic Hyperbolic Geometry in N Dimensions" isimli kitabında bulunabilir.

Tanım 2.1. (İkili işlem) S boş olmayan bir küme olmak üzere S kümesi üzerinde tanımlı bir

$$+: S \times S \rightarrow S \quad (2.1)$$

fonksiyonuna S kümesi üzerinde bir ikili işlem denir. Bu ikili işlem ile birlikte S kümesi grupoid olur ve $(S, +)$ ile gösterilir (Ungar, 2009).

Tanım 2.2.(Grupoid otomorfizmi) $(S, +)$ grupoidi üzerinde tanımlı birebir ve örten $\phi: S \rightarrow S$ dönüşümü eğer grupoid işlemini koruyorsa, yani $\forall a, b \in S$ için

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \quad (2.2)$$

oluyorsa ϕ dönüşümüne $(S, +)$ grupoidinin bir otomorfizmi denir. Bir $(S, +)$ grupoidinin tüm otomorfizmlerinin kümesi $Aut(S, +)$ ile gösterilir (Ungar, 2009).

Tanım 2.3. (Birimli grupoid) $(S, +)$ bir grupoid olsun. $\forall s \in S$ için

$$0 + s = s + 0 = s \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir $0 \in S$ elemanına S grupoidinin birimi; $(S, +)$ grupoidine de birimli grupoid denir (Ungar, 2009).

Tanım 2.4. (Döngü) Birim elemanlı bir $(S, +)$ grupoidinde

$$a + x = b \text{ ve } y + a = b \quad (2.4)$$

denklemlerinin x ve y bilinmeyenleri için bir tek çözümü varsa $(S, +)$ grupoidine bir döngü adı verilir (Ungar, 2009).

Tanım 2.5. (Grup) Bir $(G, +)$ grupoidinin $+$ ikili işlemi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa grup adını alır:

$\forall a \in G$ için

$$0 + a = a \dots (G_1) \quad (2.5)$$

olacak şekilde tek bir $0 \in G$ elemanı vardır. Bu elemana sol birim adı verilir.

$\forall a \in G$ için öyle bir $-a \in G$ vardır ki

$$-a + a = 0 \dots (G_2) \quad (2.6)$$

dır. Burada $-a \in G$ elemanına a nın sol tersi denir.

Ayrıca ikili işlem birleşme özelliğini sağlar, yani $\forall a, b, c \in G$ için

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

dır (Ungar, 2009).

Tanım 2.6. (Değişmeli grup) $(G, +)$ bir grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için

$$a + b = b + a \quad (2.7)$$

oluyorsa $(G, +)$ grubuna değişmeli grup adı verilir (Ungar, 2009).

Tanım 2.7. (Ciro-grup) Bir $(G, \oplus)$ grupoidinin $\oplus$ ikili işlemi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa ciro-grup adını alır:

$\forall a \in G$ için

$$0 \oplus a = a \dots (G_1) \quad (2.8)$$

olacak şekilde tek bir $0 \in G$ elemanı vardır. Bu elemana sol birim adı verilir.

$\forall a \in G$ için öyle bir $\ominus a \in G$ vardır ki

$$\ominus a \oplus a = 0 \dots (G_2) \quad (2.9)$$

dır. Burada $\ominus a \in G$ elemanına a nın sol tersi denir.

$\forall a, b, c \in G$ için öyle bir tek $gyr[a, b]c \in G$ elemanı vardır ki

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr[a, b]c \quad (2.10)$$

dır. Bu özelliğe sol ciro-birleşme özelliği denir.

$gyr[a, b]: G \rightarrow G, c \rightarrow gyr[a, b]c$ dönüşümü $(G, \oplus)$ grupoidinin bir otomorfizmidir.

Yani,

$$gyr[a, b] \in Aut(G, \oplus) \dots (G_4) \quad (2.11)$$

dır. G nin $gyr[a, b]$ otomorfizmine, a ve b elemanları tarafından üretilen cirasyonu veya cirootomorfizmi denir.

$$gyr: G \times G \rightarrow Aut(G, \oplus) \quad (2.12)$$

operatörüne G nin ciroatörü adı verilir. $a, b \in G$ tarafından üretilen $gyr[a, b]$ cirasyonu sol döngü özelliğini sağlar (Ungar, 2009):

$$gyr[a, b] = gyr[a \oplus b, b] \dots (G_5) \quad (2.13)$$

Tanım 2.8. (Ciro-değişmeli ciro-grup) $(G, \oplus)$ bir ciro-grup olsun. $\forall a, b \in G$ için

$$a \oplus b = gyr[a, b](b \oplus a) \dots (G_6) \quad (2.14)$$

oluyorsa bu ciro-gruba ciro-değişmeli ciro-grup adı verilir. (G_6) özelliğine de ciro-değişme özelliği denir (Ungar, 2009).

Notasyon 2.9. Grup teoride olduğu gibi ciro-grup teoride de

$$a \ominus b = a \oplus (\ominus b) \quad (2.15)$$

gösterimi kullanılır (Ungar, 2009).

(Değişmeli) grupların, tüm ciro-otomorfizmleri aşıkâr olan dejerene (ciro-değişmeli) ciro-gruplar olduğu açıktır. Tanım 2.7. ve Tanım 2.8. deki $gyr[a, b]$ cirasyonu yerine özel olarak $I \in Aut(G, \oplus)$ birim otomorfizmi alınırsa ciro-gruplardan klasik grup yapısı elde edilir. Bu yüzden ciro-grupların bu cebirsel yapısı grupların cebirsel yapısından daha zengin bir yapıdır (Ungar, 2009).

Tanım 2.10. (Einstein hız toplamı) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ doğal toplama ve skalarla çarpımla birlikte Öklidyen n – uzay ve $s > 0$ her hangi belirli bir sabit olmak üzere

$$\mathbb{R}_s^n = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| < s\} \quad (2.16)$$

olsun. $\mathbb{R}_s^n$ yuvarı üzerinde $\forall u, v \in \mathbb{R}_s^n$ için

$$u \oplus v = \frac{1}{1 + \frac{u \cdot v}{s^2}} \left\{ u + \frac{1}{\gamma_u} v + \frac{1}{s^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} (u \cdot v) v \right\} \quad (2.17)$$

olarak tanımlı $\oplus$ ikili işlemine Einstein hız toplamı denir. Buradaki

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|u\|^2}{s^2}}} \geq 1 \quad (2.18)$$

reel sayısına da gama çarpanı denir. $\oplus$ ikili işlemi ile birlikte $\mathbb{R}_s^n$ s-yuvarı bir grupoid olup Einstein grupodi olarak adlandırılır (Ungar, 2015).

Lemma 2.11. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının $\mathbb{R}_s^n$ s-yuvarı, üzerinde tanımlı $\oplus$ Einstein toplamı ile birlikte bir ciro-değişmeli cirogruptur (Ungar, 2015).

