

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ
YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
YAZILIM MÜHENDİSLİĞİ BİLİM DALI**

**ÇİZGE TEORİDE ORTALAMA ZEDELİNEBİLİRLİK
PARAMETRELERİ ÜZERİNE**

Ayşe TEZEL YOLCU

**Danışman
Prof. Dr. Ersin ASLAN**

MANİSA-2024

AYŞE
TEZEL YOLCU

ÇİZGE TEORİDE ORTALAMA ZEDELENEİRLİK
PARAMETRELERİ ÜZERİNE

2024

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Hasan Ferdi Turgutlu Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ayşe TEZEL YOLCU



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AYŞE TEZEL YOLCU

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Yazılım Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ersin ASLAN

Bir iletişim ağında, belirli istasyonların veya iletişim bağlantılarının arızalanmasından sonra ağın çalışmasının kesintiye uğramasına karşı direncini belirlemek için çeşitli zedelenebilirlik ölçümleri kullanılır. Bu çalışmada yeni bir çizge parametresi tanımlanmıştır. Bir G çizgesinin bir e ayrıtı için, $\alpha'_e(G)$ ile gösterilen düşük ayrıt örtü sayısı, e' yi içeren bir G ayrıt örtü kümesinin minimum eleman sayısıdır. Bir G çizgesinin ortalama ayrıt örtü sayısı, $\alpha'_{av}(G)$ $\frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G)$ 'dir. Burada $\sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G)$, G 'nin tüm ayrıtları üzerindeki toplamı ifade edecektir.

Bu tezde, ortalama ayrıt örtü sayısı ile bazı çizge parametreleri arasındaki ilişkiler verilmiştir ve bazı çizge grupları için ortalama ayrıt sayısı için sonuçlar verilmiştir. Ayrıca herhangi bir çizgenin ortalama ayrıt örtü sayısını hesaplamak için bir algoritma verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zedelenebilirlik, Ağ Tasarımı ve İletişim, Ortalama Düşük Baskınlık Sayısı, Tepe Örtüsü, Ayrıt örtüsü, Ortalama Ayrıt Örtüsü.

2024, 32 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

AYŞE TEZEL YOLCU

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Software Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ersin ASLAN

Abstract

In a communication network, several vulnerability measures are used to determine the resistance of the network to disruption of operation after the failure of certain stations or communication links. This study introduces a new graph parameter. For an edge e of a graph G , the *lower edge covering number*, denoted by $\alpha'_e(G)$, is the minimum cardinality of a edge covering set of G that contains e . The average edge covering number $\alpha'_{av}(G)$ of a graph G is, $\frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G)$. Where $\sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G)$, will denote the sum over all edges of G .

In this thesis, we give the relationships between average edge covering number and some graph parameters and find the average covering number for some families of graphs. Also an algorithm for computing for the average edge covering number of any graph is given.

Key Words: vulnerability, network design and communication, average lower domination number, vertex cover, edge cover, average vertex cover

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca ve çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübeleri ile yol gösteren, desteğini hiç eksik etmeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ersin ASLAN' a ve öğrenim hayatımda her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Ayşe TEZEL YOLCU

Manisa, 2024



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

G	Çizge
$E(G)$	Bir G çizgesinin ayrıtlar kümesi
$V(G)$	Bir G çizgesinin tepeler kümesi
n	Bir G çizgesinin tepe sayısına bağlı seviyesi
v	Bir çizgenin tepesi
e	Bir çizgenin ayrıtı
m	Bir çizgenin ayrıt sayısı
P_n	n tepeli yol çizge
C_n	n tepeli çevre çizge
K_n	n tepeli tam çizge
$K_{1,n-1}$	n tepeli yıldız çizge
$K_{r,s}$	İki parçalı tam çizge
$\lambda(G)$	Ayrıtlar bağlantılılık sayısı
$\alpha(G)$	Ayrıtlar örtü sayısı
$\alpha'(G)$	Minimum ayrıtlar örtü sayısı
$\alpha'_e(G)$	Düşük ayrıtlar örtü sayısı
$\alpha'_{av}(G)$	Ortalama ayrıtlar örtü sayısı
$\alpha_v(G)$	Yerel örtü sayısı
$\gamma(G)$	Baskınlık sayısı

$\alpha(G)$	Bağımsızlık sayısı (Independence number)
$\kappa(G)$	Bağlantılılık sayısı (Connectivity number)
M^*	Maksimum eşleşme sayısı
$i_v(G)$	Düşük bağımsızlık sayısı
$i_{av}(G)$	Ortalama düşük bağımsızlık sayısı



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1. P_7 yol çizgesi	4
Şekil 2. C_6 çevre çizgesi.....	4
Şekil 3. $K_{1,5}$ yıldız çizgesi.....	5
Şekil 4. K_5 tam çizgesi.....	5
Şekil 5. $K_{2,3}$ iki parçalı tam çizge.....	6
Şekil 6. P_6 yol çizgesi	9
Şekil 7. P_7 yol çizgesi	133
Şekil 8. G_1 ve G_2 çizgeleri.....	18



TABLO DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1. P_6 yol çizgesinin tüm alt kümeleri için ayrıt örtü küme durumu ve ayrıt örtü küme sayıları	10
Tablo 2. P_6 yol çizgesinin a ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	11
Tablo 3. P_6 yol çizgesinin b ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	11
Tablo 4. P_6 yol çizgesinin c ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	11
Tablo 5. P_6 yol çizgesinin d ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	122
Tablo 6. P_6 yol çizgesinin e ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	12
Tablo 7. P_7 yol çizgesinin tüm alt kümeleri için ayrıt örtü küme durumu ve ayrıt örtü küme sayıları	155
Tablo 8. P_7 yol çizgesinin a ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	15
Tablo 9. P_7 yol çizgesinin b ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	15
Tablo 10. P_7 yol çizgesinin c ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	16
Tablo 11. P_7 yol çizgesinin d ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	16
Tablo 12. P_7 yol çizgesinin e ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	17
Tablo 13. P_7 yol çizgesinin f ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları ..	17
Tablo 14. Tam Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Tablosu	233
Tablo 15. Yıldız Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Tablosu	24
Tablo 16. Yol Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Tablosu	26
Tablo 17. Çevre Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Tablosu	27
Tablo 18. Tam İki Parçalı Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Tablosu	28

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
TABLO DİZİNİ.....	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
1.GİRİŞ.....	1
2. TANIMLAR ve TEOREMLER	3
3. ORTALAMA AYRIT ÖRTÜ SAYISI.....	8
3.1 Tanım	9
3.2 Motivasyon.....	18
3.3 Teoremler.....	19
3.4 Bazı Özel Çizgelerin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı.....	21
3.5 Bazı Özel Çizgelerin Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri	23
3.5.1. Tam Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri	23
3.5.2. Yıldız Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri	24
3.5.3. Yol Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri	25
3.5.4. Çevre Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri	26
3.5.5. Tam İki Parçalı Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri.....	28
4. ALGORİTMA	29
5. SONUÇLAR	30
REFERANSLAR	31
ÖZGEÇMİŞ.....	32

