

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

ÇİZGELERDE EŞ BÜTÜNLÜK DEĞERİNİN İNCELENMESİ

Eray ŞAM

**Danışman
Doç. Dr. Derya DOĞAN DURGUN**



MANİSA-2023

ERAY ŞAM

ÇİZGELERDE EŞ BÜTÜNLÜK DEĞERİNİN İNCELENMESİ

2023

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

03.01.2023
Eray ŞAM



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	IV
TEŞEKKÜR	VI
ÖZET	VII
ABSTRACT	VIII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. Çizgelerde Bazı Temel Tanımlar	5
2.2. Bazı Özel Çizgeler	7
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	12
3.1. Zedelenebilirlik	12
3.2. Eş Bütünlük Değeri (Equi-Integrity)	16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	19
4.1. Eş Bütünlük Değeri Üzerine Araştırmalar	19
4.2. Bazı Transformasyon Çizgelerin Eş Bütünlük Değeri	32
4.3. Komşu Eş Bütünlük Değeri	33
4.4. Komşu Eş Bütünlük Değeri İçin Bazı Alt Sınırlar	41
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

T	Ağaç(Tree) çizge
$\kappa(G)$	Bağlantılılık(Connectivity) sayısı
$\gamma(G)$	Baskınlık sayısı
$\cup$	Birleşim
$I(G)$	Bütünlük(Integrity) değeri
C_n	Çevre(Cycle) çizge
G^*	Diken(Thorn) çizge
$P_{n,k}$	Diken çubuk(Thorn rod) çizge
$S_{k,t}$	Diken yıldız(Thorn star) çizge
$P_{n,p,k}$	Diken yol(Thorn path) çizge
$EI(G)$	Eş bütünlük(Equi-integrity) değeri
$\mathbb{E}(G)$	G çizgesinin ayrıtlar kümesi
$\mathbb{V}(G)$	G çizgesinin tepeler kümesi
$\Delta(G)$	G çizgesinin maksimum tepe derecesi
$\delta(G)$	G çizgesinin minimum tepe derecesi
$N_G(v), N(v)$	G çizgesinde v tepesinin açık komşuluğu
$N[v]$	G çizgesinde v tepesinin kapalı komşuluğu
$\deg_G(v), \deg(v)$	G çizgesinde v tepesinin derecesi
$\text{diam}(G)$	G çizgesinin çapı
$\text{rad}(G)$	G çizgesinin yarı çapı
G^{xyz}	G çizgesinin transformasyonu
$G \square H$	G ve H çizgelerinin kartezyen çarpım çizgesi
$w(G-S)$	$G-S$ çizgesindeki bileşen sayısı
$m(G-S)$	$G-S$ çizgesindeki en büyük bileşenin tepe sayısı
$c(G / S)$	G / S çizgesindeki en büyük bileşenin tepe sayısı

$H_{m,n}$	Harary çizge
$K_{m,n}$	İki parçalı(Complete Bipartite) tam çizge
$\sqrt{}$	Karekök fonksiyonu
$K(G)$	Komşu bağlantılılık(Neighbor connectivity) sayısı
$NEI(G)$	Komşu eş bütünlük(Neighbor equi integrity) değeri
$Nr(G)$	Komşu rupture değeri
G_n^k	n tepeli G çizgesinin k.ncı kuvveti
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$r(G)$	Rupture değeri
C_n^m	Rüzgar gülü(Windmill) çizge
$sc(G)$	Scattering değeri
$ S $	S kümesinin eleman sayısı
K_n	Tam(Complete) çizge
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
P_n^+	Tarak(Comb) çizge
W_n	Tekerlek(Wheel) çizge
$T(G)$	Tenacity değeri
$VNI(G)$	Tepe komşu bütünlük(Vertex-Neighbor integrity) değeri
$t(G)$	Toughness değeri
$Kite_m^n$	Uçurtma çizge
$d(u,v)$	u ve v tepeleri arası uzaklık
$\lceil \rceil$	Üst tam değer fonksiyonu
$K_{1,n}$	Yıldız(Star) çizge
P_n	Yol(Path) çizge

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	Königsberg Köprüsü	1
Şekil 1.2.	Königsberg Köprü Probleminin Çizge Modeli	1
Şekil 1.3.	Sadece İki Tepesi Tek Dereceli Çizge	2
Şekil 2.1.	G, H ve $G \square H$ Çizge	6
Şekil 2.2.	$Kite_4^3$ Uçurtma Çizgesi	8
Şekil 2.3.	K_5 Diken (Thorn) Çizge	8
Şekil 2.4.	$P_{n,p,k}$ Dikenli Yol (Thorn Path) Çizge	9
Şekil 2.5.	$P_{6,3}$ ve $P_{5,4}$ Dikenli Çubuk (Thorn Rod) Çizgeleri	9
Şekil 2.6.	$S_{4,4}$ ve $S_{5,3}$ Dikenli Yıldız (Thorn Star) Çizge	9
Şekil 2.7.	P_8^+ Tarak (Comb) Çizge	10
Şekil 2.8.	C_6^4 Rüzgar Gülü (Windmill) Çizgesi	10
Şekil 2.9.	Petersen Çizge	10
Şekil 2.10.	$H_{4,8}, H_{5,8}$ ve $H_{5,9}$ Çizgeleri	11
Şekil 3.1.	G ve H Çizgeleri	12
Şekil 3.2.	G Çizgesi	13
Şekil 3.3.	G ve H Çizgeleri	14
Şekil 3.4.	G ve H Çizgeleri	15
Şekil 3.5.	G Çizgesi	17
Şekil 4.1.	Bir, İki ve Dört Çevreli G_1, G_2, G_3 Çizgeleri	21
Şekil 4.2.	$Kite_8^5$ Çizgesi	23
Şekil 4.3.	$S(4, 4)$ Dikenli Yıldız Çizgesi	24
Şekil 4.4.	$n > 2$ ve $n = 2a + 1$ için $P_{n,p,k}$ Çizgesi	25
Şekil 4.5.	$n > 2$ ve $n = 2a$ için $P_{n,p,k}$ Çizgesi	25
Şekil 4.6.	P_n^+ Çizgesi	26
Şekil 4.7.	P_8^+ Tarak Çizge	28
Şekil 4.8.	$n = 2a + 1$ için $P_{n,m}$ Çizgesi	29
Şekil 4.9.	$n = 2a$ için $P_{n,m}$ Çizgesi	29
Şekil 4.10.	$P_{7,7}$ Çizgesi	30
Şekil 4.11.	P_2, C_3 ve $P_2 \square C_3$ Çizgeleri	31
Şekil 4.12.	C_6^3 Çizge	31
Şekil 4.13.	$W_{1,3}$ ve $W_{1,3}^{++-}$ Transformasyon Çizgesi	32
Şekil 4.14.	G Çizgesi	33
Şekil 4.15.	G ve H Çizgeleri	34
Şekil 4.16.	C_6 Çizgesi	35
Şekil 4.17.	K_5 Çizgesi	35
Şekil 4.18.	$K_{3,4}$ Çizgesi	36
Şekil 4.19.	P_6 ve P_7 Çizgeleri	37
Şekil 4.20.	$K_{1,6}$ Çizgesi	38
Şekil 4.21.	$W_{1,6}$ Çizgesi	39

Şekil 4.22.	Petersen Çizgesi	40
Şekil 4.23.	$H_{5,7}$ Çizgesi	41
Şekil 4.24.	10 Tepeli G Çizgesi	42



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Derya DOĞAN DURGUN'a, tanıştığımız günden itibaren her zaman yanımda olan sevgili eşim N. Pınar ŞAM'a ve motivasyon kaynağım olan biricik kızım G.Duru ŞAM'a teşekkürlerimi sunarım.

Eray ŞAM
Manisa, 2023



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Çizgelerde Eş Bütünlük Değerinin İncelenmesi

Eray ŞAM

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Derya DOĞAN DURGUN

Bir iletişim ağında, belli merkezlerin ya da bağlantıların zarar görmesinden sonra, iletişim kesilene kadar geçen süredeki, ağın dayanma gücünün ölçümüne zedelenebilirlik değeri denir. Bir iletişim ağı çizgelerle modellenerek zedelenebilirlik parametreleri yardımıyla zedelenebilirlik değeri ölçülebilir.

Zedelenebilirlik değerini ölçebilmek için farklı zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları, tepe bağlantılılık değeri, tepe bütünlük değeri, dayanıklılık değeri, saçılım sayısı, sağlamlık değeri, kopma derecesi, eş bütünlük değeridir. Bu parametreler zarar gören merkezler ve bağlantılarla ilgilenmektedir. Daha sonra zarar gören bu merkez ve bağlantılara komşu olan merkez ve bağlantılarında hesaba katıldığı parametreler keşfedilmiştir. Bunlar komşu bağlantılılık sayısı, komşu bütünlük değeri, komşu saçılım sayısı ve komşu kopma derecesidir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çizge teorisinin tarihçesi, ikinci bölümde çizge teoride kullanılan temel tanımlar ve çizge türleri, üçüncü bölümde eş bütünlük parametresinin tanımı ve bazı özel çizgelerin daha önceden hesaplanmış eş bütünlük değeri, dördüncü bölümde bazı özel çizgelerin eş bütünlük değerinin hesaplanması ve eş bütünlük değeri ve tepe komşu bütünlük değeri yardımıyla tanımlanan yeni bir parametre olan komşu eş bütünlük değeri üzerine çalışmalar, son bölümde sonuç kısmı bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Zedelenebilirlik, transformasyon, eş bütünlük değeri, komşu eş bütünlük değeri, baskınlık sayısı.

2023, 46 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Survey of Equi-Integrity Value in Graphs

Eray ŞAM

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Derya DOĞAN DURGUN

In a communication network vulnerability is the resistance of the graph after disruption of some center or connections. The communication network can be modeled as a graph.

There is different parameters to investigate vulnerability. Some of them are connectivity, integrity, toughness, scattering, tenacity, rupture degree and equi-integrity. These parameters are related with disrupted centers and connections. Later on some other parameters defined to take into account neighborhood of centers and connections. These parameters are neighbor connectivity, neighbor integrity, neighbor scattering number and neighbor rupture degree.

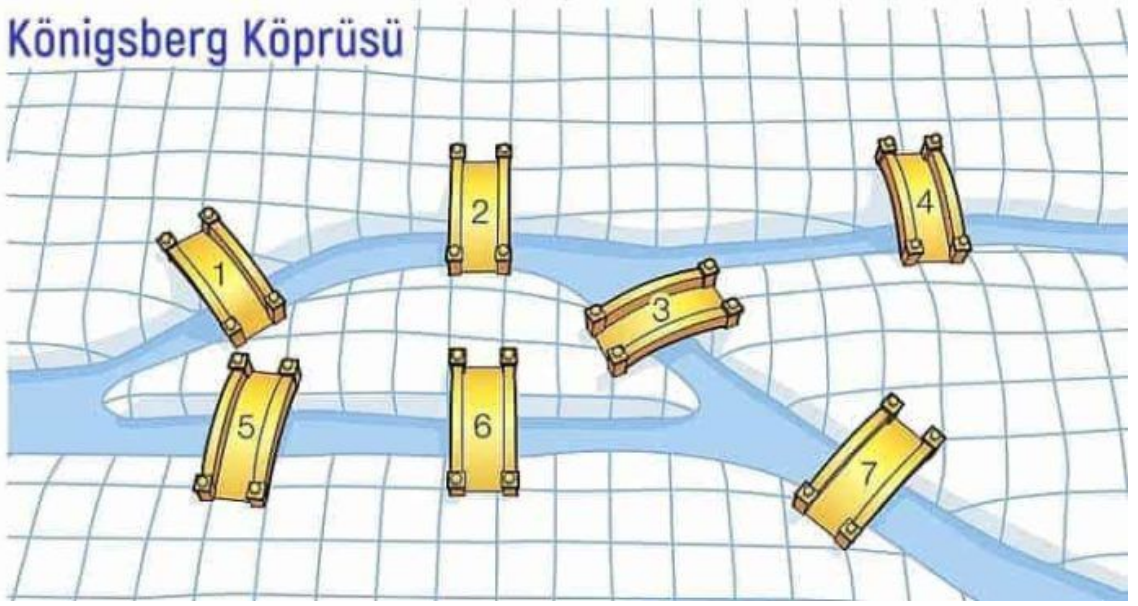
This thesis consist of five chapters. In the first chapter history of Graph Theory is given. In the second chapter fundamental definitions and types of graphs are given. In the third chapter definition of equi-integrity and the previously calculated equi-integrity value of some special graphs are given. In the fourth chapter equi-integrity of some well-known graphs are calculated and definition of neighbor equi-integrity which is defined by equi-integrity and vertex neighbor integrity are given. In the last part conclusions and suggestions obtained from that study are given.

Keywords: Vulnerability, transformation, equi-integrity, neighbor equi-integrity, domination number.

2023, 46 pages

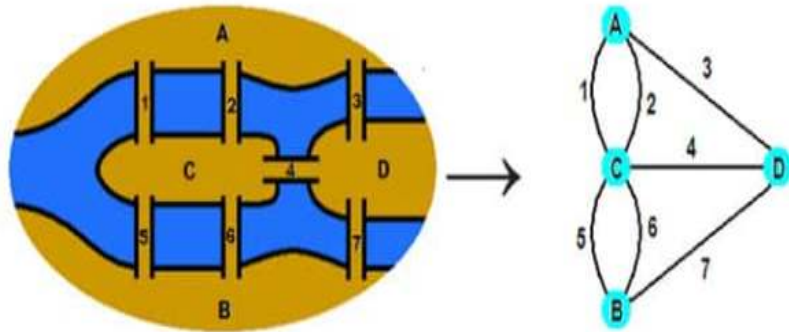
1. GİRİŞ

Çizge teorisi, 1736 yılında İsviçreli matematikçi Leonhard Euler'ın Königsberg köprü problemini çözmesiyle başladı. Königsberg şehri birbirine 7 köprüyle bağlanan 4 bölgeden oluşmaktadır. Königsberg'de yaşayan insanlar her köprüden sadece bir defa geçerek tüm bölgelere ulaşmaya çalışmışlardır. Bu problem Euler'ın dikkatini çekmiş ve böylelikle çizge teorisinin temelleri atılmıştır.



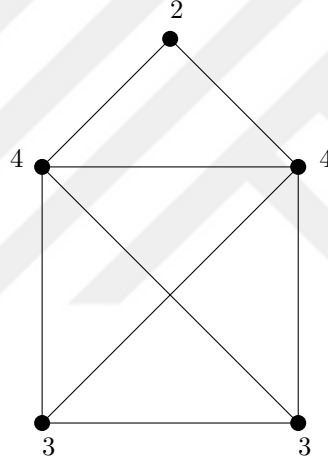
Şekil 1.1. Königsberg Köprüsü

Aşağıda Königsberg köprü probleminin çizge modeli verilmiştir.



Şekil 1.2. Königsberg Köprü Probleminin Çizge Modeli

Euler, harita üzerinde çalışmak yerine köprüleri ve bölgeleri çizge(graf) üzerinde göstererek problemi çözmüştür. Bu haritayı çizge ile modellerken bölgeleri tepe (vertex), köprüleri ayırıt (edge) şeklinde modellemiştir. Böylece $G = (V, E)$ ikilisiyle çizge tanımlanmıştır. Önce bir tepenin derecesinin ne anlama geldiğini tanımlayalım. Derece bir tepeden çıkan ayırıt sayısıdır. Euler, bütün köprüleri birer defa kullanarak bütün bölgeleri ziyaret edebilmek için tepelerin tamamının derecesinin çift sayıda olması gerektiğini göstermiştir. Başlangıç noktasının derecesi ve bitiş noktasının derecesi tek sayı olduğu zamanda problem çözülebilmektedir. Fakat yukarıdaki çizge modelinde görüldüğü üzere Königsberg köprüsü probleminde bütün tepeler tek dereceli olduğundan istenilen yol imkansızdır. Bu ise gerçek hayat problemlerinin, çizge modelleri ile çözülebileceğinin ilk örneğidir. Böylelikle matematik alanında çizge teorisinin hikayesi başlamıştır.



Şekil 1.3. Sadece İki Tepesi Tek Dereceli Çizge

Buna benzer problemlerle mutlaka karşılaşmaktadır. Yukarıdaki şekilde verilen problem denenirse, elimizi hiç kaldırmadan bu şekil bir seferde çizilebilir mi? Königsberg köprü problemindeki Euler'in açıklamaları gereği buna verilen cevap tabii ki evet olacaktır. Üstelik deneme gerekmeden denilebilir. Çünkü bu şeklin tepelerinden sadece ikisi tek dereceli olduğu görülmektedir.

Çizge Teori, günlük hayatta karşılaşılan problemlerin çizgelerle modellenebilmesi sayesinde dikkat çekmeye ve matematikçiler dışında diğer pozitif bilimlerle ilgilenen bilim insanlarının da üzerinde durduğu bir alan haline gelmiştir. Önemli olan günlük hayat problemlerinin bir modeli olan çizgelerin matematikte kullanılan teoriler yardımı ile yo-

rumlanması ve elde edilen matematiksel sonuçlardan yola çıkarak günlük hayat problemi hakkında fikir sahibi olmaktır. Dolayısıyla çizge teorisinin kullanıldığı bir çok uygulama alanı ortaya çıkmıştır.