Analitik hiperbolik geometride $s > 0$ parametresi, özel görecelik teorisinde ışığın boşluktaki hızı c ile aynı anlamdadır. Öklidyen limit halinde $n \rightarrow \infty$ iken $\mathbb{R}_s^n$ yuvarı Öklidyen n-uzayına dönüşürken, $\mathbb{R}_s^n$ yuvarı üzerinde tanımlı $\oplus$ Einstein hız toplamı da $\mathbb{R}^n$ üzerindeki vektör toplama işlemine dönüşür (Ungar, 2015).

Tanım 2.12. (Ciro-vektör uzayı) $(G, \oplus)$ bir ciro-değişmeli ciro-grup olsun. Eğer $(G, \oplus)$ aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise bir ciro-vektör uzayı adını alır ve $(G, \oplus, \otimes)$ ile gösterilir.

- 1) G kümesi, V reel iç çarpım uzayının bir alt kümesi olmak üzere $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ için
 $(V_1) \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \mathbf{a} \cdot \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (iç çarpımın ciro-invaryantlığı)
- 2) G kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\otimes$ skalar çarpım vardır: $\forall \mathbf{a} \in G$ ve $\forall r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ için
 $(V_2) 1 \otimes \mathbf{a} = \mathbf{a}$ (Birim skalar çarpım)
 $(V_3) (r_1 + r_2) \otimes \mathbf{a} = (r_1 \otimes \mathbf{a}) \oplus (r_2 \otimes \mathbf{a})$ (Skaların dağılma kuralı)
 $(V_4) (r_1 r_2) \otimes \mathbf{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \mathbf{a})$ (skaların birleşme kuralı)
 $(V_5) \frac{|r| \otimes \mathbf{a}}{\|r \otimes \mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $r \neq 0$ (Oran özelliği)
 $(V_6) \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] (r \otimes \mathbf{a}) = r \otimes \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] (\mathbf{a})$ (ciro-otomorfizm özelliği)
 $(V_7) \text{gyr}[r_1 \otimes \mathbf{v}, r_2 \otimes \mathbf{v}] = I$ (Aşık ciro-otomorfizm)

3) 1- boyutlu vektörlerin kümesi

$$(V_8) \|G\| := \{\mp \|\mathbf{a}\| : \mathbf{a} \in G\} \quad (2.19)$$

kümesi üzerinde $\oplus$ vektör toplamı ve $\otimes$ vektör çarpımı ile birlikte 1-boyutlu vektör uzayıdır. Öyle ki $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ ve $\forall r \in \mathbb{R}$ için

$$(V_9) \quad \|r \otimes \mathbf{a}\| = |r| \otimes \|\mathbf{a}\|$$

$$(V_{10}) \quad \|\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| \oplus \|\mathbf{b}\|$$

dır (Ungar, 2015).

Yukarıdaki sonuçta verilen her iki toplam hem değişmeli hem de birleşmelidir. Buna göre kısıtlanmış Einstein toplamı Einstein'ın ifade ettiği gibi bir işlemidir. Buna karşın Einstein, paralel olması gerekmeyen hız vektörlerinin toplamı için herhangi bir yorumda bulunmamıştır. Gerçekte genel Einstein toplamı, bir grup işlem değil bir ciro-değişmeli ciro-grup işlemidir ve bu matematiksel yapı 80 yıl sonra 1988 de keşfedilmiştir.

Einstein toplamı ve Lorentz gamma çarpanı, gamma özdeşliği ile bağıntılıdır.

Lemma 2.13.(Gamma Özdeşliği) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_s^n$ için

$$\gamma_{\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2} \right) \quad (2.20)$$

ve

$$\gamma_{\ominus \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2} \right) \quad (2.21)$$

dır. Ayrıca

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{s^2} = \frac{\gamma_v^2 - 1}{\gamma_v^2} \quad (2.22)$$

ve

$$\gamma_{\ominus \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}} = \gamma_{\mathbf{u}} \gamma_{\mathbf{v}} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{s^2} \right) \quad (2.23)$$

dır.

Gamma özdeşliği, hiperbolik geometri ve özel rölativite arasındaki köprü olup, Roble un tanımladığı terminoloji ile hız Sommerfold ve Varicah tarafından çalışılmıştır. Bu terminoloji $\frac{v}{s}$ parametresinin ϕ_v ile değiştirilip

$$\phi_v = \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{v}\|}{s} \quad (2.24)$$

olarak tanımlı $\mathbf{v}$ nin süratidir. Bu taktirde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_s^n$ in γ_v gamma çarpanı $\mathbf{v}$ nin ϕ_v sürati ile aşağıdaki gibi bağıntılıdır (Ungar, 2015):

$$\cosh \phi_v = \gamma_v \quad (2.25)$$

$$\sinh \phi_v = \gamma_v \frac{\|\mathbf{v}\|}{s} \quad (2.26)$$

Gamma özdeşliği, Hiperbolik geometride Öklid geometrisindeki kosinüs kuralına benzer bir rol oynar. Tarihsel açıdan gamma özdeşliği Lobachevsky ve Bolyai'nin hiperbolik geometrisi ile özel görecelilik arasındaki ilk bağıntı durumundadır (Ungar, 2015).

Einstein toplamı, değişmeli olmamasına karşın norm altında değişmelidir. Yani, genel olarak

$$u \oplus v \neq v \oplus u \quad (2.27)$$

iken

$$\|u \oplus v\| = \|v \oplus u\| \quad (2.28)$$

olur (Ungar, 2015).

Gamma özdeşliğinin bir uygulaması olarak, Einstein ciro-üçgen eşitsizliği ispatlanabilir:

Teorem 2.14. (Ciro-üçgen eşitsizliği) $\forall u, v \in (\mathbb{R}_s^n, \oplus)$ için

$$\|u \oplus v\| \leq \|u\| \oplus \|v\| \quad (2.29)$$

Dır (Ungar, 2015).

İspat: Gamma özdeşliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği göz önüne alınsın.

$\forall u, v \in (\mathbb{R}_s^n, \oplus)$ için

$$\begin{aligned} \gamma_{\|u\| \oplus \|v\|} &= \gamma_u \gamma_v \left(1 + \frac{\|u\| \|v\|}{s^2} \right) \\ &\geq \gamma_u \gamma_v \left(1 + \frac{u \cdot v}{s^2} \right) \\ &= \gamma_{u \oplus v} \\ &= \gamma_{\|u \oplus v\|} \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan $\gamma_x = \gamma_{\|x\|}$, $0 \leq \|x\| < s$ olmak üzere $\|x\|$ azalan bir fonksiyonu olduğundan $\forall u, v \in \mathbb{R}_s^n$ için

$$\|u \oplus v\| \leq \|u\| \oplus \|v\| \quad (2.30)$$

elde edilir (Ungar, 2015).

Teorem 2.15. $(\mathbb{R}_s^n, \oplus)$ Einstein ciro-grubu üzerinde tanımlı Einstein skalar çarpımı $\otimes$ ile bir Einstein ciro-vektör uzayıdır. Bu uzay $\mathbb{R}_s^n = (\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$, $n = 1, 2, \dots, n$ ile gösterilir. Özel olarak $n = 2$ için bu uzaya Einstein ciro-vektör uzayı veya Einstein düzlemi adı verilir (Ungar, 2015).

İspat: $(\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ ciro-vektör uzayının Tanım 2.11.deki aksiyomları sağladığını göstereceğiz.