1.GİRİŞ

Ağlarda oluşan yavaşlık, kesinti ve güvenlik sorunu karmaşık birçok probleme sebep olmaktadır. Ulaşım, veri depolamada, taşıma problemlerinde ve haberleşmede oluşacak sorunlar bilişim dünyası için verilebilecek bazı örnek karmaşık sorunlardır. Karmaşık bir hal almış çok sayıdaki bir probleme karşılık çizge teori yardımıyla, modelleme ile problem sıradanlaştırılarak daha kolay çözüme gidilebilmektedir. Çizgelere; tepelerin merkezlere, ayrıtların ise aradaki bağa karşılık geldiği bir ağ yapısıdır diyebiliriz. Güncel hayattan bazı uygulamalar aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örneğin,

- Ulaşım planlamalarında en yakın yol yada yol güzergahlarını,
- İnternet şebekelerini,
- Lojistik şirketlerin taşıma planlamalarını da çizgelerle modelleyebiliriz.

Bazı sıkıntılı ve istenmeyen durumlarla karşılaşıldığında ağın nasıl tepki vereceğini bilmek bizim için önemli bir sorundur. Ağın gördüğü zarar önceden ölçülebilir ve boyutuna göre önceden bir çözüm üretilebilir ve buna göre bir ağ önerisinde bulunulabilir [1]. Oluşacak bazı durumlara bağlı olarak bu ağın ne kadar ve nasıl dayanacağı önemli bir sorundur. Bu durumda karşımıza “zedelenebilirlik” kavramı çıkar [2]. İletişim halinde olan bir ağ yapısında tepelerin ve ayrıtların zarar görmesinden sonra iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücüne zedelenebilirlik denir [2]. Bir ağ yapısında verinin ve bilgi akışının bir şekilde devam etmesi ile ilgili olarak bir ağın kararlılığı ve güvenilirliği her zaman temel prensibimizdir. Çizge teoride zedelenebilirlik parametreleri olarak, average covering number [3], average binding number [4], average lower connectivity [5], average scattering number [6], average lower independence number [7], average lower domination number [8], edge clique cover [9], daha önceden tanımlanmış parametrelerdir.

Ayrıca çizge teoride daha önceden çok sayıda parametre tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları tepe derecesi, klik, tepe geçişme, örtü kümesi sayısı, bağımsızlık sayısı, baskınlık sayısı, ayrıt örtü sayısı, ayrıt bağımsızlık sayısı, ayrıt baskınlık sayısı vb. gibi [10] parametreler tanımlanmıştır.

Çizgelerin zedelenebilirliğini ölçme sorunu günümüzde özellikle bilgisayar veya iletişim ağları alanında büyük ilgi görmektedir. Geçmişte çizgelerin zedelenebilirliğini tanımlayan birçok çizge teori parametresi önerilmiştir. En önemlisi, bağlantılılık sayısı (connectivity) [1] olarak adlandırılan parametre sıklıkla kullanılmıştır. Bağlantılılık sayısı en kötü durum olduğunda, çizge hakkında neler olduğunu her zaman doğru yansıtmaz. Son zamanlarda ağların (iletişim, bilgisayar, ulaşım) zedelenebilirliğine ve güvenilirliğine duyulan ilgi, bazıları yapısı gereği daha evrensel olan bir dizi başka ölçütlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur; örneğin, bakınız, [3-11]. Çizgelerde örtü ve ayrıt örtü sayıları ve ortalama parametreler incelenmesi önemli bir araştırma alanıdır. Bu kavramlardan yararlanılarak ortalama ayrıt sayısı bu tezde ilk kez tanımlanacaktır. Ortalama ayrıt sayısı için genel bilgiler verilecektir. Bazı özel çizgeler için sonuçlar verilecektir. Son olarak bu parametre için algoritma oluşturulacaktır.

2. TANIMLAR ve TEOREMLER

Bu bölümde daha önceden tanımlanan tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. [10] G çizgesi, tepe kümesi $V(G)$ ve ayrıt kümesi $E(G)$ olacak şekilde sonlu bir basit çizgeyi temsil eder. G çizgesinde n ve m sırasıyla tepe sayısını ve ayrıt sayısını gösterir.

Tanım 2.2. [10] Bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesinde, $V(G) - S'$ de ki her bir ayrıt S' nin en az bir ayrıtına komşuysa, ayrıtların $S \subseteq V(G)$ alt kümesi baskın kümedir. $\gamma(G)$ baskınlık sayısı, bir baskın kümenin minimal olanın eleman sayısıdır. Eleman sayısı $\gamma(G)$ olan bir baskın kümeye $\gamma(G)$ - kümesi denir.

Tanım 2.3. [10] Bir G çizgesinin örtü kümesi, G' nin her ayrıtı bu kümenin en az bir tepesine bitişik olacak şekilde G' nin tepelerinden oluşan bir kümedir. Bir G çizgesinin bir örtüsündeki minimum tepe sayısına G' nin örtü sayısı denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. [10] İzole tepe içermeyen her G çizgesi için, G' nin bir ayrıt örtü kümesi, her tepesi kümenin en az bir ayrıtıyla bitişik olacak şekilde G' nin ayrıtlarından oluşan bir kümedir. Başka bir deyişle, bir çizgenin ayrıt örtü kümesi, çizgenin tüm tepelerini birlikte karşılayan bir ayrıtlar kümesidir. Minimum ayrıt örtü kümesi, mümkün olan en küçük boyuttaki ayrıt örtü kümesidir. G' nin ayrıt örtü sayısı, G' nin minimum ayrıt örtü kümesinin sayısıdır ve $\alpha'(G)$ ile gösterilir.

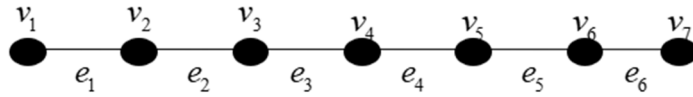
Tanım 2.5. [10] G' deki bir bağımsız kümesi, herhangi iki tepesi komşuluk olarak bitişik değilse, böyle bir kümedeki en büyük tepe sayısına G' nin bağımsızlık sayısı denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. [10] Bir G çizgesi üzerindeki bir eşleşme M , $E(G)$ ' nin ortak bir tepesine sahip herhangi bir ayrıt içermeyen bir alt kümesidir. Bir G çizgesindeki maksimum eşleşme M^* , G üzerinde mümkün olan en yüksek eleman sayısına sahip bir eşleşmedir [10].