Euler'in çalışmalarından sonra 1822 yılında J.J.Silvester ilk kez çizge sözcüğünü kullanmıştır. 1845 yılında Gustav Kirchhoff elektrik devrelerinde akım ve gerilimleri hesaplamaya yarayan Kirchhoff devre kuramlarını yayımladı. 1852 yılında Francis Guthrie yanıtlanması zor 4 renk problemini ortaya attı. 1936 yılına geldiğimizde D.König çizge teorisine ilişkin ilk kitabı yayımladı. Daha sonra 1976 yılında 1200 saati aşkın bilgisayarlı hesaplamalar sonucunda harita renklendirmesi için 4 rengin gerekli ve yeterli olduğu Kenet Appel ve Wolfgang Haken tarafından kanıtlandı.

Günümüze gelindiğinde çizgelerin kimya, fizik, coğrafya, bilgisayar ağları, gökbilimi, sosyal olaylar, organ bağıışı ve donör bulma, oyunlar, iletişim ağları gibi daha bir çok uygulama alanları vardır.

Bir iletişim ağında bazı tepe (ayrıt) veya tepelerde (ayrıtlarda) oluşan hasarlar bu ağın işlevini tam olarak yerine getirmesini engeller. Bu nedenle, iletişim ağları tasarlanırken, ağın bozulmalara göstereceği direnç önemlidir. Direnci fazla olan model, diğerlerine göre tercih edilerek bu tip bir sorunla karşılaşılması halinde, oluşabilecek hasar baştan en aza indirgenebilir. Zedelenebilirlik, bunun gibi durumlarda ağın hasar görmesinden sonra iletişim kesilene kadar geçen sürede ağın dayanma gücü olarak adlandırılır. Örneğin; bir ülkenin su dağıtım sisteminde; barajlardan dağıtım yapıldığını düşünelim. Savaş, doğal afetler gibi acil durumlarda en az kaç tane baraj veya iletişim hattı bozulduğunda ağın dağıtım özelliğini yitireceği önemlidir. Bu ağ yapısı modellenirken, zedelenebilirlik düşünülürse geri dönüşü mümkün olmayan problemler yaşanmaz. Barajları çizgenin tepeleri, iletişim hatlarını da çizgenin ayrıtları olarak düşünülürse; bu problem bir çizgeyle modellenmiş olur ve çizgenin zedelenebilirlik değerini belirlemek için çeşitli ölçümlerden yararlanılabilir. Bu ölçümleri yapabilmek için var olan ölçümleri kullanmak ve yeterli olmadığı zaman yeni ölçümler oluşturmak gerekmektedir[1].

Çizgenin dayanma gücünü hesaplayabilmek için çeşitli parametreler mevcuttur. Bunlardan ikisi, bağlantılılık sayısı (connectivity) ve bütünlük (integrity) parametresidir. Harary 1972 yılında bağlantılılık sayısı ile C.A.Barefoot ve arkadaşları ise 1987 yı-

ında bütünlük parametresini tanımlamışlardır. Daha sonra 2012 yılında Sunderaswaran ve Swaminathan bir çizgenin eş bütünlük (equi-integrity) değerini tanımladı. Eş bütünlük parametresi, bağlantılılık sayısı ve bütünlük parametreleri ile ilişkilidir. Eğer bir çizgenin kesim tepesi yok ise eş bütünlük değeri maksimum olmaktadır. Görüldüğü gibi bağlantılılık sayısı ile ilişkilidir ve üçüncü bölümde görüleceği üzere tanımı gereği bütünlük parametresi ile de ilişkilidir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çizge teorisinin tarihçesi, ikinci bölümde çizge teoride kullanılan temel tanımlar ve çizge türleri, üçüncü bölümde eş bütünlük parametresinin tanımı ve bazı özel çizgelerin daha önceden hesaplanmış eş bütünlük değeri, dördüncü bölümde eş bütünlük değerinin bazı çizgeler üzerinde kullanılarak elde edilen teoremleri ile bazı transformasyon çizgelerin eş bütünlük değerinin hesaplanması ve eş bütünlük değeri ile tepe komşu bütünlük değerleri yardımıyla tanımlanan yeni bir parametre olan komşu eş bütünlük değeri üzerine çalışmalar, son bölümde sonuç kısmı bulunmaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

Tezin bu bölümünde Çizge Teoride kullanılan bazı temel tanımlar ve bazı özel çizgeler verilmiştir. Bu çalışmada G çizgesi basit, bağlantılı, bukle içermeyen ve yönlendirilmemiş bir çizgeyi göstermektedir ve tezin tamamında kullanılan indisler doğal sayıdır.

2.1. Çizgelerde Bazı Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. Bir G çizgesi, boştan farklı $V(G)$ tepeler kümesi, $E(G)$ ayrıtlar kümesi olmak üzere $G = (V(G), E(G))$ sıralı ikilisi ile gösterilir [2].

Tanım 2.1.2. Katlı ayırıt ve bukle içermeyen çizgelere basit (simple) çizgeler denir [3].

Tanım 2.1.3. Bir G çizgesinde her tepe ikilisi arasında bir yol var ise bu çizgeye bağlantılı (connected) çizge aksi halde bağlantısız çizge denir [4].

Tanım 2.1.4. G çizgesinin herhangi iki $u, v \in V(G)$ tepeleri G çizgesinin bir $e = uv \in E(G)$ (ya da $e = vu$) ayrıtının uç tepeleri ise bu iki tepeye komşu tepeler denir [4].

Tanım 2.1.5. G çizgesinin herhangi bir v tepesinin komşularının oluşturduğu kümeye v tepesinin açık komşuluğu denir ve $N_G(v)$ ya da $N(v)$ ile gösterilir. $N[v] = N(v) \cup v$ ifadesine ise v tepesinin kapalı komşuluğu denir [3].

Tanım 2.1.6. Bir tepenin komşularının sayısına o tepenin tepe derecesi denir ve $deg_G v$ ya da $deg(v)$ ile gösterilir. Yani, $deg(v) = |N(v)|$ dir [3].

Tanım 2.1.7. G çizgesinin tepeleri arasında en büyük tepe derecesine sahip tepenin derecesine maksimum tepe derecesi, en küçük tepe derecesine sahip tepenin derecesine minimum tepe derecesi denir ve sırasıyla $\Delta(G)$ ve $\delta(G)$ ile gösterilir. Eğer $\Delta(G) = \delta(G)$ ise G çizgesine düzenli (regüler) çizge denir. Çizgenin tüm tepelerinin derecesi r ise r -düzenli çizge denir [4].

Tanım 2.1.8. Bağlantılı bir G çizgesinin herhangi iki u ve v tepeleri arasındaki yollar dan minimum uzunluklu olanın uzunluğuna u ve v tepeleri arasındaki uzaklık denir ve $d_G(u, v)$ ya da kısaca $d(u, v)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.1.9. Bir G çizgesindeki herhangi iki tepe arasındaki uzaklığın en büyüğüne çizgenin çapı denir ve $diam(G)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.1.10. Bir G çizgesindeki herhangi iki tepe arasındaki uzaklığın en küçüğüne çizgenin yarı çapı denir ve $rad(G)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.1.11. Bir ayrıt bitiş tepesi ile ilişkili ise o ayrıta sarkık ayrıt (pendant edge) denir [3].

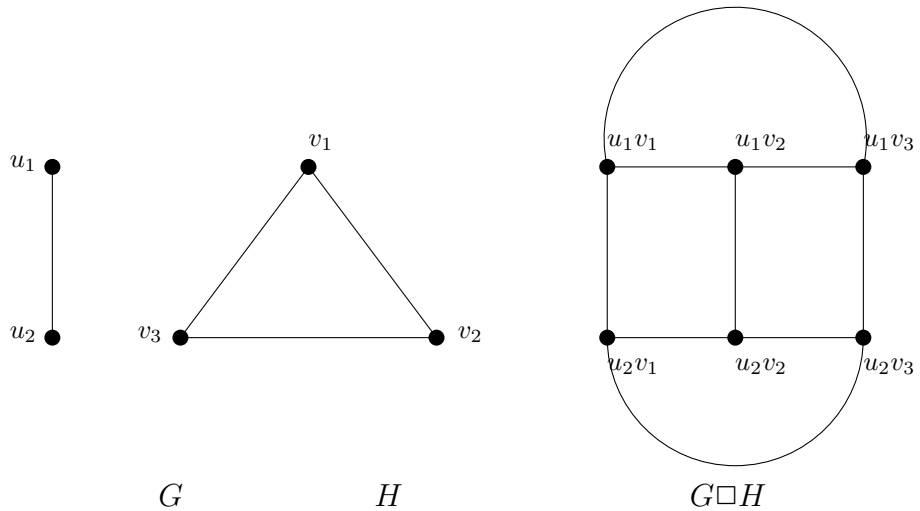
Tanım 2.1.12. $G = (V, E)$ bir çizge ve x, y, z + veya - değerlerini alabilen üç değişken olsun. G^{xyz} transformasyon çizgesi tepeler kümesi $V(G) \cup E(G)$ olan ve $\alpha, \beta \in V(G^{xyz})$ olmak üzere α ve β nın G^{xyz} de komşu olması için gerek ve yeter koşul:

1. $\alpha, \beta \in V(G)$ olmak üzere α ve β , $x = +$ ise G de komşudur; α ve β , $x = -$ ise G de komşu değildir.

2. $\alpha, \beta \in E(G)$ olmak üzere α ve β , $y = +$ ise G de komşudur; α ve β , $y = -$ ise G de komşu değildir.

3. $\alpha \in V(G)$, $\beta \in E(G)$ olmak üzere α ve β , $z = +$ ise G de ilişkilidir; α ve β , $z = -$ ise G de ilişkili değildir [5].

Tanım 2.1.13. G çizgesinin tepe kümesi $V(G)$, H çizgesinin tepe kümesi $V(H)$ olmak üzere $V(G) \times V(H)$ kartezyen kümesinden $x = (u_1, v_1)$ ve $y = (u_2, v_2)$ elemanlarını alalım. Eğer; $u_1 = u_2$ ve $v_1 v_2 \in E(H)$ veya $v_1 = v_2$ ve $u_1 u_2 \in E(G)$ durumlarından biri sağlanıyorsa $x = (u_1, v_1)$ ve $y = (u_2, v_2)$ tepeleri komşudur. Bu şekilde oluşan çizgeye G ile H çizgelerinin kartezyen çarpımı denir ve $G \square H$ ile gösterilir [3]. Şekil 2.1 de G ve H çizgelerinin kartezyen çarpımı gösterilmiştir.



Şekil 2.1. G , H ve $G \square H$ Çizge

Tanım 2.1.14. Bir G çizgesinde $1 \leq i \leq t$ için $V_i \subset V(G)$ olmak üzere,

$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_t$ ve $1 \leq i < j \leq t$ için $V_i \cap V_j = \emptyset$ ise $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ kümesine G çizgesinin bir parçalanışı denir [7].

Tanım 2.1.15. $G = (V, E)$ bir çizge ve $u, v \in V$ olsun. G çizgesinin herbir tepesi veya en az bir komşusu bir D kümesinde olacak şekildeki D tepeler kümesine bir baskın küme denir. Böyle kümelerden en az eleman sayısına sahip olan kümenin eleman sayısı G çizgesinin baskınlık sayısını verir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.1.16. $G = (V, E)$ bir çizge ve $u \in V(G)$ olmak üzere, $N[u]$ kapalı komşuluğu çizgeden atılan u tepesine yıkan (subverted) tepe denir. S kümesinin G de ki tepelerinin her birine yıkan tepe uygulanması ile oluşan $S \subseteq V(G)$ tepeler kümesine tepe yıkıcı strateji (vertex subversion strategy) denir [9].

2.2. Bazı Özel Çizgeler

Tanım 2.2.1. $n \geq 1$ olmak üzere tepeleri $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ olmak üzere $v_i v_{i+1}$ ile etiketlenen n tane tepe ve $n-1$ tane ayrıta sahip olan çizgeye yol (path) çizge denir ve P_n ile gösterilir [3].

Tanım 2.2.2. $n \geq 3$ olmak üzere tepeleri $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ için ayrıtları $v_1 v_n$ ve $v_i v_{i+1}$ ile etiketlenen n tane tepe ve n tane ayrıta sahip olan çizgeye çevre (cycle) çizge denir ve C_n ile gösterilir [3].

Tanım 2.2.3. Bir C_{n-1} çevre çizgesine yeni bir tepe eklenmesiyle yani C_{n-1} çizgesindeki her tepenin bu yeni eklenen tepeyle birleştirilmesiyle oluşan n tepeli yeni çizgeye tekerlek (wheel) çizge denir ve W_n ile gösterilir [2].

Tanım 2.2.4. Birbirinden farklı her tepesi birbirine komşu olan çizgeye tam (complete) çizge denir ve K_n ile gösterilir [3].

Tanım 2.2.5. $n+1$ tepeli $K_{1,n}$ yıldız çizgesi, bir tepesi diğer tüm tepelere komşu olan ağaç çizgedir. Derecesi maksimum olan tepeye merkez tepe diğer tepelere yaprak denir [4].

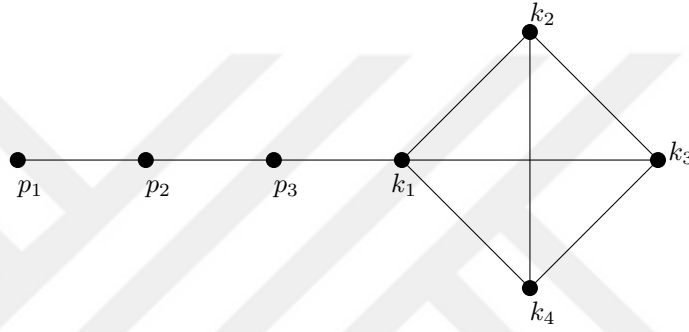
Tanım 2.2.6. Eğer G çizgesinin $V(G)$ tepeler kümesi, $E(G)$ ayrıtlar kümesi olmak üzere $G = (V(G), E(G))$ çizgesinin tepeler kümesi için $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$ ayrıca $V_1(G) \cap V_2(G) = \emptyset$ ve $E(G)$ ayrıtlar kümesinin her bir uv ayrıtı $u \in V_1(G)$ ve $v \in V_2(G)$

den oluşuyorsa ve G çizgesi bağlantılı ise bu G çizgesine iki parçalı (bipartite) çizge denir [4].

Tanım 2.2.7. İki parçalı bir çizgede $V_1(G)$ kümesinin her bir tepesi $V_2(G)$ kümesinin her bir tepesi ile bitişikse bu çizgeye iki parçalı tam (complete bipartite) çizge denir ve $K_{m,n}$ ile gösterilir. $K_{m,n}$ iki parçalı tam çizgesinin ayrıt sayısı mn dir [4].

Tanım 2.2.8. Çevre içermeyen bağlantılı çizgeye ağaç çizge denir [4].

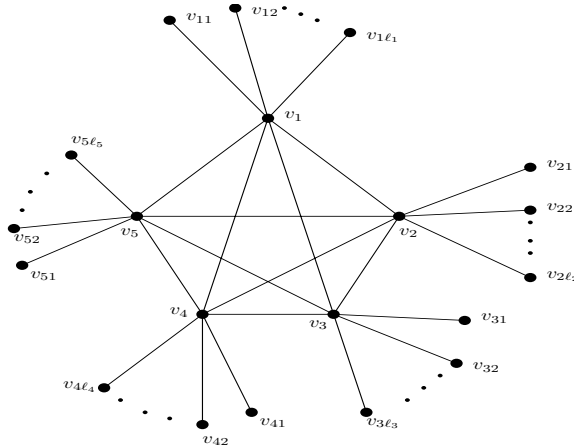
Tanım 2.2.9. Bir m tepeli K_m tam çizgesi ile n tepeli P_n yol çizgesinin bir köprü ile bağlantılı hale getirilmesiyle elde edilen çizgeye uçurtma (kite) çizge denir ve $Kite_m^n$ ile gösterilir [10]. Şekil 2.2. de $Kite_4^3$ uçurtma çizgesi gösterilmiştir .



Şekil 2.2. $Kite_4^3$ Uçurtma Çizgesi

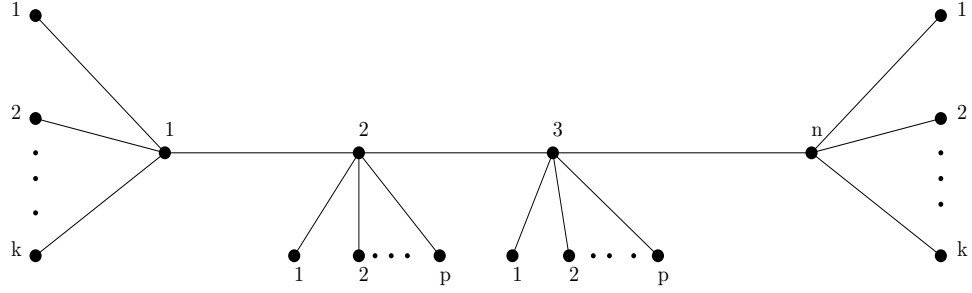
Tanım 2.2.10. Bir G çizgesinde $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n$ pozitif tamsayılar ve

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ tepeler kümesi olsun. Bir G diken (thorn) çizgesinde $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n$ parametreleri, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ olmak üzere G çizgesinde v_i tepelelerine 1 dereceli ℓ_i tepelerinin eklenmesiyle elde edilen çizgedir. G diken çizgesi G^* veya $G^*(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n)$ ile gösterilir [11]. Şekil 2.3. de K_5 diken çizgesi gösterilmiştir.