(V_1) İç çarpım ciro-invaryantlığı.

(V_2) Birim skalar çarpım: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_s^n$ olsun. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ise tanım gereği $1 \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$ olup (V_2) aksiyomunu sağlar. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ için

$$1 \otimes \mathbf{a} = \text{stanh} \left(\tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\|\mathbf{a}\|}{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$$

olduğundan $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}_s^n$ için aksiyom sağlanır.

(V_3) Skalar dağılım kuralı : $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ise

$$(r_1 + r_2) \otimes \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

ve

$$r_1 \otimes \mathbf{a} \oplus r_2 \otimes \mathbf{a} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Olduğundan (V_3) aksiyomu sağlanır. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ için Einstein skalar çarpımının tanımı, hiperbolik tanjant fonksiyonunun toplamı ve kısıtlanmış Einstein toplamı gereğince

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \otimes \mathbf{a} &= \text{stanh} \left([r_1 + r_2] \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \text{stanh} \left(r_1 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} + r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= s \frac{\tanh \left(r_1 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) + \tanh \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right)}{1 + \tanh \left(r_1 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \tanh \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right)} \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \frac{r_1 \otimes \mathbf{a} + r_2 \otimes \mathbf{a}}{1 + \frac{1}{s^2} \|r_1 \otimes \mathbf{a}\| \|r_2 \otimes \mathbf{a}\|} \\ &= r_1 \otimes \mathbf{a} \oplus r_2 \otimes \mathbf{a} \end{aligned}$$

olup (V_3) ciro-vektör uzayı aksiyomu sağlanır.

(V_4) Skalar birleşme kuralı: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ için (V_4) aksiyomu açıktır. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ olsun.

$$\mathbf{b} = r_1 \otimes \mathbf{a} = \text{stanh} \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

dersek ,

$$\frac{\|\mathbf{b}\|}{s} = \tanh \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right)$$

ve dolayısıyla

$$\frac{b}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{a}{\|\mathbf{a}\|}$$

olacaktır. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
r_1 \otimes (r_2 \otimes \mathbf{a}) &= r_1 \otimes \mathbf{b} \\
&= \operatorname{stanh} \left(r_1 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{b}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \\
&= \operatorname{stanh} \left(r_1 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \right) \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\
&= \operatorname{stanh} \left(r_1 r_2 \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\
&= (r_1 \otimes r_2) \otimes \mathbf{a}
\end{aligned}$$

(V₅)Oran özelliği : Einstein skalar çarpımının tanımı gereğince, $r \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ için

$$\begin{aligned}
|r| \otimes \mathbf{a} &= \operatorname{stanh} \left(|r| \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\
|r| \otimes \|\mathbf{a}\| &= \left| \operatorname{stanh} \left(|r| \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \right| \\
\|r \otimes \mathbf{a}\| &= \left| \operatorname{stanh} \left(r \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \right| \\
&= \left| \operatorname{stanh} \left(|r| \tanh^{-1} \frac{\|\mathbf{a}\|}{s} \right) \right|
\end{aligned}$$

olduğundan, birinci ve üçüncü eşitlikten istenen elde edilir.

(V₆)Ciro-otomorfizm özelliği: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ iken aksiyomu sağladığı açıktır. $\mathbb{R}_s^n \subset \mathbb{R}^n$ olduğundan

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümü iç çarpımı, dolayısıyla da normu koruyan lineer tersinir bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_s^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ olsun. Bu taktirde, Einstein skalar çarpımının tanımı gereğince, $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_s^n$ için

$$\begin{aligned}
\phi(r \otimes \mathbf{a}) &= \phi \left[s \frac{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r - \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r}{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r + \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right] \\
&= s \frac{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r - \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r}{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r + \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r} \cdot \frac{\phi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} \\
&= s \frac{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r - \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r}{\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r + \left(1 - \frac{\|\mathbf{v}\|}{s}\right)^r} \cdot \frac{\phi(\mathbf{v})}{\|\phi(\mathbf{v})\|} \\
&= r \otimes \phi(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

olur. Burada ϕ , $\mathbb{R}^n$ in kendi üzerine dönüşümü olduğundan yukarıdaki anlamda $\mathbb{R}_s^n$ ye kısıtlanabilir.

$\mathbb{R}_s^n$ nin her cirsasyon dönüşümü $\mathbb{R}^n$ in bir lineer dönüşümüne genişletilebildiğinden, $\mathbb{R}^n$ in ϕ dönüşümü bir cirsasyon iken $\forall a \in \mathbb{R}^n$ ve belli $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için $\phi(a) = \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]a$ dir. Böylece (V_6) aksiyomu sağlanır.

(V_7) Birim ciro-otomorfizm:

$$(V_6)\text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}](r \otimes \mathbf{a}) = r \otimes \text{gyr}[\mathbf{u}, \mathbf{v}](\mathbf{a}) \text{ (ciro-otomorfizm özelliği)}$$

$$(V_7)\text{gyr}[r_1 \otimes \mathbf{v}, r_2 \otimes \mathbf{v}] = I \quad (\text{Aşık ciro-otomorfizm})$$

3) 1- boyutlu vektörlerin kümesi

$$(V_8)\|G\| := \{\mp \|a\| : a \in G\}$$

kümesi üzerinde $\oplus$ vektör toplamı ve $\otimes$ skalar çarpımı ile birlikte 1-boyutlu vektör uzayıdır. Öyle ki $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ ve $\forall r \in \mathbb{R}$ için

$$(V_9)\|r \otimes \mathbf{a}\| = |r| \otimes \|a\|$$

$$(V_{10})\|a \oplus b\| \leq \|a\| \oplus \|b\|$$

özellikleri sağlanır (Ungar, 2015).

Tanım 2.16.(Ciro-metrik) $(G, \oplus, \otimes) = G$ bir ciro-vektör uzayı olsun. Bu uzayın ciro-metriği

$$d_{\oplus}: G \times G \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\} \quad (2.31)$$

ciro-uzaklık fonksiyonu yardımıyla $\forall a, b \in G$ için

$$d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} \ominus \mathbf{a}\| \quad (2.32)$$

olarak tanımlanır. Burada $d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ reel sayısı $\mathbf{a}'$ dan $\mathbf{b}'$ ye kadar olan ciro-uzaklıktır ((Ungar, 2009).

Lemma 2.17. $d_{\oplus}$ ciro-uzaklık fonksiyonunun temel özellikleri şu şekildedir: $\forall a, b \in G$ için

- 1) $d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$
- 2) $d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- 3) $d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d_{\oplus}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$
- 4) $d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \oplus d_{\oplus}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$

(Ungar, 2009).