Tanım 2.7. [1,12] Bir G çizgesinin bağlantılılığı, G' den çıkarılması bağlantısız veya önemsiz bir çizgeyle sonuçlanan minimum tepe sayısıdır ve $\kappa(G)$ ile gösterilir.

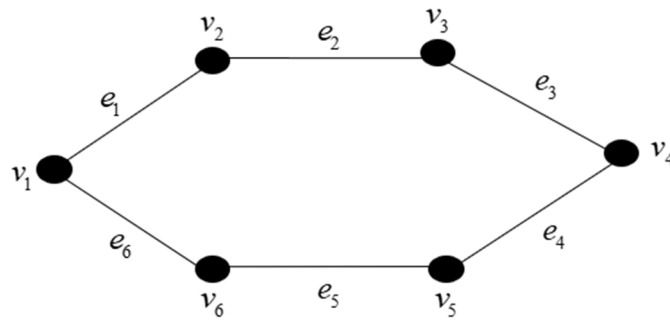
Tanım 2.8. [1,12] Bir G çizgesinin ayrıt bağlantılılığı, $\lambda(G) = \min\{|S|: S \subseteq E \text{ } G' \text{nin bir ayrıt kesim kümesi}\}$.

Tanım 2.9. [1,12] Uç tepeleri 1 dereceli, iç tepelerinin dereceleri 2 olan çizgeye **yol (path)** çizge denir. n tepeli yol çizgesi P_n ile gösterilir.



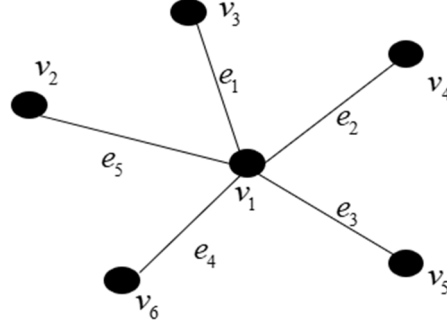
Şekil 1. P_7 yol çizgesi

Tanım 2.10. [1,12] Tüm tepelerinin dereceleri 2 olan çizgeye **çevre (cycle)** çizge denir. n tepeli bir çevre çizge n ayrıta sahiptir ve C_n ile gösterilir.



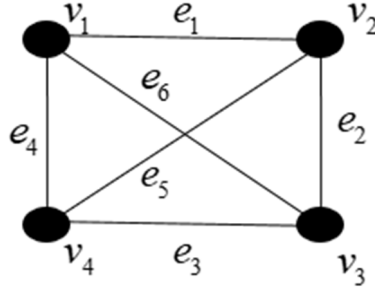
Şekil 2 C_6 çevre çizgesi

Tanım 2.11. [1,12] n tepeli bir G çizgesini, bir tepesi $n-1$ dereceli diğer tepeleri 1 dereceli ise bu çizgeye **yıldız** (star) çizge denir ve $K_{1,n-1}$ ile gösterilir. Ayrıtlarını sayısı $n-1$ ' dir.



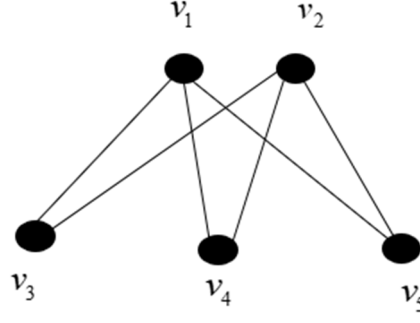
Şekil 3. $K_{1,5}$ yıldız çizgesi

Tanım 2.12. [1,12] n tepeli bir G çizgesinin, her tepesinin derecesi $n-1$ ise bu çizgeye **tam** (complete) çizge denir ve K_n ile gösterilir.



Şekil 4. K_5 tam çizgesi

Tanım 2.13. [1,12] Çizge teorisinde, ayrıtların her biri her iki kümede de birer bitiş tepesine bitişik ve bu şekilde iki ayrı kümeye ayrılabilen çizgelere **iki parçalı tam** çizge adı verilir ve $K_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 5. $K_{2,3}$ iki parçalı tam çizge

Tanım 2.14. [13] Henning [13] ortalama bağımsızlık ve ortalama baskınlık kavramlarını ortaya atmıştır. Bir G çizgesinin bir v tepe noktası için, $i_v(G)$ ile gösterilen düşük bağımsızlık sayısı, v' yi içeren G' nin maksimum bağımsız kümesinin minimum eleman sayısıdır ve $\gamma_v(G)$ ile gösterilen düşük baskınlık sayısı, v' yi içeren G' nin baskın kümesinin minimum eleman sayısıdır $i_{av}(G)$ ile gösterilen G' nin ortalama düşük bağımsızlık sayısı değeridir.

$$\frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} i_v(G) \gamma_{av}(G)$$

ile gösterilen G' nin ortalama düşük baskınlık sayısı

$$\frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} \gamma_v(G)$$

değeridir.

Tanım 2.15. [3] Doğan ve Dündar [3] ortalama örtü sayısı kavramını ortaya atmıştır. Yerel örtü sayısı, $\alpha_v(G)$ ile gösterilir ve v' yi içeren bir örtünün minimum mertebesidir. $\bar{\alpha}(G)$ ortalama örtü sayısı

$$\frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} \alpha_v(G)$$

olarak tanımlanır, burada n , G' nin derecesidir ve tüm n tepe için toplamdır.

Doğan ve Dündar'ın [3] ortalama örtü sayısı ile yaptıkları teoremler verilecektir.

Teorem. 2.1. [3] G , en az bir ayrıtlı çizge ise

$$\alpha(G) \leq \bar{\alpha}(G) < \alpha(G) + 1.$$

Teorem. 2.2. [3] G , en az bir ayrıtlı çizge ise

$$\alpha_v(G) = \alpha(G - v) + 1.$$

Teorem. 2.3. [3] H , herhangi bir G çizgesinin alt çizgesi ise

$$\bar{\alpha}(H) \leq \bar{\alpha}(G).$$

Teorem. 2.4. [3] β , G çizgesinin bağımsızlık sayısı ise ortalama örtü sayısı en fazla $\beta + \beta/n$ dir.

