

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

ÇİZGELERDE SÜPER BASKINLIK SAYISININ İNCELENMESİ

Yağmur Ceren GÜVEN

**Danışman
Doç. Dr. Gökşen Bacak TURAN**



MANİSA-2025

TEZ ONAYI

Yağmur Ceren GÜVEN tarafından hazırlanan "**Çizgelerde Süper Baskınlık Sayısının İncelenmesi**" adlı tez çalışması 05.11.2025 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Doç. Dr. Gökşen Bacak TURAN
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

.....

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Ersin ARSLAN
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

.....

Jüri Üyesi

Prof. Dr. Aysun ATAÇ
Ege Üniversitesi

.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

12.11.2025

Yağmur Ceren GÜVEN



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TEŞEKKÜR	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. Çizge Teorisi ve Karmaşık Sistemlerin Modellenmesi	1
1.2. Çizge Teorisinin Uygulama Alanları	2
1.3. Baskınlık Kavramının Temelleri	3
1.3.1. Özel Çizge Sınıfları için Baskınlık Sayıları	4
1.4. Baskınlık Varyantları Genel Bakış	6
1.5. Süper Baskınlık Kavramının Ortaya Çıkışı	7
1.5.1. Özel Çizge Sınıfları için Süper Baskınlık Sayıları	10
1.6. Süper Baskınlık Kavramının Literatürdeki Gelişimi	12
1.7. Uygulama Alanları ve Pratik Önemi	14
1.8. Çizge Dönüşümleri ve Orta Çizge	15
1.9. Literatürdeki Boşluklar ve Araştırma Fırsatları	17
2. ORTA ÇİZGELER	19
2.1. Orta Çizgelerin Süper Baskınlık Sayısı	19
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TRANSFORMASYON ÇİZGELERİ	24
3.1. Genelleştirilmiş Transformasyon Çizgelerinin Süper Baskınlık Sayısı	25
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ PETERSEN ÇİZGELERİ	29
4.1. Genelleştirilmiş Petersen Çizgelerinin Süper Baskınlık Sayısı	30
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	34
5.1. Gelecek Çalışmalar	35
KAYNAKLAR	36

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

γ	Baskınlık sayısı
γ_{sp}	Süper baskınlık sayısı
$M(G)$	Orta çizge
$M(P_n)$	Yol çizgesinin orta çizgesi
$M(C_n)$	Çevre çizgesinin orta çizgesi
$M(K_{1,n})$	Yıldız çizgesinin orta çizgesi
G^{++}	Genelleştirilmiş transformasyon çizge
P_n^{++}	Yol çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi
C_n^{++}	Çevre çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi
G^{-+}	Genelleştirilmiş transformasyon çizge
P_n^{-+}	Yol çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi
C_n^{-+}	Çevre çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi
$GP(n, k)$	Genelleştirilmiş Petersen çizge

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	Altı tepe noktasına sahip tam çizge K_6	5
Şekil 1.2.	4 tepe noktasına sahip çevre çizge C_4	9
Şekil 1.3.	P_5 yol çizgesi	10
Şekil 1.4.	Altı tepe noktasına sahip tam çizge K_6	11
Şekil 2.1.	4 tepeli yol çizge P_4 ve onun orta çizgesi $M(P_4)$	19
Şekil 2.2.	C_5 çevre çizgesi ve onun orta çizgesi $M(C_n)$	21
Şekil 2.3.	5 Tepeli çevre çizgenin orta çizgesi $M(C_5)$	22
Şekil 2.4.	$K_{1,n}$ yıldız çizgesi ve onun orta çizgesi $M(K_{1,n})$	22
Şekil 2.5.	Yıldız çizgenin orta çizgesi $M(K_{1,n})$	23
Şekil 3.1.	P_5 yol çizgesi ve onun genelleştirilmiş transformasyon çizgesi P_5^{++} .	24
Şekil 3.2.	P_7^{++} genelleştirilmiş transformasyon çizgesi	25
Şekil 3.3.	P_7^{-+} genelleştirilmiş transformasyon çizgesi	25
Şekil 3.4.	C_5 çevre çizgesi ve onun genelleştirilmiş transformasyon çizgesi C_5^{++}	26
Şekil 3.5.	C_5 yol çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi C_5^{-+} . . .	28
Şekil 4.1.	$GP(3, 1)$ 3-prizma çizgesi	30
Şekil 4.2.	$GP(11, 1)$ 11-prizma çizgesi	31
Şekil 4.3.	$GP(5, 2)$ çizgesi ve $GP(6, 2)$ çizgesi	31
Şekil 4.4.	$GP(11, 2)$ çizgesi	32

TEŞEKKÜR

“Çizgelerde Süper Baskınlık Sayısının İncelenmesi” başlıklı bu çalışma, Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN’ın değerli danışmanlığında hazırlanmış ve Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez sürecimin her aşamasında bilgi birikimini, akademik rehberliğini ve desteğini esirgemeyen; bana yol gösteren ve ilham kaynağı olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN’a en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu süreçte her daim yanımda olan, sabırları, sevgileri ve sonsuz destekleriyle beni motive eden kıymetli aileme — sevgili annem Hülya GÜVEN’e, babam Bekir GÜVEN’e, canım ablam Melike LEBE’ye ve nişanlım Anıl BAYLAN’a — sonsuz teşekkür ederim.

Varlıklarıyla bana güç veren tüm sevdiklerime ve bu akademik yolculukta emeği geçen herkese şükranlarımı sunarım.

Yağmur Ceren GÜVEN
Manisa, 2025

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Çizgelerde Süper Baskınlık Sayısının İncelenmesi

Yağmur Ceren GÜVEN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gökşen Bacak TURAN

Verilen bir $G = (V, E)$ basit çizge için, G 'nin bir baskınlık kümesi, $D \subseteq V$ şeklinde tanımlanır ve bu küme, $V \setminus D$ içindeki her bir tepenin D içindeki en az bir tepeyle komşu olmasını sağlar. Baskınlık kümesi problemi, en küçük boyutta bir baskınlık kümesi bulmayı amaçlar ve bu en küçük boyut, çizgenin baskınlık sayısını verir. Bir baskınlık kümesi D , eğer $V \setminus D$ içindeki her bir u tepesi için D içinde bir v tepesi mevcutsa ve bu v , $N(v) \cap (V \setminus D) = \{u\}$ koşulunu sağlıyorsa, süper baskınlık kümesi olarak adlandırılır. Bir G çizgesinin süper baskınlık sayısı, $\gamma_{sp}(G)$, bir süper baskınlık kümesinin alabileceği en küçük kardinalite olarak tanımlanır.

Bir çizgenin orta çizgesi $M(G)$, G 'nin her bir ayrıtına yeni bir tepe eklenmesi ve G 'de komşu olan ayrıtlara karşılık gelen bu yeni tepelerin ayrıtlarla birleştirilmesi yoluyla elde edilir.

Bu çalışma, orta çizgelerin, genelleştirilmiş transformasyon çizgelerinin ve genelleştirilmiş petersen çizgelerinin süper baskınlık sayısını detaylı bir şekilde incelemeyi amaçlamaktadır. Bu çizgelerin yapısal özellikleri dikkate alınarak, süper baskınlık sayısı için genel teorik sınırlar tanımlanmıştır. Bu sınırlar, çizgelerin tepe sayısı, ayrıt sayısı ve diğer yapısal parametreler cinsinden ifade edilerek, süper baskınlık davranışına dair yeni içgörüler sunulmuştur. Ayrıca, yol çizgeler (P_n), çevre çizgeler (C_n), tam çizgeler (K_n) ve yıldız çizgeler ($K_{1,n}$) gibi belirli çizge ailelerinin orta çizgelerinin süper baskınlık sayısı analiz edilmiştir. Bu çizge aileleri için elde edilen sonuçlar kesin değerler şeklinde ifade edilerek süper baskınlık sayısının bu çizge sınıflarındaki davranışına ışık tutulmuştur.

Çalışmada basit bir G çizgesinin özellikleri ile orta çizgesinin, genelleştirilmiş transformasyon çizgesinin ve genelleştirilmiş petersen çizgesinin süper baskınlık sayısı arasındaki ilişki incelenmiştir. Elde edilen sonuçların hem teorik hem de pratik bağlamda daha iyi anlaşılmasına yardımcı olması hedeflenmiştir.

Anahtar Kelimeler: baskınlık sayısı; süper baskın küme; süper baskınlık sayısı; orta çizge; genelleştirilmiş transformasyon çizge; genelleştirilmiş petersen çizge.

2025, 47 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A Study on the Super Domination Number in Graphs

Yağmur Ceren GÜVEN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gökşen BACAK TURAN

For a given simple graph $G = (V, E)$, a dominating set is defined as a subset $D \subseteq V$ such that every vertex in $V \setminus D$ is adjacent to at least one vertex in D . The dominating set problem seeks to identify a dominating set of minimum cardinality, where this minimum size is referred to as the domination number of the graph. A dominating set D is called a super-dominating set if, for every vertex $u \in V \setminus D$, there exists a vertex $v \in D$ such that $N(v) \cap (V \setminus D) = \{u\}$. The super domination number of a graph G , denoted $\gamma_{sp}(G)$, is defined as the minimum cardinality of a super dominating set. The middle graph of a graph G , denoted $M(G)$, is constructed by introducing a new vertex corresponding to each edge of G and connecting these new vertices by edges if their corresponding edges in G are adjacent.