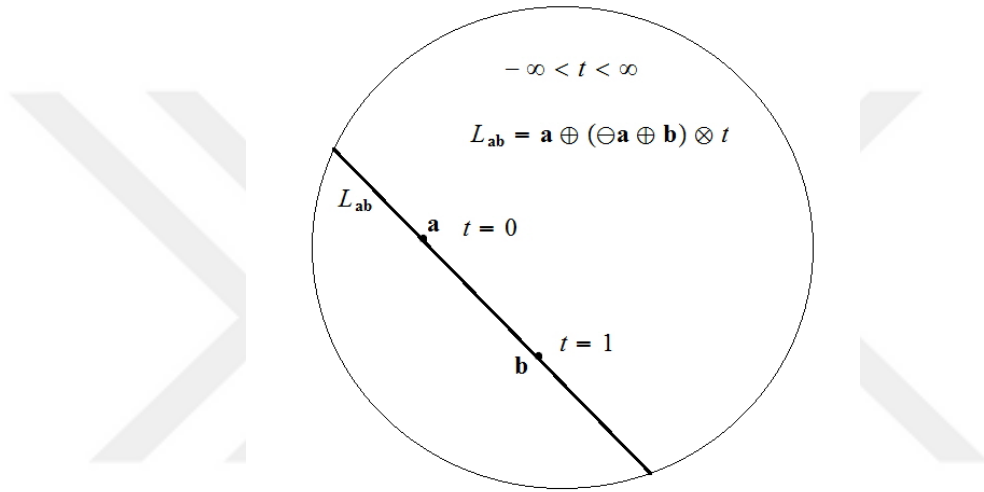
Tanım 2.18.(Einstein Ciro-doğruları) Bir $\mathbb{R}_s^n = (\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ ciro-vektör uzayında $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ iki farklı ciro-nokta olsun. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ ciro-noktalarından geçen $\mathbb{R}_s^n$ ciro-vektör uzayındaki Einstein ciro-doğrusu, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$L_{ab} = \mathbf{a} \oplus (\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \otimes t \quad (2.33)$$

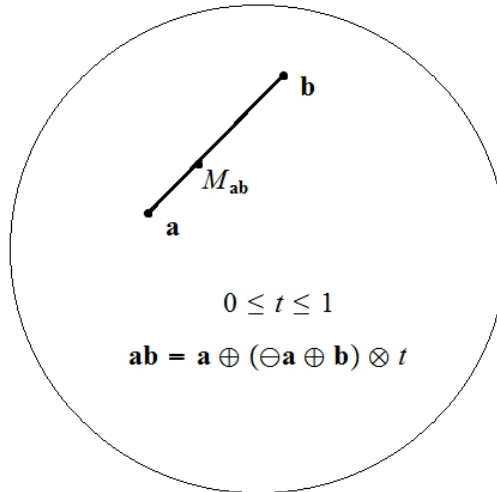
olarak tanımlanır. Bu eşitlikte, $0 \leq t \leq 1$ için elde edilen ciro-noktaların belirlediği kümeye uç noktaları $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{b}$ ciro-noktaları olan ciro-doğru parçası elde edilir. $\mathbf{ab}$ ciro-doğru parçasının ciro-doğru uzunluğu $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{b}$ ciro-noktaları arasındaki ciro-uzaklıktır:

$$|\mathbf{ab}| = d_{\oplus}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\ominus \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}\| \quad (2.34)$$

(Ungar, 2015).



Şekil 2.1. Einstein düzleminde Einstein ciro-doğrusu



Şekil 2.2. Einstein düzleminde Einstein ciro-doğru parçası

$\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ ciro-noktalarından geçen Einstein ciro-doğrusu $\mathbb{R}$ reel eksenin $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayına bir dönüşümüdür. $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayında bir ciro-doğrular hiperbolik geometrinin Beltrami-Klein yuvar düzlemin geodezikleri olarak karşımıza çıkar. Bu geodezikler Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 de görüldüğü üzere, Öklidyen doğruların doğru parçaları durumundadır (Ungar, 2009).

Teorem 2.19.(Einstein Ciro-orta Noktası) Bir $\mathbb{R}_s^n = (\mathbb{R}_s^n, \oplus, \otimes)$ ciro-vektör uzayında $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ iki farklı ciro-nokta olsun. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ ciro-noktalarının M_{ab} ciro-orta noktası

$$M_{ab} = \frac{\gamma_a \mathbf{a} + \gamma_b \mathbf{a}}{\gamma_a + \gamma_b} \quad (2.35)$$

denklemleri ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının Öklid geometrisindeki noktalar ve vektörler arasında ilişki ve $\mathbb{R}_s^n$ in, $n = 2, 3, \dots$, $\mathbb{R}_s^n$ yuvarının hiperbolik geometrisinin ciro-noktaları ve ciro-vektörleri arasındaki ilişki denklik bağıntısına ve nokta çiftlerinin denklik sınıfları kavramlarından elde edilir.

Tanım 2.20.(Denklik Bağıntısı ve Denklik Sınıfları) S boştan farklı bir küme olmak üzere, $S \times S$ kartezyan çarpım kümesinin bir R altkümesine S kümesi üzerinde bir bağıntı denir ve $(a, b) \in R$ ise $a \sim b$ olarak yazılır. Eğer bir S kümesi üzerindeki “ $\sim$ ” bağıntısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa S kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı adını alır:

- (1) $\forall a \in S$ için $a \sim a$
- (2) $\forall a, b \in S$ için $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
- (3) $\forall a, b, c \in S$ için $a \sim b$ ve $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Bir S kümesi üzerinde bir “ $\sim$ ” denklik bağıntısı denklik sınıflarını ortaya çıkartır. Bir $a \in S$ nin denklik sınıfı $\bar{a} := \{x \in S : a \sim x\}$ kümesidir (Ungar, 2009).

$\mathbb{R}_s^n \subset \mathbb{R}^n$ yuvarının noktalarını özel olarak ciro-noktalar olarak adlandıracakız. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının noktalarından yola çıkılarak $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının vektörlerinin inşasında olduğu gibi $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayının ciro vektörleri inşa edilebilir. Öklidyen halde olduğu gibi, başlangıç noktası P bitiş noktası Q olan ciro-vektör $\overrightarrow{PQ} = \ominus P \oplus Q$ olarak tanımlanır (Ungar, 2009).

Tanım 2.21.(Ciro-vektörler) $(G, \oplus)$ bir ciro-değişmeli ciro-grup olsun. G kümesi üzerinde “ $\sim$ ” denklik bağıntısı

$$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \ominus P \oplus Q \ominus R \oplus S$$

olarak tanımlanırsa, bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına ciro-vektör denir. $(G, \oplus)$ ciro-değişmeli ciro-grubunun bir P ciro-noktası, başlangıç noktası(orişin) olarak seçilen bir O noktası için $\ominus O \oplus P$ ciro-vektörü ile özdeşleştirilebilir (Ugar, 2015).

Bu bölümde son olarak, bu çalışmamızın motivasyonu olan Öklidyen hiperbol ve bazı özelliklerini vereceğiz:

Tanım 2.22. (Öklidyen Hiperbol) Düzlemde F_1 ve F_2 noktaları ile pozitif bir k reel sayısı verilmiş olsun. F_1 ve F_2 noktalarına uzaklıkları farkının mutlak değeri, k sayısına eşit olan P noktalarının kümesine bir hiperbol denir (Sabuncuoğlu, 2007).

F_1 ve F_2 noktalarına bu hiperbolün odakları; $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta noktasına hiperbolün merkezi denir. F_1F_2 doğrusunun hiperbolü kestiğı noktalar olan A_1 ve A_2 noktalarına bu hiperbolün asal tepeleri; $[A_1A_2]$ doğru parçasına da hiperbolün asal ekseni adı verilir (Sabuncuoğlu, 2007).