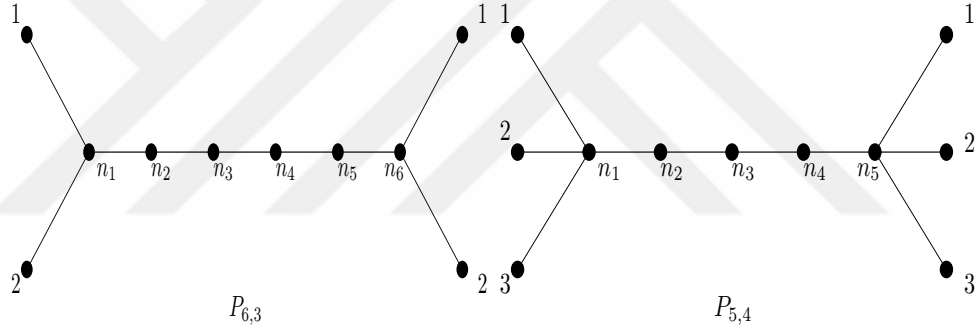
Şekil 2.3. K_5 Diken (Thorn) Çizge

Tanım 2.2.11. Bir $P_{n,p,k}$ dikenli yol (Thorn Path) çizgesi P_n yol çizgesinin uç tepelerine k tane tepe ve diğer tepelerine p tane tepenin birer ayrıt ile eklenmesiyle elde edilir [12]. Şekil 2.4. de $P_{n,p,k}$ dikenli yol (Thorn Path) çizgesi gösterilmiştir.



Şekil 2.4. $P_{n,p,k}$ Dikenli Yol (Thorn Path) Çizge

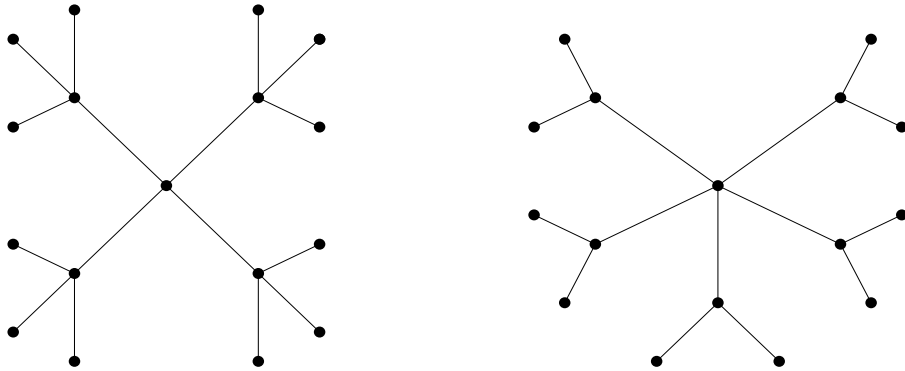
Tanım 2.2.12. Bir $P_{n,t}$ dikenli çubuk (Thorn Rod) çizgesi P_n yol çizgesinin uç tepelerine $t - 1$ tane tepenin birer ayrıt ile eklenmesiyle elde edilir [12]. Şekil 2.5. de $P_{6,3}$ ve $P_{5,4}$ dikenli çubuk (Thorn Rod) çizgeleri gösterilmiştir.



Şekil 2.5. $P_{6,3}$ ve $P_{5,4}$ Dikenli Çubuk (Thorn Rod) Çizgeler

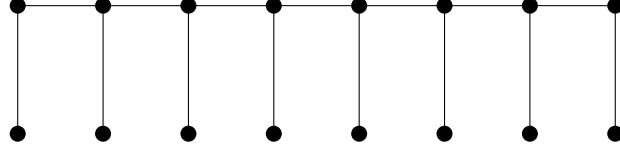
Tanım 2.2.13. Dikenli yıldız (Thorn Star) çizge yıldız çizgenin kollarına $t - 1$ adet son tepenin eklenmesiyle elde edilen k kollu bir yıldız çizgedir ve $S_{k,t}$ ile gösterilir [12].

Şekil 2.6. da $S_{4,4}$ ve $S_{5,3}$ dikenli yıldız (Thorn Star) çizgeleri gösterilmiştir.



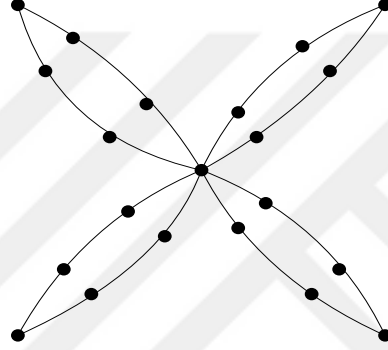
Şekil 2.6. $S_{4,4}$ ve $S_{5,3}$ Dikenli Yıldız (Thorn Star) Çizge

Tanım 2.2.14. $P_n \theta K_1$ tarak (Comb) çizgesi P_n yol çizgesinin her bir tepesine bir sarkık ayırıt (pendent edge) eklenmesi ile elde edilen bir çizgedir ve P_n^+ ile gösterilir [13]. Şekil 2.7.de P_8^+ tarak çizgesi gösterilmiştir.



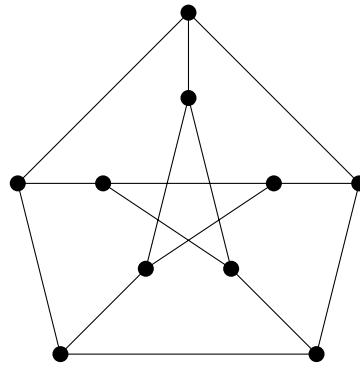
Şekil 2.7. P_8^+ Tarak (Comb) Çizge

Tanım 2.2.15. C_n^m Rüzgar gülü (windmill) çizgesi bir ortak tepe ile C_n çizgesinin m tane kopyasından oluşan bir çizge ailesidir [13]. Şekil 2.8. de C_6^4 çizgesi gösterilmiştir.



Şekil 2.8. C_6^4 Rüzgar Gülü (Windmill) Çizgesi

Tanım 2.2.16. 10 tepeli 3—regüler bir çizgedir [15]. Şekil 2.9. da Petersen çizge gösterilmiştir.



Şekil 2.9. Petersen Çizge

Tanım 2.2.17. $H_{m,n}$ Harary çizgesi , $1 < m < n$ ve m tepe derecesini, n tepe sayısını göstermek üzere üç farklı durumdan oluşan bir çizgedir [16].

Durum1: m çift ise;

$0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ tepeler olmak üzere, i ile j tepeleri için $i - \frac{m}{2} \leq j \leq i + \frac{m}{2}$ oluyorsa i ve j tepelerine birer ayrıt eklenir. (mod n e göre).

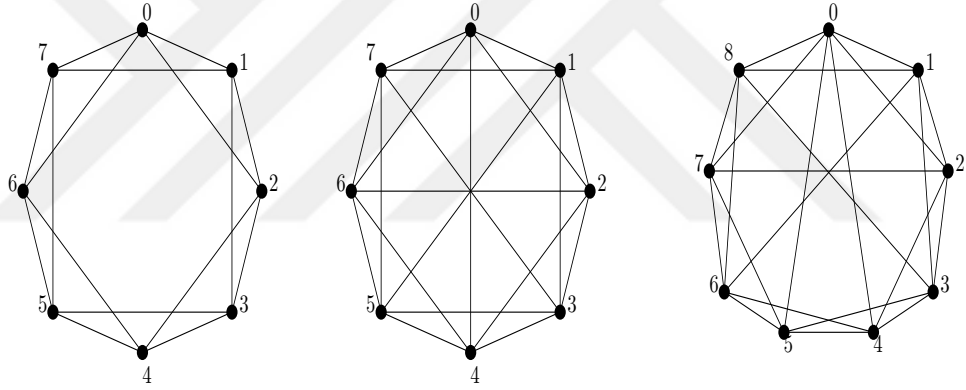
Durum2: m tek, n çift ise;

m 'in çift olduğu duruma ek olarak $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ için i tepesi ile $i + \frac{n}{2}$ tepeleri birer ayrıt ile birleştirilir.

Durum3: m tek, n tek ise;

m 'in çift olduğu duruma ek olarak 0 tepesi ile $\frac{n-1}{2}$ ve $\frac{n+1}{2}$ tepeleri birer ayrıt ile birleştirilir ve $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ için i tepesi ile $i + \frac{n+1}{2}$ tepeleri birer ayrıt ile birleştirilir.

Şekil 2.10. da $H_{4,8}$, $H_{5,8}$ ve $H_{5,9}$ çizgeleri gösterilmiştir.



Şekil 2.10. $H_{4,8}$, $H_{5,8}$ ve $H_{5,9}$ Çizgeleri

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Zedelenebilirlik

Bir iletişim ağında, belli merkezlerin ve bağlantıların zarar görmesinden sonra, iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücünün ölçülmesine zedelenebilirlik değeri denir. Bir iletişim ağı, çeşitli nedenlerle zarara uğradığında, oluşan zararın belirlenmesi için zarar gören merkez sayısı, zarar gören merkezlere komşu merkezlerin sayısı, zarar gören bağlantı sayısı ve iletişimin devam ettiği bağlantılı alt ağların sayısı gibi soruların yanıtlanması gerekir. Bu sorular daha da artırılabilir. Önemli olan bu sorulara cevap verebilmektir. İletişim ağları merkezleri tepe, bağlantıları ayrıt ile gösterilerek çizge şeklinde modellenir. Çizge şeklinde modellenen iletişim ağının zedelenebilirliğini ölçmek için ise çeşitli parametreler tanımlanmıştır.

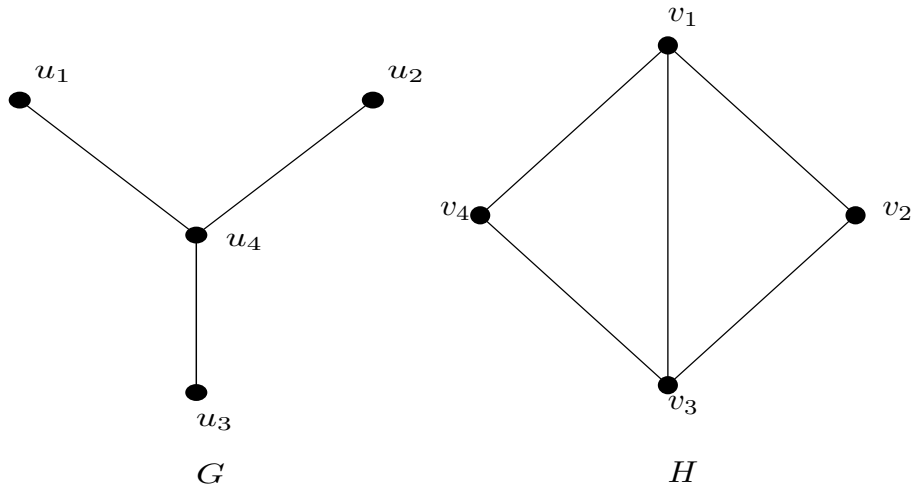
Aşağıda bazı parametrelerin tanımları verilmiştir.

Tanım 3.1.1. Bağlantılı bir G çizgesini bağlantısız veya sadece bir tek izole tepeden meydana getirmek için çizgeden atılan minimum tepe sayısına bağlantılılık (connectivity) değeri denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir. G çizgesinde, $S \subset V(G)$ ve $w(G - S)$, $G - S$ çizgesinde bileşen sayısı olmak üzere;

$$\kappa(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| : w(G - S) > 1\} \quad (3.1)$$

dir [16].

Örnek 3.1.2. Aşağıda 4 tepeli G ve H çizgelerinin bağlantılılık değerleri hesaplanmıştır.



Şekil 3.1. G ve H Çizgeleri

$$S = \{u_4\}$$

$$S = \{v_1, v_3\}$$

$$\kappa(G) = 1$$

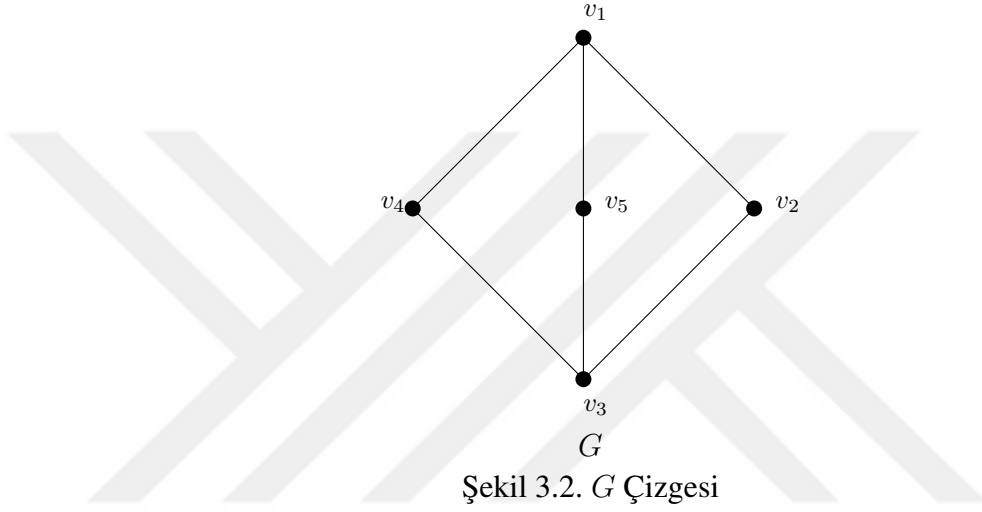
$$\kappa(H) = 2$$

Tanım 3.1.3. Bir G çizgesinin komşu bağlantılılık sayısı, S bir tepe yıkıcı stratejisi olmak üzere,

$$K(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\} \quad (3.2)$$

dir [17].

Örnek 3.1.4. Aşağıda 5 tepeli G çizgesinin komşu bağlantılılık değeri hesaplanmıştır.



$$S = \{v_5\}$$

$$K(G) = 1$$

Daha sonra C. A. Barefoot, R. Entriger ve H. Swart[18], G. Chartrand, S. F. Kapoor, T. A. McKee ve O. R. Oellermann[19], W. D. Goddard[20], K. S. Bagga, L. W. Beineke, W. D. Goddard, M. J. Lipman ve R. E. Pippert[21] makaleleri ile bütünlük parametresi hakkında bilgiler vermişlerdir.

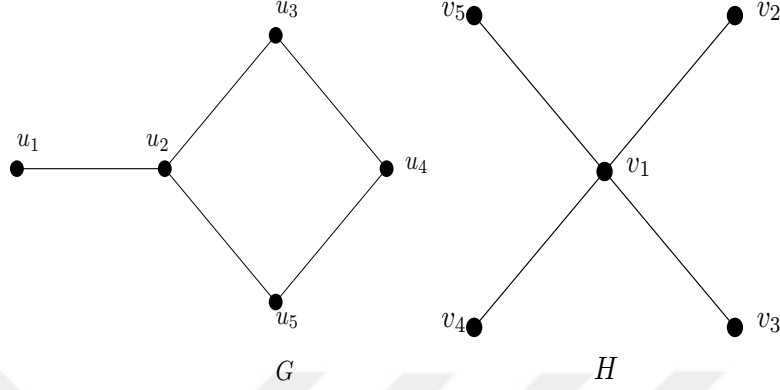
Tanım 3.1.5. Herhangi bir G çizgesinden, $S \subseteq V(G)$ tepeler kümesi atıldığında, geriye kalan $G - S$ çizgesinde en büyük boyutlu bileşinin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere, G çizgesinin tepe bütünlük değeri (integrity),

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G - S)\} \quad (3.3)$$

dir [22].

Eğer $I(G) = |S| + m(G - S)$ ise S kümesine I - set denir. G çizgesinde herhangi bir $S \subseteq V(G)$ kümesinin tepe bütünlük değeri ise $I_S = |S| + m(G - S)$ 'dir.

Örnek 3.1.6. Aşağıda 5 tepeli G ve H çizgelerinin bağlantılılık ve tepe bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 3.3. G ve H Çizgeleri

$\kappa(G) = 1$ ve $S = \{u_2, u_4\}$ ve $m(G - S) = 1$ için $I(G) = 3$ dür.

$\kappa(H) = 1$ ve $S = \{v_1\}$ ve $m(H - S) = 1$ için $I(H) = 2$ dir.

Yukarıdaki G ve H çizgelerinin bağlantılılık değerleri aynı olmasına rağmen tepe bütünlük değerleri birbirinden farklıdır. Görüldüğü gibi bağlantılılık değeri ayırt edici olmazken tepe bütünlük değeri ayırt edici olabilmektedir.