This study aims to thoroughly investigate the super domination number of middle graphs, generalized transformation graphs and generalized Petersen graphs. By considering the structural properties of these graph classes, general theoretical bounds for the super-domination number have been established. These limits are expressed in terms of the vertex count of the graph, the edge count and other structural parameters, offering new insights into the super-dominance behavior of the middle graphs. Furthermore, the super-domination number has been analyzed for the middle graphs of specific graph families, including path graphs (P_n), cycle graphs (C_n), complete graphs (K_n), and star graphs ($K_{1,n}$). The results for these graph families are presented either as exact values, shedding light on the behavior of the super domination number in these graph classes.

The study explores the relationship between the properties of a simple graph G and the super-domination number of its middle graph, generalized transformation graph and generalized Petersen graph. The findings are intended to contribute to a deeper understanding of the super-domination number of middle graphs in both theoretical and practical contexts.

Keywords: domination number; super dominating set; super domination number; middle graph; generalized transformation graph; generalized Petersen graph.

2025, 47 pages

1. GİRİŞ

1.1. Çizge Teorisi ve Karmaşık Sistemlerin Modellenmesi

Karmaşık sistemlerin yapısal özelliklerini anlamak ve bu sistemler üzerinde etkin analiz ve yönetim stratejileri geliştirebilmek, günümüz dünyasında giderek daha fazla önem kazanmaktadır. İletişim ağları, ulaşım sistemleri, sosyal ağlar, biyolojik ağlar ve bilgisayar sistemleri gibi pek çok uygulama alanı, bu tür yapısal analizlerin temelini oluşturmaktadır. Bu bağlamda, çizge teorisi soyut modelleme yeteneği sayesinde söz konusu sistemlerin matematiksel temsili için güçlü ve esnek bir araç sunmaktadır [1,2]. Çizge teorisi, tepe noktaları ve bu tepeleri birbirine bağlayan ayrıtlar aracılığıyla yapılandırılan soyut yapılardan oluşur. Bu yapılar üzerinden çeşitli ağ parametreleri incelenerek hem teorik hem de uygulamalı sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu parametrelerden biri olan *baskınlık*, bir çizgenin belirli bir alt kümesinin, çizgenin tüm tepelerine erişimi olup olmadığını anlamaya yönelik tanımlanmış klasik bir kavramdır [3]. Çizge teorisi, tepe noktaları (vertices) ve bunları bağlayan ayrıtları (edges) ile gerçek dünya ilişkilerini soyut bir şekilde temsil etme kapasitesi sayesinde, matematiksel modellemede eşsiz bir konuma sahiptir [4]. Bir çizge yapısı, $G = (V(G), E(G))$ şeklinde gösterilir; burada $V(G)$ tepe noktaları kümesini, $E(G)$ ise ayrıtlar kümesini ifade eder ve bu yapılar, karmaşık sistemlerin indirgenmesi için ideal bir çerçeve sunar [5].

Tanım 1.1.1. [1] Bir $G = (V, E)$ çizgesi, V tepe noktaları kümesi ve $E \subseteq V \times V$ ayrıt kümesinden oluşur. Burada $|V| = n$ ve $|E| = m$ olmak üzere, n çizgenin mertebesi, m ise çizgenin boyutudur.

Özellikle son yıllarda, büyük veri analitiği ve yapay zeka uygulamalarının gelişimiyle birlikte, ağ yapılarının matematiksel analizi daha da önem kazanmıştır [6]. Örneğin, sosyal medya platformlarında kullanıcı etkileşimleri [7], bilgi yayılımı, öneri sistemleri ve topluluk tespiti gibi süreçler çizge teorisi araçlarıyla modellenenilmektedir [8]. Bu modelleme yaklaşımı, sistemlerin davranışlarını anlamak, optimize etmek ve öngörmek için güçlü bir temel sağlar.

Ağ bilimi literatürü, çizge teorisinin disiplinlerarası bir köprü olarak değerini vurgulamakta; matematiği bilgisayar bilimi, fizik, sosyoloji ve mühendislik gibi farklı alanlarla birleştirmektedir [2]. Bu bağlamda, karmaşık sistemlerin modellenmesinde çizge

teorisinin rolü, bir matematiksel yapı sunmanın ötesinde, gerçek dünya problemlerine çözüm üretme kapasitesinde yatmaktadır [9]. Özellikle baskınlık (domination) teorisi, bu çizge temelli yaklaşımın en verimli ve geniş uygulama alanına sahip dallarından biridir [3].

1.2. Çizge Teorisinin Uygulama Alanları

Çizge teorisinin uygulama alanları, günlük hayattan endüstriyel süreçlere kadar geniş bir yelpazeye yayılmakta ve ağ yapılarının verimli kullanımını gerektiren pek çok probleme çözüm sunmaktadır. İletişim ağlarında, çizge modelleri veri paketlerinin en kısa yollarını belirleyerek ağ tıkanıklığını önler ve sistem performansını optimize eder. Örneğin, kablosuz sensör ağlarında tepelerin yerleşimi çizge algoritmalarıyla hesaplanarak enerji tüketimi minimize edilir [10]. Bu tür uygulamalarda, kapsama (coverage) problemi doğrudan baskınlık teorisiyle ilişkilidir ve optimal sensör yerleşimi için matematiksel bir çerçeve sağlar [11].

Sosyal medya platformlarında, çizge analizi kullanıcı bağlantılarını inceleyerek bilgi yayılımını modeller ve topluluk yapılarını tespit eder. Facebook gibi platformlarda arkadaşlık çizgeleri, viral içeriklerin davranışını öngörmek için kullanılır ve etki maksimizasyonu problemlerinde baskınlık kavramları önem kazanır [7]. Bu bağlamda, baskın kümeler etki alanlarını temsil eder ve sosyal ağ analizinde merkezi bir rol oynar [12].

Ulaşım sistemlerinde, çizge teorisi rota optimizasyonunu sağlar ve trafik akışını düzenler; hava trafiği kontrolünde havalimanları tepe noktaları olarak modellenirken, uçuş rotaları ayrıtları temsil eder ve bu yapılar üzerinde en verimli uçuş yolları hesaplanır [13]. Ulaşım ağlarında, aktarma merkezlerinin belirlenmesi problemi, baskınlık teorisiyle ele alınabilecek klasik bir optimizasyon sorunudur [14].

Biyolojik ağlarda, protein etkileşimleri çizge yapılarıyla temsil edilir. Bu, hastalık mekanizmalarının anlaşılmasına ve ilaç hedeflerinin belirlenmesine katkı sağlar. Örneğin, gen ağlarında merkezi proteinler (hub) baskın tepe noktaları olarak tanımlanabilir [15]. Metabolik yolların analizinde, anahtar enzimlerin tespiti baskınlık parametreleriyle ilişkilidir ve sistemik biyolojide önemli uygulamalara sahiptir [16]. Elektrik dağıtım şebekelerinde, çizge modelleri enerji akışını optimize eder ve sistem dayanıklılığını artırır; akıllı şebekelerde arıza tespiti için bağlantılı çizge analizleri kullanılır ve kritik

dağıtım noktalarının belirlenmesinde baskınlık kavramları uygulanır [17]. Güç sistemlerinin güvenilirliğini artırmak için, en az sayıda izleme istasyonu ile tüm sistemi kapsama problemi, doğrudan baskınlık sayısı ile ilgilidir [18].

Bilgisayar ağlarında ise, siber güvenlik açısından çizge teorisi saldırı yollarını belirlemede kritik rol oynar; ağ topolojisi analiziyle güvenlik duvarları konumlandırılır ve sistem savunma stratejileri optimize edilir [19]. Güvenlik açısından kritik kaynakların minimum sayıda nokta ile korunması problemi, baskınlık teorisi aracılığıyla formüle edilir ve çözülür [20]. Bu geniş uygulama yelpazesi, çizge teorisinin ve özellikle baskınlık kavramının pratik değerini vurgular ve araştırma alanının önemini ortaya koyar.

1.3. Baskınlık Kavramının Temelleri

Tanım 1.3.1. [3] $G = (V, E)$ çizgesinde, $u, v \in V$ için $(u, v) \in E$ ise u ve v tepeleri komşudur ve $u \sim v$ ile gösterilir. Bir v tepesinin komşu kümesi $N(u) = \{u \in V : u \sim v\}$ ve kapalı komşu kümesi $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ şeklinde tanımlanır.

Çizge teorisinde baskınlık (domination) kavramı, bir çizgenin tüm tepe noktalarını minimal bir alt küme ile "kontrol etme" veya "kapsama" fikrine dayanır ve bu kavram, ağ optimizasyonu, kaynak dağılımı ve kontrol sistemleri gibi çeşitli alanlarda temel bir rol oynar. Bu kavram, bir ağda stratejik noktaların seçilmesiyle eşdeğerdir ve pratik uygulamalarda kritik öneme sahiptir.

Tanım 1.3.2. [3] Bir G çizgenin tepe kümesi $V(G)$ içerisinde yer alan $D \subseteq V(G)$ alt kümesi, eğer çizgenin her $u \in V(G) \setminus D$ tepe noktası için, u ile komşu olan en az bir $v \in D$ tepe noktasına sahipse, *baskın küme* olarak adlandırılır.

