



T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİZGELERDE EŞLİ BASKIN KÜME PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE MERKEZİYET TEMELLİ BİR ÇÖZÜM
YÖNTEMİ ÖNERME

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rabia GÜZEL

HAZİRAN 2026

T.C
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**Çizgelerde Eşli Baskın Küme Probleminin Çözümünde Merkezîyet Temelli Bir Çözüm Yöntemi
Önerme**

Yazılım Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Rabia GÜZEL

Tez Danışmanı: Prof. Dr. ALİ KARCI

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Murat DEMİR

Tez Jüri Üyeler

Doç. Dr. İhsan TUĞAL

Prof. Dr. ALİ KARCI

Dr. Öğr. Üyesi Murat DEMİR

Doç. Dr. Fatih OKUMUŞ

Doç. Dr. Selman Yakut

HAZİRAN 2026

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

ETİK VE YAPAY ZEKA KULLANIM BEYANI

22/06/2026

İnönü Üniversitesi Lisansüstü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak, “Prof. Dr. ALİ KARCI ve Dr. Öğr. Üyesi Murat DEMİR” danışmanlıklarında hazırlayıp sunduğum “Çizgelerde Eşli Baskın Küme Probleminin Çözümünde Merkezîyet Temelli Bir Çözüm Yöntemi Önerme” başlıklı Yüksek Lisans tezimde:

1. ETİK VE BİLİMSSEL SORUMLULUKLARIM:

- Tezimde yer alan verileri, bilgileri ve belgeleri akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Çalışmada yararlandığım tüm kaynaklara bilimsel kurallara uygun şekilde atıfta bulunduğumu ve kaynakça gösterimde APA 7. baskı kurallarına uyduğumu,
- Tezimin özgün olduğunu, çalışma ve yazım sürecinde patent ve telif haklarını ihlal edici hiçbir davranışta bulunmadığımı,
- Aksi bir durumda doğabilecek tüm hukuki ve akademik sonuçları kabul ettiğimi,

(X) Tez yazım sürecinde yapay zekâ tabanlı araçlardan faydalanmadım.

() Tez yazım sürecinde yapay zekâ tabanlı araçlardan faydalandım.

Bu durumda:

- Yapay zekâ araçlarını yalnızca bilimsel üretim sürecini desteklemek amacıyla kullandığımı,
- Kullanımın hipotez geliştirme, teorik tartışma ve yorumlama gibi üst düzey akademik becerileri içermediğini,
- Kullanımın tezin özgünlüğüne, bilimsel etik kurallarına ve ilgili mevzuata aykırı olmadığını,
- Usulsüz kullanımlara (kaynak göstermeksizin metin üretimi, yanıltıcı kaynak gösterimi, otomatik içeriklerin özgün eser gibi sunulması vb.) kesinlikle başvurmadığımı,
- Kullanılan yapay zeka araçlarının ve işlevlerinin, danışmanımın bilgisi dahilinde, ekte verilen tabloda şeffaf biçimde belirtildiğini,
- Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Faaliyetlerinde Üretken Yapay Zekâ Kullanımına Dair Etik Rehber’de belirtilen ilkelere riayet ettiğimi,

kabul ve taahhüt ederim.

Rabia GÜZEL
İmza

İÇİNDEKİLER

ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
TABLolar DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Çizge Teorisi.....	1
1.2 Baskın Küme ve Baskın Küme Problemi	2
1.3 Eşli Baskın Küme ve Eşli Baskın Küme Problemi.....	2
1.4 Literatürdeki Boşluklar	3
1.5 Önerilen Algoritma	3
1.6 Tezin Katkıları	4
1.7 Tezin Yapısı	4
2. LİTERATÜR İNCELEMESİ.....	6
2.1 Minimum Baskın Küme Probleminin Uygulama Alanları ve Literatür İncelemesi.....	6
2.2 Eşli Baskın Küme Probleminin Uygulama Alanları ve Literatür İncelemesi	7
3. ÇİZGELER VE MERKEZİYET ÖLÇÜLERİ	10
3.1 Çizge Kavramı	10
3.2 Temel Çizge Kavramları	10
3.3 Baskın Küme	12
3.4 Eşli Baskın Küme	13
3.5 Karmaşıklık	14
3.6 Merkeziyet Metrikleri.....	15
3.7 Malatya Merkeziyet Metrikleri.....	16
3.7.1 Birinci seviye merkeziyet ($\Psi_1 - MC_1$)	16
3.7.2 İkinci seviye merkeziyet ($\Psi_2 - MC_2$)	17
3.7.3 Üçüncü seviye merkeziyet $\Psi_3 - MC_3$	17
3.8 Önerilen Yöntemin Uygulandığı Çizge Sınıfları	17
3.8.1 Çalışmada kullanılan deneysel çizgeler	17
3.8.2 Benchmark çizgeler	18
4. ÖNERİLEN ALGORİTMA	21
4.1 Malatya Merkeziyet Ölçütlerinin Kullanımındaki Motivasyon	21

4.2 Algoritma Tasarımı	21
4.3 Algoritma Adımları	22
4.4 Algoritmanın Çalışma Örneği	23
4.5 Karmaşıklık Analizi.....	25
5. DENEYSEL SONUÇLAR.....	27
5.1 Deney Ortamı ve Metodoloji.....	27
5.2 Gerçek Dünya Veri Setleri Analizi	27
5.3 Literatürde Yer Alan Çizgelerin Analizi	28
5.4 Ablasyon Deneyleri.....	31
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	33
6.1. Deney Sonuçlarının Değerlendirilmesi	33
6.2 Teorik Sınırlarla Karşılaştırmalı Analiz	33
6.3 Ablasyon Çalışmasının Yorumu	34
6.4 Yöntemin Güçlü ve Zayıf Yönleri	35
7. TEZİN LİTERATÜRE SAĞLADIĞI KATKILAR	36
8. GELECEK ÇALIŞMALAR VE ÖNERİLER	38
8.1 Algoritmanın Hesaplama Verimliliğinin Artırılması	38
8.2 Teorik Yaklaşım Garantisinin İspatlanması.....	38
8.3 Farklı Çizge Türlerine Genişletme.....	39
8.4 MC3 Parametresinin Adaptif Optimizasyonu.....	39
8.5 Uygulama Alanlarına Yönelik Öneriler	39
KAYNAKLAR.....	41

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemedi beni her konuda yönlendiren danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Ali KARCI'ya ve Dr. Öğr. Üyesi Murat DEMİR'e,

Çalışmalarında ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme ve dostlarıma

teşekkür ederim.



ÖZET

Çizgelerde Eşli Baskın Küme Probleminin Çözümüne Yönelik Merkeziyet Temelli Bir Çözüm Yöntemi Önerme

Çizge teorisi, mühendislik uygulamalarında önemli bir role sahiptir. Birçok bilimsel ve mühendislik tabanlı problemi, ağ yapısı şeklinde modelleyerek analiz etmek ve çözmek yaygın olarak kullanılmaktadır. Öte yandan, çizge teorisindeki birçok problem NP-zor veya NP-tamamlanmış olarak sınıflandırılır ve bu nedenle polinom zamanında çözülemez. Polinom zamanında çözümler elde etmek için çeşitli yaklaşımlar önerilmiştir. Bu tez çalışmasında optimal deterministik bir algoritma önerilmektedir. Eşli baskın küme oluşumunda merkeziyet metrikleri kullanılmıştır. Her çift için birincil lider düğümü ve onun yedek (bekleme) düğümü olarak görev yapan ikincil düğümü belirleyen bir çözüm sunulmuştur. Önerilen yöntem, çeşitli boyut ve özelliklere sahip ağlara uygulanmış ve neredeyse tüm durumlarda tam kapsama sağlanmıştır. Yani seçilen düğümlerin oluşturduğu kümenin dışında kalan her düğüm bu kümedeki en az bir elemanla komşudur. Dahası, yaklaşım, özellikle büyük ölçekli ağlar için zaman karmaşıklığı açısından verimlilik sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Çizge Teorisi, Eşli Baskın Küme, Merkeziyet Metrikleri

ABSTRACT

Proposing A Centrality-Based Solution Method For The Paired Dominating Set Problem In Graphs

Graph theory plays an important role in engineering applications. Many scientific and engineering-based problems are commonly modeled as network structures and analyzed using graph-theoretical approaches. However, many problems in graph theory are classified as NP-hard or NP-complete, and therefore cannot generally be solved in polynomial time. Various approaches have been proposed to obtain efficient solutions for such problems.

In this thesis, an optimal deterministic algorithm is proposed. Centrality metrics are utilized in the construction of the paired dominating set, and a solution is presented that determines a primary leader node for each pair along with a secondary node acting as its backup (standby) node. The proposed method has been applied to networks with various sizes and structural properties, and nearly full coverage has been achieved in almost all cases. In other words, every node outside the selected set is adjacent to at least one node belonging to the set. Furthermore, the proposed approach demonstrates efficiency in terms of time complexity, particularly for large-scale networks.

Keywords: Graph Theory, Paired Dominating Set, Centrality Metrics

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

BIBCO	: Branch-and-Bound Combinatorial Algorithm
BIBLP	: Branch-and-Bound with Linear Programming
C_n	: n düğümlü döngü çizgesi
$d(v)$	: v düğümünün derecesi
$d_a(v)$	: v düğümünün aktif derecesi
D	: Baskın küme
E	: Kenarlar kümesi (Edges)
G	: Çizge (Graph)
GPU	: Graphics Processing Unit
LP	: Linear Programming (Doğrusal Programlama)
m	: Kenar sayısı (E)
MC1	: Malatya Centrality 1 (Birinci Seviye Malatya Merkeziliyeti)
MC2	: Malatya Centrality 2 (İkinci Seviye Malatya Merkeziliyeti)
MC3	: Malatya Centrality 3 (Üçüncü Seviye Malatya Merkeziliyeti)
MDS	: Minimum Dominating Set (Minimum Baskın Küme)
M	: Maksimum eşleşme (Maximum Matching)
n	: Düğüm sayısı (V)
$N(v)$	: v düğümünün komşuluk kümesi
NP	: Non-deterministic Polynomial time
NP-Tam	: NP-Complete
NP-Zor	: NP-Hard
$O(\cdot)$	: Büyük-O asimptotik gösterimi
PDS	: Paired Dominating Set (Eşli Baskın Küme)
RLS	: Randomized Local Search (Rastgele Yerel Arama)
SA	: Simulated Annealing (Tavlama Benzetimi)
SLS	: Stochastic Local Search (Stokastik Yerel Arama)
S	: Eşli baskın küme
$\theta(\cdot)$	: Theta asimptotik gösterimi
v, u	: Çizgedeki düğümler
Δ	: Çizgedeki maksimum derece

$\gamma(G)$	: Baskınlık sayısı
$\gamma_{pr}(G)$	: Eşli baskınlık sayısı
$\gamma_t(G)$	: Toplam baskınlık sayısı
Ψ_1	: Birinci seviye Malatya merkeziet değeri
Ψ_2	: İkinci seviye Malatya merkeziet değeri
Ψ_3	: Üçüncü seviye Malatya merkeziet değeri



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil No	Sayfa No
Şekil 1. Königsberg Bridges	1
Şekil 2. Düğümlerin Belirtildiği Örnek Çizge	1
Şekil 3. Örnek çizge üzerinde düğüm ve kenar gösterimi	10
Şekil 4. Komşuluk Kümesinin Bir Çizge Üzerinde gösterimi	10
Şekil 5. Derece değerlerinin örnek çizge için gösterimi	11
Şekil 6. Algoritmanın örnek bir adımında aktif derece gösterimi	12
Şekil 7. Baskın Küme örneği	13
Şekil 8. Eşli Baskın Küme örneği	14
Şekil 9. Algoritma Akış Diyagramı.....	22
Şekil 10. Örnek Çizgenin Başlangıç Durumu.....	24
Şekil 11. İlk Eşleşme İterasyonunun Sonucu	24
Şekil 12. İkinci İterasyon.....	25
Şekil 13. Final İterasyonu ile tam baskılama	25
Şekil 14. Dolphins veri setinin kapsanmamış ve kapsanmış halleri.....	28
Şekil 15. Döngü çizgenin başlangıç ve final versiyonları	29
Şekil 16. Kübik çizgenin başlangıç ve final versiyonları	29
Şekil 17. Pençesiz çizgenin başlangıç ve final versiyonları	29
Şekil 18. En az 3 dereceli çizgenin başlangıç ve final versiyonları	30
Şekil 19. Supergrid çizgenin başlangıç ve final versiyonları	30

TABLolar DİZİNİ

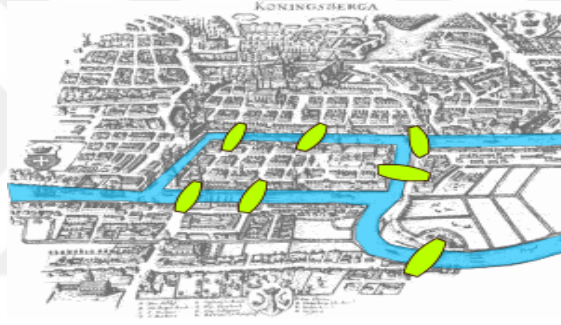
Tablo No	Sayfa No
Tablo 1. Gerçek Dünya Çizge Veri Setlerinin Özellikleri	27
Tablo 2. Gerçek Dünya Veri Setlerinin Deney Sonuçları	28
Tablo 3. Literatürde yer alan özel çizge sınıflarının özellikleri	28
Tablo 4. Özel Çizge Sınıflarının Sonuçları	30
Tablo 5. Sentetik Veri Setlerinin Özellikleri.....	31
Tablo 6. Temel lider seçimi yaklaşımına ait ablasyon sonuçları.....	31
Tablo 7. Bir-hop komşuluk temelli merkezîyet ölçümüne ait ablasyon sonuçları	32
Tablo 8. Üstel katsayı parametresinin etkisine yönelik ablasyon sonuçları.....	32
Tablo 9. Ablasyon Çalışmaları PDS Boyutu Karşılaştırması	34
Tablo 10. Önerilen Algoritmanın Potansiyel Uygulama Alanları.....	40

1. GİRİŞ

1.1 Çizge Teorisi

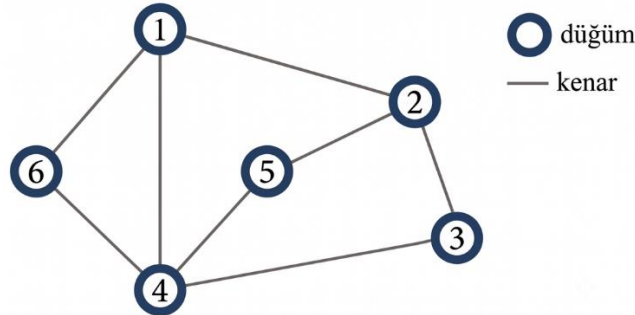
Çizge Teorisi, matematik ve bilgisayar bilimlerinin problemlerine nesneler arası ikili ilişkilendirme modeli oluşturarak, çözümde ve yapıların incelenmesinde rol alan bir matematik dalıdır.

Çizge Teorisinin doğuşu Leonhard Euler tarafından gerçekleştirilmiştir. Tarihi bir matematik problemi olan Königsberg'in 7 Köprüsü problemi, Pregel Nehri üzerindeki iki ada ve kıyıları bağlayan 7 köprünün her birinden yalnızca bir kez geçerek yürüyüş yapmanın mümkünatını incelemektedir. 1736'da Leonhard Euler kara parçalarını düğümler, köprüleri de kenarlar olarak ilişkilendirmiş soruyu analiz etmiştir. Böylece hem problemin sonucunun imkansızlık olduğunu kanıtlayarak çözüme kavuşturmuş hem de çizge teorisi diğer bir deyişle topolojinin temellerini atmıştır. Şekil 1.'de Köprü Probleminin temsili bir şekli yer almaktadır (Giuşcă, 2005).



Şekil 1. Königsberg Bridges

Bir çizge, düğümler (veya tepeler, noktalar) ile bu düğümleri birbirine bağlayan ayrıtlardan (veya kenarlardan, oklardan) meydana gelir. Biçimsel olarak bir çizge $G = (V, E)$ şeklinde ifade edilir; burada V düğümler kümesini, E ise bu düğümler arasındaki bağlantıları temsil eden ayrıtlar kümesini sembolize eder. Şekil 2'de basit bir çizge temsil edilmektedir.



Şekil 2. Düğümlerin Belirtildiği Örnek Çizge

Bilgisayar mühendisliği alanında bu soyutlama, ağların iletişimi, veri organizasyonu, hesaplama aygıtları ve hesaplama akışlarının modellenmesinde can alıcı bir rol üstlenir. Leonhard Euler'in

Königsberg'in Yedi Köprüsü problemini çözmesiyle temelleri atılan bu dal, günümüzde karmaşık sistemleri nicel hale getirmek ve basitleştirmek için vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir.