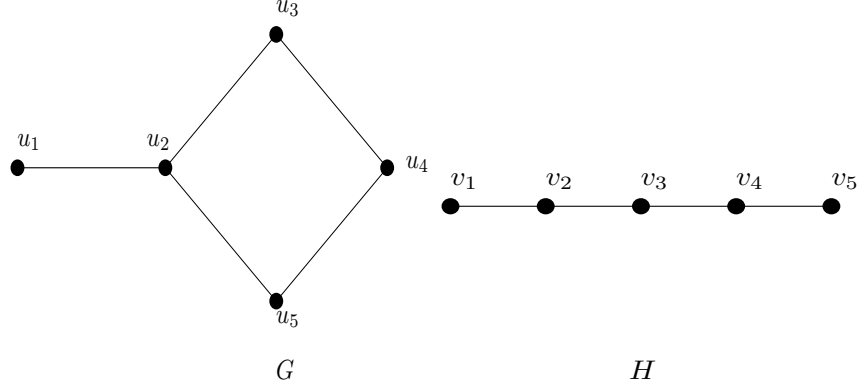
Bağlantılılık ve tepe bütünlük değerleri bir çizgenin zarar gören merkezleri dikkate alınarak ölçülen zedelenebilirlik değerleridir. Ancak bu ölçümler zarar gören merkezlerin komşuları ile ilgilenmemektedir. Bu nedenle Cozzens ve Wu tarafından 1996 yılında komşu bütünlük değeri tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.7. Bir G çizgesinin tepe komşu bütünlük (vertex-neighbor integrity) değeri, S herhangi bir tepe yıkıcı stratejisi ve $c(G/S)$ de G/S çizgesinde en büyük bileşenin tepe sayısı olmak üzere,

$$VNI(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + c(G/S)\} \quad (3.4)$$

dir [9].

Örnek 3.1.8. Aşağıda 5 tepeli G ve H çizgelerinin bağlantılılık, tepe bütünlük ve tepe komşu bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 3.4. G ve H Çizgeleri

$S = \{u_2\}$ için $w(G - S) > 1$, $\kappa(G) = 1$ dir. Diğer taraftan $S = \{u_2, u_4\}$ için $m(G - S) = 1$, $I(G) = 3$ dür.

$S = \{v_2\}$ için $w(H - S) > 1$, $\kappa(H) = 1$ dir. Diğer taraftan $S = \{v_2, v_4\}$ için $m(H - S) = 1$, $I(H) = 3$ tür.

Yukarıdaki G ve H çizgelerinin bağlantılılık ve tepe bütünlük değerleri aynı olduğu için ayırt edici özellik göstermezler. Ancak bu iki çizgenin komşu bütünlük değerleri incelendiğinde,

$S = \{u_2\}$ için $c(G/S) = 0$ dır. Dolayısıyla, $VNI(G) = 1$

$S = \{v_2, v_4\}$ için $c(H/S) = 0$ dır. Dolayısıyla, $VNI(H) = 2$

olduğundan komşu bütünlük değerleri bu iki çizge için ayırt edici olur.

Bağlantılılık, tepe bütünlük ve tepe komşu bütünlük parametreleri yukarıda örneklerle gösterilerek ayrıntılı bir şekilde ifade edilmiştir. Bu parametreler 3.ve 4. bölümlerde tanıtılacak olan eş bütünlük (equi-integrity) ve komşu eş bütünlük (neighbor equi-integrity) parametreleri için temel oluşturmaktadır. Ancak bu gösterilen parametrelerin haricinde başka parametrelerde çeşitli sorular sorulup yanıtlar aranarak zaman içinde ortaya çıkmıştır. Bunlardan bazılarının tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1.9. Bir G çizgesinin dayanıklılık (toughness) değeri, S herhangi bir kesim küme ve S kümesi çizgeden atıldıktan sonra geriye kalan çizgedeki bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak üzere,

$$t(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|S|}{w(G - S)} \right\} \quad (3.5)$$

dir [23].

Tanım 3.1.10. Bir G çizgesi için saçılım (scattering) sayısı, S bir kesim küme ve S kümesi çizgeden atıldıktan sonra geriye kalan bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak üzere,

$$sc(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G - S) - |S|\} \quad (3.6)$$

dir [24].

Tanım 3.1.11. Bir G çizgesinin sağlamlık (tenacity) değeri, S herhangi bir kesim küme ve $G - S$ çizgesinin bileşen sayısı $w(G - S)$ ve en büyük elemanlı bileşenin tepe sayısı $m(G - S)$ olmak üzere,

$$T(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|S| + m(G - S)}{w(G - S)} \right\} \quad (3.7)$$

dir [25].

Tanım 3.1.12. Tam çizge olmayan bir G çizgesinin kopma (rupture) derecesi,

$$r(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G - S) - |S| - m(G - S); w(G - S) > 1\} \quad (3.8)$$

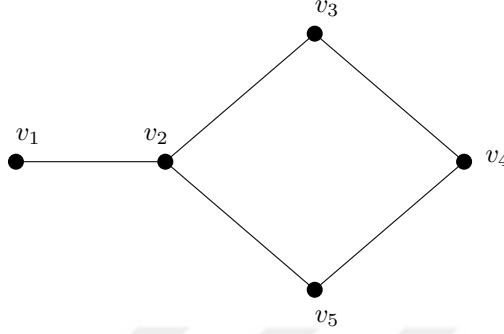
dir [26].

3.2. Eş Bütünlük Değeri (Equi-Integrity)

Bu kısımda eş bütünlük (equi-integrity) parametresinin tanımı verilip bazı özel çizgelerin eş bütünlük değeri verilmiş ve kesim tepe içermeyen çizgelerin eş bütünlük değeri verilmiştir. Eş bütünlük değeri tanımı gereği bütünlük değeriyle ilgilidir. Diğer taraftanda eğer bir çizge kesim tepe içermezse eş bütünlük değeri maksimum olmaktadır. Dolayısıyla bağlantılılık parametresiyle de ilgilidir. Buraya kadar verilen parametreler bir ağın merkezleri, bağlantıları ve bu merkezlerin komşularında çıkan sorunlar üzerinde duran parametrelerdir. Ancak aşağıda verilecek olan parametre tanımı gereği bütünlük parametresinin alt ağlara uygulanmasıdır. Yani daha çok alt ağlarla ilgilenmektedir.

Tanım 3.2.1. G çizgesinde, $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ kümeleri $V(G)$ nin bir parçalanışı olmak üzere, $1 \leq i \leq t$ eşitsizliğini sağlayan her i için I_{V_i} değerleri aynı ise maksimum sayıdaki $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ parçalanışının kardinalitesine eş bütünlük değeri denir ve $EI(G)$ ile gösterilir [27].

Örnek 3.2.2. Aşağıda 5 tepeli G çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 3.5. G Çizgesi

$$V_1 = \{v_1, v_2\}, I_{V_1} = 5$$

$$V_2 = \{v_3\}, I_{V_2} = 5$$

$$V_3 = \{v_4\}, I_{V_3} = 5$$

$$V_4 = \{v_5\}, I_{V_4} = 5$$

$$\{V_1, V_2, V_3, V_4\} \text{ için } EI(G) = 4 \text{ tür.}$$

Teorem 3.2.3. G , bağlantılı ve n tepeli bir çizge olsun. Eğer G çizgesi kesim tepe içermez ise $EI(G) = n$ dir [27].

Sonuç 3.2.4. Sırasıyla tam çizgenin, iki parçalı tam çizgenin, tekerlek çizgenin ve çevre çizgenin eş bütünlük değeri,

$$EI(K_n) = n, EI(K_{m,n}) = m + n, EI(W_{1,n}) = n + 1, EI(C_n) = n \quad (3.9)$$

dir [27].

Teorem 3.2.5. P_n , n tepeli yol çizge olmak üzere,

$$EI(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \quad (3.10)$$

dir [27].

Teorem 3.2.6. $K_{1,n}$, $n + 1$ tepeli yıldız çizge olmak üzere,

$$EI(K_{1,n}) = 2 \quad (3.11)$$

dir [27].

Teorem 3.2.7. G kesim tepesi olmayan n tepeli bir çizge olsun. G çizgesinin k tane tepesine birer sarkık tepe eklendiğinde elde edilen çizge H ise,

$$EI(H) = n \quad (3.12)$$

dir [27].

Teorem 3.2.8. tK_1 ifadesi t tane K_1 olmak üzere, $H = G \cup tK_1$ olsun. Bu takdirde,

$$EI(H) = t + 1 \quad (3.13)$$

dir [27].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde bazı özel çizgelerin ve bazı transformasyon çizgelerin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır. Daha sonra zedelenebilirliğin yeni bir ölçümü olan komşu eş bütünlük değeri tanımlanmıştır. Bu tanıma göre, bazı özel çizgelerin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmış ve son olarak komşu eş bütünlük değeri ile baskınlık sayısı arasındaki ilişki incelenerek bazı alt sınırlar elde edilmiştir.

4.1. Eş Bütünlük Değeri Üzerine Araştırmalar

Teorem 4.1.1. G , tepe kümesi $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_r, \dots, u_n\}$ olacak şekilde ağaç olmayan tek kesim tepeli bir çizge olsun. $V_1 = \{u_{r+1}\}, V_2 = \{u_{r+2}\}, V_3 = \{u_{r+3}\}, \dots, V_{t-1} = \{u_n\}$ olmak üzere $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_{t-1}\}$ kümesi u_r kesim tepesi ortak tepe olmak üzere en büyük tepe sayısına sahip çevrenin u_r tepesi hariç bir parçalanışı olsun. Çizgenin geriye kalan tepeleri u_1 ile başlayıp u_r kesim tepesi son tepe olacak şekilde ardışık etiketlendiğinde elde edilen parçalanış V_t olsun. Bu takdirde, $EI(G) = n - r + 1$ dir.

İspat: $V_1 = \{u_{r+1}\}, V_2 = \{u_{r+2}\}, V_3 = \{u_{r+3}\}, \dots, V_{t-1} = \{u_n\}, V_t = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ seçilirse, $1 \leq i \leq t$ aralığındaki her i değeri için bütünlük değerleri aynı olduğundan $I_{V_i} = 1 + (n - 1) = n$ dir. Bu takdirde, $EI(G) \geq n - r + 1$ elde edilir. $EI(G) > n - r + 1$ olması için bazı parçalanışların iki tepeli ve kesim tepeli içeren parçalanışın da en az iki tepeli olması durumlarını incelemek yeterlidir. G çizgesinin bütün çevrelerinde ki tepe sayıları maksimum sayıda ki tepe sayısına sahip çevrenin tepe sayısına eşit olduğunu kabul edelim. Bu şekilde yapılan ispat diğer durumlarında kapsayacaktır. n tepeli G çizgesinde m tane çevre ve her çevrede $n - r + 1$ tane tepe olsun. İspatı iki durumda inceleyelim.

Durum 1. G çizgesi sarkık ayrıt içermesin. Bu durumu iki kısımda inceleyelim.

i) $n - r + 1$ tek sayı olsun. Bu durumda, iki tepeli ve tepe bütünlük değeri birbirine eşit olan parçalanışların tepe bütünlük değeri, $I_V = 2 + \frac{n-r-2}{2} + (n-r)(m-1) + 1$ dir. Kesim tepeli içeren parçalanışa V' denilirse, $|V'| = p$ olsun. Bu durumda, $I_{V'} = p + n - r$ olur. İki tepeli parçalanışlar ile kesim tepeli içeren parçalanışın tepe bütünlük değeri eşit olması gerektiğinden, $2 + \frac{n-r-2}{2} + (n-r)(m-1) + 1 = p + n - r$ olur, buradan $\frac{-3n+3r+4}{2} + m(n-r+1) - m = p$ elde edilir. $EI(G) > n - r + 1$ olması için V' kümesi haricinde en az $n - r + 1$ tane iki tepeli parçalanış olması gerekir. Bu durumda, p değeri, $p \leq (m-3)(n-r) + 1 + n - r - 2$ eşitsizliğini sağlar.

$\frac{-3n+3r+4}{2} + m(n-r+1) - m \leq (m-3)(n-r) + 1 + n - r - 2$ olduğundan, $n-r \leq -6$ elde edilir. $n-r > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $EI(G) = n-r+1$ dir.

ii) $n-r+1$ çift sayı olsun. Bu durumda, iki tepeli ve tepe bütünlük değeri birbirine eşit olan parçalanışların tepe bütünlük değeri, $I_V = 2 + \frac{n-r-1}{2} + (n-r)(m-1) + 1$ dir. Kesim tepeyi içeren parçalanışa V' denilirse, $|V'| = p$ olsun. Bu durumda, $I'_V = p + n - r$ olur. İki tepeli parçalanışlar ile kesim tepeyi içeren parçalanışın tepe bütünlük değeri eşit olması gerektiğinden, $2 + \frac{n-r-1}{2} + (n-r)(m-1) + 1 = p + n - r$ olur, buradan $\frac{-3n+3r+5}{2} + m(n-r+1) - m = p$ elde edilir. $EI(G) > n-r+1$ olması için V' kümesi haricinde en az $n-r+1$ tane iki tepeli parçalanış olması gerekir. Bu durumda, $p \leq (m-3)(n-r) + 1 + n - r$ dir. $\frac{-3n+3r+5}{2} + m(n-r+1) - m \leq (m-3)(n-r) + 1 + n - r$ olduğundan, $n-r \leq -3$ elde edilir. $n-r > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $EI(G) = n-r+1$ dir.

Durum 2. G çizgesi sarkık ayrıt içersin. G çizgesinde $n - [m(n-r) + 1]$ tane sarkık ayrıt vardır. Bu durumu iki kısımda inceleyelim.

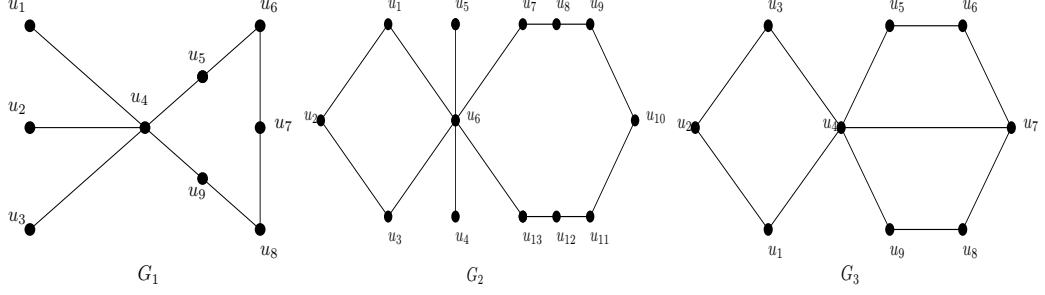
i) $n-r+1$ tek sayı olsun. Bu durumda, iki tepeli ve tepe bütünlük değeri birbirine eşit olan parçalanışların tepe bütünlük değeri, $I_V = 2 + \frac{n-r-2}{2} + (n-r)(m-1) + 1 + n - [m(n-r) + 1]$ dir. Kesim tepeyi içeren parçalanışa V' denilirse, $|V'| = p$ olsun. Bu durumda, $I'_V = p + n - r$ olur. İki tepeli parçalanışlar ile kesim tepeyi içeren parçalanışın tepe bütünlük değeri eşit olması gerektiğinden, $2 + \frac{n-r-2}{2} + (n-r)(m-1) + 1 + n - [m(n-r) + 1] = p + n - r$ olur, buradan $\frac{-3n+3r+2}{2} + n = p$ elde edilir. $EI(G) > n-r+1$ olması için V' kümesi haricinde en az $n-r+1$ tane iki tepeli parçalanış olması gerekir. Bu durumda, $p \leq (m-3)(n-r) + 1 + n - r - 2 + n - [m(n-r) + 1]$ yani $p \leq -n + 2r - 2$ olması gerekir. $\frac{-3n+3r+2}{2} + n \leq -n + 2r - 2$ olduğundan, $n-r \leq -6$ elde edilir. $n-r > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $EI(G) = n-r+1$ dir.

ii) $n-r+1$ çift sayı olsun. Bu durumda, iki tepeli ve tepe bütünlük değeri birbirine eşit olan parçalanışların tepe bütünlük değeri, $I_V = 2 + \frac{n-r-1}{2} + (n-r)(m-1) + 1 + n - [m(n-r) + 1]$ dir. Kesim tepeyi içeren parçalanışa V' denilirse, $|V'| = p$ olsun. Bu durumda, $I'_V = p + n - r$ olur. İki tepeli parçalanışlar ile kesim tepeyi içeren parçalanışın tepe bütünlük değeri eşit olması gerektiğinden, $2 + \frac{n-r-1}{2} + (n-r)(m-1) + 1 + n - [m(n-r) + 1] = p + n - r$ olur, buradan $\frac{-3n+3r+3}{2} + n = p$ elde edilir. $EI(G) > n-r+1$ olması için V' kümesi haricinde en az $n-r+1$ tane iki tepeli parçalanış olması gerekir. Bu durumda, $p \leq (m-3)(n-r) + 1 + n - r - 2 + n - [m(n-r) + 1] + 2$ yani $p \leq -n + 2r$ olması

gerekir. $\frac{-3n+3r+3}{2} + n \leq -n + 2r$ olduğundan, $n - r \leq -3$ elde edilir. $n - r > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $EI(G) = n - r + 1$ dir.

Durum1 ve Durum2 den $EI(G) = n - r + 1$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.2. Aşağıda 7 tepeli G_1 çizgesi, 11 tepeli G_2 çizgesi ve 9 tepeli G_3 çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.1. Bir, İki ve Dört Çevreli G_1, G_2, G_3 Çizgeleri

$n = 9$ ve $r = 4$ olduğundan dolayı, $EI(G_1) = 9 - 4 + 1 = 6$ dir. Parçalanışlar, $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $V_2 = \{u_5\}$, $V_3 = \{u_6\}$, $V_4 = \{u_7\}$, $V_5 = \{u_8\}$, $V_6 = \{u_9\}$ şeklindedir.