Bir çizgenin baskın kümesi olabilecek tüm alt kümeler içerisinde, en az sayıda tepe noktası içeren kümenin kardinalitesi, o çizgenin *baskınlık sayısı* olarak tanımlanır ve $\gamma(G)$ ile gösterilir:

$$\gamma(G) = \min \{ |D| : D \subseteq V(G) \text{ ve } D \text{ baskın küme} \}$$

Baskınlık kavramı, sezgisel olarak anlaşılabilir bir şekilde, gerçek dünya problemlerine karşılık gelir. Örneğin, bir şehir haritasında güvenlik kameralarının yerleştirilmesi senaryosunda, her sokağın en az bir kamera tarafından izlenmesini sağlayacak minimum

sayıda kamera kullanılması hedeflenir. Bu problem, tam olarak bir baskın küme problemi [20]. Benzer şekilde, bir iletişim ağında röle istasyonlarının konumlandırılması, acil durum hizmetlerinin yerleşimi veya kablosuz ağlarda erişim noktalarının belirlenmesi gibi birçok gerçek uygulama, baskınlık teorisi çerçevesinde ele alınabilir [21].

Bir çizgenin baskınlık sayısı $\gamma(G)$, minimum kardinaliteye sahip baskın kümenin eleman sayısıdır ve bu parametre, optimal kaynak dağılımını temsil eder [22]. Minimal baskın küme (minimal dominating set) ise, hiçbir gerçek alt kümesi baskın olmayan bir baskın kümedir. Bu, her elemanın sistem içinde kritik bir rol oynadığını gösterir. Örneğin, bir tam çizge K_n için $\gamma(K_n) = 1$ 'dir çünkü tek bir tepe noktası tüm diğer tepeleri domine eder. Ancak bir yol çizgesi P_n için $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ olarak hesaplanır [23]. Bu örnekler, baskınlığın çizge yapısına bağlı değişkenliğini ve çeşitliliğini gösterir.

Baskınlık teorisinin tarihsel gelişimi, 1960'lara dayanmakla birlikte, sistematik incelenmesi ve geniş kapsamlı teorik çerçevesi Haynes, Hedetniemi ve Slater'ın 1998 tarihli "Fundamentals of Domination in Graphs" adlı eserinde doruğa ulaşmıştır. Bu çalışma, baskınlık teorisinin temel teoremlerini derlemiş, çizge parametreleri arasındaki ilişkileri incelemiş ve alan için standart bir referans haline gelmiştir [3]. Baskınlık teorisinin önemi artıran bir diğer faktör, baskınlık probleminin hesaplamalı karmaşıklığıdır; baskınlık problemi NP-tamdır, yani büyük ölçekli çizgelerde optimal çözüm bulmak hesaplamalı olarak zordur [24].

Literatürde, baskınlık sayısı için çeşitli üst ve alt sınırlar geliştirilmiştir. Örneğin, n tepe noktalı bir çizge için $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$ genel üst sınırı mevcuttur ve bu sınır, özellikle ağaçlar gibi belirli çizge sınıfları için daha da sıkılaştırılabilir [3].

Önerme 1.3.3. [25] Tepe sayını n olan herhangi bir G çizgesi ve onun baskınlık sayısı için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

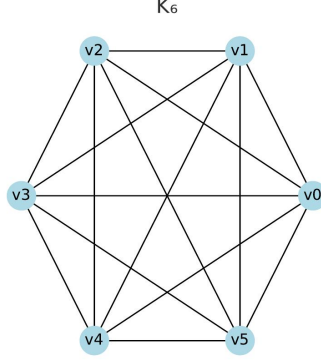
$$1 \leq \gamma(G) \leq n$$

1.3.1. Özel Çizge Sınıfları için Baskınlık Sayıları

Sonuç 1.3.4. [3]. Mertebesi (tepe sayısı) n olan bir tam çizgenin baskınlık sayısı daima 1 olur.

$$\gamma(K_n) = 1$$

Örnek 1.3.5. Tam çizge K_n , her bir tepe noktasının diğer tüm tepe noktalarıyla komşu olduğu özel bir çizge türüdür. Dolayısıyla, her bir tepe noktası, çizgenin geri kalan $n - 1$ tepe noktasını kapsayacak biçimde komşuluk ilişkisine sahiptir. Örnek olarak K_6 tam çizgesini ele alalım.



Şekil 1.1. Altı tepe noktasına sahip tam çizge K_6

Bu çizge, 6 adet tepe noktasından oluşmakta olup her tepe noktası diğer 5 tepe noktası ile doğrudan komşudur. Böyle bir yapı içerisinde herhangi bir tek tepe noktası, geri kalan tüm tepe noktalarını domine edebilmektedir. Çünkü tüm diğer noktalarla doğrudan komşudur.

Bu durumda, baskınlık kümesinin yalnızca bir tepe noktasını içermesi yeterli olacaktır. Yani:

$$\gamma(K_6) = 1$$

Bu sonuç, genel olarak K_n çizgeleri için de geçerlidir.

$$\gamma(K_n) = 1 \quad (\text{her } n \geq 1 \text{ için})$$

Bu örnek üzerinden baskınlık kavramı oldukça net bir biçimde anlaşılabilir. Tam çizgeler baskınlık sayısının en küçük olduğu (1'e eşit olduğu) yapılar arasında yer alır. Bu, aynı zamanda baskınlık parametresinin üst sınırlarını araştırırken karşılaştırma yapılabilecek önemli bir referans durumudur.

Teorem 1.3.6. [23] Mertebesi (tepe sayısı) n olan bir yol çizgesinin baskınlık sayısı:

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Teorem 1.3.7. [26] Mertebesi n olan bir çevre çizgesinin baskınlık sayısı:

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

Sonuç 1.3.8. Mertebesi n olan bir tekerlek çizgesinin baskınlık sayısı daima 1'dir.

$$\gamma(W_n) = 1$$

Teorem 1.3.9. [27] Bağlantılı bir G çizgesi için

$$\gamma(G) \leq \frac{n - \Delta(G) + 1}{2}$$

dir.

Teorem 1.3.10. [28] İki çizgenin kartezyen çarpımı için:

$$\gamma(G \times H) \geq \gamma(G) \cdot \gamma(H)$$

(Bu konjektör halen açık bir problemdir.)

Ayrıca, bir çizgenin maksimum derecesi $\Delta(G)$ ile $\gamma(G) \leq \frac{n}{\Delta+1}$ ilişkisi kurulmuştur, bu da yüksek dereceli çizgelerin daha küçük baskınlık sayılarına sahip olabileceğini gösterir [29]. Bu teorik sınırlar ve özellikler, baskınlık teorisinin matematiksel zenginliğini ve çeşitliliğini ortaya koyar ve ileri araştırmalar için temel oluşturur.

1.4. Baskınlık Varyantları Genel Bakış

Baskınlık teorisinin zenginliği, çeşitli varyantlarında ve genellemelerinde yatkın olup, her biri klasik tanıma ek kısıtlamalar veya koşullar getirerek farklı uygulama alanlarının ihtiyaçlarını karşılar. Bu varyantların incelenmesi, çizge teorisinin esnekliğini gösterir ve daha geniş bir problem yelpazesine çözüm sunar [30].

Toplam baskınlık (total domination), klasik baskınlık kavramını genişleterek, baskın kümenin her üyesinin de küme içinde en az bir komşuya sahip olmasını gerektirir; yani, hiçbir tepe izole edilemez ve S kümesinin kendisi de domine edilmelidir [31]. Bu varyant, kablolu ağlarda tam kapsama sağlama ve güvenilirlik artırma gibi uygulamalarda önem kazanır. Bir çizgenin toplam baskınlık sayısı $\gamma_t(G)$ ile gösterilir ve her zaman $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$ eşitsizliği geçerlidir [32]. Örneğin, bir yıldız çizgesi $K_{1,n}$ için $\gamma(K_{1,n}) = 1$ iken $\gamma_t(K(1, n)) = 2$ 'dir, çünkü merkez tepe tek başına izole kalır ve toplam baskınlık koşulunu sağlayamaz.

Bağımsız baskınlık (independent domination), baskın kümenin bağımsız olmasını (içinde hiçbir ayrıt bulunmamasını) şart koşar; bu, küme elemanları arasında çatışma olmaksızın kontrol noktaları seçimi gerektiren uygulamalar için idealdir [33]. Bir çizgenin bağımsız baskınlık sayısı $i(G)$ ile gösterilir ve her zaman $i(G) \geq \gamma(G)$ eşitsizliği geçerlidir. Bağımsız baskınlık, özellikle kapsama problemlerinde önemlidir; örneğin, iletişim ağlarında frekans atama sorunlarında, aynı frekansı kullanan istasyonların birbirine müdahale etmemesi gerektiğinde kullanılır [34].

Bağlantılı baskınlık (connected domination), baskın kümenin indüklenmiş alt çizgesinin bağlantılı olmasını gerektirir; bu, sürekli iletişim halinde olması gereken kontrol sistemlerinde önem kazanır [35]. Örneğin, acil durum müdahale birimlerinin konumlandırılmasında, birimler arasında kesintisiz iletişim sağlanması için bağlantılı baskınlık kullanılabilir. Bir çizgenin bağlantılı baskınlık sayısı $\gamma_c(G)$ ile gösterilir ve bağlantılı çizgeler için $\gamma(G) \leq \gamma_c(G)$ eşitsizliği geçerlidir [36]. Bu parametre, özellikle ağ tasarımında ve dayanıklılık analizlerinde kritik öneme sahiptir.

k-Baskınlık (k-domination) ise, her tepe noktasının baskın küme içinde en az k komşuya sahip olmasını gerektirir; bu, yedekli sistemlerde güvenilirliği artırmak için kullanılır [37]. Bir tepenin arızalanması durumunda bile sistemin işlevselliğini koruması gereken uygulamalarda, $k \geq 2$ değerleri için k-baskınlık kavramı önem kazanır. Bir çizgenin k-baskınlık sayısı $\gamma_k(G)$ ile gösterilir ve $k \leq m$ için $\gamma_k(G) \leq \gamma_m(G)$ eşitsizliği geçerlidir.