Karmaşılaşan teknolojik gelişmelerle beraber gittikçe büyüyen etkileşimin yönetilmesi temel bir gereksinim haline gelmektedir. Bu ihtiyacı karşılayan ağ teknolojileri, birçok alanda soyut ağlar oluşturarak; etkileşimlerin tanımlanması, kontrol altına alınması, analiz edilmesi ve sayısallaştırılması gibi imkânlar sunmaktadır. Sosyal ağlar, nesneler arası ağlar ve diğer farklı türleri de kapsayan bu teknoloji, günümüzde önemli bir yere sahiptir. Çizge teorisi bu ağların çözümlenmesi için kullanılan en geniş teoridir. Ağ yapılarına dair karmaşık problemlerin çözümü ve analizi için kullanılan çizge teorisi, mühendislik alanında önemli bir rol oynamaktadır.

1.2 Baskın Küme ve Baskın Küme Problemi

1862 senesinde Carl Friedrich de Jaenisch, satranç tahtası üzerindeki vezir yerleşim problemleri üzerinden “Baskın Küme” kavramının köklerini oluşturmuştur (JAENISCH, 2023). Çizge teorisi de matematiksel yönüyle bu yapıları ve bu yapılara dair alt problemleri içerisinde barındırmaktadır. Bunlardan biri de baskın kümeler ve baskın küme problemidir.

Baskın küme; bir çizgede öyle bir alt düğüm kümesidir ki, çizgede ya her düğüm bu kümeye dahildir ya da bu küme dışındaki elemanlar bu alt kümedeki elemandan en az bir düğüme komşudur.

Baskın küme problemi ise tüm çizgeyi kapsayacak en küçük boyutlu baskın kümenin bulunmasına dair temel bir optimizasyon ve karar problemidir. Bu minimum sayıya çizgenin baskınlık sayısı ($\gamma(G)$) denir.

Algoritmik karmaşıklığı problemin ele alınışına göre değişmektedir. Baskın küme için karar problemi şöyle tanımlanır:

Verilen bir $G = (V, E)$ çizgesi ve k sayısı için boyutu k veya daha küçük bir baskın küme var mı? Bu problem NP içindedir ve NP-Zor olduğu da gösterilmiştir. Bu yüzden NP-Tam (NP-Complete) olur.

Bir baskın küme için optimizasyon problemi; çizge için en küçük baskın kümeyi bulmaktır. Bu problem “Minimum Baskın Küme” problemidir. Burada artık evet/hayır sorusu yok, amaç minimum değeri bulmaktır. Bu yüzden problem NP-Zor olarak sınıflandırılır. NP içinde olmak zorunda değildir .

Sonuç olarak baskın küme problemi karar problemi olarak ele alındığında NP-Tam olarak karşımıza çıkmakta; optimizasyon problemi olarak çözüm arandığında karmaşıklığı için NP-Zor bir problemidir.

1.3 Eşli Baskın Küme ve Eşli Baskın Küme Problemi

Baskın küme kapsama ihtiyacını giderse de gerçek hayat uygulamalarında ihtiyaçları karşılama konusunda eksik kaldığı birçok nokta olabilmektedir. Bu ihtiyaçlardan ikisi de güvenlik ve eşleşmedir. Burada devreye artık eşli baskın küme yapısı girmektedir. Eşli baskın küme, klasik baskın küme tanımına

eşleşme kriterinin de eklenmiş bir versiyonudur. Yani artık baskın küme içindeki her elemanın bu küme içinde doğrudan bir komşusu da bulunmalıdır.

Eşli baskın küme problemi de burada ortaya çıkmaktadır. Standart baskın küme probleminin daha kısıtlayıcı halidir. Eşli baskın küme ile güvenlik ve eşleşme ihtiyaçlarının giderilmesi amaçlanmaktadır. Problemin çıkış noktası yedekliliktir. Yedeklilik sayesinde güvenlik ihtiyacı karşılanabilmektedir.

Problemin algoritmik karmaşıklığı baskın küme probleminde olduğu gibi probleme yaklaşıma bağlı olarak değişmektedir:

Bir çizge için en küçük eşli baskın kümeyi bulmak olarak ele alınırsa; bu problem, bir optimizasyon problemidir. Genel çizgeler için polinomsal zamanda çözen bir algoritma bilinmemektedir. Bu yüzden problem NP-Zor olarak sınıflandırılır. Çizge büyüdükçe, olası düğüm kombinasyonları üstel (exponential) şekilde artar dolayısıyla çözüm süresi hızla büyür.

Karar versiyonu şöyle yazılır: Verilen bir çizge G ve bir sayı k için boyutu k veya daha küçük bir eşli baskın küme var mı? Bu problem, çözüm verildiğinde hızlı doğrulanabilir ve başka zor problemlerden indirgenebilir. Bu nedenle, Eşli Baskın Küme için karar problemleri NP sınıfındadır ve aynı zamanda NP-Zor'dur. Dolayısıyla, NP-Tam bir problemdir denilmektedir.

1.4 Literatürdeki Boşluklar

Literatürde eşli baskınlık üzerine yapılan çalışmalar temel olarak iki ana kola ayrılmaktadır: (i) yapısal çizge teorisi üzerine teorik üst sınırların belirlenmesi (8-12, 16) ve (ii) belirli çizge sınıfları için kesin algoritmaların sunulması(13-15). Bu nedenle mevcut yaklaşımların çoğu en kötü senaryo "(worst-case) analizine odaklanmaktadır. Ya belirli çizge sınıflarıyla sınırlıdır ya da karmaşık teorik yapılara dayanmakta ve çoğunlukla yapısal çizge türlerine ait sınırlar ve algoritmalar üzerinde çalışmaktadır. Bu durum, bu yaklaşımların gerçek dünya ağlarında karşılaşılan büyük ölçekli ve genel çizgelere uygulanabilirliğini sınırlandırmaktadır. Bu bağlamda, literatürde genel çizge yelpazesine uygulanabilir hızlı optimal algoritmalara dair bir boşluk olduğu görülmektedir.

1.5 Önerilen Algoritma

Mevcut çalışmalardaki boşluğu gidermek amacıyla, bu çalışmada, bölüm 1.4.'te belirtilen iki yaklaşımdan farklı olarak; çizge merkeziet ölçütlerini (centrality metrics) temel alan deterministik bir algoritma geliştirilmiştir. Bu çalışmada Eşli Baskın Küme problemi için geniş bir genel çizge yelpazesine uygulanabilen, optimuma yakın sonuçlar üretebilen, düğümlerin ağ genelindeki merkeziet önemini dikkate alarak maksimum eşleşme stratejisiyle seçim yapan ve ağda tam baskınlık sağlayan Malatya Merkeziet metriği tabanlı yeni bir algoritma önerilmektedir. Derece tabanlı sezgisellerin aksine, Malatya Merkeziet, düğümlerin küresel yapısal önemini dikkate almakta; bu da yöntemi eşleştirilmiş

ve yedeklilik farkındalıklı seçimler için daha uygun hale getirmektedir. Algoritmanın temel yeniliği; düğüm seçiminin baskın küme problemlerinde olduğu gibi tekil değil, Malatya Merkeziyeti hesaplamalarına uygun şekilde maksimum eşleşme stratejisiyle yedekliliği (standby) sağlayan çiftler halinde gerçekleştirilmesidir. Önerilen yöntem, literatürde sunulan çeşitli çizge türlerine uygulanmış ve tam kapsama elde edilmiştir. Farklı ölçeklerdeki ağ yapılarına uygulanarak tümünde minimum eşli baskın küme elde edilmiş ve tam kapsama sağlanmıştır. Ayrıca, literatürdeki çizge türleri üzerinde önerilen algoritmanın üst sınırlara yakın ve başarılı sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Önerilen algoritma, düğümleri tek tek değil, çiftler halinde seçerek tam ağ kapsamını korumakta ve eşli düğümlerle yedekliliği sağlamaktadır. Bu tasarım, yöntemin düşük hesaplama karmaşıklığı ile neredeyse optimum sonuçlar elde etmesine olanak tanımaktadır.

1.6 Tezin Katkıları

Bu tezin temel katkıları şu şekildedir: (i) Malatya Merkeziyeti formülleri (MC1, MC2, MC3) ilk kez Eşli Baskın Küme problemine uyarlanarak, düğümlerin yerel yoğunluk yerine küresel önem derecesine göre seçilmesi sağlanmıştır. (ii) Karmaşık ayrıştırma ağaçları veya üstel zamanlı aramalar yerine, $\Theta(n \times d)$ karmaşıklığında çalışan bir yapı sunulmuştur. (iii) Algoritma, rastgele üretilen 4-düzenli çizgelerden süper grid yapılara kadar geniş bir yelpazede, literatürdeki teorik üst sınırlara eşdeğer ve sınırların altında sonuçlar üreterek başarısını kanıtlamıştır.

1.7 Tezin Yapısı

Tezin geri kalan bölümleri aşağıdaki biçimde yapılandırılmıştır.

Bölüm 2, eşli baskınlık (paired dominating) problemine ilişkin literatürde yer alan temel ve güncel çalışmalara ayrılmıştır. Bu bölümde, problemin gelişimi ele alınmakta; farklı çizge sınıfları üzerinde önerilen algoritmalar, kuramsal sonuçlar ve hesaplama karmaşıklığına dair yaklaşımlar sistematik bir biçimde incelenmektedir. Ayrıca, literatürde öne çıkan yöntemler arasındaki benzerlikler ve farklılıklar ortaya konularak, mevcut çalışmaların güçlü ve sınırlı yönleri tartışılmaktadır. Böylece, bu çalışmanın hangi boşluğu doldurmayı amaçladığı ve literatüre hangi yönlerden katkı sunduğu açıkça vurgulanmaktadır.

Bölüm 3, çalışmanın kuramsal altyapısını oluşturan temel kavramlara odaklanmaktadır. Bu kapsamda, çizge teorisine ilişkin temel tanımlar, notasyonlar ve özellikler ayrıntılı biçimde sunulmakta; baskınlık, eşli baskınlık ele alınmaktadır. Ayrıca mevcut merkeziyet ölçütleri de bu bölümde açıklanmaktadır.

Bölüm 4, tez kapsamında önerilen merkeziyet tabanlı yaklaşımın ayrıntılı biçimde tanıtıldığı bölümdür. Bu bölümde öncelikle yöntemin temel motivasyonu ve matematiksel dayanakları açıklanmakta, ardından Malatya Merkeziyet metriğine dayalı olarak geliştirilen algoritmanın tanımı

sunulmaktadır. Önerilen yaklaşımın hangi varsayımlar altında çalıştığı, hangi çizge türlerine uygulanabilir olduğu ve mevcut yöntemlerden hangi yönleriyle ayrıştığı detaylı biçimde ele alınmaktadır. Ayrıca, algoritmanın işleyişini somutlaştırmak amacıyla örnekler ve açıklayıcı alt adımlar verilmektedir.

Bölüm 5, önerilen algoritmanın performansının değerlendirildiği deneysel analizleri içermektedir. Bu bölümde, algoritmanın zaman ve uzay karmaşıklığı analizi sunulmakta ve yöntemin hesaplama verimliliği kuramsal ve deneysel olarak incelenmektedir. Bunun yanı sıra, ablasyon çalışmaları aracılığıyla algoritmanın bileşenlerinin performansa olan etkisi analiz edilmekte ve Malatya Merkezîyet metriğinin katkısı ayrıntılı biçimde değerlendirilmektedir. Son olarak, önerilen yöntem literatürdeki en iyi (state-of-the-art) yaklaşımlarla karşılaştırılarak, farklı veri kümeleri üzerindeki başarı düzeyi deneysel sonuçlar ve tablolar eşliğinde ortaya konulmaktadır.

Tezin **Bölüm 6**'sında ise Bölüm 5'te yapılan deneyler sonucunda elde edilen bulgular genel bir çerçevede tartışılmaktadır. Literatürde yer alan teorik üst sınırlarla karşılaştırmalı analiz sunmakta ve ablasyon deney sonuçlarını yorumlamaktadır. Son olarak yöntemin güçlü ve zayıf yönleri üzerinde durmaktadır.

Bölüm 7'de tezin literatüre sağladığı katkılar verilmektedir. Çizge teorisi ve ağ analizi alanında oluşturduğu katkılardan bahsedilmektedir.

Bölüm 8'de ise mevcut çalışmanın sınırlılıkları ele alınarak, eşli baskınlık problemi ve merkezîyet tabanlı yaklaşımlar bağlamında gelecekte gerçekleştirilebilecek olası araştırma yönleri ve geliştirme önerileri sunulmaktadır.

2. LİTERATÜR İNCELEMESİ

2.1 Minimum Baskın Küme Probleminin Uygulama Alanları ve Literatür İncelemesi

Baskın Küme Problemi; farklı birçok uygulama alanında önemli rol oynamaktadır. Verimli yönlendirme yolları (routing) oluşturma amacıyla kablosuz ağlarda, radar istasyonları acil servis merkezlerinin en az sayıda tüm alana hizmet verecek şekilde konumlandırılması için tesis yerleşiminde, suç örgütlerinin kilit kişilerinin belirlenmesi amacıyla sosyal ağ analizinde, şebeke güvenliğini az sayıda ölçüm cihazı yerleştirerek sağlanması için elektrik şebekesi alanında, sensör ağlarında, ağdaki tüm sensör düğümlerinin en az bir baskın düğüm tarafından kapsanması enerji verimliliği ve veri iletiminin düzenlenmesi açısından büyük önem taşımaktadır. Açgözlü (Greedy) Algoritmalar, Meta-sezgisel Yöntemler, Kesin Algoritmalar gibi farklı çözüm yöntemlerini içeren çeşitli çalışmalarda, baskın küme problemi ele alınmıştır. Açgözlü yaklaşımlar, Minimum Baskın Küme probleminde sadelik ve hız avantajları nedeniyle yaygın biçimde tercih edilmektedir. Açgözlü yöntemler; basitlik, hız ve düşük hesaplama yükü açısından önemli avantajlar sunmakta, bu sayede çok büyük veya karmaşık çizgeler için hızla uygun çözümler üretmektedir.

Chalupa ve ark. RLS₀ adlı sıralama tabanlı rastgele yerel arama algoritması, problemi dolaylı yoldan ele alarak açgözlü bir algoritmanın mümkün olduğunca küçük baskın kümeler oluşturmalarını sağlayacak bir permütasyon araştırmaktadır. RLS₀, büyük sosyal ve karmaşık ağlarda MDS için logaritmik yaklaşım garantisini koruyarak iyi ölçeklenen bir yapı sunmaktadır (Chalupa, 2018).

Casado ve ark. Yinelemeli Açgözlü (Iterated Greedy) algoritması, MDS problemini NP-zor yapısıyla ele alarak çözülebilir örneklerde optimumdan yalnızca %0,04, daha karmaşık durumlarda ise %1,23 sapmayla sonuç üretmekte ve bu yönüyle önemli bir ilerleme temsil etmektedir (A. Casado, 2023).

Okumuş ve Karcı baskın küme seçilirken merkezîyet metriklerini düğüm seçiminde kullanmış daha kısa sürede eşit veya daha küçük boyutta baskın kümeleri bulan dinamik ve açgözlü bir yaklaşımla çözüm sunmuşlardır (Okumuş & Karcı, 2024)(Okumuş, sokumu, s & And, And, seyda Karcı, 2024).

Kesin algoritmalar, problemin optimal çözümünü garanti eden yöntemlerdir ve genellikle küçük veya orta büyüklükteki çizge yapılarında etkili sonuçlar vermektedir. Literatürde minimum baskın küme probleminin çözümü için dal ve sınır (Branch ve Bound), tam sayılı doğrusal programlama modelleri ve geri izleme (backtracking) gibi yöntemlerden yararlanılmaktadır.

Dal-sınır tekniği, NP-Zor problemleri tam olarak çözmek için en iyi bilinen ve en yaygın kullanılan yöntemlerden biridir. Çözüm uzayı, yinelemeli olarak bölümlenerek aranmakta; çözüm uzayının bir bölümünün tamamen göz ardı edilmesine olanak tanıyan budama kuralları sayesinde bu

alan küçültülmektedir. İki kritik bileşeni bulunan bu çerçevede birincisi, örnekleri mümkün olduğunca indirmek için etkili indirgeme kurallarının tasarımıdır. İkincisi ise alt sınırları hesaplamak için verimli dallanma işlemlerinin gerçekleştirilmesidir. BIBCO saf kombinatoriyal bir algoritma olarak, BIBLP ise LP gevşemesini kullanan bir yöntem olarak önerilmiştir (Denat et al., 2024).

Bu tür problemlerde kesin (exact) algoritmalar büyük ölçekli çizge yapılarında yüksek hesaplama maliyetine neden olabilmektedir. Bu nedenle literatürde, özellikle büyük boyutlu problemler için yaklaşık çözümler üretebilen meta-sezgisel yöntemler sıklıkla tercih edilmektedir.