3. CİRO-BARİSANTRİK KOORDİNATLAR VE CİRO-ÜÇGENLER

3.1. Barisantrik ve Ciro-barisantrik Koordinatlar

Tanım 3.1. $n \geq 2$ için $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayındaki N tane noktanın bir

$$S = \{A_1, \dots, A_N\} \quad (3.1)$$

kümesi verilsin. Bu taktirde $N-1$ tane vektörden oluşan

$$\{-A_1 + A_2, -A_1 + A_3, \dots, -A_1 + A_N\} \quad (3.2)$$

vektör kümesinin elemanları lineer bağımsız ise S kümesi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında barisantrik lineer bağımsızdır denir (Ungar, 2010).

Tanım 3.2. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayındaki N tane noktanın bir barisantrik bağımsız kümesi, $n \geq N - 1$ için

$$S = \{A_1, \dots, A_N\}$$

olsun.

$$\sum_{k=1}^N m_k \neq 0 \quad (3.3)$$

olacak şekildeki $m_k, k = 1, 2, \dots, N$ skalarları ve $P \in \mathbb{R}^n$ noktası için

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k A_k}{\sum_{k=1}^N m_k} \quad (3.4)$$

oluyorsa $m_k, k = 1, 2, \dots, N$ skalarlarına $P \in \mathbb{R}^n$ noktasının S kümesine göre barisantrik koordinatları adı verilir (Ungar, 2010).

$P \in \mathbb{R}^n$ noktasının S kümesine göre barisantrik koordinatları homojendir. Yani $(m_1, \dots, m_N)$ barisantrik koordinatları $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ için $(\lambda m_1, \dots, \lambda m_N)$ barisantrik koordinatlarına denktir. Barisantrik koordinatlar

$$\sum_{k=1}^N m_k = 1 \quad (3.5)$$

olacak şekilde normalleştirilebilir. Bu koordinatlara özel barisantrik koordinatlar denir.

$$m_P = \sum_{k=1}^N m_k \quad (3.6)$$

sabitine $P \in \mathbb{R}^n$ noktasının S kümesine göre barisantrik temsilinin sabiti denir (Ungar, 2010).

Tanım 3.3. $n \geq 2$ için $\mathbb{R}_s^n$ ciro-vektör uzayında N tane ciro-noktanın bir

$$S = \{A_1, \dots, A_N\} \quad (3.7)$$

kümesi verilsin. Bu taktirde $\mathbb{R}_s^n$ ciro-vektör uzayın $N-1$ tane ciro-vektöründen oluşan

$$\{\ominus A_1 \oplus A_2, \ominus A_1 \oplus A_3, \dots, \ominus A_1 \oplus A_N\} \quad (3.8)$$

ciro-vektör kümesi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında lineer bağımsız ise S kümesi $\mathbb{R}_s^n$ ciro-vektör uzayında ciro-barisantrik lineer bağımsızdır denir (Ungar, 2010).

Tanım 3.4. $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayında N tane ciro-noktanın bir ciro-barisantrik bağımsız kümesi, $n \geq N - 1$ için

$$S = \{A_1, \dots, A_N\} \quad (3.9)$$

olsun.

$$\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k} \neq 0 \quad (3.10)$$

olacak şekilde $m_k, k = 1, 2, \dots, N$ skalarları ve $P \in \mathbb{R}_s^n$ ciro-noktası için

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k} A_k}{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k}} \quad (3.11)$$

oluyorsa $m_k, k = 1, 2, \dots, N$ skalarlarına $P \in \mathbb{R}_s^n$ ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik koordinatları adı verilir. $P \in \mathbb{R}_s^n$ ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik koordinatları homojendir. Yani $(m_1, \dots, m_N)$ ciro-barisantrik koordinatları $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ için $(\lambda m_1, \dots, \lambda m_N)$ ciro-barisantrik koordinatlarına denktir. Ciro-barisantrik koordinatlar

$$\sum_{k=1}^N m_k = 1 \quad (3.12)$$

olacak şekilde normalleştirilebilir. Bu koordinatlara özel ciro-barisantrik koordinatlar denir.

$$m_P = \sqrt{(\sum_{k=1}^N m_k)^2 + 2 \sum_{j,k=1}^N m_j m_k (\gamma_{\ominus A_j \oplus A_k} - 1)} \quad (3.13)$$

sabitine $P \in \mathbb{R}_s^n$ ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik temsiline sabiti denir (Ungar, 2010).

Öklidyen limit halinde $s \rightarrow \infty$, gamma faktörleri 1 e yakınsarken $\mathbb{R}_s^n$ s-yuvarı $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişler. Bu yüzden ciro-barisantrik koordinatlar barisantrik koordinatlara ve yukarıdaki m_P ciro-barisantrik temsil sabiti de m_P barisantrik temsil sabitine dönüşür.

Teorem 3.5. $\mathbb{R}_S^n$ Einstein ciro-vektör uzayında N tane ciro-noktanın bir ciro-barisantrik bağımsız kümesi, $n \geq N - 1$ için $S = \{A_1, \dots, A_N\}$ ve $P \in \mathbb{R}_S^n$ olsun. $P \in \mathbb{R}_S^n$. ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik temsili

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k} A_k}{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k}} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Bu taktirde

$$\gamma_P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k}}{m_P} \quad (3.15)$$

ve

$$\gamma_P P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{A_k} A_k}{m_P} \quad (3.16)$$

olur. Burada

$$m_P = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N m_k\right)^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N m_j m_k (\gamma_{\ominus A_j \oplus A_k} - 1)} = \sqrt{\sum_{k=1}^N m_k^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N m_j m_k \gamma_{\ominus A_j \oplus A_k}}$$

dir. Ayrıca $\forall X \in \mathbb{R}_S^n$ için

$$X \oplus P = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{X \oplus A_k} (X \oplus A_k)}{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{X \oplus A_k}} \quad (3.17)$$

$$\gamma_{X \oplus P} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{X \oplus A_k}}{m_P} \quad (3.18)$$

$$\gamma_{X \oplus P} (X \oplus P) = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \gamma_{X \oplus A_k} (X \oplus A_k)}{m_P} \quad (3.19)$$

ve

$$m_P = \sqrt{(\sum_{k=1}^N m_k)^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^N m_j m_k (\gamma_{\ominus (X \oplus A_j) \oplus (X \oplus A_k)} - 1)} \quad (3.20)$$

olur (Ungar, 2010).