Teorem. 2.5. [3] G , tepe geçişli ise

$$\bar{\alpha}(G) = \alpha(G).$$

Teorem. 2.7. [3] G , bağlantılı bir çizge ve $n \geq 3$ olsun. Buna göre,

$$2 - \frac{1}{n} \leq \bar{\alpha}(G) \leq n - 1.$$

Teorem. 2.8. [3] G , n tepeli bir çizge ve v , -1 dereceli ise

$$\bar{\alpha}(G - v) < \bar{\alpha}(G).$$

Teorem. 2.9. [3] G_1 ve G_2 aynı dereceli ve $(G_1) < \beta(G_2)$ ise

$$\bar{\alpha}(G_1) > \bar{\alpha}(G_2).$$

Tanım 2.16. [9] (Edge Cover Clique problem-ECC) Ayrıt klik örtüsü (ECC) problemi, G' de bir dizi cliğin seçilmesiyle ilgili olup öyle ki E' deki her ayrıt kliklerden en az birine ait olmalıdır.

Tanım 2.17. [9] (Mean Edge Covering – Average Covering Index) Bir ECC de ortalama ayrıt örtü sayı indeksi

$$\frac{\sum_{i=1}^k |C_i| |C_i - 1|}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} \gamma_v(G)$$

eşittir, burada $C_1, C_2, \dots, C_k$ ifadeleri ECC içindeki kliklerdir.

3. ORTALAMA AYRIT ÖRTÜ SAYISI

Yukarıda verilen daha önce birçok zedelenebilirlik parametresine istinaden ortalama parametrelerin bazı durumlarda en kötü durumlara dayanan ilgili ölçütlerden daha yararlı olduğu bulunmuştur [14]. Örneğin, bir çizgedeki ayrıtlar arasındaki ortalama mesafe mimaride bir araç olarak tanıtılmış ve daha sonra ulaşım ağlarını analiz ederken çaptan daha değerli olduğu ortaya çıkmıştır (Bu konu ile ilgili mükemmel araştırma için bkz. [14]). Daha önceden yapılmış olan ortalama örtü sayısı ile ilgili çalışmalar ve ayrıt örtü sayısı ile ilgili çalışmalardan faydalanılarak ortalama ayrıt sayısı parametresi ele alınıp bizim tarafımızdan ilk kez tanımlanacaktır.

3.1 Tanım

Yeni bir çizge parametresi tanımlıyoruz. Bir G çizgesinin bir e ayrıtı için, $\alpha'_e(G)$ ile gösterilen düşük ayrıt örtü sayısı, e' yi içeren bir G ayrıt örtü kümesinin minimum eleman sayısıdır. Bir G çizgesinin ortalama ayrıt örtü sayısı,

$$\alpha'_{av}(G) = \frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G)$$

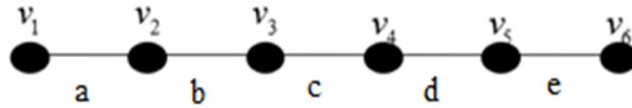
'dir, burada $\sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G)$, G nin tüm ayrıtları üzerindeki toplamı ifade edecektir. Açıkça, herhangi bir G çizgesi için,

$$\alpha'(G) = \min\{\alpha'_e(G) \mid e \in E(G)\}$$

ve böylece

$$\alpha'_{av}(G) \geq \alpha'(G) .$$

Örnek 1: Yaptığımız tanımla ilgili olarak, Şekil 6 da verilen 6 tepeli yol çizgesini ele alalım. Oluşturulabilecek kümeleri inceleyerek hangi kümelerin ayrıt örtü kümesi olup olmadığını ve küme eleman sayılarını inceleyelim.



Şekil 6. P_6 yol çizgesi

Kümeler	Ayrıt Örtü Kümesi Durumu	Küme Eleman Sayısı
$S_1 = \{a\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_2 = \{b\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_3 = \{c\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_4 = \{d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_5 = \{e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_6 = \{a, b\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_7 = \{a, c\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_8 = \{a, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_9 = \{a, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{10} = \{b, c\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{11} = \{b, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{12} = \{b, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{13} = \{c, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{14} = \{c, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{15} = \{d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{16} = \{a, b, c\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{17} = \{a, b, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{18} = \{a, b, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{19} = \{a, c, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{20} = \{a, c, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	3
$S_{21} = \{a, d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{22} = \{b, c, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{23} = \{b, c, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{24} = \{b, d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{25} = \{c, d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{26} = \{a, b, c, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{27} = \{a, b, c, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	4
$S_{28} = \{a, b, d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	4
$S_{29} = \{a, c, d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	4
$S_{30} = \{b, c, d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{31} = \{a, b, c, d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	5

Tablo 1. P_6 yol çizgesinin tüm alt kümeleri için ayrıt örtü küme durumu ve ayrıt örtü küme sayıları

Tablo 1 de her bir ayrıt için oluşturulan tüm alt kümelerinde hangilerinin ayrıt örtü kümesi olarak seçilebileceği verilmiştir. Tanımımıza göre her bir ayrıt için ayrı ayrı durumlarını inceleyelim.

Öncelikle a ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ele alalım.

a Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{20} = \{a,c,e\}$	3
$S_{27} = \{a,b,c,e\}$	4
$S_{28} = \{a,b,d,e\}$	4
$S_{29} = \{a,c,d,e\}$	4
$S_{31} = \{a,b,c,d,e\}$	5
a elemanını içeren en küçük eleman sayısı	3

Tablo 2. P_6 yol çizgesinin a ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

b ayrıtını içeren kümeleri ele alalım.

b Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{27} = \{a,b,c,e\}$	4
$S_{28} = \{a,b,d,e\}$	4
$S_{31} = \{a,b,c,d,e\}$	5
b elemanını içeren en küçük eleman sayısı	4

Tablo 3. P_6 yol çizgesinin b ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

c ayrıtı:

c Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman sayısı
$S_{20} = \{a,c,e\}$	3
$S_{27} = \{a,b,c,e\}$	4
$S_{29} = \{a,c,d,e\}$	4
$S_{31} = \{a,b,c,d,e\}$	5
c elemanını içeren en küçük eleman sayısı	3

Tablo 4. P_6 yol çizgesinin c ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

d ayrıtı:

d Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{28} = \{a,b,d,e\}$	4
$S_{29} = \{a,c,d,e\}$	4
$S_{31} = \{a,b,c,d,e\}$	5
d elemanını içeren en küçük eleman sayısı	4

Tablo 5. P_6 yol çizgesinin d ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

e ayrıtı:

e Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{20} = \{a,c,e\}$	3
$S_{27} = \{a,b,c,e\}$	4
$S_{28} = \{a,b,d,e\}$	4
$S_{29} = \{a,c,d,e\}$	4
$S_{31} = \{a,b,c,d,e\}$	5
e elemanını içeren en küçük eleman sayısı	3

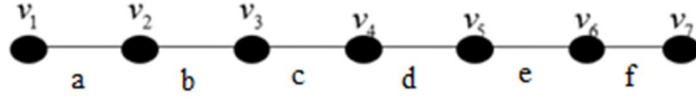
Tablo 6. P_6 yol çizgesinin e ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

Şimdi bulunan değerleri formülize edip tanıma uyguladığımızda

$$\alpha'_{av}(G) = \frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G) = \frac{3+4+3+4+3}{5} = 3,4$$

elde edilmektedir.