Hedar ve Rashad tarafından Minimum Baskın Küme problemini çözmek amacıyla stokastik yerel arama (SLS) yöntemi önce yerel çözümler bulmak için geliştirilmiş, ardından SA algoritması yerel optimumlardan kaçma kapasitesini güçlendirmek için devreye sokulmuştur. Önerilen yöntemin, çözüm kalitesi ve hesaplama maliyeti açısından diğer meta-sezgisel yöntemlere kıyasla umut verici performans sergilediği deneysel olarak ortaya konmuştur (Denat et al., 2024; Hedar & Ismail, 2012).

2.2 Eşli Baskın Küme Probleminin Uygulama Alanları ve Literatür İncelemesi

Eşli baskın küme problemi literatürde hem teorik çizge matematiği hem de ağ güvenliği alanlarında önemli bir yere sahiptir. Tanımlandığı tarihten beri yedeklilik ve güvenilirlik gerektiren sistemlerin modellenmesinde temel bir yaklaşım olarak kabul edilmektedir. Eşli baskın küme yaklaşımı özellikle ağ güvenliği, kablosuz sensör ağları ve gözetleme sistemleri gibi alanlarda kullanılmaktadır. Örneğin askeri gözetleme sistemlerinde belirli noktalara yerleştirilen gözetleme birimlerinin hem tüm bölgeyi kontrol etmesi hem de birbirlerini yedeklemesi gerekmektedir. Bu tür sistemlerde bir birimin devre dışı kalması durumunda eşleşmiş olduğu diğer birim görevini sürdürebilmekte ve böylece sistemin güvenilirliği korunmaktadır.

Benzer şekilde kablosuz sensör ağlarında sensör düğümlerinin çiftler halinde çalışması ağın kapsama alanını korurken enerji verimliliğini de artırmaktadır. Bir sensör düğümünün enerji kaynağı tükendiğinde eşleşmiş olduğu diğer düğüm ağın işleyişini sürdürebilmektedir. Bunun yanı sıra eşli baskın küme modeli sosyal ağ analizinde, biyolojik ağların modellenmesinde ve elektrik şebekelerinin izlenmesinde de kullanılmaktadır. Sosyal ağ analizinde kritik grupların belirlenmesi, biyolojik ağlarda birbirine bağlı çalışan protein çiftlerinin modellenmesi ve elektrik şebekelerinde ölçüm cihazlarının birbirini yedeklemesi gibi uygulamalar bu probleme örnek olarak verilebilir.

Eşli Baskın Küme probleminin çözümüne dair literatürde farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. Literatürdeki çalışmaların büyük bir çoğunluğunda probleme yapısal yaklaşılmış ve teorik üst sınırlar belirlenmiştir.

Henning'in döngü çizgeler üzerine ortaya koyduğu çalışmasında $n \geq 3$ olan döngü çizgeleri için eşleşmeli baskınlık sayısının (PDS) kesin olarak

$$\gamma_{pr}(C_n) = 2 \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \quad (2.1)$$

Denklem (2.1) ile hesaplanacağını matematiksel olarak ispatlar (Henning, 2007).

Lu ve ark. yaptığı çalışmada yapısal çizge teorisi ve ağırlıklandırma fonksiyonlarını kullanarak, minimum derecesi en az 4 olan pençe-içermeyen çizgeler için eşli baskınlık sayısına (PDS) dair teorik bir üst sınır kanıtlamaktadır. Çalışmalarına göre belirtilen özelliklere sahip çizgeler için teorik üst sınır Denklem (2.2)'de görüldüğü üzere

$$\frac{4}{7}n \quad (2.2)$$

olarak belirlenmiştir (Lu et al., 2019).

Jiang H ve ark. kübik çizgeler üzerinde çalışmış ve minimal ama eleman sayısı fazla olan kümeleri incelemiştir. Çalışmaları sonucunda kübik çizgelerin üst sınırın genel kabul gören

$$\frac{4}{7}n \quad (2.3)$$

Denklem (2.3) olduğunun analizini gerçekleştirmiştir (Sheng & Lu, 2020).

Henning ve ark. minimum derecesi 3 olan çizge sınıfını ele almıştır. Bu çizgelere düğüm renklendirme ve ağırlık fonksiyonları kullanarak, PDS boyutunun

$$\approx 0,634n \quad (2.4)$$

sınırını aşamayacağını Denklem (2.4) ile matematiksel olarak kanıtlamıştır (Henning et al., 2022).

Henning ve Bujtás çalışmalarının ardından minimum derecesi 4 olan çizgeler için de çalışma yapmış ve renkli çizge tekniğiyle Eşli Baskın Kümenin bu tür çizgelerde

$$\frac{10}{17}n \approx 0.588 \quad (2.5)$$

Denklem (2.5)'te yer alan değerini aşamayacağını ispatlamışlardır (Bujtás & Henning, 2025).

Mevcut çalışmalarda AT-serbest çizgelerde minimum eşli baskın kümeyi hesaplayan bir polinom zamanlı algoritma önerilmiş; buna ek olarak bu çizgeler için doğrusal zamanlı 2-yaklaşım algoritması da sunulmuştur (Tripathi et al., 2022).

Literatürde, belirli çizge sınıfları için geliştirilmiş kesin algoritmalara odaklanan birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar yalnızca problem için teorik sınırlar ortaya koymakla kalmamakta, aynı zamanda çizgenin yapısal özelliklerinden yararlanarak doğrudan çözüm üreten yöntemler de önermektedir. Özellikle ağaçlar, aralıklı çizgeler, düzlemsel çizgeler ve parçalı yapılar gibi özel çizge sınıflarında geliştirilen algoritmalar, problemin daha verimli biçimde çözülmesine olanak sağlamaktadır. Böylece çözüm sürecinde yalnızca karmaşıklık analizi değil, aynı zamanda çizgenin topolojik ve yapısal özelliklerine dayalı stratejiler de ön plana çıkmaktadır. Bu yaklaşım, hem teorik sonuçların güçlenmesine hem de gerçek dünya uygulamalarında daha etkili çözümler elde edilmesine katkı sağlamaktadır.

İkili çizgeler için NP-tamlık sonucu, mükemmel eliminasyon ikili çizgeleri kapsayacak şekilde güçlendirilmiş; kordal ikili çizgelerin iyi bilinen alt sınıfı için minimum eşli baskın kümeyi hesaplayan doğrusal zamanlı bir algoritma önerilmiştir (Panda & Pradhan, 2013).

Lin ve ark. mesafe-kalıtımsal çizgeler için ayrıştırma ağacı yapısını kullanarak dinamik programlama tabanlı çalışan kesin sonuç üreten bir algoritma sunmuştur (Lin et al., 2020).

Hung ve Chiu supergrid çizge sınıfına dair çalışmalar gerçekleştirmiştir. Problemin bu tür çizgelerde NP-Tam olduğunu kanıtlamıştır. Çözüm için çizgesi şeritlere ayıran böl ve yönet tabanlı bir üst sınır formülü

$$\left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil\right) \quad (2.6)$$

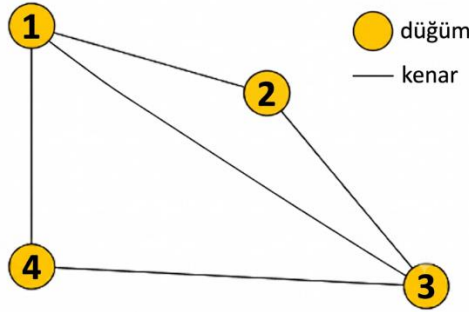
sunmuştur (Hung & Chiu, 2021). Denklem (2.6)'da yer almaktadır.

Mevcut çalışmalarda özel çizgelere büyük ölçekte bağımlılık bulunmaktadır ve genel çizge yapılarına uygulanabilirliği zordur. Önerilen algoritmalarda kullanılan teknikler optimizasyonu düşürmekte; karmaşık ön hazırlık adımlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Önerilen teorik formüller Petersen gibi istisnai durumlarda doğru sonucu verememektedir. Petersen çizgesi, çizge kuramı literatüründe sıklıkla karşılaşılan, 10 düğüm (vertex) ve 15 kenardan (edge) oluşan özel bir yapıdır. Tez çalışmasında önerilen yöntemle genel çizgelere uygulanabilir bütünsel analiz sağlanmaktadır. Literatürde önerilen üst sınırların altında kalma konusunda bazı formüllerden daha verimli sonuçlar üretmektedir. Önerilen algoritma uygulanma aşaması için özel ayrıştırma ağacı gibi yapısal değişimler hazırlıklar gerek duymamaktadır.

3. ÇİZGELER VE MERKEZİYET ÖLÇÜLERİ

3.1 Çizge Kavramı

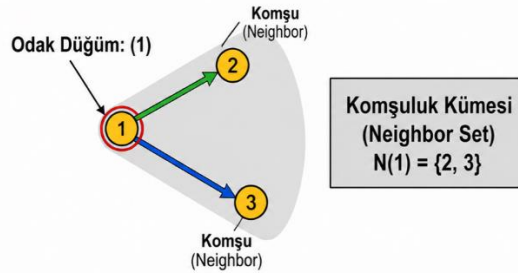
Şekil 3’de de gösterildiği üzere; düğümler ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlardan oluşan matematiksel bir yapıdır.



Şekil 3. Örnek çizge üzerinde düğüm ve kenar gösterimi

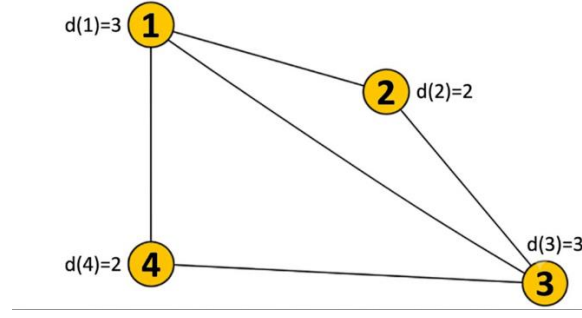
3.2 Temel Çizge Kavramları

Komşu (Neighbor): Bir $(G = (V, E))$ çizgesinde iki düğüm arasında bir kenar bulunuyorsa, bu düğümler birbirinin komşusu olarak adlandırılır. Bir (v) düğümünün tüm komşularından oluşan kümeye komşuluk kümesi denir ve genellikle $(N(v))$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle, $(N(v))$ kümesi (v) düğümü ile doğrudan bağlantısı bulunan tüm düğümleri içerir. Örneğin (1-2), (1-3) ve (2-4) kenarlarına sahip bir çizgede, (1) düğümünün komşuluk kümesi $(N(1) = \{2,3\})$ şeklindedir.



Şekil 4. Komşuluk Kümesinin Bir Çizge Üzerinde gösterimi

Derece (Degree): Bir düğümün derecesi, o düğüme bağlı olan kenar sayısını ifade eder ve genellikle $(d(v))$ ile gösterilir. Başka bir deyişle, bir düğümün derecesi o düğümün kaç komşuya sahip olduğunu belirtmektedir. Örneğin bir düğüme üç kenar bağlıysa o düğümün derecesi 3’tür. Çizge teorisinde önemli bir özellik olarak, bir çizgedeki tüm düğümlerin derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katına eşittir; çünkü her kenar iki farklı düğüme bağlanmaktadır.



Şekil 5. Derece değerlerinin örnek çizge için gösterimi

Şekil 5'te verilen çizge yapısı incelendiğinde, her bir düğümün derecesi (bağlı olduğu kenar veya komşu sayısı) şu şekilde hesaplanmaktadır:

1 numaralı düğümün derecesi 3'tür, çünkü 2, 3 ve 4 numaralı düğümlere bağlıdır. 2 numaralı düğümün derecesi 2'dir, çünkü 1 ve 3 numaralı düğümlere bağlıdır. 3 numaralı düğümün derecesi 3'tür, çünkü 1, 2 ve 4 numaralı düğümlere bağlıdır. 4 numaralı düğümün derecesi 2'dir, çünkü 1 ve 3 numaralı düğümlere bağlıdır.

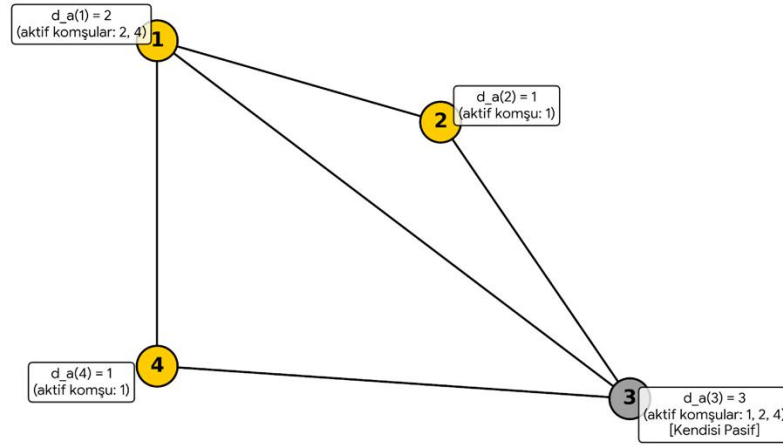
Çizgedeki tüm düğümlerin derece değerleri toplandığında:

$$\sum d(v) = d(1) + d(2) + d(3) + d(4)$$

$$\sum d(v) = 3 + 2 + 3 + 2 = 10$$

sonucu elde edilir.

Aktif Derece (Active Degree): Aktif derece kavramı, özellikle baskın küme problemlerine yönelik algoritmalarda kullanılan dinamik bir ölçüdür. Bir (v) düğümünün aktif derecesi, henüz işaretlenmemiş veya aktif durumda bulunan komşularının sayısını ifade eder ve genellikle $(d_a(v))$ ile gösterilir. Algoritma ilerledikçe bazı düğümler baskın kümeye dahil edilir veya farklı durumlarda işaretlenir. Bu durumda söz konusu düğümler artık aktif kabul edilmez ve dolayısıyla ilgili düğümlerin aktif derece değerleri güncellenir. Başlangıçta bir düğüm için aktif derece değeri genellikle düğümün derecesine eşittir $((d_a(v) = d(v)))$. Ancak algoritmanın ilerleyen adımlarında işaretlenen düğümlerin sayısı arttıkça aktif derece değeri azalır. Bu nedenle aktif derece, algoritmanın çalışma süreci boyunca değişen dinamik bir parametre olarak değerlendirilir ve çözüm sürecinin verimli bir şekilde yönlendirilmesine katkı sağlar.



Şekil 6. Algoritmanın örnek bir adımında aktif derece gösterimi

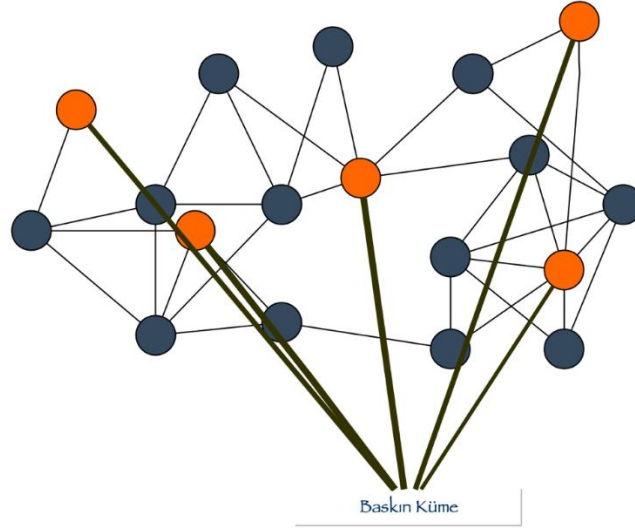
Şekil 6’da verilen güncel çizge yapısı incelendiğinde, algoritmanın belirli bir adımında 3 numaralı düğümün işaretlendiği (baskın kümeye dahil edilerek pasif duruma geçtiği) varsayılmıştır. Bu senaryoya göre düğümlerin aktif derece ($d_a(v)$) değerleri şu şekilde hesaplanmaktadır:

1 numaralı düğümün aktif derecesi 2’dir, çünkü bu düğümün komşularından yalnızca 2 ve 4 numaralı düğümler aktif durumdadır; pasifleşen 3 numaralı düğüm hesaplamaya dahil edilmez. 2 numaralı düğümün aktif derecesi 1’dir, çünkü bağlı olduğu komşulardan yalnızca 1 numaralı düğüm aktifliğini sürdürmektedir. 3 numaralı düğümün kendisi işaretlenmiş (pasif) konumda olsa da aktif durumdaki komşularının sayısı 3’tür, çünkü komşu olduğu 1, 2 ve 4 numaralı düğümlerin tamamı halen aktiftir. 4 numaralı düğümün aktif derecesi 1’dir, çünkü komşularından yalnızca 1 numaralı düğüm aktif durumdadır.