3.2. Ciro-üçgenler

Tanım 3.6. $\mathbb{R}_S^n$ Einstein ciro-vektör uzayında $\ominus A_1 \oplus A_2$ ve $\ominus A_1 \oplus A_3$ iki ciro-vektör olsun. Bu iki ciro-vektörün belirlediği $\alpha_1 = \angle A_2 A_1 A_3 = \angle A_3 A_1 A_2$ ciro-açısının radyan olarak ölçüsü

$$\cos \alpha_1 = \frac{\|\ominus A_1 \oplus A_2\| \|\ominus A_1 \oplus A_3\|}{\|\ominus A_1 \oplus A_2\| \|\ominus A_1 \oplus A_3\|} \quad (3.21)$$

veya

$$\alpha_1 = \cos^{-1} \left(\frac{\Theta A_1 \oplus A_2}{\|\Theta A_1 \oplus A_2\|} \frac{\Theta A_1 \oplus A_3}{\|\Theta A_1 \oplus A_3\|} \right) \quad (3.22)$$

olarak tanımlanır. Buradaki $\cos$ ve $\cos^{-1}$ fonksiyonları trigonometrinin standart kosinüs ve arkkosinüs fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar, ciro-trigonometrinin ciro-kosinüs ve ciro-arkkosinüs fonksiyonları olarak adlandıracağız (Ungar, 2015).

Tanım 3.7. . $\mathbb{R}_s^n$ Einstein ciro-vektör uzayında $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız küme olmak üzere, ciro-köşeleri bu ciro-noktalar ve ciro-kenarları ciro-köşeleri birleştiren ciro-doğru parçalarının meydana getirdiği şekle ciro-üçgen denir ve $F_1 F_2 F_3$ ile gösterilir (Ungar, 2015).



4. CİRO-HİPERBOLLER

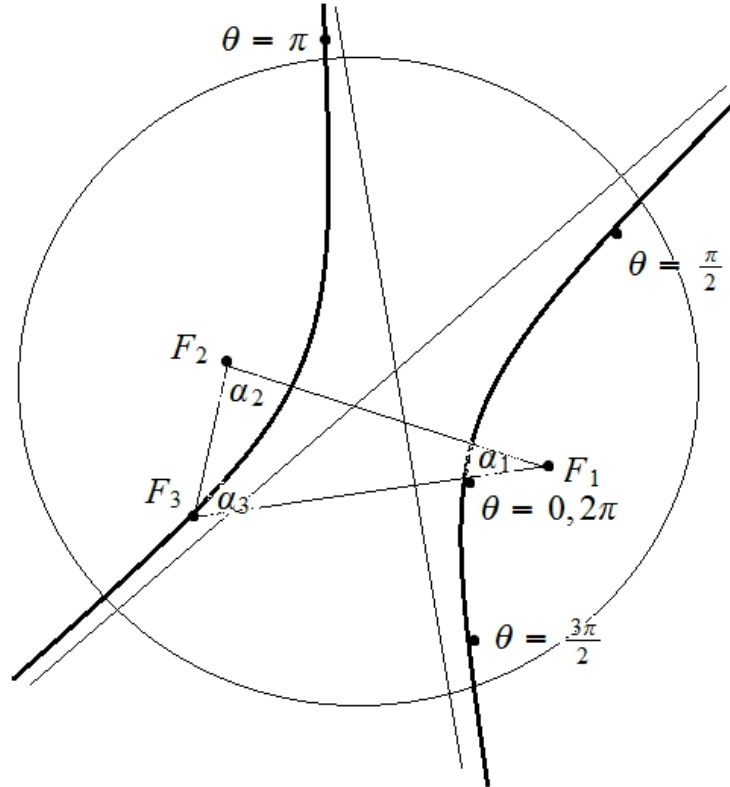
Bu bölümde, Einstein ciro-vektör düzleminde ciro-hiperbol tanımı ve bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca Einstein ciro-vektör düzleminde herhangi bir ciro-noktanın ciro-asal eksene uzaklığı ispatlanarak bazı ciro-hiperbolik sonuçlar verilecektir.

Tanım 4.1.(Ciro-hiperbol) $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi ve $F_1, F_2 \in \mathbb{R}_s^2$ iki farklı ciro-nokta olsun. F_1 ve F_2 ciro-noktalarına ciro-uzaklıklarının ciro-farkı sabit olan $P \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktalarının geometrik yerine bir ciro-hiperbol adı verilir. Diğer bir ifadeyle bir ciro-hiperbol, a_0 belli bir sabit olmak üzere

$$\|\ominus F_1 \oplus P\| \ominus \|\ominus F_2 \oplus P\| = a_0 \quad (4.1)$$

önermesini sağlayan $P \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktalarının geometrik yeridir. Buradaki F_1 ve F_2 ciro-noktalarına ciro-hiperbolünün ciro-odakları denir.

Eğer $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız küme ve F_1 ve F_2 ciro-odaklı ciro-hiperbolü $F_3 \in \mathbb{R}_s^2$ ciro-noktasından geçiyor ise bu ciro-hiperbol (F_1, F_2, F_3) ile gösterilir (Ungar, 2015).



Şekil 4.1.

Bir $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ Einstein ciro-vektör düzleminde $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ ciro-barisantrik bağımsız küme ve F_1, F_2 ciro-odaklarına sahip F_3 ve P keyfi noktasından geçen ciro-hiperbol (F_1, F_2, F_3) olsun. Bu ciro-hiperbol üzerindeki $P(\theta)$ keyfi ciro-noktasının ciro-barisantrik koordinatları $(m_1:m_2:m_3)$ olmak üzere P ciro-noktasının $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ kümesine göre ciro-barisantrik temsili

$$P = \frac{m_1\gamma_{F_1F_1} + m_2\gamma_{F_2F_2} + m_3\gamma_{F_3F_3}}{m_1\gamma_{F_1} + m_2\gamma_{F_2} + m_3\gamma_{F_3}} \quad (4.2)$$

şeklindedir.

Teorem 3.4 gereğince, $X = \ominus F_1$ olarak alınırsa

$$\gamma_{\ominus F_1 \oplus P} = \frac{\sum_{k=1}^3 m_k \gamma_{\ominus F_1 \oplus F_k}}{m_p} = \frac{m_1 + m_2\gamma_{12} + m_3\gamma_{13}}{m_p} \quad (4.3)$$

olur.

Notasyon 4.2. $\gamma_{\ominus F_1 \oplus F_1} = \gamma_0 = 1$ dir. Ayrıca ciro-üçgen indeks kavramının $F_1F_2F_3$ ciro-üçgenine uygulanması ile $i, j = 1, 2, 3$ için

$$\mathbf{a}_{ij} = \ominus F_i \oplus F_j \quad (4.4)$$

$$a_{ij} = \|\mathbf{a}_{ij}\| = \|\ominus F_i \oplus F_j\| \quad (4.5)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{\mathbf{a}_{ij}} = \gamma_{a_{ij}} \quad (4.6)$$

olur (Ungar, 2015).

Yukarıdaki m_p sayısı P ciro-noktasının S kümesine göre ciro-barisantrik temsiliinin ciro-barisantrik temsil sabitidir. Bu taktirde $F_1F_2F_3$ ciro-üçgeninin ciro-köşeleri cinsinden

$$m_p^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2(m_1m_2\gamma_{12} + m_1m_3\gamma_{13} + m_2m_3\gamma_{23}) \quad (4.7)$$

olur. O halde $\gamma_{a_k} = \gamma_{a_k}$, $k = 1, 2$ olmak üzere

$$\gamma_{a_1} := \gamma_{\ominus F_1 \oplus P} = \frac{m_1 + m_2\gamma_{12} + m_3\gamma_{13}}{m_p} \quad (4.8)$$

$$\gamma_{a_2} := \gamma_{\ominus F_2 \oplus P} = \frac{m_1\gamma_{12} + m_2 + m_3\gamma_{23}}{m_p} \quad (4.9)$$

şeklindedir. Burada,

$$\mathbf{a}_k = \ominus F_k \oplus P \quad (4.10)$$

$$a_k = \|\mathbf{a}_k\| \quad (4.11)$$

dir.