$n = 13$ ve $r = 6$ olduğundan dolayı, $EI(G_2) = 13 - 6 + 1 = 8$ dir. Parçalanışlar, $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $V_2 = \{u_7\}$, $V_3 = \{u_8\}$, $V_4 = \{u_9\}$, $V_5 = \{u_{10}\}$, $V_6 = \{u_{11}\}$, $V_7 = \{u_{12}\}$, $V_8 = \{u_{13}\}$ şeklindedir.

$n = 9$ ve $r = 4$ olduğundan dolayı, $EI(G_3) = 9 - 4 + 1 = 6$ dir. Parçalanışlar, $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $V_2 = \{u_5\}$, $V_3 = \{u_6\}$, $V_4 = \{u_7\}$, $V_5 = \{u_8\}$, $V_6 = \{u_9\}$ şeklindedir.

Teorem 4.1.3. n tepeli bir G çizgesinde $I(G) = n$ ise $EI(G) = n$ dir.

İspat: $I(G) = n$ ve $EI(G) \neq n$ olduğunu kabul edelim. Eğer n tepeli G çizgesinde $EI(G) \neq n$ ise Teorem 3.2.3'e göre G çizgesinin kesim tepesi vardır. G çizgesinin kesim tepesi varsa $I(G) \neq n$ olur. Bu kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla, $EI(G) = n$ dir. ■

Teorem 4.1.4. m tepeli tam çizge ve n tepeli yol çizgeden oluşan $m + n$ tepeli uçurtma çizge $Kite_m^n$ için $m > n + 2$ ise eş bütünlük değeri aşağıdaki gibidir.

$$EI(Kite_m^n) = m \quad (4.1)$$

İspat: $m > n + 2$ olsun. Yol çizgenin tepeleri $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tam çizgenin tepeleri $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ olsun. Bu durumda, $Kite_m^n$ uçurtma çizgesinin bir parçalanışı, $V_1 = \{u_1, \dots, u_n, v_1\}$, $V_2 = \{v_2\}$, $V_3 = \{v_3\}, \dots, V_m = \{v_m\}$ şeklinde seçilirse $1 \leq i \leq m$ aralığındaki her i için $I_{V_i} = m + n$ olur. Bu durumda $EI(Kite_m^n) \geq m$ elde edilir. Diğer taraftan $EI(Kite_m^n) > m$ olması için $I_{V'_k} \leq m + n$ ve $m < k \leq m + n$ olacak şekilde farklı bir V'_k parçalanışı olması gerekir. Bu durum iki farklı şekilde incelenelim.

Durum 1. $I_{V'_k} = m + n$ olsun. Bu durum üç farklı kısımda incelenir.

i) V'_k parçalanışları tek tepeli olsun. $Kite_m^n$ çizgesinde en fazla m tane tek tepeye sahip parçalanışın bütünlük değeri birbirine eşittir. Dolayısıyla, hepsi tek tepeye sahip parçalanışın bütünlük değeri birbirine eşit olmayacağından, eş bütünlük değeri tek tepeli parçalanışlar için hesaplanamaz.

ii) V'_k parçalanışları en az iki tepeye sahip olsun. Bu durumda $w(G - V') > 1$ olacağından, $I_{V'} < m + n$ elde edilir. Bu kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla $EI(Kite_m^n) = m$ dir.

iii) V'_k parçalanışlarının bazıları tek tepeli, bazıları en az iki tepeli parçalanışlar olsun. Bu durumda, en fazla m tane tek tepeye sahip parçalanışın bütünlük değeri $m + n$ dir. En az iki tepeye sahip parçalanışlar için $w(G - V') > 1$ olacağından bütünlük değerleri $m + n$ den küçüktür. Dolayısıyla, eş bütünlük değerinin tanımı gereği bütün parçalanışların bütünlük değeri birbirine eşit olması gerektiğinden ve bu durum gerçekleşmediğinden eş bütünlük değeri hesaplanamaz.

Durum 2. $I_{V'_k} < m + n$ olsun. Bu durum iki farklı kısımda incelenir.

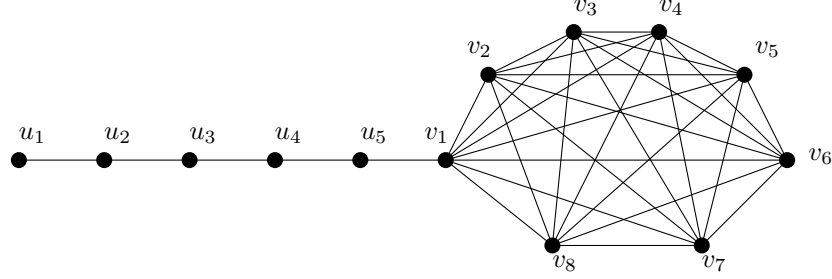
i) V'_k parçalanışları tek kesim tepeli olsun. $m > n + 2$ olduğundan tek kesim tepeye sahip V'_k parçalanışlarının bütünlük değeri birbirine eşit olmaz. Dolayısıyla eş bütünlük değeri bu kısım için hesaplanamaz.

ii) V'_k parçalanışlarının bazıları tek kesim tepeli, bazıları en az iki kesim tepeli olsun. $m > n + 2$ olduğundan, bütünlük değeri birbirine eşit tek kesim tepeli parçalanışlar mevcut değildir. Dolayısıyla, tek kesim tepeli parçalanış sadece bir tane seçilir. Bu durumda, diğer kesim tepelerden en az iki tane seçilecek şekilde parçalanışlar elde edilir. Eş bütünlük değerinin tanımı gereği maksimum sayıda parçalanış arandığı için parçalanışların iki kesim tepeli olma ihtimalinin hesaplanması yeterlidir. $Kite_m^n$ çizgesinde toplam n tane kesim tepe vardır. $n - 1$ tanesinden iki tane kesim tepeli parçalanışlar oluşturulursa en

fazla $\frac{n-1}{2}$ tane parçalanış elde edilir. Bu durumda, $k = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ olur. Dolayısıyla, $EI(Kite_m^n) < m$ elde edilir.

Durum1 ve Durum2 den dolayı $EI(Kite_m^n) = m$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.5. Aşağıda $Kite_8^5$ uçurtma çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.2. $Kite_8^5$ Çizgesi

$m = 8, n = 5$ için $8 > 5 + 2 = 7$ olduğundan, $EI(Kite_8^5) = 8$ dir.

$\{V_1, V_2, \dots, V_8\}$ parçalanışı aşağıdaki gibi seçilirse, $1 \leq i \leq 8$ aralığındaki her i değeri için, $I_{V_i} = 13$ olur.

$$V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1\}, V_2 = \{v_2\}, V_3 = \{v_3\}, V_4 = \{v_4\}, V_5 = \{v_5\}$$

$$V_6 = \{v_6\}, V_7 = \{v_7\}, V_8 = \{v_8\}$$

Teorem 4.1.6. $k, t \in \mathbb{Z}^+$ için $S(k, t)$ dikenli yıldız çizgesi olsun. $\{u, u_1, u_2, \dots, u_k\}$ tepeleri kesim tepeler ve u tepesi merkez tepe ve $\{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1(t-1)}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2(t-1)}, \dots, u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{k(t-1)}\}$ tepeleri uç tepeler olsun. $1 \leq i \leq k$ aralığındaki her i değeri için $\deg(u) = \deg(u_i)$ ise,

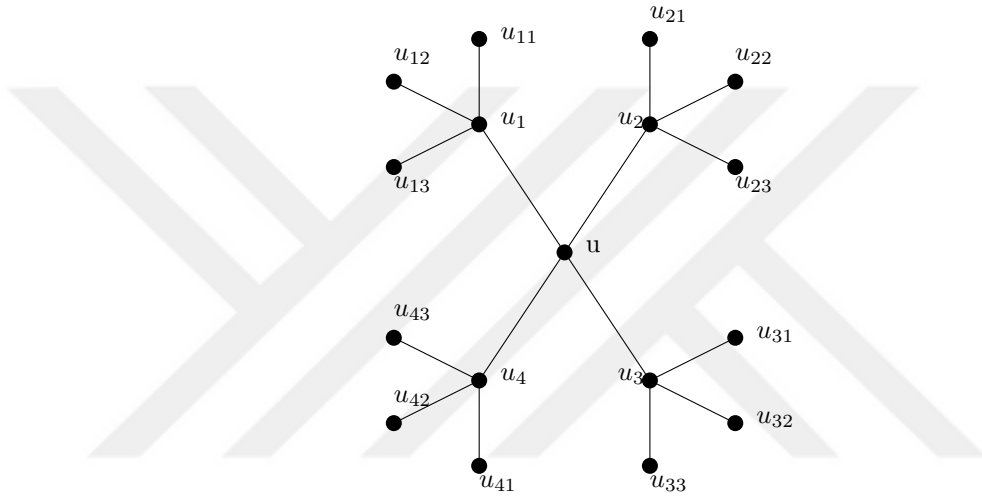
$$EI(S(k, t)) = k + 1 \quad (4.2)$$

dir.

İspat: $\deg(u) = \deg(u_i)$ olsun. $\deg(u) = k$ ise $t = k$ olur. Buradan $|V(S(k, t))| = k^2 + 1$ elde edilir. $V_1 = \{u, u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1(t-1)}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2(t-1)}, \dots, u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{k(t-1)}\}$, $V_2 = \{u_1\}, V_3 = \{u_2\}, \dots, V_{k+1} = \{u_k\}$ olsun. $1 \leq j \leq k + 1$ aralığındaki her j değeri için $I_{V_j} = k^2 - k + 2$ olur. Buradan $EI(S(k, t)) \geq k + 1$ elde edilir. $EI(S(k, t)) > k + 1$ olduğunu kabul edelim. $S(k, t)$ dikenli yıldız çizgesinde $k + 1$ tane kesim tepe vardır. Her parçalanış kümesinde sadece bir ke-

sim tepe olduğunda $k + 1$ parçalanış elde edilir. $EI(S(k, t)) > k + 1$ olması için $\{u, u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1(t-1)}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2(t-1)}, \dots, u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{k(t-1)}\}$ kümesinden birden fazla parçalanış elde edilmesi gerekir. Eğer $u \in V_1'$ denirse ve $|V_1'| = x$ ise $I_{V_1'} = x + k$ olur. Diğer taraftan uç tepelerden oluşan bir parçalanış V_2' ise $I_{V_2'} = k^2 + 1$ olur. $I_{V_1'} = I_{V_2'}$ olması gerektiğinden $x + k = k^2 + 1$ elde edilir. Buradan, $x - 1 = k^2 - k$ olur. $|V_1'| = x$ olup u tepesi hariç $x - 1$ tane uç tepeye sahiptir. $x - 1 = k^2 - k$ olduğundan bu ise çizge-deki bütün uç tepelerin sayısıdır. O zaman $|V_2'| = 0$ olur. Dolayısıyla, $EI(S(k, t)) = k + 1$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.7. Aşağıda $S(4, 4)$ dikenli yıldız çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.3. $S(4, 4)$ Dikenli Yıldız Çizgesi

Bu durumda eş bütünlük değeri $EI(S(4, 4)) = 4 + 1 = 5$ dir.

$S(4, 4)$ dikenli yıldız çizgesinin bir parçalanışı $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ olsun. Bu durumda, $1 \leq i \leq 5$ aralığındaki her i değeri için, $I_{V_i} = 14$ olur.

$$V_1 = \{u, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43}\}$$

$$V_2 = \{u_1\}, V_3 = \{u_2\}, V_4 = \{u_3\}, V_5 = \{u_4\}$$

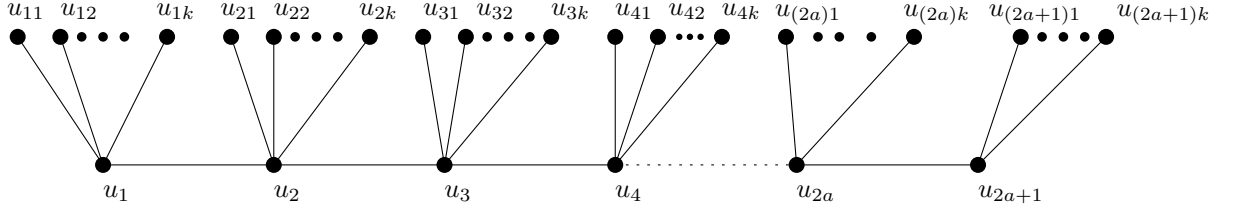
Teorem 4.1.8. $P_{n,p,k}$ dikenli yol çizge ve $p = k$ ve $n > 2$ olmak üzere,

$$EI(P_{n,p,k}) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \quad (4.3)$$

dir.

İspat: $p = k$ ve $n > 2$ olsun.

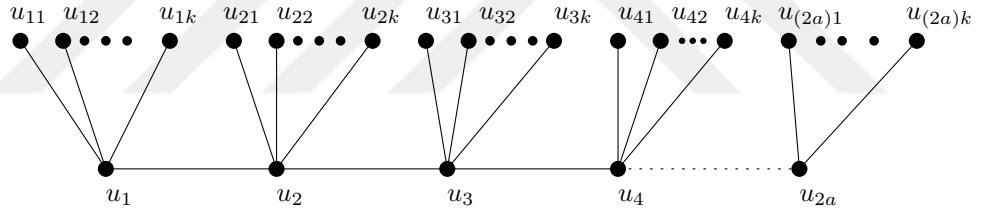
Durum 1. $n = 2a + 1$ için,



Şekil 4.4. $n > 2$ ve $n = 2a + 1$ için $P_{n,p,k}$ Çizgesi

$V_1 = \{u_1, u_{a+1}, u_{11}, \dots, u_{1k}, u_{(a+1)1}, \dots, u_{(a+1)k}\}, V_2 = \{u_2, u_{a+3}, u_{21}, \dots, u_{2k}, u_{(a+3)1}, \dots, u_{(a+3)k}\}, \dots, V_{a+1} = \{u_{a+2}, u_{(a+2)1}, \dots, u_{(a+2)k}\}$ seçilirse $1 \leq i \leq a + 1$ aralığındaki her i için $I_{V_i} = (a + 2)(k + 1)$ olur. Buradan, $EI(P_{n,p,k}) \geq a + 1 = \frac{n+1}{2}$ elde edilir.

Durum 2. $n = 2a$ için,



Şekil 4.5. $n > 2$ ve $n = 2a$ için $P_{n,p,k}$ Çizgesi

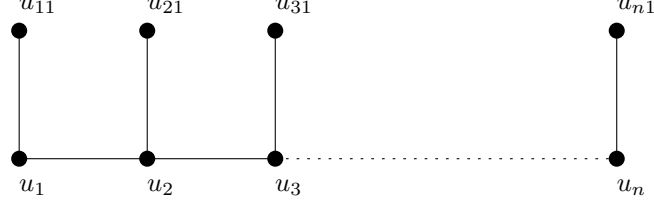
$V_1 = \{u_1, u_{a+1}, u_{11}, \dots, u_{1k}, u_{(a+1)1}, \dots, u_{(a+1)k}\}, V_2 = \{u_2, u_{a+2}, u_{21}, \dots, u_{2k}, u_{(a+2)1}, \dots, u_{(a+2)k}\}, \dots, V_a = \{u_a, u_{2a}, u_{a1}, \dots, u_{ak}, u_{(2a)1}, \dots, u_{(2a)k}\}$ seçilirse $1 \leq i \leq a$ aralığındaki her i için $I_{V_i} = (a + 1)(k + 1)$ olur. Buradan, $EI(P_{n,p,k}) \geq a = \frac{n}{2}$ elde edilir. Durum1 ve Durum2 den $n > 2$ için $EI(P_{n,p,k}) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ elde edilir. ■

Teorem 4.1.9. P_n^+ tarak çizge ve $n > 2$ olmak üzere,

$$EI(P_n^+) = \begin{cases} \frac{n+\sqrt{2n}}{2}, & n \text{ çift ve } 2n \text{ tam kare ise} \\ \frac{n+\sqrt{2n-1}}{2}, & n \text{ tek ve } 2n-1 \text{ tam kare ise} \end{cases} \quad (4.4)$$

dir.

İspat: P_n^+ çizgesinin kesim tepeleri $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve sarkık ayrıtların uç tepeleri $\{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}\}$ şeklinde etiketlenmiş olsun. Aşağıdaki şekilde P_n^+ çizgesi etiketlenmiş şekilde verilmiştir.



Şekil 4.6. P_n^+ Çizgesi

i) $n > 2$, n çift ve $2n$ tam kare olsun.