Örnek 2: Yaptığımız tanımla ilgili olarak, Şekil 7 de verilen 7 tepeli yol çizgesini ele alalım. Oluşturulabilecek kümeleri inceleyerek hangi kümelerin ayrıt örtü kümesi olup olmadığını ve küme eleman sayılarını inceleyelim.



Şekil 7. P_7 yol çizgesi

Kümeler	Ayrıt Örtü Kümesi Durumu	Küme Eleman Sayısı
$S_1 = \{a\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_2 = \{b\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_3 = \{c\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_4 = \{d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_5 = \{e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_6 = \{f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_7 = \{a, b\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_8 = \{a, c\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_9 = \{a, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{10} = \{a, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{11} = \{a, f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{12} = \{b, c\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{13} = \{b, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{14} = \{b, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{16} = \{c, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{17} = \{c, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{18} = \{c, f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{19} = \{d, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{20} = \{d, f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{21} = \{e, f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{22} = \{a, b, c\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{23} = \{a, b, d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{24} = \{a, b, e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{25} = \{a, b, f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$

$S_{26} = \{a,c,d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{27} = \{a,c,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{28} = \{a,c,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{28} = \{a,d,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{30} = \{a,d,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{31} = \{a,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{32} = \{b,c,d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{33} = \{b,c,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{34} = \{b,c,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{35} = \{b,d,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{36} = \{b,d,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{37} = \{b,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{38} = \{c,d,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{39} = \{c,d,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{40} = \{c,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{41} = \{d,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{42} = \{a,b,c,d\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{43} = \{a,b,c,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{44} = \{a,b,c,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{45} = \{a,b,d,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{46} = \{a,b,d,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	4
$S_{47} = \{a,b,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{48} = \{a,c,d,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{49} = \{a,c,d,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	4
$S_{50} = \{a,c,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	4
$S_{51} = \{a,d,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{52} = \{b,c,d,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{53} = \{b,c,d,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{54} = \{b,c,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{55} = \{b,d,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{56} = \{c,d,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{57} = \{a,b,c,d,e\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	$\emptyset$
$S_{58} = \{a,b,c,d,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	5
$S_{59} = \{a,b,c,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	5
$S_{60} = \{a,b,d,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	5
$S_{61} = \{a,c,d,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	5

$S_{62} = \{b,c,d,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesi Değildir	5
$S_{63} = \{a,b,c,d,e,f\}$	Ayrıt Örtü Kümesidir	6

Tablo 7. P_7 yol çizgesinin tüm alt kümeleri için ayrıt örtü küme durumu ve ayrıt örtü küme sayıları

Tablo 7 de her bir ayrıt için oluşturulan tüm alt kümelerinde hangilerinin ayrıt örtü kümesi olarak seçilebileceği verilmiştir. Tanımımıza göre her bir ayrıt için ayrı ayrı durumlarını inceleyelim.

Öncelikle a ayrıtını içeren kümeleri ele alalım.

a Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{46} = \{a,b,d,f\}$	4
$S_{49} = \{a,c,d,f\}$	4
$S_{50} = \{a,c,e,f\}$	4
$S_{58} = \{a,b,c,d,f\}$	5
$S_{69} = \{a,b,c,e,f\}$	5
$S_{60} = \{a,b,d,e,f\}$	5
$S_{61} = \{a,c,d,e,f\}$	5
$S_{63} = \{a,b,c,d,e,f\}$	5
a elemanını içeren en küçük eleman sayısı	4

Tablo 8. P_7 yol çizgesinin a ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

b ayrıtını içeren kümeleri ele alalım.

b Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{46} = \{a,b,d,f\}$	4
$S_{58} = \{a,b,c,d,f\}$	5
$S_{69} = \{a,b,c,e,f\}$	5
$S_{60} = \{a,b,d,e,f\}$	5
$S_{63} = \{a,b,c,d,e,f\}$	5
b elemanını içeren en küçük eleman sayısı	4

Tablo 9. P_7 yol çizgesinin b ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

c ayrıtı:

c Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{49} = \{a,c,d,f\}$	4
$S_{50} = \{a,c,e,f\}$	4
$S_{58} = \{a,b,c,d,f\}$	5
$S_{69} = \{a,b,c,e,f\}$	5
$S_{61} = \{a,c,d,e,f\}$	5
$S_{63} = \{a,b,c,d,e,f\}$	6
c elemanını içeren en küçük eleman sayısı	4

Tablo 10. P_7 yol çizgesinin c ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

d ayrıtı:

d Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{46} = \{a,b,d,f\}$	4
$S_{49} = \{a,c,d,f\}$	4
$S_{58} = \{a,b,c,d,f\}$	5
$S_{60} = \{a,b,d,e,f\}$	5
$S_{61} = \{a,c,d,e,f\}$	5
$S_{63} = \{a,b,c,d,e,f\}$	6
d elemanını içeren en küçük eleman sayısı	4

Tablo 11. P_7 yol çizgesinin d ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

e ayrıtı:

e Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{50} = \{a,c,e,f\}$	4
$S_{69} = \{a,b,c,e,f\}$	5
$S_{60} = \{a,b,d,e,f\}$	5
$S_{61} = \{a,c,d,e,f\}$	5
$S_{63} = \{a,b,c,d,e,f\}$	6
e elemanını içeren en küçük eleman sayısı	4

Tablo 12. P_7 yol çizgesinin e ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

f ayrıtı :

f Ayrıtını İçeren Ayrıt Kümeler	Küme Eleman Sayısı
$S_{49} = \{a,c,d,f\}$	4
$S_{50} = \{a,c,e,f\}$	4
$S_{58} = \{a,b,c,d,f\}$	5
$S_{69} = \{a,b,c,e,f\}$	5
$S_{60} = \{a,b,d,e,f\}$	5
$S_{61} = \{a,c,d,e,f\}$	5
$S_{63} = \{a,b,c,d,e,f\}$	6
f elemanını içeren en küçük eleman sayısı	4

Tablo 13. P_7 yol çizgesinin f ayrıtını içeren ayrıt örtü kümeleri ve eleman sayıları

Şimdi bulunan değerleri formülize edip tanıma uyguladığımızda

$$\alpha'_{av}(G) = \frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G) = \frac{4+4+4+4+4+4}{6} = 4$$

elde edilmektedir.