$a_0 > 0$ ciro-hiperbol sabiti olmak üzere bir P ciro-noktasının bir $)F_1, F_2, F_3($ ciro-hiperbolunun üzerinde bulunması koşulu

$$a_1 \ominus a_2 = \pm a_0 \quad (4.12)$$

olarak düzenlenebilir. a_0 in işareti ciro-hiperbolun kollarına göre değişir. a_0, P ciro-noktasının konumundan bağımsızdır(Ungar, 2015).

Özel olarak $a_{13} > a_{23}$ veya $a_{13} < a_{23}$ olması haline göre verilen F_3 ciro-noktası $)F_1, F_2, F_3($ ciro-hiperbolü üzerinde olduğundan

$$a_{13} \ominus a_{23} = a_0 \quad (4.13)$$

veya

$$a_{13} \ominus a_{23} = -a_0 \quad (4.14)$$

denklemlerinden birisi sağlanır(Ungar, 2015).

Gama özdeşliği gözönüne alındığında

$$\begin{aligned} \gamma_{a_0} &= \gamma_{a_1 \ominus a_2} := \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \left\{ 1 - \frac{a_1 a_2}{s^2} \right\} \\ &= \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\gamma_{a_1}^2 - 1} \sqrt{\gamma_{a_2}^2 - 1}}{\gamma_{a_1} \gamma_{a_2}} \right\} \\ &= \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} - \sqrt{(\gamma_{a_1}^2 - 1)(\gamma_{a_2}^2 - 1)} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu eşitliğin kareleri alınıp yeniden düzenlenirse

$$(\gamma_{a_1}^2 - 1)(\gamma_{a_2}^2 - 1) = (\gamma_{a_1} \gamma_{a_2} - \gamma_{a_0})^2 \quad (4.15)$$

veya denk olarak

$$\gamma_{a_1}^2 + \gamma_{a_2}^2 - 2\gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \gamma_{a_0} + \gamma_{a_0}^2 - 1 = 0 \quad (4.16)$$

elde edilir. Benzer düşünce ile

$$\gamma_{a_0} = \gamma_{13} \gamma_{23} + \sqrt{(\gamma_{13}^2 - 1)(\gamma_{23}^2 - 1)} \quad (4.17)$$

veya denk olarak

$$\gamma_{a_{13}}^2 + \gamma_{a_{23}}^2 - 2\gamma_{a_{13}} \gamma_{a_{23}} \gamma_{a_0} + \gamma_{a_0}^2 - 1 = 0 \quad (4.18)$$

eşitlikleri elde edilir(Ungar, 2015).

Böylece ciro-hiperboller için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.(Ciro-hiperbollerin Giro-barisantrik Temsili) $(\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi ve $S = \{F_1, F_2, F_3\}$ kümesi ciro-barisantrik bağımsız olmak üzere $F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{R}_s^2$ olsun. Ayrıca, F_1 ve F_2 ciro-odaklarına sahip F_3 ciro-noktasından geçen ciro-hiperbol $F_1 F_2 F_3$ (olsun. Bu takdirde $F_1 F_2 F_3$ ciro-hiperbolü S ye göre ciro-barisantrik koordinatları aşağıdaki gibi verilen $P(\theta)$ noktalarının geometrik yeridir. $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için

$$P(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i(\theta) \gamma_{F_i} F_i}{\sum_{i=1}^3 m_i(\theta) \gamma_{F_i}}$$

Burada

$$m_1(\theta) = \sin \theta (\gamma_{23} \gamma_{a_0} - \gamma_{13}) + (1 + \cos \theta) (\gamma_{13} \gamma_{a_0} - \gamma_{23})$$

$$m_2(\theta) = \sin \theta (\gamma_{13} \gamma_{a_0} - \gamma_{23}) + (1 - \cos \theta) (\gamma_{23} \gamma_{a_0} - \gamma_{13})$$

$$m_3(\theta) = -\sin \theta (\gamma_{12} \gamma_{a_0} - 1) + \gamma_{12} - \gamma_{a_0}$$

ve

$$\gamma_{a_0} = \gamma_{13} \gamma_{23} \sqrt{(\gamma_{13}^2 - 1)(\gamma_{23}^2 - 1)}$$

dir. Ayrıca, Şekil 4.1 de olduğu gibi,

1. $P(0)$ ciro-noktası F_3 den farklı F_1 ve F_3 ciro-noktalarından geçen ciro-doğru ile ciro-hiperbolün arakesitidir.
2. $P(\pi)$ ciro-noktası F_3 den farklı F_2 ve F_3 ciro-noktalarından geçen ciro-doğru ile ciro-hiperbolünün arakesitidir.
3. $P(2\pi) = P(0)$

olur (Ungar, 2015).

Tanım 4.4. $\mathbb{R}_s^2$ Einstein ciro-vektör düzleminde F_1, F_2, F_3 (ciro-hiperbolü verilmiş olsun. F_1, F_2, F_3 ciro-hiperbolünün F_1 ve F_2 ciro-odaklarından geçen $L_{F_1 F_2}$ ciro-doğrusuna F_1, F_2, F_3 ciro-hiperbolünün ciro-asal eksenini denir. Giro-asal eksenin ciro-hiperbolü kestiği ciro-noktalara da F_1, F_2, F_3 ciro-hiperbolünün ciro-asal tepeleri adı verilir (Ungar, 2015).

Tanım 4.5. $\mathbb{R}_s^2 = (\mathbb{R}_s^2, \oplus, \otimes)$ bir Einstein ciro-vektör düzlemi ve $s > 0$ olsun.

$$\sum(x, y), x^2 + y^2 < s^2 \quad (4.19)$$

bu düzlem üzerindeki Kartezyen koordinat sistemi olmak üzere

1. Ciro-hiperbolün ciro-merkezi Σ koordinat sisteminin orijini ile çakışık,
2. Ciro-hiperbolünün F_1 ve F_2 ciro-odakları Σ koordinat sisteminin x – *ekseni* pozitif veya negatif kısmında yani $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0), 0 < c < s$

ise bu ciro-hiperbole kanonik konumdadır denir(Ungar, 2015).

$)F_1, F_2, F_3$ (kanonik ciro-hiperbolü için $0 < b < s$ olmak üzere

$$F_1 = (-c, 0) \quad (4.20)$$

$$F_2 = (c, 0) \quad (4.21)$$

$$O = (0,0) \quad (4.23)$$

dir. Bu taktirde $)F_1, F_2, F_3(= ((-c, 0), (c, 0)))$ kanonik ciro-hiperbolü kısaca $)c, b($ ile gösterilecektir(Ungar, 2015).