Bu doğrultuda, başlangıç aşamasında düğümlerin kendi yalın derece değerlerine ($d_a(v) = d(v)$) eşit olan aktif derece değerleri, çizge üzerindeki düğümler işaretlendikçe dinamik bir biçimde güncellenmekte ve azalmaktadır.

3.3 Baskın Küme

Yönsüz bir $G = (V, E)$ çizgesi verildiğinde, $D \subseteq V$ köşelerinin bir alt kümesine, her $u \in V \setminus D$ köşesi için $\{u, v\} \in E$ olacak şekilde bir $v \in D$ köşesi varsa, baskın küme denir. Şekil 7’de turuncu düğümler baskın küme elemanlarını temsil ederken lacivert düğümler baskılanan elemanları temsil etmektedir.



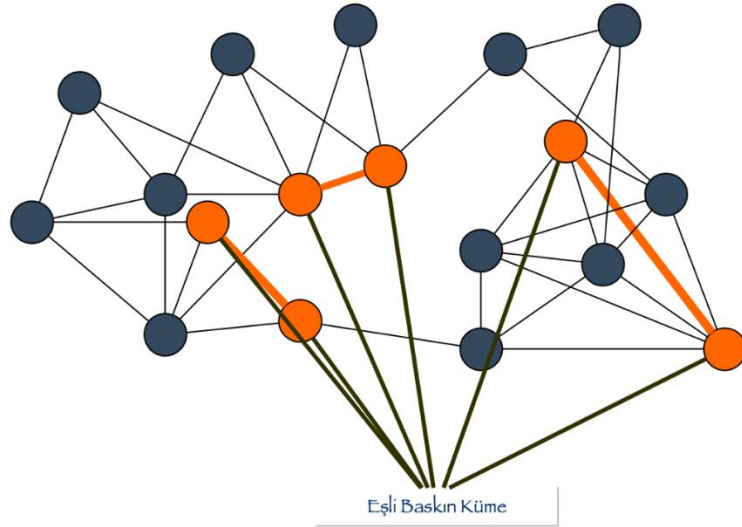
Şekil 7. Baskın Küme örneği

3.4 Eşli Baskın Küme

Bir çizgede $D \subseteq V$ baskın kümesinin indüklediği $\langle D \rangle$ alt çizge bir maksimum eşleşmeye (M) sahipse, bu D kümesi eşli baskın küme (paired dominating set - PDS) olarak adlandırılır. Bu tanım, D kümesinin birbirine komşu olan düğüm çiftlerinden oluştuğunu ve D içerisindeki her bir düğümün, yine D içinde bulunan tam olarak bir düğüm ile eşleştiğini göstermektedir. Bir çizgedeki minimum eleman sayısına sahip eşli baskın kümenin eleman sayısı (kardinalitesi), o çizgenin eşli baskınlık sayısı olarak tanımlanır ve $\gamma_{pr}(G)$ sembolü ile gösterilir. Tanımı gereği, her eşli baskın küme aynı zamanda bir toplam baskın küme (total dominating set) özelliğine sahiptir. Bir G çizgesi için baskınlık sayısı $\gamma(G)$ ve toplam baskınlık sayısı $\gamma_t(G)$ olmak üzere, bu parametreler arasındaki teorik ilişki Denklem 3.1'de sunulmuştur:

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G) \quad (3.1)$$

Şekil 8'de verilen çizge üzerinde, eşli baskın kümeyi oluşturan turuncu renkli düğüm ikilileri ve aralarındaki maksimum eşleşmeyi sağlayan kenarlar örneklenmiştir.



Şekil 8. Eşli Baskın Küme örneği

3.5 Karmaşıklık

Algoritma karmaşıklığı, bir algoritmanın çalışması için gerekli olan zaman ve bellek miktarının, problem boyutuna bağlı olarak nasıl değiştiğini inceleyen önemli bir kavramdır. Algoritmaların performansını değerlendirmek amacıyla genellikle zaman karmaşıklığı ve uzay karmaşıklığı ölçütleri kullanılmaktadır. Zaman karmaşıklığı, bir algoritmanın çalışması sırasında gerçekleştirdiği temel işlemlerin sayısını ifade ederken; uzay karmaşıklığı, algoritmanın çalışması için ihtiyaç duyduğu bellek miktarını ifade etmektedir.

Algoritma karmaşıklığı analizinde çoğunlukla asimptotik gösterimlerden yararlanılmaktadır. Bu bağlamda en yaygın kullanılan gösterimlerden biri Büyük-O (Big-O) notasyonudur. Büyük-O gösterimi, algoritmanın çalışma süresinin problem boyutu arttıkça nasıl büyüdüğünü ifade eder ve algoritmanın üst sınırını göstermektedir. Örneğin $O(n)$, $O(n^2)$ ve $O(2^n)$ gibi ifadeler algoritmaların büyüme oranlarını tanımlamak için kullanılmaktadır. Bu gösterimler sayesinde farklı algoritmaların performansları karşılaştırılabilmektedir.

Birçok çizge problemi yüksek hesaplama maliyetine sahip olup karmaşıklık açısından zor problemlerdir. Özellikle çizge teorisi kapsamında ele alınan baskın küme ve eşli baskın küme problemleri kombinatoriyal optimizasyon problemleri arasında yer almaktadır. Bu problemlerin çözümünde, çözüm uzayının büyüklüğü düğüm sayısına bağlı olarak üstel şekilde artmaktadır. Bu nedenle bu tür problemlerin genel çizgeler için optimal çözümünün bulunması oldukça zor olmakta ve problemler genellikle NP-Zor sınıfında değerlendirilmektedir.

NP-Zor problemler için kesin algoritmalar kullanılarak optimal çözüm elde etmek mümkün olmakla birlikte, problem boyutu büyüdükçe hesaplama süresi önemli ölçüde artmaktadır. Bu nedenle literatürde büyük ölçekli problemlerin çözümünde sezgisel ve meta-sezgisel yöntemler sıklıkla tercih

edilmektedir. Bu yöntemler optimal çözümü garanti etmese de kabul edilebilir süre içerisinde iyi çözümler üretebilmektedir. Özellikle büyük çizgeler üzerinde gerçekleştirilen uygulamalarda bu tür yöntemler hesaplama maliyetini azaltmak açısından önemli avantajlar sağlamaktadır.

3.6 Merkeziyet Metrikleri

Çizge teorisinde düğüm seçiminde farklı birçok metrik kullanılmaktadır. Bunlardan biri de merkeziyet metrikleridir. Merkeziyet metrikleri, bir ağ içerisindeki düğümlerin göreceli önemini veya etkisini belirlemek amacıyla kullanılan matematiksel ölçümlerdir. Bu metrikler sayesinde ağ içerisinde stratejik konuma sahip düğümler, bilgi akışını kontrol eden noktalar veya ağın yapısal açıdan kritik bileşenleri belirlenebilmektedir. Merkeziyet kavramı özellikle çizge teorisi ve ağ analizi çalışmalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Literatürde düğümlerin önemini farklı açılardan değerlendiren çeşitli merkeziyet ölçütleri tanımlanmıştır. Bunlar arasında en yaygın kullanılan merkeziyet metrikleri derece merkeziyeti, yakınlık merkeziyeti, aradalık merkeziyeti ve özvektör merkeziyetidir.

Derece Merkeziyeti (Degree Centrality): Derece merkeziyeti, en basit merkeziyet ölçütlerinden biridir. Bu ölçüt, bir düğümün sahip olduğu komşu sayısına dayanmaktadır. Bir düğümün bağlantı sayısı arttıkça ağ içerisindeki etkileşim potansiyeli de artacağından, bu düğüm daha merkezi kabul edilmektedir. Hesaplanması oldukça basit olan derece merkeziyeti yalnızca doğrudan bağlantıları dikkate almakta olup ağın genel yapısı hakkında sınırlı bilgi sunmaktadır.

Yakınlık Merkeziyeti (Closeness Centrality): Yakınlık merkeziyeti, bir düğümün ağdaki diğer tüm düğümlere olan ortalama uzaklığına dayanan bir merkeziyet ölçütüdür. Bir düğümün diğer düğümlere olan ortalama uzaklığı ne kadar küçükse, bu düğüm ağ içerisinde o kadar merkezi kabul edilmektedir. Bu ölçüt, özellikle bilgi veya veri akışının ağ içerisinde ne kadar hızlı yayılabileceğini değerlendirmek amacıyla kullanılmaktadır.

Arasındalık Merkeziyeti (Betweenness Centrality): Arasındalık merkeziyeti, bir düğümün ağdaki diğer düğüm çiftleri arasındaki en kısa yollar üzerinde ne sıklıkla bulunduğunu ölçmektedir. Bu ölçüt, özellikle ağ içerisindeki köprü görevi gören düğümlerin belirlenmesinde kullanılmaktadır. Arasındalık merkeziyeti yüksek olan düğümler genellikle ağ içerisindeki bilgi akışını kontrol eden kritik noktalar olarak değerlendirilmektedir.

Özvektör Merkeziyeti (Eigenvector Centrality): Özvektör merkeziyeti, bir düğümün önemini yalnızca sahip olduğu bağlantı sayısına göre değil, aynı zamanda komşularının önemine göre de değerlendiren bir merkeziyet ölçütüdür. Bu ölçüye göre, önemli düğümlerle bağlantılı olan düğümler daha yüksek merkeziyet değerine sahip olmaktadır. Bu yaklaşım özellikle büyük ölçekli ağların analizinde önemli bir rol oynamaktadır. İnternet sayfalarının önemini belirlemek amacıyla kullanılan PageRank algoritması da benzer bir prensibe dayanmaktadır.

Harmonik Merkeziyeti (Harmonic Centrality): Harmonik merkeziyeti, yakınlık merkeziyetine benzer bir ölçüttür. Ancak bu ölçüt, bağlantısız veya ayrık çizgelerde de uygulanabilmesi amacıyla düğümler arasındaki mesafelerin ters değerlerinin toplamına dayanmaktadır. Bu sayede ağ yapısında tüm düğümler arasında doğrudan bağlantı bulunmasa bile merkeziyet analizi gerçekleştirilebilmektedir.

Merkeziyet metrikleri sayesinde, ağ içerisindeki önemli düğümler, kritik bağlantı noktaları ve potansiyel darboğazlar belirlenebilmektedir. Bu metrikler sosyal ağ analizi, epidemiyoloji, ulaşım ağları ve iletişim sistemleri gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Ayrıca baskın küme problemleri gibi optimizasyon problemlerinde, seçilecek düğümlerin belirlenmesinde merkeziyet ölçütlerinden yararlanılabilmektedir. Ancak bir düğümün yalnızca lokal olarak önemini dikkate alarak seçmek verimli düğüm seçimini etkilemektedir. Bu nedenle tezde önerilen algorithmada Malatya merkeziyet metrikleri kullanılmıştır.

3.7 Malatya Merkeziyet Metrikleri

Malatya merkeziyet ölçütü, A. Karcı ve arkadaşları tarafından geliştirilen özgün bir merkeziyet ölçütüdür. İlk olarak 2022 yılında Minimum Düğüm Örtme Probleminin çözümü için geliştirilen algorithmada, daha sonra birçok çizge teorisi alt problemlerinin çözümünde yer almıştır (Karcı et al., 2022).

Literatürdeki klasik merkeziyet ölçütleri belirli yapısal özellikleri ölçmek üzere veya sadece düğümün kendi derecesi önemseyecek şekilde tasarlanmıştır. Ancak bir çizgede bir düğümün önemi yalnızca derecesine değil, aynı zamanda komşularının önemine de bağlıdır. Malatya merkeziyeti ise yalnızca düğümün derecesini değil aynı zamanda o düğümün komşularının derecesini de hesaplayarak kritik düğüm seçimini iletirmektedir. Malatya merkeziyeti, düğüm etkisini komşuluk ilişkileri üzerinden iteratif olarak yaygınlaştıran merkeziyet ölçütü ailesi, bir varlığın kendi toplumu içindeki göreceli gücünü ölçmektedir.

3.7.1 Birinci seviye merkeziyet ($\Psi_1 - MC_1$)

Düğümün kendi derecesinin, komşularının derecelerine oranının aktiflik katsayısıyla çarpımıdır. Bu ölçüt, yerel baskınlık gücünü yakalamakta etkili olsa da daha uzak düğümler üzerindeki dolaylı etkileri dikkate almaz. Söz konusu değer Denklem (3.1) ile hesaplanmaktadır:

$$\Psi_1(v_i) = \frac{d_a(v_i)}{d(v_i)} \left(\sum_{v_j \in N(v_i)} \frac{d(v_i)}{d(v_j)} \right) \quad (3.1)$$

3.7.2 İkinci seviye merkezîyet ($\Psi_2 - MC_2$)

Düğümün komşularının birinci seviye merkezîyet değerlerine göre göreceli gücünü hesaplar. Bu yapı sayesinde, düğüm önemi her iterasyonda bir üst komşuluk seviyesine taşınır. İkinci seviye merkezîyet değeri Denklem (3.2) üzerinden tanımlanır:

$$\Psi_2(v_i) = \frac{1}{d(v_i)} \frac{d_a(v_i)}{d(v_i)} \left(\sum_{v_j \in N(v_i)} \frac{\Psi_1(v_j)}{\Psi_1(v_i)} \right) \quad (3.2)$$

3.7.3 Üçüncü seviye merkezîyet ($\Psi_3 - MC3$)

Bu metrik, düğümün ağ üzerindeki küresel etki skorunu temsil eder. Bu tez çalışmasında kullanılan üçüncü seviye Malatya merkezîyeti, bir düğümün önemini şu şekilde modellendirir: düğümün kendi önemi, komşularının önemi, komşularının komşularının önemi dolayısıyla, üçüncü seviye Malatya merkezîyet, düğüm etkisini üç-adım (3-hop) komşuluk kapsamına kadar genişleten bir merkezîyet ölçütü sunar. MC3, komşuların MC2 değerlerini temel alarak bu mertebeye kadarki en geniş etki alanına sahip stratejik düğümleri belirler. Algoritmada da "Lider Düğüm" seçimi için ana kriterdir. Denklem(3.3)'e göre hesaplanmaktadır.

$$\Psi_3(v_i) = \frac{1}{d(v_i)} \frac{d_a^2(v_i)}{d^2(v_i)} \left(\sum_{v_j \in N(v_i)} \frac{\Psi_2(v_i)}{\Psi_2(v_j)} \right) \quad (3.3)$$

Bu çalışmada, üçüncü seviye Malatya merkezîyet kullanılarak, düğümlerin yalnızca yerel değil, aynı zamanda orta-ölçekli yapısal etkileri de dikkate alınmıştır. Böylece, düğüm seçimlerinin ilerleyen adımlarda eşleşme kısıtlarını bozmasının önüne geçilmesi hedeflenmiştir.

3.8 Önerilen Yöntemin Uygulandığı Çizge Sınıfları

Bu çalışmada önerilen algoritmanın performansını değerlendirmek amacıyla farklı boyut ve yapısal özelliklere sahip çeşitli çizgeler kullanılmıştır. Bu çizgeler iki ana gruba ayrılmaktadır. İlk grupta çalışmada oluşturulan veya derlenen deneysel çizgeler yer alırken, ikinci grupta literatürde yaygın olarak kullanılan benchmark veri kümeleri bulunmaktadır. Bu yaklaşım, önerilen yöntemin hem kontrollü deney ortamlarında hem de gerçek dünya ağlarında test edilmesine olanak sağlamaktadır.

3.8.1 Çalışmada kullanılan deneysel çizgeler

Zachary's Karate Club ağı, sosyal ağ analizinde en yaygın başvuru referans veri kümelerinden birini oluşturmaktadır. Söz konusu ağ, bir üniversite karate kulübü bünyesindeki bireyler arasındaki sosyal ilişkileri temsil etmekte olup 34 düğüm ve 78 kenardan meydana gelmektedir. Düğümler kulüp üyelerini, kenarlar ise üyeler arasındaki gözlemlenmiş sosyal etkileşimleri ifade etmektedir. Ağın küçük

ölçekli yapısı, çizge tabanlı algoritmaların doğrulanması ve karşılaştırmalı analizlerde kıyaslama ölçütü olarak kullanılması açısından bu veri kümesini özellikle elverişli kılmaktadır.

Dolphins sosyal ağı, Yeni Zelanda kıyılarında doğal ortamında gözlemlenen şişe burunlu yunuslar (“*Tursiops truncatus*”) arasındaki sosyal ilişkileri temsil eden biyolojik kökenli bir ağ veri kümesidir. Ağ, 62 düğüm ve 159 kenardan oluşmakta; düğümler bireysel yunusları, kenarlar ise gözlemlenen sosyal etkileşimleri temsil etmektedir. İnsan dışı sosyal organizasyonların ağ teorisi çerçevesinde incelenmesine olanak tanınması bakımından literatürde sıklıkla tercih edilen veri kümeleri arasında yer almaktadır.