Bu varyantlar arasındaki farklar, kısıtlamaların doğasından ve uygulandıkları problem alanlarından kaynaklanır. Örneğin, toplam baskınlık klasik baskınlıktan daha katı olduğundan, her zaman $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$ eşitsizliği geçerlidir, ancak bazı çizge sınıfları için bu iki parametre eşit olabilir [30]. Bu çeşitlilik, baskınlık teorisinin esnekliğini ve uyarlanabilirliğini gösterir; bu sayede farklı gerçek dünya problemlerine matematiksel çözümler üretebilir. Literatürde bu varyantların her biri için spesifik sınırlar, algoritmalar ve karakterizasyonlar geliştirilmiştir, bu da alanın zenginliğini ve derinliğini ortaya koyar [3].

1.5. Süper Baskınlık Kavramının Ortaya Çıkışı

Baskınlık kavramı üzerine yapılan çalışmaların evrimiyle birlikte, zamanla bu temel yapının farklı kısıtlamalarla genişletilmiş versiyonları literatürde yer bulmuştur. Bu

varyasyonlardan biri olan *süper baskınlık*, ilk olarak Lemanska ve çalışma arkadaşları tarafından 2015 yılında tanımlanmış ve klasik baskınlıktan daha katı koşullar içeren bir parametre olarak literatüre girmiştir [38]. Süper baskınlık kümesi, baskılanan her bir tepe noktasına yalnızca tek bir komşu üzerinden erişilmesini zorunlu kılmakta, bu yönüyle uygulamalı problemlerde daha hassas modelleme imkânı sunmaktadır. Süper baskınlık (super domination), klasik baskınlığa kıyasla daha kısıtlayıcı ve yapısal özellikler bakımından daha zengin bir varyant olarak, 2015 yılında Lemańska, Zuwała ve Żyliński tarafından matematiksel literatüre tanıtılmıştır [38]. Bu kavram, geleneksel baskınlık fikrinin ötesine geçerek, kontrol mekanizmasının niteliğini de dikkate alır ve daha güçlü bir dominasyon yapısı sunar.

Formal olarak, bir $G = (V(G), E(G))$ çizgesi için, $D \subseteq V(G)$ kümesi süper baskın küme (super dominating set) olarak tanımlanması için gerek ve yeter koşul;

- i. D bir baskın küme ise ve
- ii. D dışındaki her tepe noktası, D içinde tam olarak bir komşuya sahipse.

Matematiksel olarak ifade edilirse, her $v \in V(G) \setminus D$ tepe noktası için, $|N(v) \cap D| = 1$ olmalıdır; burada $N(v)$, v 'nin komşuluk kümesini temsil eder [38]. Bu tanım, süper baskınlığın, klasik baskınlıktan daha katı bir koşul olan "benzersiz kontrol" prensibini içerdiğini gösterir.

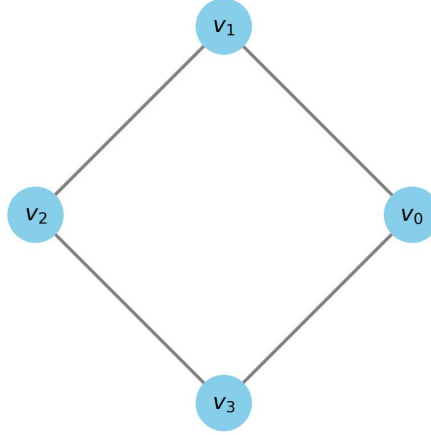
Bir çizgenin süper baskınlık sayısı $\gamma_{sp}(G)$ ile gösterilir ve bu parametre, en küçük süper baskın kümenin kardinalitesidir $\gamma(G) = \min\{|D| : D \text{ baskın küme}\}$. Genel olarak, $\gamma(G) \leq \gamma_{sp}(G)$ eşitsizliği her çizge için geçerlidir, çünkü her süper baskın küme aynı zamanda bir baskın kümedir, ancak tersi her zaman doğru değildir [38].

Tanım 1.5.1. [38] D baskın kümesi, eğer her $u \in \overline{D}$ elemanı için, $N(u) \cap \overline{D}$ olacak şekilde $v \in D$ tepesi varsa, bu D kümesine süper baskın küme denir. Süper baskınlık sayısı, minimum elemana sahip süper baskın kümenin bir kardinalitesidir ve $\gamma_{sp}(G)$ ile gösterilir.

Lemma 1.5.2. [38] Her süper baskın küme aynı zamanda bir baskın kümedir. Dolayısıyla:

$$\gamma(G) \leq \gamma_{sp}(G)$$

Örneğin, bir çevre çizgesi C_4 için $\gamma(C_4) = 2$ iken, $\gamma_{sp}(C_4) = 3$ olabilir; çünkü süper baskınlık, her dış tepenin tam olarak bir iç tepeye bağlanmasını gerektirir ve bu, C_4 'te iki tepe ile sağlanamaz.



Şekil 1.2. 4 tepe noktasına sahip çevre çizge C_4

Klasik baskınlık ile süper baskınlık arasındaki temel fark, çoklu domine edicilerin yasaklanmasıdır. Klasik baskınlıkta, bir tepe noktası birden fazla baskın tepe tarafından domine edilebilirken, süper baskınlıkta her dış tepe tam olarak bir baskın tepe tarafından domine edilmelidir [38]. Bu fark, süper baskınlığı, kesin kontrol gerektiren uygulamalar için daha uygun hale getirir; örneğin, her bir bileşenin tek bir kontrol noktası tarafından yönetilmesi gereken dağıtık sistemlerde.

Süper baskınlık kavramının motivasyonu, ağ sistemlerinde seçici ve katı kapsama ihtiyaçlarından doğmuştur. Özellikle hassas ağlarda, her birim için benzersiz bir kontrol noktası gerekliliği, süper baskınlık modeliyle karşılanabilir [40]. Bu, kaynak tahsisinin optimizasyonunu ve sistem karmaşıklığının azaltılmasını sağlar. Ayrıca, süper baskınlık, sorumluluk alanlarının net bir şekilde tanımlanmasını gerektiren organizasyonel yapılar için de bir model sunar.

Lemańska ve arkadaşlarının 2015 tarihli çalışması, süper baskınlığın temel özelliklerini ortaya koymuş ve çeşitli çizge sınıfları için süper baskınlık sayısını karakterize etmiştir. Özellikle, ağaç çizgeleri gibi basit yapılar için süper baskınlık sayısının hesaplanması ve sınırlarının belirlenmesi üzerine odaklanmışlardır [38]. Bu çalışma, süper baskınlık kavramının matematiksel temellerini atarken, aynı zamanda pratik uygulamalar için de bir çerçeve sunmuştur.

Süper baskınlığın özgün yönü, yalnızca minimal kaynak kullanımını değil, aynı zamanda kontrol yapısının kalitesini de optimize etmeyi amaçlamasıdır. Bu, hem teorik hem de pratik açıdan zengin bir araştırma alanı oluşturur ve çizge teorisinin gelişimine katkıda bulunur.

1.5.1. Özel Çizge Sınıfları için Süper Baskınlık Sayıları

Teorem 1.5.3. [38] P_n ($n \geq 3$) n tepeli bir yol çizgesi olmak üzere $n \geq 3$ için

$$\gamma_{sp}(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Örnek 1.5.4. P_5 path çizgesinin süper baskınlık sayısı aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.3. P_5 yol çizgesi

Eğer $\overline{D} = \{v_1, v_3, v_5\}$ kümesi seçilirse, D kümesi, $\overline{D} = V(G)/D$ bağlantısından $D = \{v_2, v_4\}$ olur. Böylelikle D kümesi baskın küme olur fakat $\overline{D}$ kümesindeki tepelerin ortak komşulukları olduğu için süper baskın küme olmaz. Bu sebeple $\overline{D}$ kümesi azaltılmalı. $\overline{D} = \{v_1, v_4\}$, kümesi için D kümesi $D = \{v_2, v_3, v_5\}$ olur. G çizgesinin alt kümesi olan D kümesi G çizgeinin baskın kümesi ve $\overline{D}$ kümesindeki her v tepesi için $u \in N(v) \cap \overline{D}$ şartı sağlanıyorsa, $D \subseteq V(G)$ kümesi G çizgesinin süper baskın kümesidir. G çizgesinin süper baskınlık sayısı:

$$\gamma_{sp}(G) = |D| = 3$$

bulunur. Teoremden yerine yazarsak $n \geq 3$ olduğu için $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ de yerine yazmalıyız. Yani $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$ elde edilir.

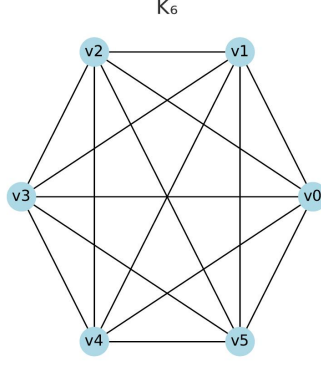
Teorem 1.5.5. [38] C_n ($n \geq 3$) bir çevre çizgesi olmak üzere

$$\gamma_{sp}(C_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & n \equiv 0, 3 \pmod{4} \text{ ise,} \\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Teorem 1.5.6. [39] K_n ($n \geq 2$) tam çizgesi için

$$\gamma_{sp}(K_n) = n - 1$$

Örnek 1.5.7. Örnek olarak K_6 tam çizgesi incelendiğinde, Bu çizgenin tüm tepe noktaları birbiri ile komşudur. Yani her bir tepe noktası, diğer 5 tepe noktasının tamamıyla



Şekil 1.4. Altı tepe noktasına sahip tam çizge K_6

doğrudan bağlantılıdır. Bu yapının baskınlık açısından en güçlü yönü, tek bir tepe noktasının tüm çizgesi kapsayabilmesidir. Ancak süper baskınlık açısından durum farklıdır.