3.2 Motivasyon

G_1 ve G_2 Şekil 8 de verilen çizgeler olsun. Burada şu sorular sorulabilir: Ortalama ayrıt örtü sayısı uygun bir parametre midir? Ortalama ayrıt örtü sayısı ayırt edici bir parametre midir? Başka bir deyişle, ortalama ayrıt örtü sayısı G_1 ve G_2 çizgeleri arasında ayrım yapar mı? Örneğin, Şekil 8'deki çizgeleri ele alalım.



Şekil 8. G_1 ve G_2 çizgeleri

Bu çizgelerin ortalama örtü sayılarının eşit olduğu kolayca görülebilir.

$$\bar{\alpha}(G_1) = \bar{\alpha}(G_2) = \frac{19}{7}.$$

Öte yandan, G_1 ve G_2 'nin ortalama ayrıt örtü sayıları farklıdır.

$$\alpha'_{av}(G_1) = \frac{13}{3}$$

$$\alpha'_{av}(G_2) = \frac{29}{6}$$

Dolayısıyla, ortalama ayrıt örtü sayısı G_1 ve G_2 çizgelerinin zedelenebilirliğini ayırt etmek için daha iyi bir parametredir. Sadece bu örnek için değil bir çizge yapısı için ayırt edebilecek yeni bir parametredir.

Ortalama parametrelerin, bazı koşullarda en kötü durumlara dayanan ilgili ölçütlerden daha yararlı olduğu bulunmuştur [14]. Bu durumlar da gözönüne alındığında ortalama ayrıt örtü sayısı yararlı bir parametredir.

3.3 Teoremler

Bu bölümde, bizim tarafımızdan bulunmuş bir çizgenin ortalama ayrıt örtü sayısı için teoremler verilmiştir.

Teorem 3.3.1. G , en az bir ayrıtı olan bir çizge ise,

$$\alpha'(G) \leq \alpha'_{av}(G) < \alpha'(G) + 1$$

dir.

Kanıt. Herhangi bir G çizgesi için,

$$\alpha'(G) = \min\{\alpha'_e(G) \mid e \in E(G)\}$$

ve dolayısıyla

$$\alpha'_{av}(G) \geq \alpha'(G)$$

elde edilir. Öte yandan, bir minimum ayrıt baskınlık kümesinin hiçbir zaman bir çizgenin tüm ayrıtlarını içermediği kolayca görülebilmekte olup bir çizgenin bir ayrıtı varsa, o zaman her minimum ayrıt baskınlığı en az bir ayrıta sahiptir.

Dolayısıyla, en az bir e ayrıtı için,

$$\alpha'_{av}(G) < \alpha'(G) + 1$$

olur. Dolayısıyla, ikinci eşitsizlik kesindir. Böylece

$$\alpha'(G) \leq \alpha'_{av}(G) < \alpha'(G) + 1$$

elde edilir.

Teorem 3.3.2. G , en az bir ayrıtı olan bir çizge ise,

$$\frac{n}{2} \leq \alpha'_{av}(G)$$

dir.

Kanıt. Bir G çizgesinin ayrıt örtüsü, $\alpha'(G)$, G 'nin tüm tepelerini kapsayan ayrıtları içeren $E(G)$ 'nin bir alt kümesidir. Yani, her $u \in V(G)$ için bir $v \in V(G)$ vardır, öyle ki $(u, v) \in \alpha'(G)$. Bu nedenle

$$\alpha'_e(G) \geq \frac{n}{2}$$

olduğu görülür. Yani

$$\sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G) \geq \frac{nm}{2}$$

olur. Ortalama ayrıt örtü sayısı tanımından,

$$\frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G) \geq \frac{\frac{nm}{2}}{m}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$\frac{n}{2} \leq \alpha'_{av}(G)$$

sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.3.3. G , en az bir ayrıtı olan bir çizge ise,

$$\alpha'_{av}(G) \leq n - 1$$

dir.

Kanıt. Herhangi bir G çizgesi için $\alpha'_e(G) \leq n - 1$ olduğu açıktır. Yani

$$\sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G) \leq (n - 1)m$$

olduğu kolayca görülür. Ortalama ayrıt örtü sayısının tanımından,

$$\frac{1}{|E(G)|} \sum_{e \in E(G)} \alpha'_e(G) \leq \frac{(n-1)m}{m}.$$

Dolayısıyla,

$$\alpha'_{av}(G) \leq n - 1$$

elde ederiz.

Teorem 3.3.4. [15] G , en az iki tepesi olan basit bağlantılı bir çizge ise,

$$\alpha'(G) + M^*(G) = |V(G)| = n.$$

Teorem 3.3.5. G , en az iki tepesi olan basit bağlantılı bir çizge ise,

$$n - M^*(G) \leq \alpha'_{av}(G) < n - M^*(G) + 1.$$

Kanıt. Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.5 den

$$n - M^*(G) \leq \alpha'_{av}(G) < n - M^*(G) + 1$$

elde edilir.

3.4 Bazı Özel Çizgelerin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı

Bu bölümde bazı çizge sınıflarının ortalama ayrıt örtü sayılarını vereceğiz.

Teorem 3.4.1. K_n , n tepeli tam çizge olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$\alpha'_{av}(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Kanıt. Teorem 3.3.2 den K_n tam çizgesi için $\alpha'_{av}(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sonucu kolayca elde edilir.

Teorem 3.4.2. $K_{1,n-1}$, n tepeli yıldız çizge olmak üzere $n \geq 3$ için,

$$\alpha'_{av}(K_{1,n-1}) = n - 1.$$

Kanıt. Teorem 3.3.3 den yıldız çizgesi için

$$\alpha'_{av}(K_{1,n-1}) = n - 1$$

kolaylıkla elde edilir.

Aşağıda verilen Teoremler, Teorem 3.4.1 ve 3.4.2 ye benzer şekilde elde edilmiş olup kanıtları verilmeyecektir.

Teorem 3.4.3. P_n , n tepeli yol çizgesini ortalama ayrıt örtü sayısı

$$\alpha'_{av}(P_n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ tek ise;} \\ \frac{n^2-2}{2n-2} & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Teorem 3.4.4. C_n , n tepeli çevre çizgesini ortalama ayrıt örtü sayısı $n \geq 3$ için,

$$\alpha'_{av}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ dir.}$$

Teorem 3.4.5. $K_{r,s}$ tam iki parçalı çizge olmak üzere ortalama ayrıt örtü sayısı

$$\alpha'_{av}(K_{r,s}) = \begin{cases} r, & s < r; \\ s, & s \geq r. \end{cases}$$

3.5 Bazı Özel Çizgelerin Ayırıt Örtü Sayısı Değerleri

Bu bölümde bazı özel çizgelerin tabloları verilmiştir.