Adjnoun ağı, Charles Dickens'ın “David Copperfield” adlı edebi eserindeki sıfat ve isim sözcükleri arasındaki ortak kullanım ilişkilerini modelleyen bir doğal dil ağıdır. Bu ağda düğümler sözcükleri, kenarlar ise metin içinde ardışık biçimde bir arada kullanılan sözcük çiftleri arasındaki ilişkileri temsil etmektedir. 112 düğüm ve 425 kenardan oluşan bu veri kümesi, dil ağlarının istatistiksel ve yapısal özelliklerinin incelenmesinde önemli bir referans kaynağı olarak kabul görmektedir.

Reed College Facebook Network veri kümesi, Reed College öğrencileri arasındaki çevrimiçi arkadaşlık ilişkilerini temsil eden üniversite ölçekli bir sosyal ağıdır. 962 düğüm ve 18.812 kenardan oluşan bu veri kümesi, çevrimiçi sosyal platformların yapısal özelliklerini analiz etmek ve orta ölçekli ağlarda topluluk tespiti ile kümeleme algoritmalarını değerlendirmek amacıyla yaygın biçimde kullanılmaktadır.

Facebook Ego Network veri kümesi, Facebook platformu kullanıcılarının ve bu kullanıcıların birinci derece bağlantılarından oluşan ego merkezli ağ yapılarını kapsamaktadır. 4.039 düğüm ve 88.234 kenardan oluşan bu veri kümesi, belirli bir odak düğüm etrafında şekillenen yerel ağ yapılarının incelenmesine imkân tanımakta; sosyal ağ analizinde ego ağı modellemesi açısından temel referans veri kümeleri arasında yer almaktadır.

Deezer Europe Network veri kümesi, müzik akış platformu Deezer'ın Avrupa kullanıcıları arasındaki arkadaşlık ilişkilerini temsil eden büyük ölçekli bir sosyal ağıdır. 28.281 düğüm ve 92.751 kenardan oluşan bu veri kümesi, platform kullanıcılarını düğümler, kullanıcılar arası arkadaşlık bağlantılarını ise kenarlar aracılığıyla modellemektedir. Geniş ölçekli yapısı sayesinde önerilen algoritmaların hesaplama performansının ve ölçeklenebilirlik özelliklerinin sistematik biçimde değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır.

3.8.2 Benchmark çizgeler

Çevrim çizgeleri, baskın küme ve eşli baskın küme problemlerinin kuramsal analizinde yaygın biçimde başvuru alan temel çizge sınıfları arasında yer almaktadır. Bu çizge sınıfında düğümler, kapalı bir çevrim oluşturacak biçimde ardışık olarak birbirine bağlanmaktadır. Çevrim çizgelerinin algoritmik

değerlendirmeler açısından belirleyici özelliği, eşli baskın küme sayısının teorik olarak kesin biçimde bilinmesidir. Söz konusu değer literatürde Denklem(3.4) şeklinde ifade edilmektedir.

$$\gamma_{pr}(C n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \quad (3.4)$$

Bu kuramsal kesinlik, çevrim çizgelerini algoritma doğrulama çalışmalarında ve deneysel sonuçların teorik değerlerle karşılaştırılmasında güvenilir bir (“ground-truth”) kıyaslama ölçütü olarak öne çıkarmaktadır.

Kübik çizgeler, her düğümün derecesinin tam olarak üç olduğu düzenli çizgeler olarak tanımlanmaktadır. Bu çalışmada tercih edilen Petersen tipi kübik çizgeler, yüksek yapısal simetrileri ve algoritmik açıdan zorlu örnekler teşkil etmeleri nedeniyle seçilmiştir. Söz konusu çizgeler, optimizasyon algoritmalarının en kötü durum (“worst-case”) performansını değerlendirmek amacıyla literatürde referans kıyaslama yapıları olarak sıklıkla kullanılmaktadır. Genel kübik çizgeler için eşli baskın küme sayısına ilişkin teorik üst sınır yaklaşık olarak Denklem (3.5) ile ifade edilirken,

$$\frac{3n}{5} \quad (3.5)$$

Petersen çizgeleri özelinde bu sınırın daha sıkı bir biçimde Denklem (3.6)’daki gibi olduğu bilinmektedir.

$$\frac{4n}{7} \quad (3.6)$$

Pençesiz (Claw-free) çizgeler, herhangi bir düğümün üç komşusunun birbirleriyle bağlantısız olduğu bir alt yapı, yani pençe alt çizgesi içermeyen çizgeler olarak tanımlanmaktadır. Bu çizge sınıfı, çok sayıda kombinatoriyal optimizasyon probleminde önemli bir araştırma nesnesi oluşturmaktadır. Literatürde, minimum derecesi $\delta \geq 4$ koşulunu sağlayan pençesiz çizgeler için eşli baskın küme sayısına ilişkin üst sınırın olduğu Denklem (3.7)’de gösterilmiştir.

$$\frac{4n}{7} \quad (3.7)$$

Bu çalışmada kullanılan 60 düğümlü pençesiz çizge, söz konusu kuramsal üst sınırın deneysel olarak doğrulanması amacıyla değerlendirme sürecine dahil edilmiştir.

Minimum derece 3 çizgeleri, çizge içindeki her düğümün derecesinin en az üç olma koşulunu sağlayan çizge ailelerini kapsamaktadır. Bu çizge sınıfı, eşli baskın küme probleminin yapısal analizi ve algoritma performansının sınanması bakımından literatürde sıklıkla başvurulmuş kıyaslama örnekleri arasında yer almaktadır. Söz konusu sınıf için en kötü durum üst sınırının yaklaşık olarak $0.634n$ olduğu kuramsal olarak ortaya konulmuştur. Bu doğrultuda, rastgele üretilen 3-düzenli çizgeler; önerilen algoritmanın hesaplama performansının bu teorik sınırla sistematik biçimde karşılaştırılmasında kullanılmıştır.

Supergrid çizgeleri, iki boyutlu düzenli ızgara yapılarının genelleştirilmiş bir biçimi olup başta ağ optimizasyon problemleri olmak üzere çeşitli hesaplamalı alanlarda uygulama bulmaktadır. Bu çalışmada kullanılan 8×10 boyutundaki supergrid çizgesi; bölme-temelli (“divide-and-conquer”) ve şerit tabanlı (“strip-based”) yaklaşımlara dayanan kuramsal üst sınır sonuçlarıyla karşılaştırmalı analiz yapılması amacıyla seçilmiştir. Bu çizge yapısı için literatürde önerilen üst sınır formülü Denklem (3.8) ile ifade edilmektedir.

$$\gamma_{pr} \leq 2 \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \quad (3.8)$$



4. ÖNERİLEN ALGORİTMA

4.1 Malatya Merkezîyet Ölçütlerinin Kullanımındaki Motivasyon

Eşli Baskın Küme probleminde bir düğümün seçimi, o düğümün çizgede bulunduğu konum ve komşularının durumu göz önüne alınarak yapılır. Klasik derece tabanlı veya yerel merkezîyet ölçütleri, bu çok-adımlı etkileşimi yeterince temsil edememektedir. Özellikle, yalnızca yüksek dereceli düğümlerin seçilmesi, yerel yoğunluğa odaklanması optimal olmayan çözümlere yol açabilmektedir. çizgenin içindeki bir düğümün konumunun üç adım ötesinde kadar önemini göz önünde bulundurarak hesaplama yapan Malatya merkezîlik ölçütü kullanıma uygun görülmüştür. Bundan dolayı ilk olarak 1-hop uzaklık göz önüne alınarak birinci Malatya merkezîyet değerleri hesaplanır. Daha sonra 2-hop uzaklık dikkate alınarak ikinci Malatya merkezîyet değerleri hesaplanır. İkinci Malatya merkezîyet değerlerine göre düğüm seçimi yapıldığında baskın küme tespiti yapılabilmektedir. Baskın kümede yer alan düğümlerin birer çiftinin tespit edilmesi baskın küme elemanlarının hangi komşusunun seçilmesi gerektiği durumu ortaya çıkarır. Bu durumda seçilen bir düğümün komşu seçimi için üçüncü Malatya merkezîyet değeri hesaplanır.

Malatya merkezîyetinin yüksek mertebeden tanımları, her iterasyonda düğüm önemini komşuları üzerinden güçlendirerek, komşunun da önemini dikkate alan bir değerlendirme mekanizması sunmaktadır. Bu özellik, PDS probleminde ortaya çıkan dolaylı baskınlık ve eşleşme etkilerinin modellenmesini mümkün kılmaktadır.

4.2 Algoritma Tasarımı

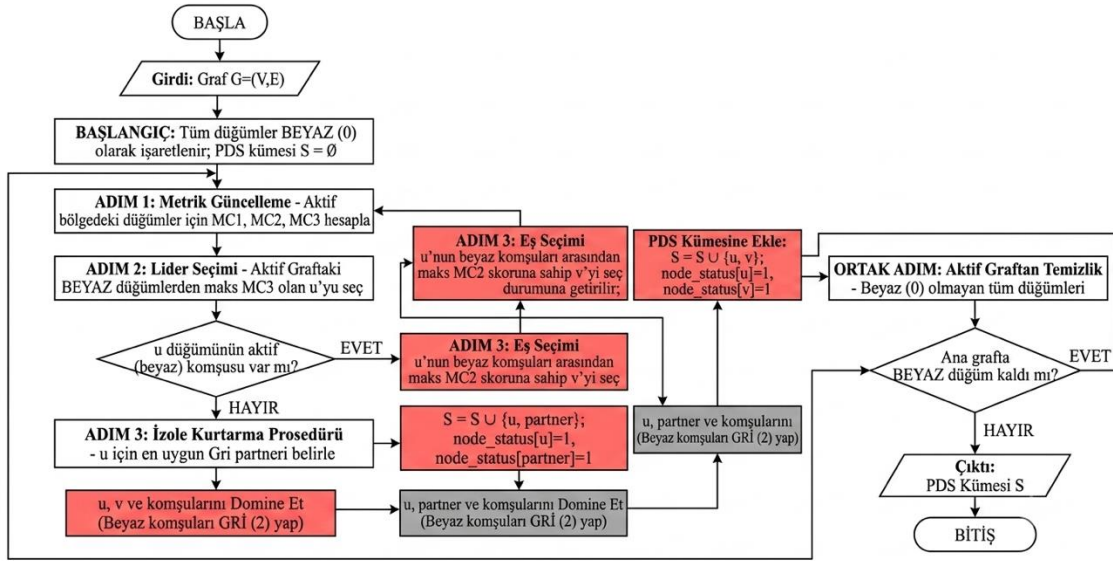
Algorimanın üç temel karar mekanizması bulunmaktadır. Bunlar “Lider Düğüm Seçimi, Eş Düğüm Seçimi ve İzole Kalan Düğümü Kurtarma Prosedürü” dür.

Lider düğüm seçimi için algoritma çizgede henüz domine edilmemiş düğümlerin merkezîyet değerlerini hesaplamakta ve bu düğümler arasında en yüksek MC3 değerine sahip düğüm seçmektedir. Çünkü o seçim zaman aralığında bu düğüm çizgenin en kapsama alanına sahip ve en etkili noktalarından biridir.

Diğer karar mekanizması ise eş düğüm seçimi lider düğüm seçimi gerçekleştirildikten sonra yapılmaktadır. Lider düğüm seçildikten sonra bu düğümün henüz domine edilmemiş komşuları arasından en yüksek MC2 değerine sahip düğüm eş olarak seçilmektedir.

İki düğüm seçilmesinin ardından en son aşama olarak izole düğüm kalıp kalmadığının kontrol aşaması gelmektedir. Bazı düğümler, tüm komşularının lider-eş düğümlerin eşleşmesi sırasında domine edilmekte ve bu nedenle izole kalmaktadır. Bu düğümler için, bu düğümlerin en yüksek MC2 değerine

sahip komşusuyla eşlendiği bir izole düğüm kurtarma prosedürü bulunmaktadır. Şekil 9'da algoritmanın akış diyagramı sunulmaktadır.



Şekil 9. Algoritma Akış Diyagramı

4.3 Algoritma Adımları

Bir önceki bölümde belirtilen mekanizmalar birbiri ardına gerçekleşerek Eşli Baskın Küme eleman sayısını minimum tutması amaçlamaktadır. Algoritma 1'de Lider düğüm seçiminin, Algoritma 2' de Eş düğüm seçimi aşamasının, Algoritma 3'te ise İzole düğüm kurtarma Prosedürünün zahiri kodu verilmiştir.

Algoritma 1: Lider Düğüm Seçimi (MC3 Tabanlı)

Girdi: Aktif çalışma çizgesi G_{aktif} , Düğümlerin güncel MC3 skorları.

Çıktı: Seçilen lider düğüm u .

1. **Başla**
2. Henüz domine edilmemiş (BEYAZ) düğümleri listele.
3. **Eğer** Beyaz düğüm listesi boşsa:
 - İşlemi sonlandır ve ana algoritmaya dön.
4. $Düğüm\ u \leftarrow argmax_{n \in V_{beyaz}} \{MC3(n)\}$
5. **Eğer** u düğümünün aktif komşusu yoksa:
 - u düğümünü "İzole Düğüm" olarak işaretle ve **Algoritma 3'e** yönlendir.
6. **Değilse:**
 - u düğümünü lider olarak döndür.
7. **Bitir**

Algoritma 2: Eş Düşüm Seçimi (MC2 Tabanlı)

Girdi: Lider düşüm u , u 'nın komşuluk kümesi $N(u)$, düşümlerin güncel MC2 skorları

Çıktı: Seçilen eş düşüm v ve güncellenmiş baskın küme S

Başla

1. Lider düşüm u 'nın tüm komşuları $N(u)$ taranır.
2. Eş düşüm v , $N(u)$ içinden $MC2(m)$ değeri en büyük olan düşüm olarak seçilir:
 $v = \operatorname{argmax} (m \in N(u)) MC2(m)$
3. Bu seçimde MC2 metriği, eş düşümün hem lideri güçlü biçimde baskılamasını hem de geniş bir beyaz alanı kapsamasını sağlar.
4. $S = S \cup \{u, v\}$ olacak şekilde ikili baskın kümeye eklenir.
5. u ve v düşümleri "Domine Eden (Kırmızı)" olarak işaretlenir.
6. $N(u) \cup N(v)$ kümesindeki tüm düşümler "Domine Edilmiş (Gri)" olarak işaretlenir.
7. **Bitir**

Algoritma 3: İzole Düşüm Kurtarma Prosedürü

Girdi: İzole kalmış düşüm u , orijinal çizge G

Çıktı: Güncellenmiş PDS kümesi S

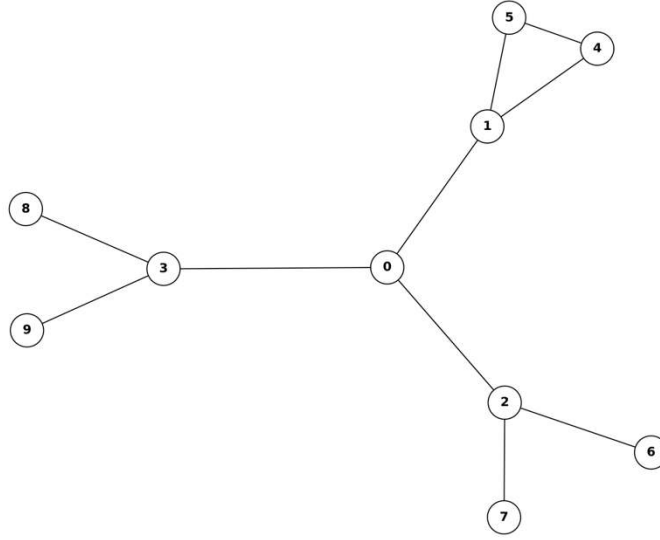
Başla

1. İzole düşüm u 'nın orijinal çizgedeki komşuları $N(u)$ taranır.
2. Bu komşular arasından, halihazırda bir eşe sahip olan ve MC2 skoru en yüksek olan "kurtarıcı" (savior) düşüm seçilir.
3. **Eğer** uygun bir kurtarıcı bulunursa:
 - Kurtarıcı düşümün mevcut eşi (partner) tespit edilir.
 - u düşümü bu ikilinin etki alanına dahil edilir ve renk güncellemesi (Kırmızı/Gri) yapılır.
4. **Eğer** uygun bir kurtarıcı bulunamazsa:
 - En yakın baskın ikili ile bağlantı kuracak şekilde yeni bir eşleşme atanır.
5. G_{aktif} üzerinden u ve ilgili düşümler güncellenerek temizlenir.
6. **Bitir**

4.4 Algoritmanın Çalışma Örneği

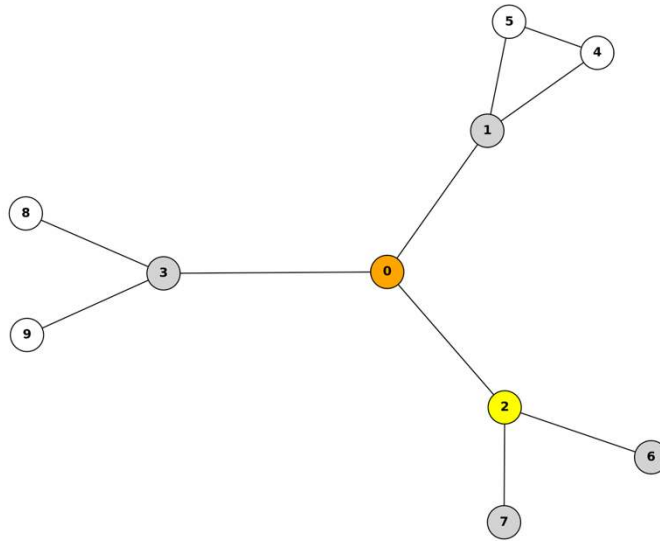
Bu bölümde, önerilen yaklaşımın çalışma mekanizması, karmaşık bir topolojiye sahip 10 düşümlü örnek bir çizge üzerinden adım adım incelenmiştir.