Süper baskınlıkta, her tepe noktası yalnızca kapsanmakla kalmamalı, aynı zamanda komşularının başka komşuları üzerinde de etkili olmalıdır. Bu bağlamda, K_6 çizgesinde herhangi bir tepe noktası dışında seçilen $n - 1$ adet tepe noktası, geriye kalan tek bir tepe noktasını kapsarken, aynı zamanda onun tüm komşularına (yani diğer $n - 2$ noktaya) da dolaylı olarak erişim sağlar. Dolayısıyla her $n \geq 2$ için

$$\gamma_{sp}(K_n) = n - 1$$

ve özel olarak

$$\gamma_{sp}(K_6) = 5 \text{ bulunur.}$$

Bu sonuç, süper baskınlık sayısının, baskınlık sayısına kıyasla çok daha büyük olabileceğini gösteren önemli bir örnektir. Özellikle tepe noktalarının maksimum derecede bağlı olduğu durumlarda bile, süper baskınlığın koşullarının sağlanması için daha geniş bir kapsayıcı küme gerekmektedir.

Teorem 1.5.8. [39] $K_{1,n}$ ($n \geq 1$) yıldız çizgesi için

$$\gamma_{sp}(K_{1,n}) = n$$

Sonuç 1.5.9. [38] İzole tepesi bulunmayan bir G çizgesi için,

$$1 \leq \gamma(G) \leq \frac{n}{2} \leq \gamma_{sp}(G) \leq n - 1$$

Teorem 1.5.10. D kümesi G çizgesinin minimum sayıda elemana sahip bir süper baskın kümesi olsun. Eğer $u \in V(G)$ için $\deg_G(u) = \Delta(G)$ ise $u \notin D$ olur.

İspat: D minimum olduğundan, her $u \in D$ en az bir $v \in V/D$ tepesini süper biçimde kapsamak zorundadır; aksi halde u tepesini çıkarıp daha küçük bir süper baskın küme elde ederdik bu da çelişki oluşturur. Süper baskınlık tanımınca, u tepesinin kapsadığı böyle bir v için

$$N(u) \subseteq D \cup \{u\}.$$

Dolayısıyla u 'nun D dışında en fazla bir komşusu olabilir.

Şimdi $\deg(u) = \Delta(G)$ ve $u \in D$ olsun. Yukarıdakilerden dolayı u 'nun diğer komşuları D kümesindedir. Bu da

$$|D| \geq |N(u) \cap D| \geq \Delta(G) - 1$$

Sonuç olarak

$$\gamma_{sp}(G) = |D| > \Delta(G)$$

Doğal olarak, eğer $\gamma_{sp}(G) < \Delta(G)$ ise maksimum dereceli hiçbir tepe D 'de yer alamaz. ■

1.6. Süper Baskınlık Kavramının Literatürdeki Gelişimi

Süper baskınlık literatürü, 2015'teki ilk tanıtımından bu yana hızlı bir gelişim göstermiş ve çizge teorisinde yeni araştırma yönleri açmıştır. Bu gelişimi üç ana dönemde incelemek mümkündür: ilk dönem, orta dönem ve güncel dönem.

İlk dönemde, Lemańska, Zuwała ve Żyliński'nin (2015) öncü çalışması, süper baskınlık kavramını tanımlayarak literatüre kazandırmış ve temel özellikleri incelemiştir. Bu çalışmada, süper baskınlık sayısının klasik baskınlık sayısından büyük olabileceği gösterilmiş ve çeşitli çizge sınıfları için üst ve alt sınırlar belirlenmiştir. Örneğin, bir yol çizgesi P_n için $\gamma_{sp}(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ olduğu ve bu değer $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ 'den önemli ölçüde büyük olabileceği kanıtlanmıştır [38]. Ayrıca, yazarlar süper baskınlık için NP-tamlık sonuçları da sunmuş, yani büyük çizgeler için optimal süper baskın küme bulmanın hesaplamalı olarak zor olduğunu göstermişlerdir.

Bu dönemde bir diğer önemli katkı, Krishnakumari, Krishnan ve Arumugam (2016) tarafından yapılan çalışmadır. Bu araştırmacılar, özellikle ağaç çizgeleri üzerinde süper baskınlık sayısını inceleyerek sistematik bulgular sunmuşlardır. Çalışmalarında, bir

ağacın süper baskınlık sayısının yaprak sayısı ile ilişkisini analiz etmiş ve belirli ağaç türleri için kesin formüller türetmişlerdir. Örneğin, bir yıldız çizgesi $K_{1,n}$ için $\gamma_{sp}(K_{1,n}) = n$ olduğunu ve bu değer, klasik baskınlık sayısı $\gamma(K_{1,n}) = 1$ 'den çok daha büyük olduğunu göstermişlerdir [40]. Bu sonuçlar, süper baskınlığın çizge yapısına ne kadar duyarlı olabileceğini vurgular.

Orta dönemde, süper baskınlığın temel özellikleri daha derinlemesine araştırılmış ve çeşitli çizge sınıfları için sonuçlar genişletilmiştir. Henning ve Marcon (2018), süper baskınlık parametrelerinin çeşitli çizge operasyonları altındaki davranışını incelemiş ve özellikle birleşim, çarpım ve korona operasyonları için sonuçlar sunmuşlardır. Bu çalışmada, çizgelerin birleşimi için süper baskınlık sayısının alt ve üst sınırları belirlenmiş ve belirli durumlarda kesin değerler hesaplanmıştır. Ayrıca, döngü ve yol çizgelerinde süper baskınlık sayılarının davranışı sistematik olarak analiz edilmiştir [41].

Bu dönemde ayrıca, Dorota ve arkadaşları (2017) süper baskınlık için algoritmik yaklaşımlar geliştirmiş ve özellikle ağaç ve bipartit çizgeler için verimli hesaplama yöntemleri önermişlerdir. Bu çalışmalar, teorik sonuçların pratiğe aktarılması açısından önemli adımlar olmuştur. Araştırmacılar, belirli çizge sınıfları için süper baskınlık sayısını polinomial zamanda hesaplayan algoritmalar sunmuşlardır [42].

Güncel dönemde, Zhuang (2022) süper baskınlık ile klasik baskınlık ve diğer çizge parametreleri arasındaki ilişkileri derinlemesine incelemiştir. Bu çalışmada, süper baskınlık sayısı için daha sıkı üst ve alt sınırlar önerilmiştir. Ayrıca, süper baskınlık ile bağımsızlık sayısı, kenar örtüsü ve diğer çizge parametreleri arasındaki ilişkiler de araştırılmıştır [43].

Kumar ve Vijayaragavan (2021) ise, özellikle düzenli çizgeler ve güçlü ürün çizgeleri üzerinde süper baskınlık davranışını inceleyerek, bu parametrenin hesaplanması için yeni yöntemler geliştirmişlerdir. Çalışmalarında, $\gamma_{sp}(G)$ değerinin çizge yapısına ve derecesine bağlı olarak nasıl değiştiğini analiz etmiş ve belirli çizge aileleri için formüller önermişlerdir [44].

Bu tarihsel gelişim, süper baskınlık teorisinin matematiksel olgunluğa doğru ilerleyişini gösterir. İlk basit tanımdan başlayarak, farklı çizge sınıfları için karakterizasyon-

lar, algoritmik yaklaşımlar ve parametre ilişkileri gibi daha karmaşık konulara doğru genişlemiştir. Bununla birlikte, literatürde hala açık problemler ve araştırılmamış alanlar mevcuttur, özellikle çizge dönüşümleri ve süper baskınlık arasındaki ilişki gibi konularda daha fazla çalışmaya ihtiyaç vardır.

1.7. Uygulama Alanları ve Pratik Önemi

Süper baskınlık kavramı, teorik zenginliğinin yanı sıra, çeşitli pratik uygulama alanlarında da önemli bir potansiyele sahiptir. Bu uygulamalar, özellikle kesin kontrol ve seçici kapsama gerektiren sistemlerde süper baskınlığın avantajlarını ortaya koyar.

Ağ güvenliği alanında, süper baskınlık modeli kritik bir rol oynar. Geleneksel baskınlık yaklaşımlarında, bir ağ elemanı birden fazla güvenlik cihazı tarafından izlenebilirken, süper baskınlık her elemanın tam olarak bir güvenlik noktası tarafından kontrol edilmesini sağlar [45]. Bu, sorumluluk alanlarının net bir şekilde tanımlanmasını ve güvenlik protokollerinin daha etkili yönetilmesini mümkün kılar. Örneğin, hassas bir bilgisayar ağında, her tepenin belirli bir güvenlik sunucusu tarafından izlenmesi, sistemin bütünlüğünü ve izlenebilirliğini artırır.

Sensör yerleşimi problemlerinde, süper baskınlığın seçici yapısı özel bir avantaj sağlar. Kablosuz sensör ağlarında, her bir alanın tam olarak bir sensör tarafından kapsanması, enerji tüketimini optimize eder ve sensörler arası çakışmaları en aza indirir [46]. Bu yaklaşım, özellikle sınırlı enerjiye sahip sensörlerin kullanıldığı uygulamalarda, sistem ömrünü uzatır ve veri toplama verimliliğini artırır. Ayrıca, tam bir sensör tarafından izlenen her alan için daha doğru konum ve durum bilgisi elde edilebilir.