$j > \frac{n}{2} + 1$ olmak üzere, $V_1 = \{u_1, u_j\}$, $V_2 = \{u_2, u_{j+1}\}$, $V_3 = \{u_3, u_{j+2}\}, \dots$, $V_{n-j+1} = \{u_{n-j+1}, u_n\}$, $V_{n-j+2} = \{u_{n-j+2}\}$, $V_{n-j+3} = \{u_{n-j+3}\}, \dots$, $V_{\frac{n}{2}} = \{u_{\frac{n}{2}}\}$, $V_{\frac{n}{2}+1} = \{u_{\frac{n}{2}+1}\}, \dots$, $V_{j-1} = \{u_{j-1}\}$ şeklindeki kümeler kesim tepeler yerleştirilmiş olsun. $\{V_1, V_2, \dots, V_{j-1}\}$ kümelerinin tepe bütünlük değerleri aşağıdaki gibidir.

$$I_{V_1} = I_{V_2} = I_{V_3} = \dots = I_{V_{n-j+1}} = 2j - 2 > n \quad (4.5)$$

$$I_{V_{n-j+2}} = 2j - 3$$

$$I_{V_{n-j+3}} = 2j - 5$$

$$\vdots$$

$$I_{V_{\frac{n}{2}}} = n + 1$$

$$I_{V_{\frac{n}{2}+1}} = n + 1$$

$$\vdots$$

$$I_{V_{j-2}} = 2j - 5$$

$$I_{V_{j-1}} = 2j - 3$$

Yukarıda verilen kümelerin tepe bütünlük değerlerini eşitlemek için tek kesim tepeli $\{V_{n-j+2}, V_{n-j+3}, \dots, V_{j-1}\}$ kümelerine toplam $2.(1 + 3 + 5 + \dots + (2j - n - 3)) = 2.(\frac{2j-n-2}{2})^2$ tane tepe gerekir. Kullanılmayan $\{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}\}$ tepeleri kesim tepe olmadığından $\{V_{n-j+2}, V_{n-j+3}, \dots, V_{j-1}\}$ kümelerine dağıtıldığında $\{V_{n-j+2}, V_{n-j+3}, \dots, V_{j-1}\}$ kümelerinin tepe bütünlük değerleri $\{V_1, V_2, \dots, V_{n-j+1}\}$ kümelerinin tepe bütünlük değeri ile eşitlenir. Bu durumda $2.(\frac{2j-n-2}{2})^2 \leq n$ olmalıdır. Buradan $j \in [\frac{n+2-\sqrt{2n}}{2}, \frac{n+2+\sqrt{2n}}{2}]$ elde edilir. $j > \frac{n}{2} + 1$ ve eş bütünlük değerinin tanımı gereği j değeri maksimum büyüklükte seçilirse $j = \frac{n+2+\sqrt{2n}}{2}$ olur. Dolayısıyla, $EI(P_n^+) = j - 1 = \frac{n+2+\sqrt{2n}}{2} - 1 = \frac{n+\sqrt{2n}}{2}$ elde edilir.

ii) $n > 2$, n tek ve $2n - 1$ tam kare olsun.

$j \geq \frac{n}{2} + 2$ olmak üzere, $V_1 = \{u_1, u_j\}$, $V_2 = \{u_2, u_{j+1}\}$, $V_3 = \{u_3, u_{j+2}\}, \dots$, $V_{n-j+1} = \{u_{n-j+1}, u_n\}$, $V_{n-j+2} = \{u_{n-j+2}\}$, $V_{n-j+3} = \{u_{n-j+3}\}, \dots$, $V_{\frac{n-1}{2}} = \{u_{\frac{n-1}{2}}\}$, $V_{\frac{n+1}{2}} = \{u_{\frac{n+1}{2}}\}$, $V_{\frac{n+3}{2}} = \{u_{\frac{n+3}{2}}\}, \dots$, $V_{j-1} = \{u_{j-1}\}$ şeklindeki kümelere kesim tepeler yerleştirilmiş olsun. $\{V_1, V_2, \dots, V_{j-1}\}$ kümelerinin tepe bütünlük değerleri aşağıdaki gibidir.

$$I_{V_1} = I_{V_2} = I_{V_3} = \dots = I_{V_{n-j+1}} = 2j - 2 \geq n + 2 \quad (4.6)$$

$$I_{V_{n-j+2}} = 2j - 3$$

$$I_{V_{n-j+3}} = 2j - 5$$

$\vdots$

$$I_{V_{\frac{n-1}{2}}} = n + 2$$

$$I_{V_{\frac{n+1}{2}}} = n$$

$$I_{V_{\frac{n+3}{2}}} = n + 2$$

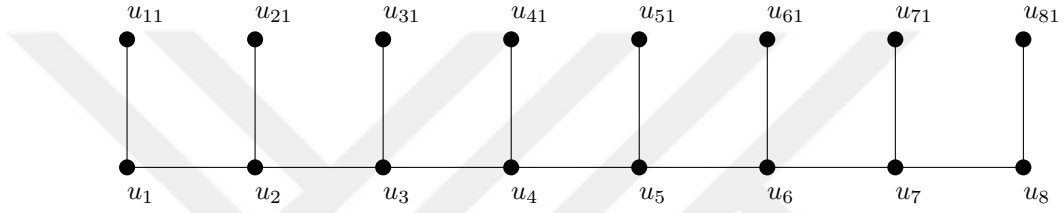
$\vdots$

$$I_{V_{j-2}} = 2j - 5$$

$$I_{V_{j-1}} = 2j - 3$$

Yukarıda verilen kümelerin tepe bütünlük değerlerini eşitlemek için tek kesim tepeli $\{V_{n-j+2}, V_{n-j+3}, \dots, V_{j-1}\}$ kümelerine toplam $2 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + (2j - n - 4)) + 2j - n - 2 = 2 \cdot \left(\frac{2j-n-3}{2}\right)^2 + 2j - n - 2$ tane tepe gerekir. Kullanılmayan $\{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}\}$ tepeleri kesim tepe olmadığından $\{V_{n-j+2}, V_{n-j+3}, \dots, V_{j-1}\}$ kümelerine dağıtıldığında $\{V_{n-j+2}, V_{n-j+3}, \dots, V_{j-1}\}$ kümelerinin tepe bütünlük değerleri $\{V_1, V_2, \dots, V_{n-j+1}\}$ kümelerinin tepe bütünlük değeri ile eşitlenir. Bu durumda $2 \cdot \left(\frac{2j-n-3}{2}\right)^2 + 2j - n - 2 \leq n$ olmalıdır. Buradan $j \in \left[\frac{n+2-\sqrt{2n-1}}{2}, \frac{n+2+\sqrt{2n-1}}{2}\right]$ elde edilir. $j \geq \frac{n}{2} + 2$ ve eş bütünlük değerinin tanımı gereği j değeri maksimum büyüklükte seçilirse $j = \frac{n+2+\sqrt{2n-1}}{2}$ olur. Dolayısıyla, $EI(P_n^+) = j - 1 = \frac{n+2+\sqrt{2n-1}}{2} - 1 = \frac{n+\sqrt{2n-1}}{2}$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.10. Aşağıda P_8^+ tarak çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.7. P_8^+ Tarak Çizge

$n = 8$ için $j = \frac{n+2+\sqrt{2n}}{2} = 7$ dir. Dolayısıyla, $EI(P_8^+) = \frac{8+\sqrt{16}}{2} = 6$ elde edilir.

$V_1 = \{u_1, u_7\}$, $V_2 = \{u_2, u_8\}$, $V_3 = \{u_3, u_{11}\}$, $V_4 = \{u_4, u_{21}, u_{31}, u_{41}\}$,

$V_5 = \{u_5, u_{51}, u_{61}, u_{71}\}$, $V_6 = \{u_6, u_{81}\}$ parçanışı için $I_{V_1} = I_{V_2} = I_{V_3} = I_{V_4} = I_{V_5} = I_{V_6} = 12$ olur.

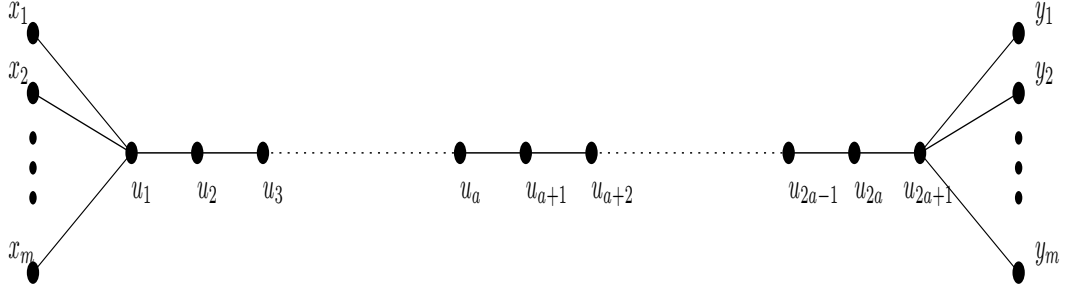
Teorem 4.1.11. $P_{n,m}$ dikenli çubuk çizge ve $m \geq \frac{(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}{2}$ ise eş bütünlük değeri,

$$EI(P_{n,m}) = n \quad (4.7)$$

dir.

İspat: $m \geq \frac{(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}{2}$ olsun.

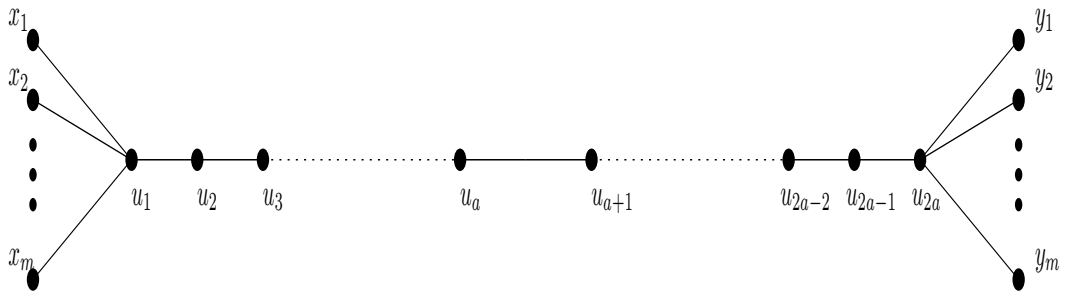
Durum1. $n = 2a + 1$ ise,



Şekil 4.8. $n = 2a + 1$ için $P_{n,m}$ Çizgesi

V_1 kümesi u_1 ve y_i tepelerinin t tanesinden, V_{2a+1} kümesi u_{2a+1} ve x_i tepelerinin t tanesinden oluşsun. V_k kümeleri $2 \leq k \leq a$ olmak üzere u_k ve x_i tepelerinden $k - 1$ tane tepeden oluşsun. V_j kümeleri $a + 2 \leq j \leq 2a$ olmak üzere u_j ve y_i tepelerinden $(2a + 1) - j$ tane tepeden oluşsun. V_{a+1} kümesi ise u_{a+1} tepesi ve daha önce kullanılmamış olan x_i ve y_i tepelerinden oluşsun. Bu durumda $I_{V_1} = I_{V_2} = \dots = I_{V_a} = I_{V_{a+2}} = \dots = I_{V_{2a+1}} = m + 2a + 1$ ve $I_{V_{a+1}} = 2m - \frac{a^2}{2} + \frac{3a}{2} - t + 1$ olur. Eş bütünlük değerinin tanımı gereği, $I_{V_1} = I_{V_{a+1}}$ olması gerektiğinden, $m + 2a + 1 = 2m - \frac{a^2}{2} + \frac{3a}{2} - t + 1$ olur. Buradan $t = m - \frac{a(a+1)}{2} = m - \frac{(\frac{n-1}{2}) \cdot (\frac{n+1}{2})}{2} \geq 0$ elde edilir. $\{V_1, V_2, \dots, V_{2a+1}\}$ parçalanışlarının hepsinde sadece bir tane kesim tepe olduğundan bu parçalanış maksimum parçalanıştır. Dolayısıyla, $EI(P_{n,m}) = 2a + 1 = n$ dir.

Durum2. $n = 2a$ ise,



Şekil 4.9. $n = 2a$ için $P_{n,m}$ Çizgesi

V_1 kümesi u_1 ve y_i tepelerinin t tanesinden, V_{2a} kümesi u_{2a} ve x_i tepelerinin t tanesinden oluşsun. V_k kümeleri $2 \leq k \leq a - 1$ olmak üzere u_k ve x_i tepelerinden $k - 1$ tane tepeden oluşsun. V_j kümeleri $a + 2 \leq j \leq 2a - 1$ olmak üzere u_j ve y_i tepelerinden $2a - j$ tane tepeden oluşsun. V_a ve V_{a+1} kümeleri ise sırasıyla u_a

ve u_{a+1} tepeleri ve daha önce kullanılmamış olan x_i ve y_i tepelerini eşit şekilde paylaşarak oluşsun. u_a ve u_{a+1} tepelerinin herbirine $m - (t + \frac{(a-2) \cdot (a-1)}{2})$ tane x_i ve y_i tepeleri kalır. $I_{V_1} = I_{V_2} = \dots = I_{V_{a-1}} = I_{V_{a+2}} = \dots = I_{V_{2a}} = m + 2a$ ve $I_{V_a} = I_{V_{a+1}} = 2m - t - \frac{(a-2) \cdot (a-1)}{2} + a + 1$ olur. Eş bütünlük değerinin tanımı gereği, $I_{V_1} = I_{V_a}$ olacağından $2m - t - \frac{(a-2) \cdot (a-1)}{2} + a + 1 = m + 2a$ olur. Buradan, $t = m - \frac{(a-1) \cdot a}{2} = m - \frac{(\frac{n}{2}-1) \cdot (\frac{n}{2})}{2} > 0$ elde edilir. $\{V_1, V_2, \dots, V_{2a}\}$ parçalanışlarının hepsinde sadece bir tane kesim tepe olduğundan bu parçalanış maksimum parçalanıştır. Dolayısıyla, $EI(P_{n,m}) = 2a = n$ dir.

Durum1 ve Durum2 den $m \geq \frac{(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil}{2}$ için $EI(P_{n,m}) = n$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.12. Aşağıda $P_{7,7}$ dikenli çubuk çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.10. $P_{7,7}$ Çizgesi

$m = 7, n = 7$ olup $7 \geq \frac{(\lceil \frac{7}{2} \rceil - 1) \cdot \lceil \frac{7}{2} \rceil}{2} = 6$ ve $t = 1$ dir. Dolayısıyla, $EI(P_{7,7}) = 7$ elde edilir. Bu durumda, $V_1 = \{u_1, y_1\}, V_2 = \{u_2, x_2\}, V_3 = \{u_3, x_3, x_4\}, V_4 = \{u_4, x_5, x_6, x_7, y_5, y_6, y_7\}, V_5 = \{u_5, y_3, y_4\}, V_6 = \{u_6, y_2\}, V_7 = \{u_7, x_1\}$ ve $1 \leq i \leq 7$ aralığındaki her i değeri için $I_{V_i} = 14$ olur.

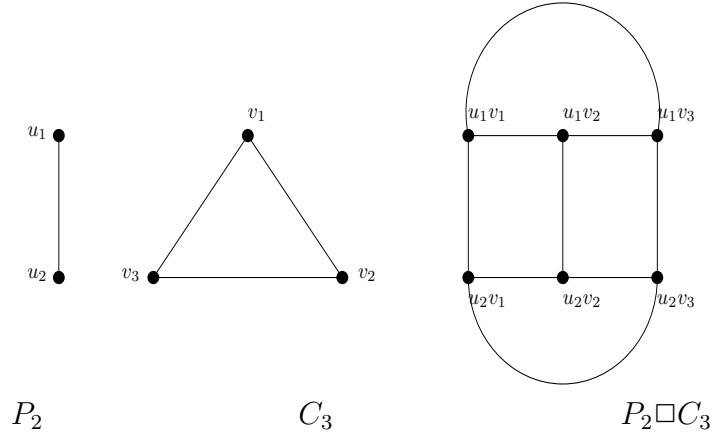
Teorem 4.1.13. G ve H bağlantılı iki çizge olsun. Bu takdirde,

$$EI(G \square H) = |V(G)| \cdot |V(H)| \quad (4.8)$$

dir.

İspat: G ve H bağlantılı iki çizge ise kartezyen çarpımı olan $G \square H$ çizgesi kesim tepe içermez. $|V(G \square H)| = |V(G)| \cdot |V(H)|$ olduğundan Teorem 3.2.3 den dolayı, $EI(G \square H) = |V(G \square H)| = |V(G)| \cdot |V(H)|$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.14. Aşağıda P_2 ve C_3 çizgelerinin kartezyen çarpım çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.11. P_2, C_3 ve $P_2 \square C_3$ Çizgeleri

$|V(P_2)| = 2, |V(C_3)| = 3$ olduğuna göre, Teorem 4.1.13 den dolayı, $EI(P_2 \square C_3) = 2.3 = 6$ elde edilir. $V_1 = \{u_1v_1\}, V_2 = \{u_1v_2\}, V_3 = \{u_1v_3\}, V_4 = \{u_2v_1\}, V_5 = \{u_2v_2\}, V_6 = \{u_2v_3\}$ seçilirse, $1 \leq i \leq 6$ aralığındaki her i değeri için $I_{V_i} = 6$ olur.

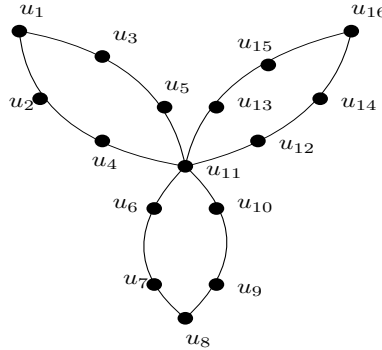
Teorem 4.1.15. C_n^m , rüzgar gülü çizge olmak üzere,

$$EI(C_n^m) = n \quad (4.9)$$

dir.

İspat: C_n^m rüzgar gülü çizgesi tek kesim tepe içerir. Bu durumda Teorem 4.1.1' e göre, $EI(C_n^m) = (m.n - m + 1) - (m.n - m - n + 2) + 1 = n$ elde edilir. ■

Örnek 4.1.16. Aşağıda 16 tepeli C_6^3 rüzgar gülü çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.12. C_6^3 Çizge

C_6^3 çizgesi tek kesim tepe içerdiğinden Teorem 4.1.1 e göre, $n = 16, r = 11$ için $EI(C_6^3) = 16 - 11 + 1 = 6$ elde edilir.