Algoritma başlamadan önce tüm düşümler (BEYAZ) domine edilmemiş durumdadır. Şekil 10'da görüldüğü üzere, çizge iki ana üç ayrı yoğun bölgeden ve bunları birbirine bağlayan köprüden oluşmaktadır.



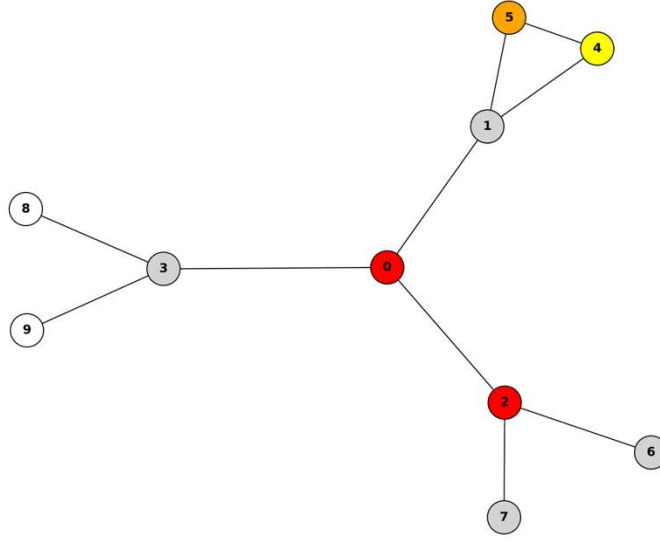
Şekil 10. Örnek Çizgenin Başlangıç Durumu

Algoritma 1 uyarınca, tüm çizge üzerinde Malatya merkezîyet değerleri hesaplanmasının ardından en yüksek MC3 skoruna sahip olan düğüm lider seçilir. Şekil 11’de de görüldüğü üzere ilk eşleşme iterasyonu tamamlanmaktadır.



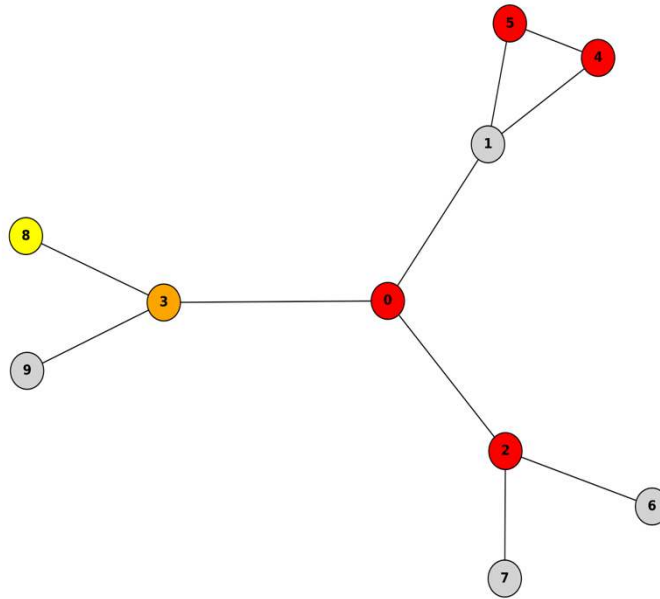
Şekil 11. İlk Eşleşme İterasyonunun Sonucu

Algoritma ilk bölgeyi domine ettikten sonra önemli diğer yoğun bölgeye odaklanmaktadır. Bu statik merkezîyet yöntemlerinde karşılaşılan yerel yoğunluğa takılma sorununa karşı önerilen yöntemde alınan bir önlemdir. Şekil 12’deki ikinci eşleşme sağlamaktadır.



Şekil 12. İkinci İterasyon

Kalan beyaz düğümler, algoritmanın son adımıyla kapsamaktadır. Şekil 13’de son eşli ile tam kapsama sağlandığı görülmektedir. Bu örnek çizge içinde gerçekleşmemekle beraber; eğer izole kalan düğüm varsa dördüncü iterasyon olarak kurtarma prosedürü gerçekleştirilmektedir.



Şekil 13. Final İterasyonu ile tam baskılama

4.5 Karmaşıklık Analizi

Önerilen algoritmanın hesaplama karmaşıklığı, çizgenin düğüm sayısı ($n = |V|$) ve kenar sayısı ($m = |E|$) cinsinden analiz edilmiştir. Algoritma, tüm düğümler domine edilene kadar devam eden iteratif bir yapıya sahiptir. İlk adımda MC_1 değerlerinin hesaplanması her düğümün derecesine

bakılmasını gerektirdiğinden $O(m)$ zaman alır. Ancak, her iterasyonda MC_2 ve MC_3 değerlerinin dinamik olarak güncellenmesi, düğümlerin 2-hop ve 3-hop komşuluklarının taranmasını gerektirir. Bir düğümün maksimum derecesi Δ ile gösterilirse, bir güncelleme adımı yaklaşık $O(n\Delta)$ maliyetindedir. Her iterasyonda en yüksek MC_3 skoruna sahip düğümün seçilmesi (priority queue veya sorting kullanılarak) $O(\log n)$ veya $O(n)$ zaman alır. Lider düğümün komşuları arasından en yüksek MC_2 skorlu eşin seçilmesi ise $O(\Delta)$ zaman almaktadır. En kötü durumda (worst-case), her iterasyonda sadece iki düğüm domine ediliyorsa algoritma $n/2$ kez döner. Bu durumda toplam karmaşıklık yaklaşık olarak Denklem (4.1) şeklinde ifade edilebilir:

$$O(n \cdot (m + n\Delta)) \quad (4.1)$$

Seyrek (sparse) gerçek dünya ağlarında $\Delta \ll n$ olduğu için bu maliyet yönetilebilir seviyededir. Literatürdeki diğer sezgisel PDS algoritmaları genellikle $O(n^2)$ veya $O(n \cdot \Delta)$ mertebesinde. Bu tez çalışmasındaki yaklaşımda MC_3 hesaplaması, yerel yaklaşımlara göre bir miktar hesaplama yükü eklese de sağladığı çözüm kalitesi (daha küçük baskın küme boyutu) bu maliyeti dengelemektedir.

5. DENEYSEL SONUÇLAR

5.1 Deney Ortamı ve Metodoloji

Bu çalışmada algoritmanın geliştirilmesi ve deney sürecinde bulut tabanlı Google Colaboraty(Colab) ortamı kullanılmıştır. Programlama dili olarak NetworkX kütüphanesinin sağladığı hız ve kolaylık nedeniyle Python dili seçilmiştir.

Geliştirilen algoritmanın performansı, farklı yapısal özelliklere sahip ağlar üzerinde test edilmiştir. Veri setlerinin dosya formatları kenar listeleri (txt formatında) halinde hazırlanmış çizge yapısı olarak alımtada veri olarak alınmıştır.

Performans metrikleri olarak PDS boyutu, çalışma süresi, eşleşme oranı ve kapsama oranı hesaplanmıştır. PDS boyutu algoritmanın baskılama verimliliğinin temel göstergesidir. Çizgenin okunmasından kümenin oluşumuna kadar olan çalışma süresi ise algoritmanın büyük veri setlerinde ölçeklenebilirliğini ifade eder. Eşleşme oranı ve kapsama oranı hedeflenen her düğümün baskılanması veya eşli olması hedeflerini temsil etmektedir.

5.2 Gerçek Dünya Veri Setleri Analizi

Gerçek hayat verilerindeki uygulanabilirliği ölçülmüştür. Veri setinin kenar düğüm sayısı özellikleri Tablo 1’ de verilmektedir.

Tablo 1. Gerçek Dünya Çizge Veri Setlerinin Özellikleri

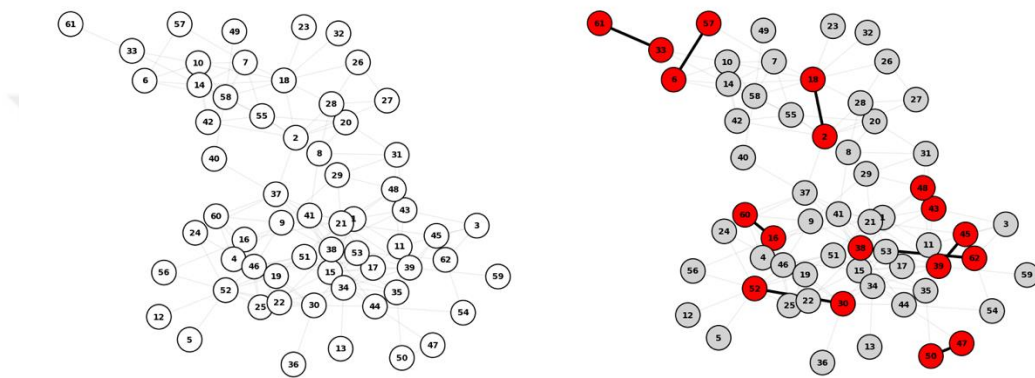
Veriseti	Düğüm Sayısı	Kenar Sayısı
Karate-club	34	78
Dolphins	62	159
Adjnoun	112	425
Socfb-Reed98	962	18812
Ego	4039	88234
Deezer-Europe	28281	92751

Özellikleri verilen veri setleri üzerinde önerilen yöntem uygulanmış ve seçilen düğüm sayısı, işlem süresi gibi performans metriklerinde iyi sonuçlar elde edilmiştir. Tam baskılama başarıyla sağlanmıştır. Test sonuçları ve tam kapsama için seçilen düğüm sayısı gibi metrikler Tablo 2’de gösterilmektedir.

Tablo 2. Gerçek Dünya Veri Setlerinin Deney Sonuçları

Düğüm Sayısı	Eşli Baskın Küme Boyutu	Çalışma Süresi(sn)	Eşlenme Oranı	Kapsama Oranı
Karate-club	6	0.0026	6/34	1
Dolphins	18	0.0032	22/62	1
Adjnoun	28	0.054	28/112	1
Socfb-Reed98	126	0.5596	126/962	1
Ego	14	1.2488	14/4039	1
Deezer-Europe	7216	198.038	7216/28281	1

Gerçek hayat veri setlerinden orta ölçekli olması ve baskılanmış yapısının gözlemlenebilirliği bakımından “Dolphins” çizgesinin başlangıç ve tam baskılanmış hali Şekil 14’te gösterilmektedir.

**Şekil 14.** Dolphins veri setinin kapsanmamış ve kapsanmış halleri

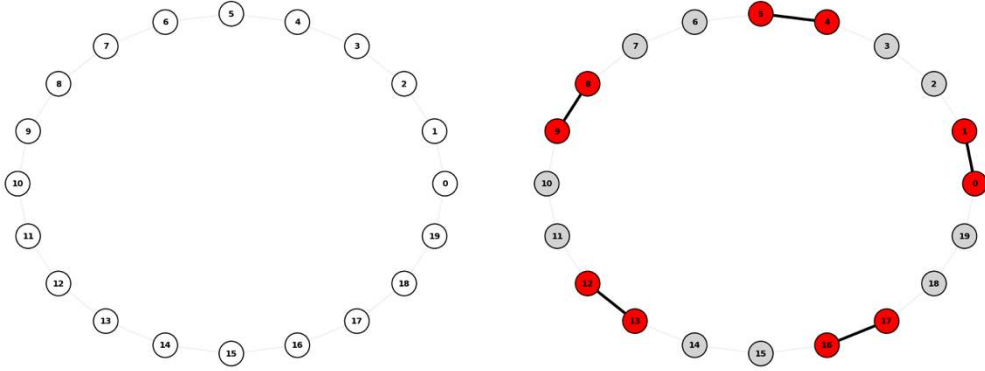
5.3 Literatürde Yer Alan Çizgelerin Analizi

Mevcut yöntemlerin büyük bir çoğunluğu eşli baskın küme üzerine teorik üst sınırlar ortaya koymuştur. Üst sınır belirtilen özel çizge yapıları temsili olarak oluşturulmuştur. Bu veri setlerinin özellikleri Tablo 3’te yer almaktadır.

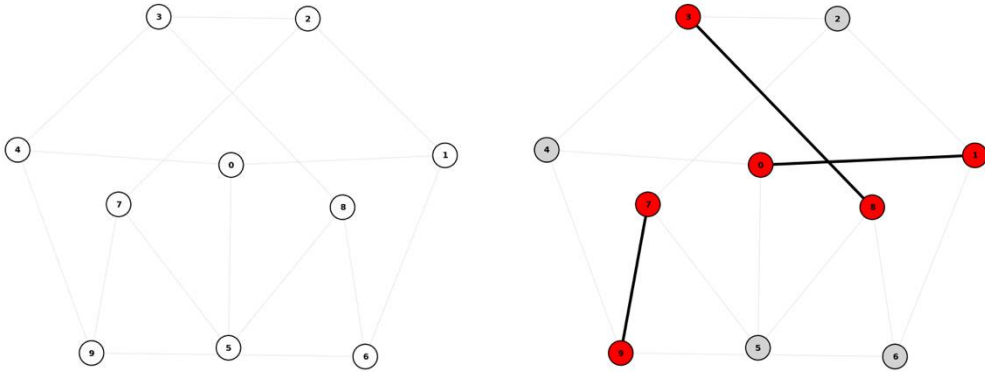
Tablo 3. Literatürde yer alan özel çizge sınıflarının özellikleri

Çizge sınıfı	Düğüm sayısı	Teorik sınır (literatür)
Döngü Çizgeleri	20	Eşli baskınlık sayısı tam olarak bilindiğinden temel (ground-truth) bir karşılaştırma ölçütü olarak kullanılmıştır: $\gamma_{pr}(C_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.
Kübik Petersen Çizgeleri	10	En kötü durum ve yüksek simetriye sahip kübik bir benchmark olarak seçilmiştir; genel üst sınır $\frac{3n}{5}$ ’tir. Petersen çizgesi için ise daha sıkı üst sınır $\frac{4n}{7}$ ’dir.
Pençesiz Çizgiler ($\delta \geq 4$)	60	60 düğümlü pençesiz çizge örneği, $\frac{4n}{7}$ şeklindeki sıkı üst sınırın doğrulanması için kullanılmıştır.
Minimum Derece 3 Çizgeleri	60	Yaklaşık $0.634n$ olarak bilinen en kötü durum üst sınırına karşı performansı değerlendirmek için rastgele 3-düzenli çizgeler kullanılmıştır.
Süpergrid Çizgeleri	80	8×10 süpergrid örneği $R_8 \times_{10}$, böl-parçala (divide-and-conquer) ve şerit tabanlı ayrıştırma yaklaşımına dayalı $2 \cdot \lceil m/3 \rceil \cdot \lceil n/4 \rceil$ üst sınırı ile karşılaştırma yapmak için kullanılmıştır.

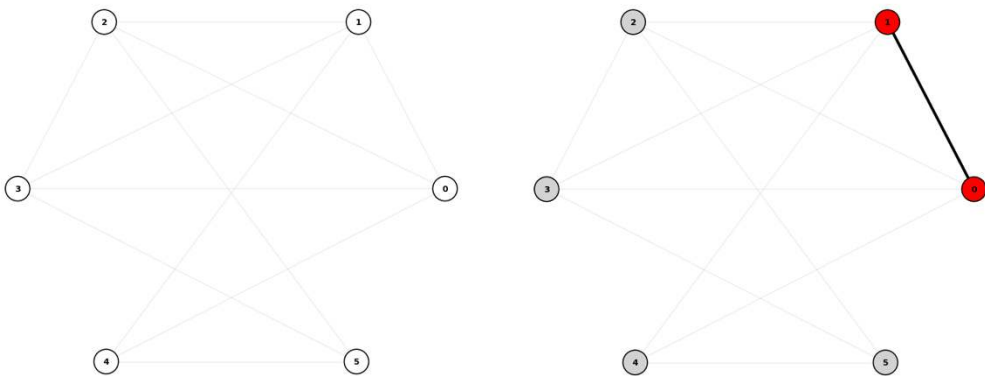
Tezde sunulan yaklaşım, belirtilen özel çizgelerin farklı boyutlu versiyonlarında test edilmiştir. Bu test sonucunda, çizgelerin başlangıç ve eşli baskın küme seçimi tamamlanarak tam baskılamanın sağlandığı versiyonları Şekil 15, 16, 17, 18 ve 19’ da gösterilmektedir.