Bilgi yayılımı ve iletişim stratejilerinde, süper baskınlık modeli etkili bir çerçeve sunar. Bir sosyal ağda bilgi yayma problemi düşünüldüğünde, her kullanıcının tam olarak bir bilgi kaynağına bağlı olması, mesaj karmaşıklığını azaltır ve bilgi akışını daha kontrollü hale getirir [8]. Bu, özellikle acil durum bildirimlerinde, belirli bir kitlenin belirli bir kaynaktan bilgi almasını sağlayarak, çakışan veya çelişen mesajların önüne geçer.

Kontrol sistemlerinde, süper baskınlık risk yönetimine katkıda bulunur. Her sistem elemanının tam olarak bir kontrol noktası tarafından yönetilmesi, sorumluluk zincirini netleştirir ve sistem arızalarına daha hızlı müdahale edilmesini sağlar [47]. Örneğin,

endüstriyel bir kontrol sisteminde, her makinenin belirli bir denetleyici tarafından izlenmesi, arıza tespitini kolaylaştırır ve bakım süreçlerini optimize eder.

Süper baskınlığın seçici yapısının sağladığı bir diğer avantaj, sistem karmaşıklığının azaltılmasıdır. Klasik baskınlıkta, bir eleman birden çok kontrol noktasından etkilenebilir ve bu durum koordinasyon sorunlarına yol açabilir. Süper baskınlık modelinde ise, her elemanın tek bir kontrol noktasına bağlı olması, sistemi daha yönetilebilir ve anlaşılabilir kılar [3].

Teorik kavramların bu pratik değeri, süper baskınlık araştırmalarının yalnızca matematiksel bir egzersiz olmadığını, aynı zamanda gerçek dünya problemlerine çözüm sunabilecek güçlü bir araç olduğunu gösterir. Özellikle, dijitalleşmenin ve ağ tabanlı sistemlerin yaygınlaştığı günümüzde, optimizasyon ve kontrol stratejileri için matematiksel modellere olan ihtiyaç artmakta, bu da süper baskınlık gibi kavramların önemini daha da artırmaktadır.

1.8. Çizge Dönüşümleri ve Orta Çizge

Çizge dönüşümleri, orijinal çizgenin yapısal özelliklerini farklı bir perspektiften analiz etmeyi sağlayan ve çeşitli çizge parametrelerinin davranışını incelemeye olanak tanıyan önemli bir araştırma alanıdır. Bu dönüşümler, bir çizgenin tepe noktaları ve ayrıtları üzerinde belirli işlemler uygulayarak yeni çizgeler oluşturur ve bu yeni yapılar, orijinal çizgenin özelliklerini yansıtırken, aynı zamanda özgün karakteristikler de sergiler [48].

Çizge dönüşümlerinin genel önemi, karmaşık problemleri daha basit alt problemlere indirgeme ve farklı çizge sınıfları arasında ilişkiler kurma kapasitesinde yatar. Örneğin, bir çizgenin çizgi çizgesi (line graph), ayrıtları tepe noktalarına dönüştürerek, orijinal çizgedeki ayrıtlı ilişkilerini tepe ilişkilerine çevirir; bu, ayrıtlı örtüsü gibi problemlerin baskınlık problemlerine indirgenmesini sağlar [49].

Orta çizge (middle graph) dönüşümü, çizge teorisinde özel bir yere sahiptir ve baskınlık parametrelerinin incelenmesi için zengin bir araştırma alanı sunar.

Basit bir $G = (V, E)$ çizgesi için orta çizge $M(G)$, tepe kümesi $V(M(G)) = V(G) \cup E(G)$ olacak şekilde tanımlanır. Bu çizgenin iki tepe nok-

tası $x, y \in V(M(G))$ arasında bir ayrıtın bulunması, aşağıdaki koşullardan en az birinin sağlanması durumunda gerçekleşir:

1. $x, y \in E(G)$ ve x ile y , G çizgesinde komşu ayrıtlar ise,
2. $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ ve x, y 'nin G çizgesindeki uç noktalarından biri ise.

Bu koşullar altında oluşturulan $M(G)$ çizgesi, G 'nin orta çizgesi olarak adlandırılır.

Orta çizge, yukarıda belirtildiği gibi hem orijinal çizgenin tepe noktalarını hem de ayrıtlarını tepe noktaları olarak içerir ve özgün bir komşuluk yapısı oluşturur.

Kazemnejad ve arkadaşları (2020), orta çizgelerde baskınlık parametrelerini sistematik olarak incelemiş ve çeşitli çizge sınıfları için sonuçlar sunmuşlardır. Çalışmalarında, bir çizgenin orta çizgesindeki klasik baskınlık sayısını, orijinal çizgedeki yapısal özelliklerle ilişkilendiren teoremler geliştirmişlerdir. Örneğin, bir yol çizgesi P_n için, orta çizgenin baskınlık sayısını $\gamma(M(P_n)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ olarak karakterize etmişlerdir [50]. Bu tür sonuçlar, çizge dönüşümlerinin baskınlık parametrelerinin davranışını nasıl etkilediğini anlamak açısından değerlidir.

Baskınlık parametrelerinin çizge dönüşümleri altındaki davranışı, genellikle karmaşık ve öngörülmesi zordur. Orijinal çizgedeki baskınlık sayısı ile dönüştürülmüş çizgedeki baskınlık sayısı arasındaki ilişki, dönüşümün türüne ve orijinal çizgenin yapısına bağlıdır. Örneğin, bir çizgenin çizgi çizgesinde baskınlık sayısı, orijinal çizgenin kenar örtüsü ile ilişkiliyken, orta çizgede baskınlık sayısı daha karmaşık bir ilişki sergiler [50].

Mevcut literatürde, orta çizgelerde klasik baskınlık üzerine bazı çalışmalar bulunmakla birlikte, süper baskınlık gibi daha özel varyantların incelenmesi büyük ölçüde eksiktir. Bugüne kadar, orta çizgelerde süper baskınlık sayısının sistematik analizi yapılmamıştır ve bu, önemli bir araştırma boşluğu oluşturur [43]. Bu boşluk, hem teorik hem de pratik açıdan değerli sonuçlar vaat eder; çünkü orta çizge dönüşümü, gerçek dünya ağlarında tepe ve bağlantı ilişkilerini modellemek için kullanılabilir.

Orta çizgeler üzerinde süper baskınlık çalışmalarının kısıtlılığı, bu alanın yeni keşfedilmekte olduğunu ve daha fazla araştırmaya açık olduğunu gösterir. Özellikle, orta çizge dönüşümünün süper baskınlık sayısını nasıl etkilediği, hangi çizge sınıfları için kesin formüller türetilebileceği ve süper baskınlık ile diğer çizge parametreleri arasındaki ilişkilerin nasıl dönüştüğü gibi sorular, gelecekteki çalışmalar için verimli araştırma yönleri sunmaktadır.

Teorem 1.8.1. [50] G bağlantılı bir çizge ve $M(G)$ onun orta çizgesi ise:

$$\gamma(M(G)) \leq \gamma(G) + \beta(G)$$

burada $\beta(G)$ çizgesinin ayırıt bağımsızlık sayısıdır.

1.9. Literatürdeki Boşluklar ve Araştırma Fırsatları

Süper baskınlık kavramı, görece yeni bir araştırma alanı olarak, literatürde çeşitli boşluklar ve keşfedilmemiş fırsatlar sunmaktadır. Bu boşlukların sistematik analizi, hem teorik gelişmelere hem de pratik uygulamalara katkıda bulunabilecek yeni araştırma yönleri belirlemek açısından önemlidir. Süper baskınlık literatürünün en belirgin sınırlılığı, mevcut çalışmaların sayıca az olması ve odak alanlarının dar kapsamlı olmasıdır. 2015'te tanıtılmasından bu yana, süper baskınlık üzerine yayımlanan makalelerin sayısı, klasik baskınlık ve diğer varyantlarla karşılaştırıldığında oldukça azdır [43]. Mevcut çalışmalar genellikle belirli çizge sınıfları (örneğin, ağaçlar, yollar, döngüler) üzerinde yoğunlaşmakta ve daha genel çizge türleri için sonuçlar sınırlı kalmaktadır. Bu durum, özellikle rastgele çizgeler, ölçeksiz ağlar gibi karmaşık yapılar için süper baskınlık davranışının anlaşılmasında önemli bir boşluk oluşturur [44].

Orta çizgeler üzerinde süper baskınlık çalışmalarının eksikliği, özellikle dikkat çekicidir. Kazemnejad ve arkadaşlarının (2020) orta çizgelerde klasik baskınlık üzerine yaptıkları çalışma, bu yönde bir başlangıç noktası oluştursa da, süper baskınlık için benzer bir analiz henüz gerçekleştirilmemiştir. Orta çizge dönüşümü, hem orijinal tepe noktalarını hem de ayırıtları yeni bir yapıda birleştirdiği için, süper baskınlık gibi daha kısıtlayıcı parametrelerin davranışını incelemek açısından zengin bir araştırma alanı sunar. Örneğin, bir çizgenin orta çizgesindeki süper baskınlık sayısının, orijinal çizgedeki yapısal özelliklerle nasıl ilişkilendirildiği hala açık bir problem olarak durmaktadır.