3.5.1. Tam Çizgenin Ortalama Ayırıt Örtü Sayısı Değerleri

Tam Çizgenin Ortalama Ayırıt Örtü Sayısı	
n	$\alpha'_{av}(K_n)$
3	$\frac{3}{2}$
4	2
5	$\frac{5}{2}$
6	3
7	$\frac{7}{2}$
8	4
9	$\frac{9}{2}$
10	5
11	$\frac{11}{2}$
12	6
13	$\frac{13}{2}$
50	25
100	50
200	100
300	150
400	200
500	250
600	300
700	350
800	400
900	450
1000	500
1001	$\frac{1001}{2}$

Tablo 14. Tam Çizgenin Ortalama Ayırıt Örtü Sayısı Tablosu

Tablo 14 de tam çizgenin tepe dereceleri 3 ile 1001 aralığında karışık olarak ele alınmıştır. Bu tepe dereceleri değerlerin ortalama ayırıt sayıları değerlerinin tepe derecelerinin yarısı olduğu görülmüştür. Ortalama ayırıt sayısı parametresinin ayırıt edici olduğu görülmektedir.

3.5.2. Yıldız Çizgenin Ortalama Ayırıt Örtü Sayısı Değerleri

Yıldız Çizgenin Ortalama Ayırıt Örtü Sayısı	
n	$\alpha'_{av}(K_{1,n-1})$
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8
10	9
11	10
12	11
13	12
14	13
15	14
20	19
50	49
100	99
200	199
300	299
400	399
500	499
600	599
700	699
800	799
900	899
1000	999
1001	1000

Tablo 15. Yıldız Çizgenin Ortalama Ayırıt Örtü Sayısı Tablosu

Tablo 15 de yıldız çizgenin tepe dereceleri karışık değerleri ele alınıp, bu değerlerin ortalama ayırıt sayıları değerlerinin tepe derecelerinin bir eksiği olduğu görülmüştür. Ortalama ayırıt sayısının parametresinin yıldız çizgeler için de ayırıt edici olduğu görülmektedir.

3.5.3. Yol Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri

Yol Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı	
n	$\alpha'_{av}(P_n)$
3	2
4	$\frac{7}{3}$
5	3
6	$\frac{17}{5}$
7	4
8	$\frac{31}{7}$
9	5
10	$\frac{49}{9}$
11	6
12	$\frac{71}{11}$
13	7
14	$\frac{98}{13}$
15	8
20	$\frac{199}{19}$
50	$\frac{1249}{49}$
100	$\frac{4999}{99}$
200	$\frac{19999}{199}$
300	$\frac{44999}{299}$

400	$\frac{79999}{399}$
500	$\frac{124999}{499}$
600	$\frac{179999}{599}$
700	$\frac{244999}{699}$
800	$\frac{319999}{799}$
900	$\frac{404999}{899}$
1000	$\frac{499999}{999}$
1001	5001

Tablo 16. Yol Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Tablosu

Tablo 16 da yol çizgenin 3 ile 1001 tepe dereceleri karışık olarak ele alınmıştır. Bu tepe derecelerinin değerlerin ortalama ayrıt sayıları değerlerinin tepe derecelerinin yarıya yakın olduğu görülmüştür. Ortalama ayrıt sayısının yol çizgiler için parametrenin ayrıt edici olduğu görülmektedir.

3.5.4. Çevre Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri

Çevre Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı	
n	$\alpha'_{av}(C_n)$
3	$\frac{3}{2}$
4	2
5	$\frac{5}{2}$
6	3
7	$\frac{7}{2}$
8	4

9	$\frac{9}{2}$
10	5
11	$\frac{11}{2}$
12	6
13	$\frac{13}{2}$
14	7
15	$\frac{15}{2}$
20	10
50	25
100	50
200	100
300	150
400	200
500	250
600	300
700	350
800	400
900	450
1000	500
1001	$\frac{1001}{2}$

Tablo 17. Çevre Çizgenin Ortalama Ayırt Örtü Sayısı Tablosu

Tablo 17 de çevre çizgenin tepe dereceleri 3 ile 1001 aralığında karışık değerleri için ele alınıp, bu değerlerin ortalama ayırt sayıları değerlerinin tepe derecelerinin yarısı olduğu görülmüştür. Ortalama ayırt sayısının parametresinin değerleri sabit olmayıp çevre çizgiler için de ayırt edici olduğu görülmektedir.

3.5.5. Tam İki Parçalı Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Değerleri

Tam İki Parçalı Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı		
r	s	$\alpha'_{av}(K_{r,s})$
3	2	3
4	2	4
5	3	5
6	5	6
7	7	7
8	8	8
10	11	11
11	12	12
12	14	14
13	15	15
14	16	16
15	20	20
20	30	30
50	60	60
100	200	200
200	300	300
300	400	400
400	100	400
500	200	500
600	600	600
700	800	800
800	700	800
900	500	900
1000	200	1000
1001	100	1001

Tablo 18. Tam İki Parçalı Çizgenin Ortalama Ayrıt Örtü Sayısı Tablosu

Tablo 18 de iki parçalı tam çizgenin tepe dereceleri karışık olarak ele alınmıştır. Bu tepe derecelerinin değerlerin ortalama ayrıt sayıları değerlerinin parçalı kısımlardan büyük olan değer olduğu görülmüştür. Ortalama ayrıt sayısının iki parçalı tam çizgenin çizgeler için parametrenin ayrıt edici olduğu görülmektedir.

4. ALGORİTMA

Bu bölümde, bir çizgenin ortalama ayrıt örtü sayısının değerlendirilmesi için bir algoritma verilmektedir. Bu algorithmada aşağıda tanımladığımız bazı değişkenleri kullanıyoruz:

m çizgenin ayrıt sayısıdır,

$e_1, e_2, \dots, e_m$ çizgenin ayrıtlarıdır,

α' – set ayrıt örtü sayısını veren kümedir,

$\alpha'_{av}(G)$ çizgenin ortalama ayrıt örtü sayısıdır,

Toplam, her ayrıt için ortalama düşük ayrıt örtü sayısının toplamıdır.

Adım 0. Başlat.

Adım 1. Çizgenin α' – set ve ayrıt örtü sayısını bul.

Adım 2. For $i = 1$ to m do

Adım 2.1. Eğer $e_i \alpha'$ – set 'un elemanı ise, $\alpha'_e(G) = \alpha'(G)$;
değilse $\alpha'_e(G) = \alpha'(G) + 1$.

Adım 2.2. $Toplam = Toplam + \alpha'_e(G)$.

Adım 3. $\alpha'_{av}(G) = Toplam/m$.

Adım 4. Dur.