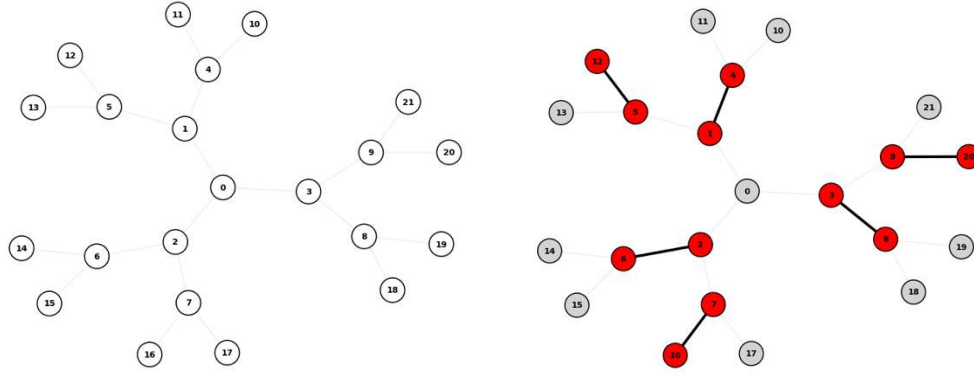
Şekil 15. Döngü çizgenin başlangıç ve final versiyonları



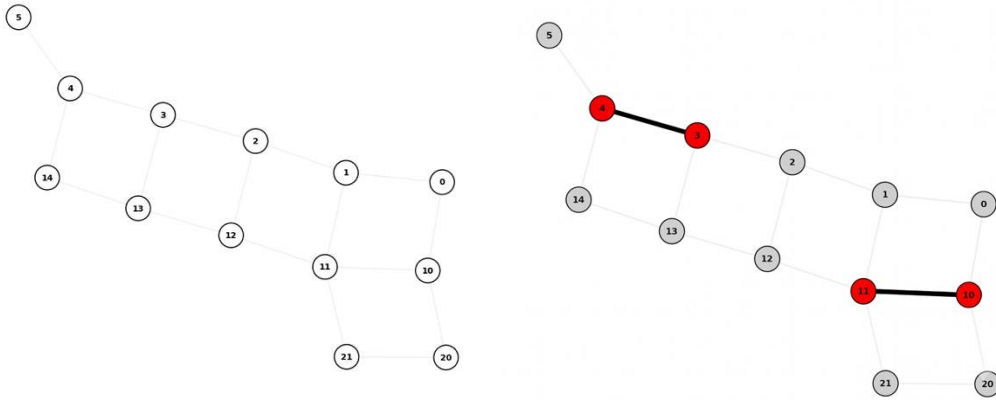
Şekil 16. Kübik çizgenin başlangıç ve final versiyonları



Şekil 17. Pençesiz çizgenin başlangıç ve final versiyonları



Şekil 18. En az 3 dereceli çizgenin başlangıç ve final versiyonları



Şekil 19. Supergrid çizgenin başlangıç ve final versiyonları

Literatürde rapor edilen teorik üst sınırlar ile önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar arasında karşılaştırma yapılmıştır. Matematiksel sonuçlar Tablo 4 'te sunulmaktadır.

Tablo 4. Özel Çizge Sınıflarının Sonuçları

Çizge Sınıfı	Teorik Üst Sınır	Önerilen Yöntemin Performansı
Döngü Çizgeler	10	10
Kübik Petersen Çizgeleri	6(optimum)	6
Pençesiz Çizgeleri ($\delta \geq 4$)	34.3	22
Minimum Derece 3 Çizgeleri	38	28
Süpergrid Çizgeleri	18	4

Yukarıda verilen değerlerle de görülmektedir ki; bu tez çalışmasında önerilen yaklaşım, teorik olarak garanti edilen sınırların altında veya eşit büyüklükte sonuçlar yakalamıştır. Yalnızca en kötü durum garantilerinin mevcut olduğu çizgelerde bile iyi çözümler üretebilmiştir.

5.4 Ablasyon Deneyleri

Son olarak, önerilen yöntem metriklerinin katkısını değerlendirmek için bir ablasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Ablasyon çalışması kapsamında kullanılacak ortalama derece sayıları benzer beş farklı ölçüde düğüm sayısına sahip veri setleri oluşturulmuştur. Bu veri setlerine eşli baskın küme oluşumunda (i) en yüksek MC3 değerine sahip düğüm ve o düğümün en yüksek MC2 değerli komşu düğümünü eşleştiren yöntem, (ii) en yüksek MC2 skoruna sahip düğüm ile yine o düğümün en yüksek MC1 skoruna sahip komşusu ile eşleşme yöntemi, (iii) ana yöntemdeki MC3 metriğinin formüldeki $d^3(v_i)$ ifadesindeki 3 değerinin 2 ile 3 aralığında değiştirilerek eşleşme sağlanan yöntemler uygulanmıştır.

Deney için öncelikle benzer karmaşık yapıya sahip çizge veri setlerinin özellikle Tablo 5' te verilmektedir.

Tablo 5. Sentetik Veri Setlerinin Özellikleri

Düğüm Sayısı	Kenar Sayısı	Ortalama Derece Sayısı
25	92	7.36
50	191	7.64
100	378	7.56
1000	3665	7.33
10000	38200	7.64

İlk ablasyon için kullanılan yöntem özünde ana yöntemi temsil etmektedir. Lider seçimi için MC3 maksimum değerli düğümü ve bunun en yüksek MC2 değerli komşusunu eşlemek üzerine kuruludur. Bu deneyin sonuçları Tablo 6'da yer almaktadır.

Tablo 6. Temel lider seçimi yaklaşımına ait ablasyon sonuçları

Düğüm Sayısı	Eşli Baskın Küme Boyutu	Çalışma Süresi(sn)	Eşlenme Oranı	Kapsama Oranı
25	6	0.0014	6/25	1
50	12	0.0027	12/50	1
100	24	0.0120	24/100	1
1000	242	1.2364	242/1000	1
10000	2334	106.6771	2334/10000	1

Diğer bir ablasyon için Malatya merkezîyet mertebelerini bir düşürmüş düğüm seçerken öneminin ölçüldüğü alan bir hop uzaklık azaltılmıştır. Tablo 7'de deney sonuçları gösterilmektedir.

Tablo 7. Bir-hop komşuluk temelli merkezîyet ölçümüne ait ablasyon sonuçları

Düğüm Sayısı	Eşli Baskın Küme Boyutu	Çalışma Süresi(sn)	Eşlenme Oranı	Kapsama Oranı
25	6	0.0022	6/25	1
50	12	0.0057	12/50	1
100	22	0.0082	22/100	1
1000	250	0.7158	250/1000	1
10000	2346	60.3716	2346/10000	1

Son ablasyon çalışmasında metriğin agresif üstlü değerini belirli aralıkta değiştirilerek yeni eşleşme sonuçları elde edilmiştir. Büyük ölçekli çizgelerde oldukça fark oluşturan bu deneyin sonuçları Tablo 8’de sunulmaktadır.

Tablo 8. Üstel katsayı parametresinin etkisine yönelik ablasyon sonuçları

Düğüm Sayısı	Eşli Baskın Küme Boyutu	Çalışma Süresi(sn)	Eşlenme Oranı	Kapsama Oranı
25	6	0.0018	6/25	1
50	12	0.0038	12/50	1
100	24	0.0141	24/100	1
1000	232	1.8045	232/1000	1
10000	2298	108.9620	2298/10000	1

Üç ablasyon çalışmasında farklı sonuçlar elde edilmektedir. İlk iki çalışmada görülmüştür ki; üçüncü mertebeden lider düğüm seçimi büyük boyutlu çizge veri setlerinde daha az sayıyla tam kapsamayı sağlamıştır. Küçük boyutlu çizgelerde ise kapsama alanı çok geniş ölçekli olmadığından ilk iki ablasyon çalışmasının sonuçlarında PDS boyutunda farklılık görülmemiştir. Son ablasyon çalışması ile ilki karşılaştırıldığında daha aralıklı bir üstlü değerinin yüksek ölçekli çizgelerde %5 gibi bir oranda daha az sayıda düğüm ile tam baskılamayı sağlayabildiği anlaşılmıştır.

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Bölüm 5'te sunulan deneysel veriler, kapsamlı biçimde değerlendirilmekte; gerçek dünya veri setleri, literatürdeki özel çizge sınıfları ve ablasyon çalışmalarından elde edilen bulgular tartışılmaktadır. Sonuçlar; çizge teorisi ve merkeziet analizi perspektifinden yorumlanmaktadır.

6.1. Deney Sonuçlarının Değerlendirilmesi

Gerçek dünya veri setlerinde gerçekleştirilen deneyler, önerilen algoritmanın farklı boyut ve topolojilere sahip ağlarda tam baskılamayı eksiksiz şekilde sağlayabildiği ortaya koyulmuştur.

Karate-club ve Dolphins gibi küçük ölçekli ağlarda algoritma sırasıyla 0.0026 ve 0.0032 saniyeler gibi oldukça kısa işlem sürelerinde çalışmış; bu ağlarda PDS boyutu sırasıyla 6 ve 18 olarak hesaplanmıştır. Bu sonuçlar, algoritmanın küçük boyutlu ağlar için son derece verimli olduğunu göstermektedir.

Ego veri seti, algoritmanın dikkat çekici bir başarısını yansıtmaktadır. 4039 düğüm ve 88234 kenara sahip, parça parça kümelenmeler içeren bu topolojide yalnızca 14 düğümlü PDS ile tam kapsama başarıyla sağlanmıştır. Eşleşme oranı 14/4039 olması çizgenin yoğun ve merkezi bağlantı yapısının Malatya merkeziet tabanlı seçimin etkin biçimde kullanılmasına imkân tanıdığını göstermektedir.

Öte yandan Deezer-Europe veri seti algoritmanın sınıandığı en büyük ağ yapısına sahiptir. 28,281 düğüm ve 92751 kenara sahip bu çizge üzerinde 7216 düğümlük bir PDS ile tam baskılama 198 saniyede elde edilmiştir. Gereken PDS boyutunun büyüklüğü ve işlem süresinin artışı, algoritmanın veri seti boyutunun artışına homojenik olarak uyumlu artışlar geliştirdiği açıkça görünmektedir.

Önerilen algoritma asimetri, çizge yapısının merkezi yoğunluğuna uygun eşleşme oranları sunmaktadır. Adjnoun ve Socfb-Reed98 gibi veri setlerinde yine tam baskılama sağlanmıştır.

6.2 Teorik Sınırlarla Karşılaştırmalı Analiz

Literatürde yer alan özel çizge sınıfları üzerinde gerçekleştirilen testler, önerilen yöntemin teorik garantilerle olan ilişkisini somut biçimde ortaya koymaktadır. Bu karşılaştırma, algoritmanın yalnızca pratik veri setlerinde değil, teorik olarak bilinen, sınırları olan özenle tasarlanmış yapılarda da ne denli etkin çalıştığını göstermektedir.

Döngü çizgeleri ve Petersen çizgeleri için önerilen yöntem, literatürde bilinen teorik optimuma tam olarak ulaşmıştır. Bu iki çizge sınıfının PDS sayıları kesin biçimde bilindiğinden, bu sonuçlar algoritmanın doğruluğunu doğrulayan referans noktaları işlevi görmektedir.

Supergrid çizgesinde teorik üst sınır 18 iken önerilen yöntem yalnızca 10 düğümlük bir PDS üretmiştir. Bu %44,4'lük iyileşme, algoritmanın bölüştürme tabanlı teorik sınırların çok gerisinde kaldığı

anlamına gelir ve pratik açıdan son derece güçlü bir sonuçtur. Teorik sınırlar genellikle en kötü durum analizlerine dayanmakta olup gerçek çizgelerin özelliklerinden yararlanan açgözlü yöntemler bu sınırların belirgin biçimde altına inebilmektedir.

Pençesiz çizgelerde de benzer bir tablo söz konusudur. Teorik üst sınır olan 34,3 değerine karşılık, önerilen yöntem 22 düğüm seçerek %35.9'luk bir iyileşme kaydetmiştir. Bu sonuç, Malatya merkezietinin düğüm seçiminde yapısal simetriyi kırarak daha verimli bir kapsama sağladığını göstermektedir.

Minimum derece 3 olan rastgele çizgelerde ise, teorik olarak kötü durum sınırı yaklaşık 38 iken elde edilen PDS boyutu 28'dir. Bu %26,3'lük kazanım, algoritmanın rastgele üretilmiş ve düzenli olmayan yapılarda dahi teorik sınırların altında sonuçlar ürettiğini doğrulamaktadır.

6.3 Ablasyon Çalışmasının Yorumu

Ablasyon deneyleri, önerilen yöntemin bileşenlerinin PDS kalitesine olan katkısını sistematik biçimde ölçmek amacıyla tasarlanmıştır. Üç farklı varyant beş farklı ölçekte sentetik veri seti üzerinde test edilmiştir. Tablo 9'da sonuçların karşılaştırılması verilmiştir.

Tablo 9. Ablasyon Çalışmaları PDS Boyutu Karşılaştırması

Düğüm Sayısı	I. Ablasyon (MC3 ile Lider Düğüm Seçimi)	II. Ablasyon (MC2 ile Lider Düğüm Seçimi)	III. Ablasyon (MC3 metriğine aralıkta üs değeri atanması)
25	6	6	6
50	12	12	12
100	24	22	24
1000	242	250	232
10000	2334	2346	2298

Küçük ölçekli çizgelerde (25 ve 50 düğüm) üç ablasyon varyantı özdeş sonuçlar vermiştir. Bu durum, küçük ağlarda yerel komşuluk yapısının yeterince ayırt edici olduğunu ve farklı metrik derinliklerinin sonucu değiştirmedığını göstermektedir. 100 düğümlü çizgede ise MC2 tabanlı ikinci ablasyon hafif bir avantaj sergilemiş; bu durum orta ölçekli çizgelerde bir atlama mesafesi azaltımının zaman zaman daha kompakt PDS'e yol açabileceğini işaret etmektedir.

Büyük ölçekli çizgelerde (1000 ve 10000 düğüm) farklar belirgin hâle gelmektedir. 10000 düğümlü ağda ana yöntem (MC3) 2334, ikinci ablasyon (MC2) 2346 düğüm seçerken değişken üslü üçüncü ablasyon 2298 düğüm seçmiştir. Bu bulgular üç temel çıkarımı desteklemektedir.

Birincisi, üçüncü mertebeden komşuluk bilgisine dayanan MC3 metriği, büyük ağlarda MC2'ye kıyasla daha az PDS düğümüyle tam kapsamayı sağlamaktadır. İkincisi, MC3 formülündeki üs parametresinin sabit 3 yerine belirli bir aralıkta optimize edilmesi, büyük ölçekli çizgelerde yaklaşık %1,5-5 oranında ek kazanım sağlamaktadır. Üçüncüsü, bu parametre optimizasyonunun küçük

izgelerde etkisiz kalması, adaptif parametre seçiminin ancak belirli bir ađ büyüklüğünün üzerinde anlamlı olacağını göstermektedir.

6.4 Yöntemin Güçlü ve Zayıf Yönleri

Önerilen algoritmanın temel güçlü yönleri řu şekilde özetlenebilir. Tüm test senaryolarında kapsama oranının 1 olarak elde edilmesi, algoritmanın tam baskılama garantisi sunduğunu kanıtlamaktadır. Literatürdeki teorik st sınırların altında kalınması, yalnızca en kötü durum analizlerinin mevcut olduğu çizge yapılarında dahi iyi zmler retilabileceđini göstermektedir. Global olarak kaliteli zmler üretmesi, Malatya merkezietinin yönlendirici etkisinin ne denli güçlü olduğunu ortaya koymaktadır. Bunlara ek olarak, Python ve NetworkX ile hızla prototiplenebilir yapısı, farklı veri setlerine kolayca uyarlanabilmesini mümkün kılmaktadır.

Öte yandan algoritmanın belirli sınırlılıkları da mevcuttur. Deezer-Europe gibi büyük ve homojen ağlarda işlem süresinin 198 saniyeye yükselmesi, milyonlarca düğüm içeren gerçek zamanlı ağlara uygulanabilirliği konusunda soru işaretleri doğurmaktadır. MC3 hesaplamasının  atlama mesafesindeki komşuluk bilgisini gerektirmesi, seyrek olmayan büyük ağlarda hesaplama maliyetini önemli lde artırmaktadır. Son olarak, algoritmanın yaklaşım oranına (approximation ratio) ilişkin formal bir teorik analiz henüz mevcut değildir; bu durum algoritmanın teorik garantilerinin eksik kaldığı anlamına gelmektedir.