4.2. Bazı Transformasyon Çizgelerin Eş Bütünlük Değeri

Aşağıdaki teoremler x, y, z değişkenlerinin bütün değerleri için geçerlidir.

Teorem 4.2.1. $n > 3$ için $EI(P_n^{xyz}) = 2n - 1$ dir.

İspat: P_n^{xyz} transformasyon çizgesi $n > 3$ için kesim tepe içermez. Bu durumda, transformasyon çizgenin eş bütünlük değeri tepe sayısına eşittir. Teorem 3.2.3'e göre, $EI(P_n^{xyz}) = |V(P_n^{xyz})| = |V(P_n)| + |E(P_n)| = n + n - 1 = 2n - 1$ elde edilir. ■

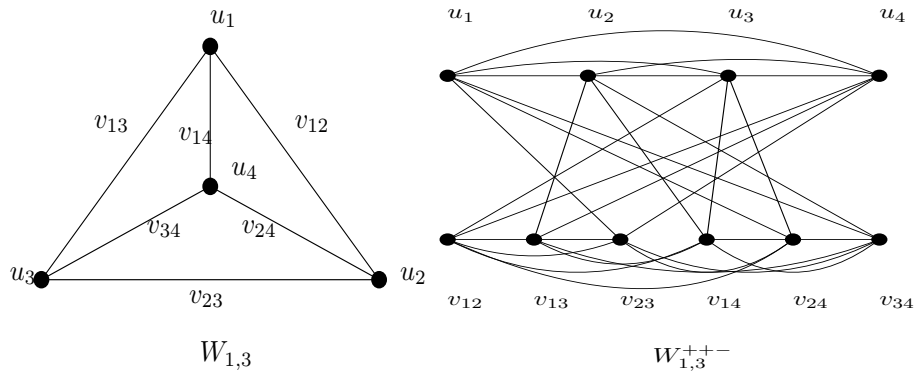
Teorem 4.2.2. $n > 3$ için $EI(C_n^{xyz}) = 2n$ dir.

İspat: C_n^{xyz} transformasyon çizgesi $n > 3$ için kesim tepe içermez. Bu durumda, transformasyon çizgenin eş bütünlük değeri tepe sayısına eşittir. Teorem 3.2.3'e göre, $EI(C_n^{xyz}) = |V(C_n^{xyz})| = |V(C_n)| + |E(C_n)| = n + n = 2n$ elde edilir. ■

Teorem 4.2.3. $n \geq 3$ için $EI(W_{1,n}^{xyz}) = 3n + 1$ dir.

İspat: $W_{1,n}^{xyz}$ transformasyon çizgesi $n \geq 3$ için kesim tepe içermez. Bu durumda, transformasyon çizgenin eş bütünlük değeri tepe sayısına eşittir. Teorem 3.2.3'e göre, $EI(W_{1,n}^{xyz}) = |V(W_{1,n}^{xyz})| = |V(W_{1,n})| + |E(W_{1,n})| = n + 1 + 2n = 3n + 1$ elde edilir. ■

Örnek 4.2.4. Aşağıda $W_{1,3}^{++-}$ transformasyon çizgesinin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



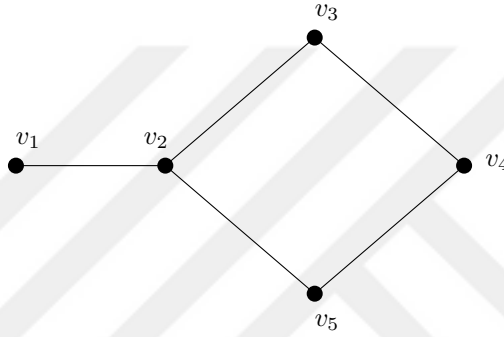
Şekil 4.13. $W_{1,3}$ ve $W_{1,3}^{++-}$ Transformasyon Çizgesi

Yukarıdaki şekilde, $W_{1,3}^{++-}$ transformasyon çizgesi kesim tepe içermediğinden ve 10 tane tepesi olduğundan, $EI(W_{1,3}^{++-}) = 10$ dur.

4.3. Komşu Eş Bütünlük Değeri

Tanım 4.3.1. G çizgesinde, $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ kümeleri $V(G)$ nin bir parçalanışı olmak üzere, $1 \leq i \leq t$ aralığında ki her i değeri için VNI_{V_i} değerleri aynı ise maksimum sayıdaki $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ parçalanışının kardinalitesine komşu eş bütünlük(neighbor equi-integrity) değeri denir ve $NEI(G)$ ile gösterilir.

Örnek 4.3.2. Aşağıda 5 tepeli G çizgesinin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.14. G Çizgesi

G çizgesinin bir parçalanışı aşağıdaki gibi olsun.

$$V_1 = \{v_1, v_4\}, VNI_{V_1} = 2$$

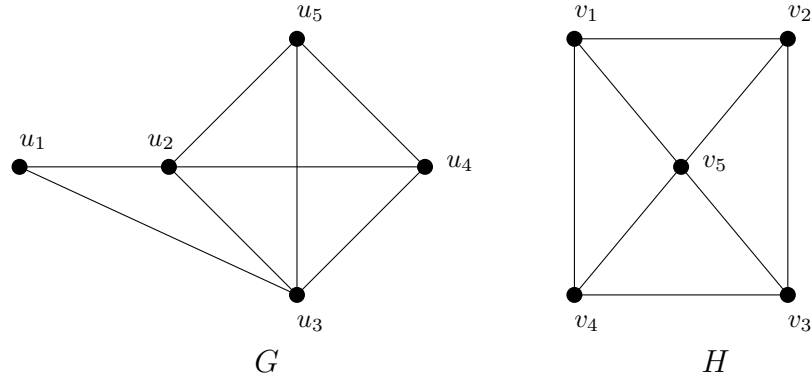
$$V_2 = \{v_2\}, VNI_{V_2} = 2$$

$$V_3 = \{v_3\}, VNI_{V_3} = 2$$

$$V_4 = \{v_5\}, VNI_{V_4} = 2$$

$$\{V_1, V_2, V_3, V_4\} \text{ için } NEI(G) = 4 \text{ dür.}$$

Örnek 4.3.3. Tepe sayıları, ayırt sayıları, tepe komşu bütünlük değeri ve eş bütünlük değeri eşit olan iki çizge için komşu eş bütünlük değerinin ayırt edici bir özellik olduğunu göstermek üzere aşağıdaki örnek verilmiştir.



Şekil 4.15. G ve H Çizgeleri

G ve H çizgeleri için $|V(G)| = |V(H)| = 5$ ve $|E(G)| = |E(H)| = 8$ dir.

$$VNI(G) = 1$$

$$VNI(H) = 1$$

$$EI(G) = 5$$

$$EI(H) = 5$$

$V(G)$ 'nin bir parçalanışı $V_1 = \{u_1, u_4\}$, $V_2 = \{u_2, u_3\}$, $V_3 = \{u_5\}$ şeklinde seçilirse, $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $VNI_{V_i} = 2$ dir. Dolayısıyla, $NEI(G) = 3$ tür.

$V(H)$ 'nin bir parçalanışı $V_1 = \{v_1, v_5\}$, $V_2 = \{v_2\}$, $V_3 = \{v_3\}$, $V_4 = \{v_4\}$ şeklinde seçilirse, $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $VNI_{V_i} = 2$ dir. Dolayısıyla, $NEI(H) = 4$ tür.

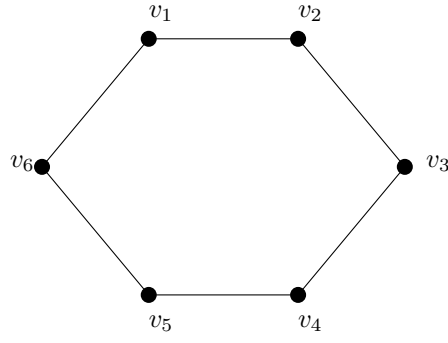
Teorem 4.3.4. C_n , n tepeli çevre çizge olmak üzere,

$$NEI(C_n) = n \quad (4.10)$$

dir.

İspat: $V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ olsun. $V_1 = \{u_1\}$, $V_2 = \{u_2\}$, $V_3 = \{u_3\}$, ..., $V_n = \{u_n\}$ olarak seçilirse, $1 \leq i \leq n$ aralığında ki her i değeri için $VNI(V_i) = 1 + (n - 3) = n - 2$ olur. Dolayısıyla, $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ parçalanışı maksimum sayıda olduğundan, $NEI(C_n) = n$ dir. ■

Örnek 4.3.5. Aşağıda 6 tepeli çevre çizgenin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.16. C_6 Çizgesi

$|V(C_6)| = 6$ olduğundan, $NEI(C_6) = 6$ elde edilir.

$\{V_1, V_2, \dots, V_6\}$ parçalanışları aşağıdaki gibi seçilirse, tepe komşu bütünlük değerleri $1 \leq i \leq 6$ olmak üzere, $VNI_{V_i} = 4$ olur.

$$V_1 = \{v_1\}, V_2 = \{v_2\}, V_3 = \{v_3\}, V_4 = \{v_4\}, V_5 = \{v_5\}, V_6 = \{v_6\}$$

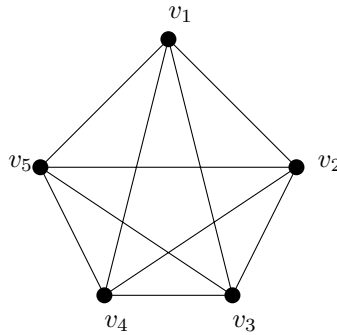
Teorem 4.3.6. K_n , n tepeli tam çizge olmak üzere,

$$NEI(K_n) = n \quad (4.11)$$

dir.

İspat: $V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ olsun. $V_1 = \{u_1\}, V_2 = \{u_2\}, V_3 = \{u_3\}, \dots, V_n = \{u_n\}$ olarak seçilirse, $1 \leq i \leq n$ aralığında ki her i değeri için $VNI(V_i) = 1 + 0 = 1$ olur. Dolayısıyla, $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ parçalanışı maksimum sayıda olduğundan, $NEI(K_n) = n$ dir. ■

Örnek 4.3.7. Aşağıda 5 tepeli tam çizgenin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.17. K_5 Çizgesi

$|V(K_5)| = 5$ olduğundan, $NEI(K_5) = 5$ elde edilir.

$\{V_1, V_2, \dots, V_5\}$ parçalanışı aşağıdaki gibi seçilirse, tepe komşu bütünlük değeri $1 \leq i \leq 5$ olmak üzere, $VNI_{V_i} = 1$ olur.

$$V_1 = \{v_1\}, V_2 = \{v_2\}, V_3 = \{v_3\}, V_4 = \{v_4\}, V_5 = \{v_5\}$$

Teorem 4.3.8. $K_{m,n}$, iki parçalı tam çizge olmak üzere,

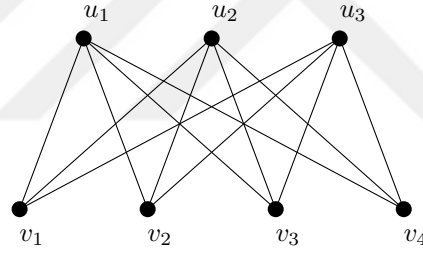
$$NEI(K_{m,n}) = m + n \quad (4.12)$$

dir.

İspat: $V(K_{m,n}) = \{u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun.

$V_1 = \{u_1\}, V_2 = \{u_2\}, \dots, V_m = \{u_m\}, V_{m+1} = \{v_1\}, V_{m+2} = \{v_2\}, \dots, V_{m+n} = \{v_n\}$ seçilirse, $1 \leq i \leq m + n$ aralığında ki her i değeri için $VNI(V_i) = 2$ olur. Dolayısıyla, $\{V_1, V_2, \dots, V_{m+n}\}$ parçalanışı maksimum sayıda olduğundan, $NEI(K_{m,n}) = m + n$ dir. ■

Örnek 4.3.9. Aşağıda 7 tepeli iki parçalı tam çizgenin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.18. $K_{3,4}$ Çizgesi

$|V(K_{3,4})| = 7$ olduğundan, $NEI(K_{3,4}) = 7$ elde edilir.

$\{V_1, V_2, \dots, V_7\}$ parçalanışı aşağıdaki gibi seçilirse, tepe komşu bütünlük değeri, $1 \leq i \leq 7$ olmak üzere, $VNI_{V_i} = 2$ dir.

$$V_1 = \{u_1\}, V_2 = \{u_2\}, V_3 = \{u_3\}, V_4 = \{v_1\}, V_5 = \{v_2\}, V_6 = \{v_3\}, V_7 = \{v_4\}$$

Teorem 4.3.10. P_n , n tepeli yol çizge olmak üzere,

$$NEI(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil \quad (4.13)$$

dir.

İspat: $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. İspat iki durumda incelenir.

Durum 1. $n = 2k + 1$ olsun.

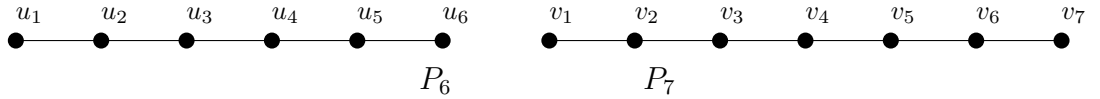
$V_1 = \{v_1, v_{k+2}\}, V_2 = \{v_2, v_{k+3}\}, \dots, V_k = \{v_k, v_{2k+1}\}, V_{k+1} = \{v_{k+1}\}$ parçalanışına göre, $1 \leq i \leq k + 1$ aralığında ki her i değeri için $VNI_{V_i} = k$ dir. Bu durumda, $NEI(P_n) \geq \frac{n+1}{2}$ olur. $NEI(P_n) > \frac{n+1}{2} = k + 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her maksimum komşu eş bütünlük parçalanışı en az üç tane tek tepeli kümeye sahip olması gerekir. Bu bir çelişkidir. Çünkü P_n grafinin en çok iki tane aynı komşu bütünlüğe sahip tek tepeli kümesi vardır. Dolayısıyla, $NEI(P_n) = \frac{n+1}{2}$ dir.

Durum 2. $n = 2k$ olsun.

$V_1 = \{v_1, v_{k+2}\}, V_2 = \{v_2, v_{k+3}\}, \dots, V_{k-1} = \{v_{k-1}, v_{2k}\}, V_k = \{v_k\}, V_{k+1} = \{v_{k+1}\}$ parçalanışına göre, $1 \leq i \leq k + 1$ aralığında ki her i değerleri için $VNI_{V_i} = k$ dir. Bu durumda, $NEI(P_n) \geq \frac{n+2}{2}$ olur. $NEI(P_n) > \frac{n+2}{2} = k + 1$ olduğunu kabul edelim. P_n çizgesinin en çok iki tane tek tepe içeren kümesinin komşu bütünlük değeri birbirine ve çift tepeli parçalanışların komşu bütünlük değerine eşittir. Dolayısıyla, $NEI(P_n) = \frac{n+2}{2}$ dir.

Durum1 ve Durum2 den dolayı $NEI(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ dir. ■

Örnek 4.3.11. Aşağıda 6 ve 7 tepeli yol çizgenin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.19. P_6 ve P_7 Çizgeleri

$n = 6$ olup $NEI(P_6) = \lceil \frac{6+1}{2} \rceil = 4$ tür. $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ parçalanışı aşağıdaki gibi seçilirse, $1 \leq i \leq 4$ aralığındaki her i değeri için, $VNI(V_i) = 3$ tür.

$$V_1 = \{u_1, u_5\}, V_2 = \{u_2, u_6\}, V_3 = \{u_3\}, V_4 = \{u_4\}$$

$n = 7$ olup $NEI(P_7) = \lceil \frac{7+1}{2} \rceil = 4$ tür. $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ parçalanışı aşağıdaki gibi seçilirse, $1 \leq i \leq 4$ aralığındaki her i değeri için, $VNI(V_i) = 3$ tür.

$$V_1 = \{v_1, v_5\}, V_2 = \{v_2, v_6\}, V_3 = \{v_3, v_7\}, V_4 = \{v_4\}$$

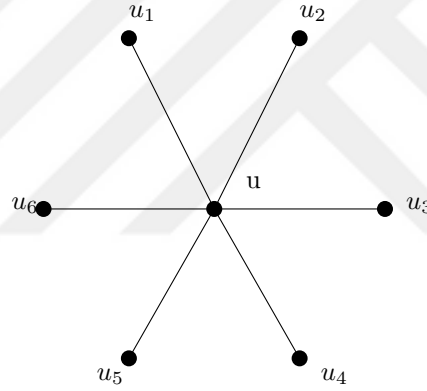
Teorem 4.3.12. $K_{1,n}$, $n + 1$ tepeli yıldız çizge olmak üzere,

$$NEI(K_{1,n}) = n \quad (4.14)$$

dir.