Sistematik analiz ihtiyacı, süper baskınlık kavramının daha derinlemesine anlaşılması için kritiktir. Mevcut çalışmalarda, süper baskınlık sayısı için genel üst ve alt sınırlar, hesaplama karmaşıklığı analizleri ve algoritmik yaklaşımlar gibi temel teorik sonuçlar sınırlıdır [38]. Özellikle, farklı çizge parametreleri (örneğin, bağımsızlık sayısı, kromatik sayı, çap) ile süper baskınlık sayısı arasındaki ilişkilerin sistematik olarak incelenmesi, teoremin gelişimi için önemli katkılar sağlayabilir. Uygulama alanlarında da önemli boşluklar mevcuttur. Süper baskınlığın pratik değeri teorik olarak anlaşılrsa da, gerçek dünya problemlerine uygulanması üzerine çalışmalar yeterli değildir. Özellikle, ağ güvenliği, sensör yerleşimi ve kontrol sistemleri gibi alanlarda süper baskınlık modelinin somut uygulamaları, algoritmaları ve performans analizleri eksiktir [49]. Bu boşluğun doldurulması, teorik kavramların pratiğe aktarılması ve reel sektör ihtiyaçlarına yönelik çözümler üretilmesi açısından önemlidir.

Bu çalışmada, özellikle iki farklı ancak birbirini tamamlayıcı yapıya sahip olan *orta çizgeler*, *genelleştirilmiş transformasyon çizgeler*, *genelleştirilmiş Petersen çizgeleri* ele alınmış, bu çizgelerin yapısal özellikleri süper baskınlık parametresi açısından sistematik biçimde incelenmiştir. Literatürde orta çizgeler üzerine süper baskınlık sayısının detaylı bir şekilde analiz edilmediği görülmekte olup, bu yönüyle tez çalışması özgün bir katkı sunmayı hedeflemektedir.

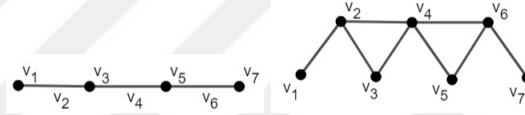
2. ORTA ÇİZGELER

Bir $G = (V, E)$ basit çizgesi için orta çizge $M(G)$, tepe kümesi $V(G) \cup E(G)$ olan ve aşağıdaki kurallara göre ayrıtları tanımlanan bir çizge olarak tanımlanır.

Tanım 2.0.1. [50] Bir G çizgesinin orta çizgesi $M(G)$, tepe kümesi $V(G) \cup E(G)$ olan ve iki tepe $x, y \in V(M(G))$ arasında aşağıdaki durumlardan en az birinin sağlanması durumunda bir ayrıtın bulunduğu bir çizge olarak tanımlanır:

1. $x, y \in E(G)$ ve x ile y , G çizgesinde komşudur.
2. $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ ve x ile y , G çizgesinde bağlantılıdır (yani x , y ayrıtının uç noktalarından biridir).

Örnek 2.0.2. Örneğin 4 tepeli bir yol çizgesinin orta çizgesini oluşturalım. $V(P_4) = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ ve $E(P_4) = \{v_2, v_4, v_6\}$ olarak tanımlayalım. Tanım gereği $V(M(P_4)) = V(P_4) \cup E(P_4)$ ve P_4 çizgeindeki her ayrıt, bağlı olduğu tepeler ile orta çizgede bağlandığında aşağıdaki orta çizge oluşmaktadır.



Şekil 2.1. 4 tepeli yol çizge P_4 ve onun orta çizgesi $M(P_4)$

2.1. Orta Çizgelerin Süper Baskınlık Sayısı

Örnek 2.1.1. Çizgenin süper baskınlık sayısı $M(P_4)$ aşağıda verilmiştir.

$\overline{D}$ kümesi için ne kadar çok tepe seçersek, kalan D kümesi için o kadar az tepe kalır, bu da bize süper baskınlık sayısını verir. Bu nedenle, $M(P_4)$ 'ten tepeleri v_1, v_5 olarak seçersek, bu küme süper baskınlığı tanımlayan minimum tepe kümesini oluşturur.

$$\overline{D} = \{v_1, v_5\}$$

$$|\overline{D}| = 2$$

$$|D| = |V(M(P_4))| - |\overline{D}|$$

$$|D| = 7 - 2$$

$$|D| = 5$$

Sonuç 1.5.9 'den $\gamma_{sp}(G) \geq \frac{n}{2}$ bulur. $M(P_4)$ çizgesinin en küçük kümesinin D kümesi olduğu aşıkardır çünkü $\overline{D}$ kümesine 1 eleman daha eklediğimizde, D kümesindeki tepelerin ortak komşularının olamayacağı tanımına aykırıdır. Bu sebeple $\gamma_{sp}(M(P_4)) = 5$ bulunur.

Teorem 2.1.2. $M(P_n)$, $n \geq 3$ için P_n çizgesinin orta çizgesi olsun. $M(P_n)$ çizgesinin süper baskınlık sayısı;

$$\gamma_{sp}M(P_n) = \left\lfloor \frac{6n-3}{4} \right\rfloor$$

şeklinde bulunur.

İspat: $M(P_n)$ çizgesinin tepeleri $V(M(P_n)) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n-1}\}$ şeklinde tanımlansın.

$$\overline{D} = \{v_1, v_5, v_9, \dots, v_{4k+1}\} (k \geq 1)$$

$$D = \{v_2, v_3, v_4, v_6, \dots\}$$

$$D = V(M(P_n)) / \overline{D}$$

$$|D| = |V(M(P_n))| - |\overline{D}|$$

$$|D| = (2n-1) - \left\lceil \frac{2n-1}{4} \right\rceil$$

$$\gamma_{sp}(M(P_n)) = (2n-1) - \left\lceil \frac{2n-1}{4} \right\rceil$$

$$\gamma_{sp}(M(P_n)) = \left\lfloor \frac{6n-3}{4} \right\rfloor$$

Teorem 1.5.8'den;

i. $n = 4k$ için

$$\begin{aligned} 2.(4k) - 1 - \left\lceil \frac{2.(4k) - 1}{4} \right\rceil &= 8k - 1 - \left\lceil \frac{8k - 1}{4} \right\rceil \\ &= 8k - 1 - 2k = 6k - 1 \\ &= 6 \cdot \left(\frac{n}{4}\right) - 1 \\ &= \frac{3n}{2} - 1 \end{aligned}$$

ii. $n = 4k + 1$ için

$$\begin{aligned}
 2.(4k + 1) - 1 - \left\lceil \frac{2.(4k + 1) - 1}{4} \right\rceil &= 8k + 2 - 1 - \left\lceil \frac{8k + 2 - 1}{4} \right\rceil \\
 &= 8k + 1 - (2k + 1) = 6k \\
 &= 6. \left(\frac{n - 1}{4} \right) \\
 &= \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

iii. $n = 4k + 2$ için

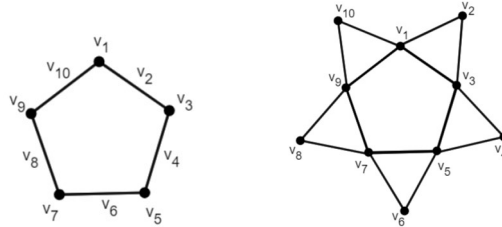
$$\begin{aligned}
 2.(4k + 2) - 1 - \left\lceil \frac{2.(4k + 2) - 1}{4} \right\rceil &= 8k + 4 - 1 - \left\lceil \frac{8k + 3}{4} \right\rceil \\
 &= 8k + 3 - (2k + 1) = 6k + 2 \\
 &= 6. \left(\frac{n - 2}{4} \right) + 2 \\
 &= \frac{3n}{2} - 1
 \end{aligned}$$

iv. $n = 4k + 3$ için

$$\begin{aligned}
 2.(4k + 3) - 1 - \left\lceil \frac{2.(4k + 3) - 1}{4} \right\rceil &= 8k + 6 - 1 - \left\lceil \frac{8k + 5}{4} \right\rceil \\
 &= 8k + 5 - (2k + 2) = 6k + 3 \\
 &= 6. \left(\frac{n - 3}{4} \right) + 3 \\
 &= \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

i, ii, iii ve iv 'den $\gamma_{sp}(M(P_n)) = \left\lfloor \frac{6n-3}{4} \right\rfloor$ elde edilir. ■

Örnek 2.1.3. C_5 çevre çizgesinin orta çizgesi $M(C_5)$ Şekil2.2'te verilmiştir.



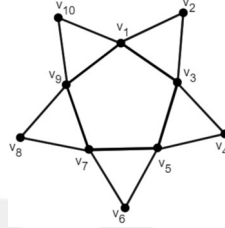
Şekil 2.2. C_5 çevre çizgesi ve onun orta çizgesi $M(C_n)$

Teorem 2.1.4. $n \geq 3$ için $M(C_n)$, C_n çevre çizgesinin orta çizgesi olsun. Süper baskınlık sayısı,

$$\gamma_{sp}(M(C_n)) = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$$

şeklindedir.

İspat: $V(C_n) = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2n-1}\}$, $E(C_n) = \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2n}\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Şekil 2.3’de gösterildiği gibi $V(M(C_n)) = V(C_n) \cup E(C_n)$ olur.

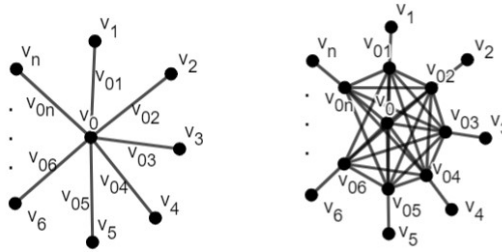


Şekil 2.3. 5 Tepeli çevre çizgenin orta çizgesi $M(C_5)$

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \{v_2, v_6, v_{10}, v_{14}, \dots, v_{4k-2}\} (k \geq 1) \\ D &= \{v_1, v_3, v_4, v_5, \dots\} \\ D &= V(M(C_n)) / \overline{D} \\ |D| &= |V(M(C_n))| - |\overline{D}| \\ |D| &= 2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ \gamma_{sp}(M(C_n)) &= \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

■

Örnek 2.1.5. $K_{1,n}$ çizgesinin tepeleri $V(K_{1,n}) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve ayrıtları $E(K_{1,n}) = \{v_{01}, v_{02}, v_{03}, \dots, v_{0n}\}$ şeklinde tanımlansın. $K_{1,n}$ ve $M(K_{1,n})$ çizgeleri Şekil 2.4’te verilmiştir.