7. TEZİN LİTERATÜRE SAĞLADIĞI KATKILAR

Bu tez, çizge teorisi ve ağ analizi alanındaki birikim üzerine inşa edilmiş olmakla birlikte, literatüre özgün ve çok boyutlu katkılar sunmaktadır. Söz konusu katkılar; yeni bir merkeziyet metriğinin tanımlanması, bu metriğin NP-zor bir optimizasyon problemine uygulanması, teorik sınırların pratikte aşılması ve açgözlü algoritmaların karmaşık ağ problemlerindeki rolünün güçlendirilmesi olmak üzere dört temel eksen üzerinde değerlendirilebilir.

Eşli baskın küme (Paired Dominating Set - PDS) problemi, NP-zor olduğu kanıtlanmış bir optimizasyon problemidir. Literatürdeki çalışmaların büyük çoğunluğu bu problem üzerinde iki temel yönelim izlemiştir: teorik üst sınırların ispatlanması ve özel çizge sınıfları için kesin çözüm algoritmalarının geliştirilmesi. Genel çizge yapıları üzerinde pratikte çalışabilen, ölçeklenebilir ve tam kapsamayı garanti eden algoritmik yaklaşımlar ise oldukça sınırlı kalmaktadır.

Bu tezde sunulan algoritma, söz konusu boşluğu doğrudan hedef almaktadır. Malatya merkeziyeti rehberliğinde yürütülen determinist seçim stratejisi; her adımda en yüksek MC3 skoruna sahip düğümü lider olarak belirlemekte ve bu düğümün en uygun komşusuyla eşleştirerek PDS'e eklemektedir. Bu yaklaşımın getirdiği başlıca yenilikler şunlardır:

- Genel çizge yapıları üzerinde çalışabilme: Önerilen yöntem herhangi bir özel topoloji varsayımı gerektirmeksizin rastgele ağlara doğrudan uygulanabilmektedir.
- Tam kapsama garantisi: Algoritma her zaman geçerli bir PDS üretmekte olup tüm test senaryolarında kapsama oranı 1 olarak doğrulanmıştır.
- Tek geçişli (single-pass) yapı: Algoritma, çizgeyi yalnızca bir kez tarayarak çözüme ulaşmaktadır. Bu özellik, çok turlu ya da yinelemeli yaklaşımların aksine büyük ağlarda hesaplama verimliliğini önemli ölçüde artırmaktadır.
- Merkezi düğüm bilgisinin etkin kullanımı: Malatya merkeziyetinin üçüncü mertebeden komşuluk bilgisini içermesi, her seçimin yalnızca anlık değil uzak komşuluk etkisini de hesaba katmasını sağlamaktadır.

Bu özellikler bir arada değerlendirildiğinde, önerilen yöntem PDS literatüründe pratik ve genel amaçlı bir algoritmik katkı olarak konumlanmaktadır.

Literatürdeki teorik çalışmalar, belirli çizge sınıfları için PDS boyutuna ilişkin üst sınırlar ortaya koymuştur. Bu sınırlar, en kötü durum analizine dayandığından pratikte temkinli ve güvenli tarafta kalan bir yaklaşım sunmaktadır. Bu tezde elde edilen sonuçlar, önerilen yöntemin söz konusu teorik sınırların önemli ölçüde altında kalabildiğini deneysel olarak göstermektedir.

Öte yandan Açgözlü algoritmalar, NP-zor optimizasyon problemlerinde yaygın biçimde kullanılmakla birlikte, üretilen çözümlerin kalitesi büyük ölçüde kullanılan öncelik kriterine bağlıdır.

Zayıf bir öncelik kriteri, açgözlü yaklaşımın yerel optimuma takılmasına yol açmakta ve global olarak kötü çözümler üretmesine neden olmaktadır.

Bu tez, iyi tasarlanmış bir merkezîyet metriğinin determinist algoritmayı küresel ölçekte etkin kılabilceğini somut biçimde göstermektedir. Malatya merkezîyetinin üçüncü mertebeden bilgiyi içermesi, her seçimin yalnızca anlık değil çok adımlı etki alanını da hesaba katmasını sağlamaktadır. Bunun sonucunda algoritma, teorik garantisi olmaksızın dahi pratikte yüksek kaliteli çözümler üretebilmektedir.

Literatürdeki PDS çalışmalarının büyük çoğunluğu teorik veya sentetik veri setleri üzerinde yürütülmüştür. Bu tezde sosyal ağ (Karate-club, Dolphins, Ego), dil ağ (Adjnoun), müzik platformu kullanıcı ağ (Deezer-Europe) ve Facebook kampüs ağ (Socfb-Reed98) gibi gerçek dünyadan alınmış altı farklı veri seti kullanılmıştır.

Bu çeşitlilik, algoritmanın yalnızca belirli bir topoloji için değil, farklı kökenlerden gelen ve birbirinden yapısal olarak ayrışan ağlarda da etkin çalıştığını ortaya koymaktadır. Özellikle Ego veri setinde 4039 düğümlü bir ağın yalnızca 14 düğümlük bir PDS ile kontrol altına alınması, önerilen yöntemin gerçek dünya ağlarındaki asimetrik ve hiyerarşik yapıları etkin biçimde tespit edebildiğini göstermektedir. Bu sonuç; salgın hastalıkların yayılmasının denetlenmesi, bilgi yayılımının kontrol altına alınması ve kritik altyapı düğümlerinin belirlenmesi gibi pratik uygulama senaryoları açısından anlam taşıyabilme potansiyeline sahip olabileceğini göstermektedir.

8. GELECEK ÇALIŞMALAR VE ÖNERİLER

Bu tezde geliştirilen Malatya merkeziet tabanlı eşli baskın küme algoritması hem teorik hem de deneysel açıdan umut verici sonuçlar ortaya koymuştur. Bununla birlikte, elde edilen bulgular bir dizi açık araştırma sorusunu ve iyileştirme fırsatını gün yüzüne çıkarmaktadır. Bu bölümde söz konusu fırsatlar: algoritmik geliştirmeler, teorik derinleştirme, uygulama alanlarına genişleme ve metrik evrimine yönelik öneriler olmak üzere dört eksen altında ele alınmaktadır.

8.1 Algoritmanın Hesaplama Verimliliğinin Artırılması

Mevcut algoritma, Deezer-Europe gibi on binlerce düğüm içeren ağlarda 198 saniye gibi yüksek bir işlem süresine ulaşmaktadır. Bu durum, algoritmanın milyonlarca düğüm içeren büyük ölçekli ağlara doğrudan uygulanabilirliğini kısıtlamaktadır. Bu kısıtı aşmaya yönelik birkaç temel yol mevcuttur.

- **Paralel ve dağıtık hesaplama:** Malatya merkeziet hesabı ve düğüm seçimi adımları doğası gereği kısmen bağımsızdır. Çizgenin alt bölgelere ayrılarak MC3 skorlarının paralel hesaplandığı ve ardından yerel PDS kümelerinin birleştirildiği bir dağıtık mimari, özellikle seyrek büyük ağlarda önemli hız kazanımı sağlayabilir. Apache Spark veya GPU tabanlı çizge işleme kütüphaneleri (cuGraph) bu amaçla değerlendirilebilir.
- **Artımlı (incremental) MC3 güncellemesi:** Şu anda her PDS adımında tüm çizgenin MC3 skorları yeniden hesaplanmaktadır. Bunun yerine yalnızca etkilenen komşuluk bölgesinin güncelleneceği artımlı bir hesaplama şeması, özellikle büyük seyrek ağlarda zaman karmaşıklığını belirgin biçimde düşürebilir.
- **Erken sonlandırma kriterleri:** Yüksek dereceli düğümlerin büyük kısmı işlendikten sonra kalan düğümler için daha hafif bir tamamlama sezgiselliğine geçilmesi, çözüm kalitesinde küçük bir fedakârlıkla büyük ölçüde hız kazandırabilir.

8.2 Teorik Yaklaşım Garantisinin İspatlanması

Bu tezde sunulan algoritma, deneysel olarak teorik üst sınırların altında sonuçlar üretmektedir; ancak algoritmanın formal bir yaklaşım oranı (approximation ratio) henüz kanıtlanmamıştır. Bu eksikliğin giderilmesi, çalışmanın teorik katkısını önemli ölçüde güçlendirecektir.

Gelecekteki çalışmalarda aşağıdaki teorik sorular ele alınabilir: Malatya merkeziet tabanlı optimal determinist seçimin ürettiği PDS boyutu ile optimal PDS boyutu arasındaki en kötü durum oranı nedir? Bu oran çizgenin derece dağılımına bağlı olarak nasıl değişmektedir? Algoritmanın garanti ettiği bir c -OPT üst sınırı var mıdır ve varsa c sabitinin en sıkı değeri nedir? Bu soruların yanıtlanması, algoritmanın teorik olarak NP-zor problem için kabul edilebilir bir polinom-zamanlı yaklaşım algoritması statüsü kazanmasını sağlayacaktır.

8.3 Farklı Çizge Türlerine Genişletme

Mevcut algoritma yönsüz ve ağırlıksız çizgeler üzerinde çalışmaktadır. Gerçek dünya ağlarının büyük çoğunluğu ise yönlü, ağırlıklı veya her ikisini birden içeren yapılara sahiptir. Bu nedenle algoritmanın farklı çizge türlerine uyarlanması hem teorik hem de pratik açıdan değer taşımaktadır.

- **Yönlü** çizgeler: Sosyal medya platformlarında takipçi-takip edilen ilişkisi, atıf ağlarında referans yönü ve web çizgelerinde bağlantı yönü gibi gerçek dünya verileri yönlüdür. Malatya merkezietinin gelen/giden derece ayrımını hesaba katan bir versiyonunun geliştirilmesi ve PDS'in bu yapıya nasıl tanımlanacağını belirlenmesi önemli bir araştırma yönüdür.
- **Ağırlıklı** çizgeler: Ulaşım ağları, finansal işlem ağları ve protein etkileşim ağlarında kenar ağırlıkları ilişkinin gücünü ifade etmektedir. MC3 formülasyonuna kenar ağırlıklarını dahil eden genişletilmiş bir metrik, PDS seçimini daha anlamlı kılabilir.
- **Dinamik (değişen)** çizgeler: Gerçek zamanlı sosyal ağlar ve internet topolojileri sürekli değişmektedir. Düğüm veya kenar eklenip silindiğinde mevcut PDS kümesini minimum güncellemeyle geçerli kılacak bir dinamik algoritma versiyonu, özellikle canlı ağ izleme uygulamaları için kritik önem taşımaktadır.
- **Hipergçizgeler ve çok katmanlı ağlar:** Biyolojik etkileşim ağları gibi yapılarda bir düğüm birden fazla ağda eş zamanlı yer alabilmektedir. Malatya merkezietinin çok katmanlı ağ yapısına genişletilmesi, bu alandaki PDS problemlerine yeni bir bakış açısı sunabilir.

8.4 MC3 Parametresinin Adaptif Optimizasyonu

Ablasyon çalışmaları, MC3 formülündeki üs parametresinin sabit 3 yerine belirli bir aralıkta optimize edilmesinin büyük ölçekli çizgelerde %5'e varan PDS boyutu azalması sağlayabildiğini göstermiştir. Bu bulgu, parametre seçiminin çizge yapısına bağlı olarak adaptif biçimde yapılması gerektiğine işaret etmektedir.

Gelecekteki çalışmalarda üs parametresinin çizgenin ortalama derece, derece dağılımı çarpıklığı (skewness) ve kümeleme katsayısı gibi yapısal özelliklerine dayalı olarak otomatik seçildiği bir meta-öğrenme çerçevesi oluşturulabilir. Bu sayede algoritma, her çizge türü için parametreyi elle ayarlamaya gerek kalmaksızın otomatik olarak en uygun konfigürasyona yakınsayabilir.

8.5 Uygulama Alanlarına Yönelik Öneriler

Önerilen algoritmanın pratik uygulama potansiyeli yüksektir. Tablo 10'da yer alan alanlarda somut kullanım senaryoları geliştirilmesi önerilmektedir.

Tablo 10. Önerilen Algoritmanın Potansiyel Uygulama Alanları

Uygulama Alanı	Senaryo	PDS'in Rolü
Salgın hastalık kontrolü	Sosyal temas ağlarında bağışıklama stratejisi	PDS düğümleri aşılacak/izole edilecek bireyleri belirler
Bilgi yayılımının kontrolü	Sosyal medyada yanlış bilgi yayılmasının engellenmesi	PDS düğümleri müdahale edilecek anahtar hesapları tanımlar
Kablosuz sensör ağları	Enerji verimli ağ izleme	PDS düğümleri aktif sensörleri, diğerleri uyku modunu belirler
Kritik altyapı güvenliği	Elektrik, su, internet ağlarında güvenlik açığı tespiti	PDS minimum izleme noktalarını belirler
İlaç hedef keşfi	Protein etkileşim ağlarında ilaç hedefi belirleme	PDS düğümleri potansiyel ilaç hedef proteinlerini işaret eder

KAYNAKLAR

- A. Casado SB. (2023), An iterated greedy algorithm for finding the minimum dominating set in graphs. *Math Comput Simul.* doi:10.1016/j.matcom.2022.12.018
- Bujtás C, Henning MA. Paired domination in graphs with minimum degree four [Internet]. 2025 May 3 [cited 2025 Dec 28]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2505.01815v1>
- Chalupa D. (2018), An Order-based Algorithm for Minimum Dominating Set with Application in Graph Mining. *In Information Sciences.* 426:101–16. doi:10.1016/j.ins.2017.10.033
- Denat T, Harutyunyan A, Melissinos N, Paschos VT. (2024), Average-case complexity of a branch-and-bound algorithm for Min Dominating Set. *Discrete Appl Math* (1979). Mar 15;345:4–8. doi:10.1016/J.DAM.2023.11.021
- Giuşcă B. (2026), Wikimedia Commons [Internet]. 2005 [cited 2026 May 17]. The Seven Bridges of Königsberg. Available from: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png
- Hedar AR, Ismail R. (2012), Simulated annealing with stochastic local search for minimum dominating set problem. *International Journal of Machine Learning and* 3(2):97–109. doi:10.1007/S13042-011-0043-Y
- Henning MA, Pilśniak M, Tumidajewicz E. (2022) Bounds on the paired domination number of graphs with minimum degree at least three. *Appl Math Comput.* 417:126782. doi:10.1016/J.AMC.2021.126782
- Henning MA. (2007), Graphs with large paired-domination number. *J Comb Optim.* 13(1):61–78. doi:10.1007/S10878-006-9014-8/METRICS
- Hung RW, Chiu MJ. (2021), The Paired Restrained-Domination Problem in Supergrid Graphs. *Proceedings - 2021 International Conference on Technologies and Applications of Artificial Intelligence, TAAI* 84–9. doi:10.1109/TAAI54685.2021.00024
- Jaenisch Cfriedrich. (2023), Traite Des Applications De L’analyse Mathematique Au Jeu Des Echecs, Precede D’une Introduction A... L’usage Des Lecteurs Soit Etrangers Aux Echecs [Internet]. [cited 2026 May 17]. Available from: https://books.google.com/books/about/Trait%C3%A9_Des_Applications_De_L_analyse_Ma.html?hl=tr&id=EaNW0AEACAAJ
- Karci A, Yakut S, Öztemiz F. (2022), A New Approach Based on Centrality Value in Solving the Minimum Vertex Cover Problem: Malatya Centrality Algorithm. *Computer Science.* Vol:7(Issue:2):81–8. doi:10.53070/BBD.1195501

- Lin CC, Ku KC, Hsu CH. (2020), Paired-Domination Problem on Distance-Hereditary Graphs. *Algorithmica*. 82(10):2809–40. doi:10.1007/S00453-020-00705-7/FIGURES/2
- Lu C, Wang B, Wang K, Wu Y. (1979), Paired-domination in claw-free graphs with minimum degree at least three. *Discrete Appl Math* (1979). 257:250–9. doi:10.1016/J.DAM.2018.09.005
- Okumuş F, Karıcı Ş. (2024), MDSA: A Dynamic and Greedy Approach to Solve the Minimum Dominating Set Problem. *Applied Sciences*, Vol 14, Page 9251. 14(20):9251. doi:10.3390/APP14209251
- Panda BS, Pradhan D. (2013), Minimum paired-dominating set in chordal bipartite graphs and perfect elimination bipartite graphs. *J Comb Optim*. 26(4):770–85. doi:10.1007/S10878-012-9483-X/METRICS
- Sheng B, Lu C. (2020), The Paired Domination Number of Cubic Graphs. Nov 26.
- Tripathi V, Kloks T, Pandey A, Paul K, Wang HL. (2022), Complexity of paired domination in AT-free and planar graphs. *Theor Comput Sci*. 930:53–62. doi:10.1016/J.TCS.2022.07.010