Lemma 4.5. Bir $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R_s^2$ ciro-noktasının x – *ekseni* üzerindeki bir $Z = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$ ciro-noktasına olan ciro-uzaklığı, $z > 0$ olmak üzere

$$d_{\oplus}(Z, P) = \|\ominus Z \oplus P\| = \frac{1}{1 - \frac{zx}{s^2}} \sqrt{(x - z)^2 + \frac{y^2}{\gamma_z^2}} \quad (4.24)$$

İspat:

$$\begin{aligned} \ominus Z \oplus P &= \begin{bmatrix} -z \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{zx}{s^2}} \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma_z} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2} \frac{\gamma_z}{1 + \gamma_z} (-zx) \begin{bmatrix} -z \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{zx}{s^2}} \left[-z + \frac{x}{\gamma_z} + \frac{1}{s^2} z^2 x \frac{\gamma_z}{1 + \gamma_z} \right] \\ &= \frac{1}{1 - \frac{zx}{s^2}} \left[-z + \frac{x}{\gamma_z} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_z^2}\right) \frac{\gamma_z}{1 + \gamma_z} x \right] \\ &= \frac{1}{1 - \frac{zx}{s^2}} \left[-z + \frac{x}{\gamma_z} + \frac{\gamma - 1}{\gamma_z} x \right] = \frac{1}{1 - \frac{zx}{s^2}} \begin{bmatrix} x - z \\ \frac{y}{\gamma_z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sonuç 4.6. $a_0 = \frac{2a}{1 + \frac{a^2}{s^2}}$ dir.

İspat: $P = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = A_1, Z = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = F_1, F_2 = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix}$ ise

$$d_{\oplus}(A_1, F_1) = \frac{1}{1 - \frac{ac}{s^2}} |a - c| = \frac{a - c}{1 - \frac{ac}{s^2}} = \|A_1 F_1\|$$

$$d_{\oplus}(A_1, F_2) = \frac{1}{1 + \frac{ac}{s^2}} |a + c| = \frac{a + c}{1 + \frac{ac}{s^2}} = \|A_1 F_2\|$$

$$\begin{aligned} d_{\oplus}(A_1, F_1) \oplus (-d_{\oplus}(A_1, F_2)) &= \frac{\frac{1}{1 - \frac{ac}{s^2}} - \frac{1}{1 + \frac{ac}{s^2}}}{1 + \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{a-c}{1 - \frac{ac}{s^2}} \frac{a+c}{1 + \frac{ac}{s^2}} \right\}} \\ &= \frac{\frac{a-c+Aa-Ac+a+c-Aa-Ac}{(1-A)(1+A)}}{1 - A^2 + \frac{a^2}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}} \\ &= \frac{2(a - a \frac{c^2}{s^2})}{1 - \frac{a^2 c^2}{s^4} + \frac{a^2}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}} \\ &= \frac{2a(1 - \frac{c^2}{s^2})}{\left(1 - \frac{c^2}{s^2}\right) + \frac{a^2}{s^2} \left(1 - \frac{c^2}{s^2}\right)} \\ &= \frac{\frac{2a}{\gamma c^2}}{\frac{1}{\gamma c^2} \left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)} \\ &= \frac{2a}{1 + \frac{a^2}{s^2}} \end{aligned}$$

Lemma 4.7. Bir (F_1, F_2) kanonik ciro-hiperbolü için $e=c/a$ ve

$$F_1 = (-c, 0)$$

$$F_2 = (c, 0)$$

$$K = \left(\frac{a}{e}, 0\right)$$

olmak üzere

$$\frac{d_{\oplus}(F_2, A_1)}{d_{\oplus}(F_2, A_2)} : \frac{d_{\oplus}(K, A_1)}{d_{\oplus}(K, A_2)} = -\frac{\gamma_{\ominus F_2 \oplus A_1}}{\gamma_{\ominus F_2 \oplus A_2}} : \frac{\gamma_{\ominus K \oplus A_1}}{\gamma_{\ominus K \oplus A_2}}$$

İspat:

$$d_{\oplus}(F_2, A_1) = \frac{1}{1 + \frac{ac}{s^2}} |a - c|$$

$$d_{\oplus}(F_2, A_2) = \frac{1}{1 - \frac{ac}{s^2}} |a + c|$$

$$d_{\oplus}(K, A_1) = \frac{1}{1 + \frac{aa}{es^2}} \left| \frac{a}{e} - c \right|$$

$$d_{\oplus}(K, A_2) = \frac{1}{1 - \frac{aa}{es^2}} \left| \frac{a}{e} + c \right|$$

ve diğ er taraftan

$$\gamma_{\ominus F_2 \oplus A_1} = \gamma_c \gamma_a \left(1 + \frac{ac}{s^2} \right)$$

$$\gamma_{\ominus F_2 \oplus A_1} = \gamma_c \gamma_a \left(1 + \frac{ac}{s^2} \right)$$

$$\gamma_{\ominus F_2 \oplus A_2} = \gamma_c \gamma_a \left(1 - \frac{ac}{s^2} \right)$$

$$\gamma_{\ominus K \oplus A_1} = \gamma_k \gamma_a \left(1 + \frac{aa}{es^2} \right)$$

$$\gamma_{\ominus K \oplus A_2} = \gamma_k \gamma_a \left(1 - \frac{aa}{es^2} \right)$$

olduğ undan istenilen sonuç elde edilir.

5. SONUÇ

Yapılan bu tez çalışmasında, Öklidyen geometriye cebirsel bir taban oluşturan grup ve vektör uzayları gibi, hiperbolik geometriye cebirsel altyapı sağlayan ciro-grup, ciro-vektör uzayları bazı kavram ve araçları ile birlikte incelenmiştir. Öklid geometrisinde iyi bilinen koniklerden birisi olan hiperbol yapısı, A. Abraham Ungar tarafından Einstein ciro-vektör uzaylarında ciro-hiperboller olarak tanımlanmış ve literatüre dahil edilmiştir

Bu çalışmada, ciro-hiperboller ve özellikleri kullanılarak bazı sonuçlar verilmiştir. Öklidyen hiperbollere dair daha bir çok özelliğin ciro-hiperbol kavramlarına uyarlanarak cebirsel ve geometrik yeni araç ve sonuçların elde edilebileceği düşünülmektedir..

Matematik ve fizikte, özellikle de hiperbolik geometri alanında Einstein ciro-vektör uzaylarında yapılacak çalışmalarda temel kavramları içeren bu çalışmanın bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Pressley, A.N., 2000. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag, Great Britain, 468 s.
- Sabuncuoğlu, A., 2007. *Analitik Geometri*. Nobel Yayınevi, Ankara, 392 s.
- Ungar, A.A., 2008. *Analytic Hyperbolic Geometry and Alber Einstein's Speacial Theory of Relativity*. World Scientific, USA, 628 s.
- Ungar, A.A., 2009. *A Gyrovector Space Approach to Hyperbolic Geometry*. Morgan&Claypool Publishers, California, USA, 182 s.
- Ungar, A.A., 2010. *Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry*. World Scientific , NJ, USA, 360 s.
- Ungar, A.A., 2015. *Analytic Hyperbolic Geometry in N Dimensions*. CRC Press, 593 s.