İspat: $V(K_{1,n}) = \{u, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve u tepesi merkez tepe olmak üzere. $V(K_{1,n})$ tepeler kümesinin bir parçalanışını $V_1 = \{u, u_1\}, V_2 = \{u_2\}, V_3 = \{u_3\}, \dots, V_n = \{u_n\}$ olarak seçilirse, $1 \leq i \leq n$ aralığında ki her i değeri için $VNI_{V_i} = 2$ dir. Bu durumda $NEI(K_{1,n}) \geq n$ elde edilir. $|V(K_{1,n})| = n + 1$ olduğundan $NEI(K_{1,n})$ değeri en çok $n + 1$ olabilir. Bunun için tepeler kümesi $V'_1 = \{u\}, V'_2 = \{u_1\}, V'_3 = \{u_2\}, \dots, V'_{n+1} = \{u_n\}$ şeklinde parçalanmalıdır. Ancak $VNI_{V'_1} = 1$ ve $2 \leq j \leq n + 1$ aralığında ki her j değeri için $VNI_{V'_j} = 2$ olduğundan $VNI_{V'_1} \neq VNI_{V'_j}$ olur. Bu durumda, $NEI(K_{1,n}) < n + 1$ elde edilir. Dolayısıyla, $NEI(K_{1,n}) = n$ dir. ■

Örnek 4.3.13. Aşağıda 7 tepeli yıldız çizgenin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.20. $K_{1,6}$ Çizgesi

$n = 6$ olup, $NEI(K_{1,6}) = 6$ elde edilir.

$\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ parçalanışı aşağıdaki gibi seçilirse, $1 \leq i \leq 6$ aralığındaki her i değeri için, $VNI(V_i) = 2$ dir.

$$V_1 = \{u, u_1\}, V_2 = \{u_2\}, V_3 = \{u_3\}, V_4 = \{u_4\}, V_5 = \{u_5\}, V_6 = \{u_6\}$$

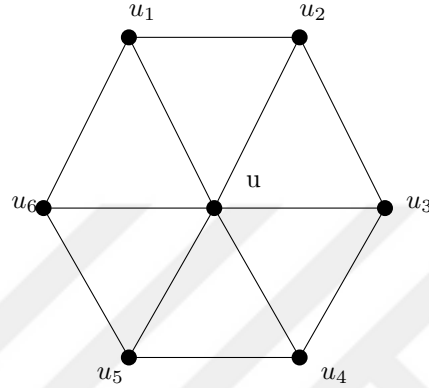
Teorem 4.3.14. $W_{1,n}$, $n + 1$ tepeli tekerlek çizge olmak üzere, $n > 2$ için,

$$NEI(W_{1,n}) = 4 \quad (4.15)$$

dür.

İspat: $V(W_{1,n}) = \{u, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve u tepesi derecesi n olan merkez tepe olsun. $V(W_{1,n})$ tepeler kümesinin $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ şeklinde maksimum sayıya sahip parçalanışı aranmaktadır. $u \in V_1$, $|V_1| = i$ ve $2 \leq j \leq t$ aralığında ki her j değeri için $|V_j| = 1$ olsun. $VNI_{V_1} = i$ ve $VNI_{V_j} = n - 2$ olur. $VNI_{V_1} = VNI_{V_j}$ olacağından $i = n - 2$ elde edilir. Dolayısıyla $t = 4$ tür. ■

Örnek 4.3.15. Aşağıda 7 tepeli tekerlek çizgenin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.21. $W_{1,6}$ Çizgesi

$NEI(W_{1,6}) = 4$ elde edilir.

$\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ parçalanışı aşağıdaki gibi seçilirse, $1 \leq i \leq 4$ aralığındaki her i değeri için, $VNI(V_i) = 4$ tür.

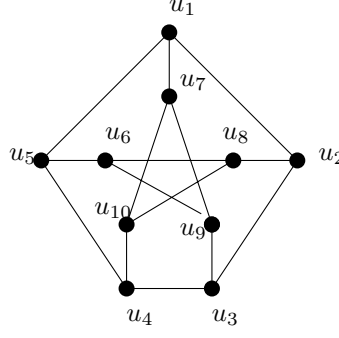
$$V_1 = \{u, u_1, u_2, u_3\}, V_2 = \{u_4\}, V_3 = \{u_5\}, V_4 = \{u_6\}$$

Teorem 4.3.16. G çizgesi Petersen Çizge olmak üzere,

$$NEI(G) = 10 \tag{4.16}$$

dur.

İspat:



Şekil 4.22. Petersen Çizgesi

$V_1 = \{u_1\}, V_2 = \{u_2\}, V_3 = \{u_3\}, \dots, V_{10} = \{u_{10}\}$ seçilirse, $1 \leq i \leq 10$ aralığında ki her i değeri için $VNI_{V_i} = 7$ olur. V_i parçalanışlarının sayısı maksimumdur. Dolayısıyla, $NEI(G) = 10$ dur. ■

Teorem 4.3.17. $H_{m,n}$ Harary çizge olmak üzere,

$$NEI(H_{m,n}) = \begin{cases} n, & m \text{ çift ise} \\ n, & m \text{ tek, } n \text{ çift ise} \\ n-1, & m \text{ tek, } n \text{ tek ve } n-m=2 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.17)$$

İspat: $V(H_{m,n}) = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ olsun. İspat 3 durumda incelenir.

Durum 1. m çift olsun. $V_1 = \{0\}, V_2 = \{1\}, V_3 = \{2\}, \dots, V_n = \{n-1\}$ seçilirse, $1 \leq i \leq n$ aralığında ki her i değeri için $VNI_{V_i} = n-m$ olur. $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ parçalanışı maksimum sayıda olduğundan, $NEI(H_{m,n}) = n$ elde edilir.

Durum 2. m tek, n çift olsun. Bu durum iki farklı kısımda incelenir.

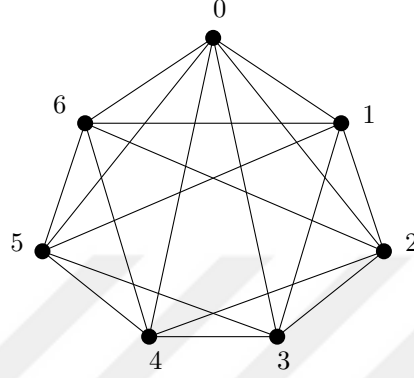
i) $m = 3, n = 6$ olsun. $V_1 = \{0\}, V_2 = \{1\}, V_3 = \{2\}, V_4 = \{3\}, V_5 = \{4\}, V_6 = \{5\}$ şeklinde seçilirse, $1 \leq i \leq 6$ aralığında ki her i değeri için $VNI_{V_i} = 2$ olur. $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ parçalanışı maksimum sayıda olduğundan, $NEI(H_{3,6}) = 6$ elde edilir.

ii) m ve n 'nin diğer değerleri için. $V_1 = \{0\}, V_2 = \{1\}, V_3 = \{2\}, \dots, V_n = \{n-1\}$ seçilirse, $1 \leq i \leq n$ aralığında ki her i değeri için $VNI_{V_i} = n-m$ olur. $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ parçalanışı maksimum sayıda olduğundan, $NEI(H_{m,n}) = n$ elde edilir.

Durum 3. m tek, n tek ve $n-m=2$ olsun. $V_1 = \{0, 1\}, V_2 = \{2\}, V_3 = \{3\}, \dots, V_{n-1} = \{n-1\}$ seçilirse, $1 \leq i \leq n-1$ aralığında ki her i değeri için $VNI_{V_i} = 2$ olur. Buradan, $NEI(H_{m,n}) \geq n-1$ elde edilir. $|V(H_{m,n})| = n$ olduğundan komşu eş bütünlük değeri en fazla n olur. Bunun olması için ise $V_1 = \{0, 1\}$ kümesinin iki farklı kümeye parçalan-

ması gerekir. Bu durumda 0 tepesinin tepe komşu bütünlük değeri 1 ve 1 tepesinin tepe komşu bütünlük değeri 2 olur. Komşu eş bütünlük değerinin tanımı gereği tüm parçalanışların tepe komşu bütünlük değeri eşit olması gerekir. Bu durumda, $NEI(H_{m,n}) < n$ 'dir. $\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}\}$ parçalanışı maksimum sayıda olduğundan, $NEI(H_{m,n}) = n - 1$ elde edilir. ■

Örnek 4.3.18. Aşağıda $H_{5,7}$ Harary çizgenin komşu eş bütünlük değeri hesaplanmıştır.



Şekil 4.23. $H_{5,7}$ Çizgesi

$NEI(H_{5,7}) = 7 - 1 = 6$ elde edilir. $V_1 = \{0, 1\}$, $V_2 = \{2\}$, $V_3 = \{3\}$, $V_4 = \{4\}$, $V_5 = \{5\}$, $V_6 = \{6\}$ ve $\forall i, 1 \leq i \leq 6$ için $VNI_{V_i} = 2$ olur. $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ parçalanışı maksimum sayıdadır.

4.4. Komşu Eş Bütünlük Değeri İçin Bazı Alt Sınırlar

Teorem 4.4.1. n tepeli bir G çizgesi için $NEI(G) \geq \gamma(G)$ 'dir.

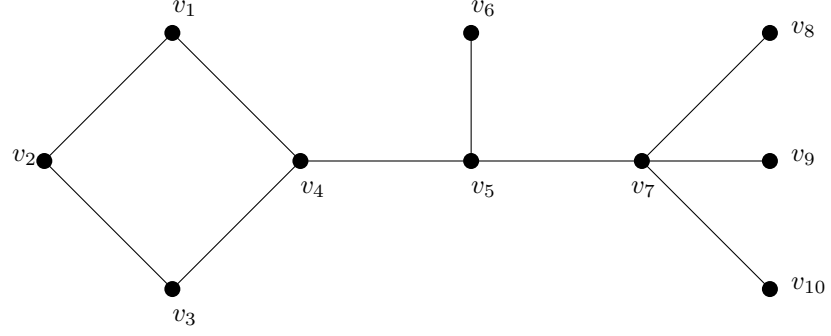
İspat: $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ kümesi G çizgesinin bir maksimum parçalanışı olsun. $1 \leq i \leq t$ aralığında ki her i değeri için V_i kümelerinin herbirinden seçilen bir tepe diğer V_i kümelerinde en az bir tepeyi bastırmaktadır. Bu şekilde bütün V_i kümeleri tarandığında G çizgesinin bütün tepeleri bastırılır. Bu nedenle, t sayısı, G çizgesinin herhangi bir baskınlık kümesinin tepe sayısıdır. Dolayısıyla, $NEI(G) \geq \gamma(G)$ 'dir. ■

Sonuç 4.4.2. n tepeli bir G çizgesi için,

$$NEI(G) \geq \frac{n}{1 + \Delta} \quad (4.18)$$

dir.

Örnek 4.4.3. Aşağıda 10 tepeli G çizgesinin komşu eş bütünlük değeri ve baskınlık sayısı hesaplanmıştır.



Şekil 4.24. 10 Tepeli G Çizgesi

$D = \{v_2, v_5, v_7\}$ için $\gamma(G) = 3$ olur. Diğer taraftan $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ parçalanışları, $V_1 = \{v_1, v_9\}$, $V_2 = \{v_3, v_8\}$, $V_3 = \{v_2, v_6, v_7\}$, $V_4 = \{v_4, v_5, v_{10}\}$ şeklinde seçilirse, $VNI_{V_1} = VNI_{V_2} = VNI_{V_3} = VNI_{V_4} = 4$ olur. Dolayısıyla, $NEI(G) = 4$ elde edilir. Burada görüldüğü gibi v_1 tepesi v_2 tepesini, v_3 tepesi v_4 tepesini, v_7 tepesi v_8, v_9, v_{10} tepelerini, v_5 tepesi v_6 tepesini bastırmaktadır. Dolayısıyla, $4 > 3$ yani $NEI(G) > \gamma(G)$ dir.

Diğer taraftan , $n = 10$, $\Delta = 4$ ve $NEI(G) = 4$ için, $4 > \frac{10}{1+4} = 2$ dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, literatürde sıkça yer alan bazı çizge sınıfları üzerinde eş bütünlük değeri incelenmiş, komşu eş bütünlük parametresi tanımlanarak temel çizge sınıfları için parametrenin değeri genelleştirilerek ispatları ile birlikte verilmiştir. Eş bütünlük değeri; tam çizge, iki parçalı tam çizge, tekerlek çizge, çevre çizge, yol çizge, yıldız çizge, tek kesim tepeli çizgeler, uçurtma çizge, dikenli yıldız çizge, dikenli yol çizge, dikenli çubuk çizge, tarak çizge, rüzgar gülü çizge ve bazı transformasyon çizgeleri için araştırılmış, genelleme yapılarak ispatları ile birlikte sunulmuştur. Ayrıca tek kesim tepe içeren ve ağaç çizge olmayan çizgelerin eş bütünlük değeri hesaplanmıştır. Diğer taraftan yeni bir parametre olan komşu eş bütünlük değeri kullanılarak çevre çizge, tam çizge, iki parçalı tam çizge, yol çizge, tekerlek çizge, yıldız çizge için genellemeler yapılmış ve ispatları ile birlikte verilmiştir. Ayrıca uygulamada önemli yer tutan Petersen çizge ve Harary çizgenin komşu eş bütünlük değerleri hesaplanmış ve ispatları verilmiştir. Komşu eş bütünlük değeri için baskınlık sayısı bir alt sınır olarak hesaplanmış ve buradan yola çıkarak komşu eş bütünlük değerinin ileride yapılacak olan hiyerarşi problemleri, dağıtım problemleri, v.b. çalışmalarda kullanılabileceği tespit edilmiştir. Bu tezde incelenen çizge sınıfları uygulamada önemli yer tutan ağ modellerinden seçilmiş ve literatürde eksik olan bu kısım tamamlanmaya çalışılmıştır. İleride yapılacak olan çalışmalara ışık tutabilmesi adına ortaya atılan teoremlerin ispatları açık şekilde ifade edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Bagatarhan, A. (2018). Graflarda Ortalama Örtü Sayısı Üzerine Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 36 s.
- [2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976). Graph Theory with Applications, Elsevier, New York, 264p.
- [3] Chartrand, G. , Lesniak, L. , and Zhang, P. (2016). Graphs Digraphs, Chapman and Hall/CRC., New York, USA, 39, 628.
- [4] West, D.B. (2001). Introduction to graph the theory, Prentice Hall Upper Saddle River, 2, 588p.
- [5] Baoyindureng,W. and Jixiang, M. (2001). Basic Properties of Total Transformation Graphs,Journal of Mathematical Study, (34),109-116
- [6] Brandstadt, A., Chepoi, V. D. and Dragan, F. F. (1996). Perfect elimination orderings of chordal Powers of graphs, Discrete Mathematics , 158(1-3),273-278.
- [7] Brandstadt, A. (1984).Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques, Forschungser- gebnisse der FSU Jena, N/84/71, 1984, extended abstract in: Graphs, Hypergraphs and Applications, Proc. Conf. on Graph Theory, Eyba, DDR, October 1984 Band 73 (Teubner-Texte, Leipzig,) 19-22.
- [8] Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater, P.J. (1998). Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, New York.
- [9] Cozzens, M.B. and Wu, S.S.Y. (1996). Vertex-neighbor-integrity of trees. Ars Combin., 43, 169-180pp
- [10] Sorgun, S. and Topcu, H. (2016). On the spectral characterization of kite graphs, J. Algebra Comb. Discrete Struct. Appl. 3: 81-90.
- [11] Liu,Y. and Wang Z. (2014). Rainbow Connection Number of the Thorn Graph, Applied Mathematical Sciences, 8(128), 6373- 6377
- [12] Bonchev, D. and Klein, D. (2002). On the Wiener of Thorn Trees, Stars, Rings, and Rods, Croatica Chemica Acta, 75(2), 613-620.
- [13] Gayathri, B., Duraisamy, M. and Selvi, M.T. (2007). Proceedings of the international conference on mathematics and computer science, Chennai, India, ICMCS , 1, 119-124.
- [14] Cygan, M., Pilipczuk , M. and Skrekovski, R. (2011). Relation between Randic index and avarege distance of trees ,Match Communications in Mathematical and Computer Chemistry, 66, 605-612.
- [15] Petersen, J. (1898). Sur le théorème de Tait, L'Intermédiaire des Mathématiciens 5 , 225-227.
- [16] Harary, F., 1972, Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 274p.

- [17] Gunther, G. (1985). Neighbor connectivity in regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 11, 233-243pp.
- [18] Barefoot, C.A., Entringer, R. and Swart, H. C. (1987). Vulnerability in graphs - a comparative survey, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 1, 13-22
- [19] Chartrand, G., Kapoor, S. F., McKee, T. A. and Oellermann, O. R. (1989). The Mean Integrity of a Graph, *Recent Studies in Graph Theory*, Vishwa International Publications, 70-80.
- [20] Goddard, W. D. (1989). On the vulnerability of graphs, Ph.D. thesis, University of Natal, Durban, South Africa
- [21] Bagga, K. S., Beineke, L. W., Goddard, W. D., Lipman, M. J. and Pippert, R. E. (1992). A survey of integrity, *Discrete Appl. Math.*, 37-38, 13-28
- [22] Barefoot, C.A. and Entringer, H.R. (1987). Vulnerability in graphs: a comparative survey. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 25-33pp.
- [23] Chvatal, V. (1973). Tough graphs and hamiltonian circuits. *Discrete Mathematics*, 306, 215-228pp.
- [24] Jung, H. (1978). On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *J. Combin. Theory Ser. B.*, 1124, 125-133pp.
- [25] Cozzens, M.B., Moazzami, D. and Stueckle, S. (1995). The tenacity of a graph. *Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms.*, 1111-1122pp.
- [26] Li, Y., Zhang, S. and Li, X. (2005). Rupture degree of graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(7), 793-803pp
- [27] Sundareswaran, R. and Swaminathan, V. (2012). Equi-integraty partition in graphs, *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 2(2012), 93-100