Ayrıt örtü sayısını bulmak için bilinen herhangi bir algoritmayı kullanabiliriz. Literatürde birçok algoritma vardır; algoritmanın ilk adımında ayrıt örtü sayısını bulmak için bunlardan herhangi birini kullanabiliriz (bunun bir örneği için bkz. [16]). Bu algoritma kullanılarak ayrıt örtü sayısı incelenebilecektir.

5. SONUÇLAR

Ağları oluştururken en önemli kriterler verimlilik ve güvenilirliktir. Bir çizgenin incelenmesi güvenilirliği için yakın zamanda tanıtılan ortalama ayrıt örtü sayısı adı verilen yeni bir ölçütü araştırıyoruz.

Bilişim teknolojilerinde sorunsuz ve hızlı iletişim teknolojideki hızlı gelişmenin sonucunda büyük önem taşımaktadır. Zedelenmenin sisteme verebileceği olası hasarları ön görmek, düzeltilmesi için gereken etkin ve verimli tedbirleri belirlemek belki de en önemlisi tasarım aşamasında bu olası durumları tespit edip tasarım kararlarına yön vermek çözülmesi gereken önemli bir problemdir. Problemin çözümünün ilk adımı, zedelenmenin doğru ve hassas şekilde ölçümüdür. Çalışmanın amacı; bu ölçümü doğru ve etkin şekilde yapan iletişim ağları odaklı yeni yöntemler önermektir. Bunun yanı sıra önerilen yeni yöntemlerle daha önceki yöntemlerin karşılaştırılması da amaçlanmaktadır. Bir problem oluşmuş ise nasıl çözümleneceği, problem oluşmamış ise oluşma durumuna yönelik nasıl önlemler alınacağı hakkında bilgi sahibi olmamızı sağlar. Bu tarz ölçümler ağ yapılarında tasarım aşamasındayken oluşabilecek sorunlara karşı önlem alınmasında fayda sağlar. Çizge teori ile ağlar henüz tasarım aşamasındayken ağın güvenli olup olmadığının görülmesini ve daha güvenli bir şekilde ağ yeniden nasıl tasarlanmalı sorusuna yanıt bulunmasını sağlar. Bu çalışma ile bir ağın ayrıt ve ortalama kavramlarını birleştirerek güvenli şekilde hangi yapıda tasarlanması gerektiği görülebilecektir.

Örtü sayısı günümüzde oldukça öneme sahiptir. Bu parametrelerden faydalanarak ortalama ayrıt sayısı tanımlanmış ve bazı genel sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca bazı özel çizgeler için de formüller oluşturulmuştur.

Yukarıda verilen tablolardan görüldüğü üzere Tablo 14 de verilen tam çizge sonuçlarından, Tablo 15 de verilen yıldız çizge sonuçlarından, Tablo 16 da verilen yol çizge sonuçlarından, Tablo 17 de verilen çevre çizge sonuçlarından ve Tablo 18 de verilen iki parçalı tam çizgellerinin sonuçlarından tümünde ortalama ayrıt örtü sayısı her çizge için farklı değerler almıştır. Hiç bir durumda değerler sabit olarak kalmamıştır. Bundan dolayı ortalama ayrıt örtü sayısı parametresinin oldukça ayırıcı olduğu görülmektedir. Bu parametre yardımıyla çizgeler hakkında bilgiler elde edilebilecektir. Verilen algoritma ile ortalama ayrıt sayısı bulunabilecektir.

Aynı tepeye ve aynı ayrıta sahip çizgeler arasından daha kararlı olanı seçmek istiyorsak, bunun bir yolu ortalama ayrıt örtü sayısı diğerlerinden daha az olan çizgeyi seçmektir. Bu yapılar incelendiğinde, ortalama ayrıt örtü sayısı faydalı bir parametredir.

REFERANSLAR

- [1] Bondy J. A., Murty U. S. R., Graph theory with applications, The Macmillan Press Ltd., Ontario, Canada, 1976, 270 s
- [2] Barefoot C.A., Entringer R., Swart C., Vulnerability in graphs a comparative survey, J. Combin. Math. Combin. Comput. 1 (38), 1987, 13–22.
- [3] Dogan D., Dündar. P., The average covering number of a graph, Journal of Applied Mathematics, Volume 2013 , Article ID 849817 , <https://doi.org/10.1155/2013/849817>
- [4] Aslan E., The average binding number of graphs. Scienceasia, 2019, 45/1,85-91
- [5] Aslan E., The average lower connectivity of graphs. J Appl Math, 2014, 807834.
- [6] Aslan E., Kilinc D., Yucalar F., Borandag E. The average scattering number of graphs. RAIRO – Theor Inf Appl 2016, 50(3), 263–272.
- [7] Turaci T., Aytac A. XXI. Ulusal Matematik Sempozyumu, Total Grafların Average Lower Independence Değeri. İstanbul, 2008.
- [8] Aytac V. Average lower domination number in graphs. CR Acad Bulg Sci, 2012, 65(12), 1665–1674.
- [9] Conte A., Grossi R., Marino, A., Large-scale clique cover of real-world networks, Information & Computation, 2019 (Preprint).
- [10] Harary F. Graph Theory. MA: Addison-Wesley . Reading, 1994, pp 46.
- [11] Bagga K. S., Beineke L. W., Pippert R. E., Lipman M. J., A classification scheme for vulnerability and reliability parameters of graphs. Math. Comput. Modelling, 1993, 17(11), 13-16.
- [12] Chartrand G., Lesniak L., Graphs and Digraphs (2nd edn). Wadsworth, Monterey, CA, 1986.
- [13] Henning M. A., Trees with equal average domination and independent domination numbers. Ars Combinatoria, 2004, 71, 305-318.
- [14] Plesnik J., On the sum of all distances in a graph or digraph. Journal of Graph Theory, 1984, 8, No 1, 1-21.
- [15] Bondy J. A., Murty U. S. R., Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 244, 2008, 654 s.
- [16] Grigoriev A., Marchal B., Usotskaya N., Algorithms for the minimum edge cover of H-subgraphs of a Graph. Lecture Notes in Computer Science, 2010, 5901, 452-464.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşe TEZEL YOLCU

Doğum Yeri ve Yılı :

Telefon :

e-posta :

İş Deneyimi

2009-(mevcut) : Satış ve Performans Yetkilisi

Ziraat Bankası Manisa Bölge Yöneticiliği

2004-2009 : Matematik Öğretmeni

Manisa Sınav Dershanesi

2002-2004 : Matematik Öğretmeni

İzmir Dokuz Eylül Dershanesi

Eğitim

2004 : Orta Öğretim Alan Öğretmenliği Bölümü, Tezsiz

Yüksek Lisans

Dokuz Eylül Üniversitesi

2002 : Matematik Bölümü, Lisans

Ege Üniversitesi

1997 : Hayrettin Duran Lisesi

Yabancı Dil : İngilizce