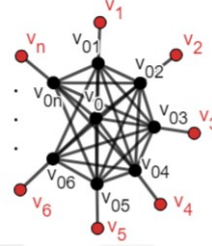
Şekil 2.4. $K_{1,n}$ yıldız çizgesi ve onun orta çizgesi $M(K_{1,n})$

Teorem 2.1.6. $M(K_{1,n})$, $n \geq 2$ için $K_{1,n}$ çizgesinin orta çizgesi olsun. $M(K_{1,n})$ çizgesinin süper baskınlık sayısı,

$$\gamma_{sp}(M(K_{1,n})) = n + 1$$

şeklindedir.

İspat: Notasyonu, $V(K_{1,n}) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ve $E(K_{1,n}) = \{v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0n}\}$ şeklinde yapalım. $K_{1,n}$ ve $M(K_{1,n})$ çizgeleri Şekil 2.5' te gösterilmiştir ve



Şekil 2.5. Yıldız çizgenin orta çizgesi $M(K_{1,n})$

$$\begin{aligned} D &= \{v_0, v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0n}\} \\ \overline{D} &= \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \\ D &= V(M(K_{1,n})) / \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \\ |D| &= 2n + 1 - n \\ \gamma_{sp}(M(K_{1,n})) &= n + 1 \end{aligned}$$

D bir süper baskın kümedir ve $|D| = n + 1$. Sonuç 1.5.9'dan $\gamma_{sp}(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ ve $|V(M(K_{1,n}))| = 2n + 1$, böylelikle

$$\gamma_{sp}(K_{1,n}) \geq \frac{|V(M(K_{1,n}))|}{2} = \left\lceil \frac{2n + 1}{2} \right\rceil = n + 1$$

Böylece, D minimum kümedir ve $\gamma_{sp}(M(K_{1,n})) = |D| = n + 1$ bulunur. ■

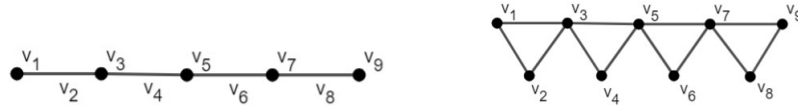
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TRANSFORMASYON ÇİZGELERİ

Çizge dönüşüm işlemleri kapsamında, bir çizgenin yapısını belirli parametrelere göre dönüştürmek amacıyla tanımlanan (a, b) parametrelili dönüşüm yaklaşımı, çizgenin tepe ve ayrıtları arasındaki ilişkileri değiştirmeye olanak tanır. Bu bağlamda, G herhangi bir basit çizge ve $\alpha, \beta \in V(G)$ olmak üzere, eğer $a = +$ ise α ve β çizge G 'de komşu olacak şekilde korunur; $a = -$ durumunda ise bu iki tepe arasındaki komşuluk ilişkisi kaldırılır veya göz ardı edilir. Benzer şekilde, $\alpha \in V(G)$ ve $\beta \in E(G)$ olmak üzere, $b = +$ ise α tepesi ile β ayrıtı arasında bir incident (bağlantı) ilişkisi tanımlanır; $b = -$ olduğunda ise bu bağlantı yok sayılır. Bu parametrik yapı, klasik çizgi çizge, total çizge, subdivision çizge gibi birçok özel çizge dönüşümünü aynı çatı altında incelemeyi mümkün kılar. Böylece (a, b) parametrelerine göre tanımlanan dönüşüm çizgeleri, hem teorik hem uygulamalı açıdan geniş bir analiz alanı sunar.

Tanım 3.0.1. [51] Genelleştirilmiş transformasyon çizge G^{ab} , tepeler kümesi $V(G) \cup E(G)$ olan bir çizgedir ve $\alpha, \beta \in V(G^{ab})$ olmak üzere, α ile β ancak ve ancak aşağıdaki durumlardan biri gerçekleşirse G^{ab} çizgesinde komşudur (yani aralarında bir ayrıt vardır);

- i. $\alpha, \beta \in V(G)$ olmak üzere, eğer $a = +$ ise α ve β , G çizgesinde komşudur; eğer $a = -$ ise α ve β , G çizgesinde komşu değildir.
- ii. $\alpha \in V(G)$ ve $\beta \in E(G)$ olmak üzere, eğer $b = +$ ise α ve β , G çizgesinde birbirine bağlantılıdır (yani α tepesi, β ayrıtıyla bağlıdır); eğer $b = -$ ise α ve β , G çizgesinde bağlantılı değildir (bağlı değildir).

Örnek 3.0.2. P_5 yol çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1. P_5 yol çizgesi ve onun genelleştirilmiş transformasyon çizgesi P_5^{++}

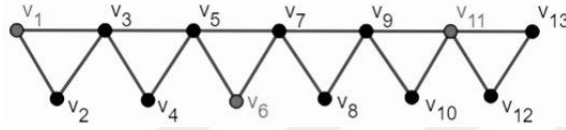
3.1. Genelleştirilmiş Transformasyon Çizgelerinin Süper Baskınlık Sayısı

Teorem 3.1.1. P_n^{++} , $n \geq 3$ için P_n yol çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi olsun. Süper baskınlık sayısı;

$$\gamma_{sp}(P_n^{++}) = \left\lfloor \frac{3n-2}{2} \right\rfloor$$

dir.

İspat: $V(P_n) = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2n-1}\}$ ve $E(P_n) = \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2n-2}\}$ olmak üzere, $V(P_n^{++}) = V(P_n) \cup E(P_n)$ şeklindedir.

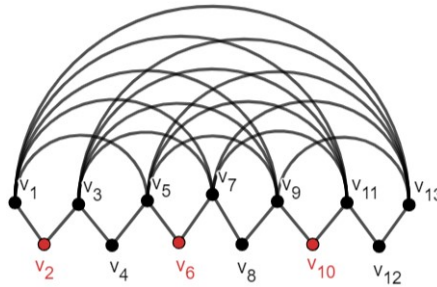


Şekil 3.2. P_7^{++} genelleştirilmiş transformasyon çizgesi

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \{v_1, v_5, v_9, v_{13}, \dots, v_{4k-3}\} \quad (k \geq 1) \\ D &= \{v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, \dots\} \\ D &= V(P_n^{++}) / \overline{D} \\ |D| &= |V(P_n^{++})| - |\overline{D}| \\ |D| &= (2n-1) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \gamma_{sp}(P_n^{++}) &= 2n-1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{3n-2}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

D kümesi açıkça P_n^{++} çizgesinin bir süper baskın kümesidir. Çünkü $\overline{D}$ kümesine herhangi bir u tepesi eklediğimizde, u ve v 'nin D kümesinde ortak komşuları vardır. Bu ise bir çelişkidir. ■

Örnek 3.1.2. Genelleştirilmiş transformasyon çizge P_5^{-+} , aşağıdaki Şekil 3.3'te verilmiştir.



Şekil 3.3. P_5^{-+} genelleştirilmiş transformasyon çizgesi

Teorem 3.1.3. P_n^{-+} , $n \geq 3$ için P_n yol çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi olsun.

$$\gamma_{sp}(P_n^{-+}) = \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil.$$

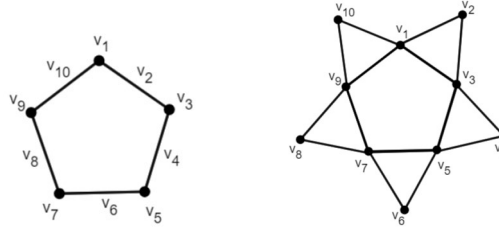
dir.

İspat: $V(P_n) = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2n-1}\}$ ve $E(P_n) = \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2n}\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Şekil 3.3’de gösterildiği gibi $V(P_n^{-+}) = V(P_n) \cup E(P_n)$ olur.

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \{v_2, v_6, v_{10}, \dots, v_{4k-2}\} & (k \geq 1) \\ D &= \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2n-1}\} \\ D &= V(P_n^{-+}) / \overline{D} \\ |D| &= |V(P_n^{-+})| - |\overline{D}| \\ |D| &= (2n-1) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \gamma_{sp}(P_n^{-+}) &= 2n-1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lceil \frac{3n-2}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

■

Örnek 3.1.4. C_5 çevre çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi C_5^{++} Şekil3.4’te verilmiştir. C_n^{++} çizgesinin $M(C_n)$ çizgesine izomorf olduğu görülür.



Şekil 3.4. C_5 çevre çizgesi ve onun genelleştirilmiş transformasyon çizgesi C_5^{++}

Teorem 3.1.5. $n \geq 3$ için C_n^{++} , C_n çevre çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi olsun. Süper baskınlık sayısı,

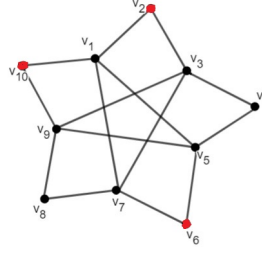
$$\gamma_{sp}(C_n^{++}) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$$

şeklindedir.

İspat: C_n^{++} çizgesi $M(C_n)$ çizgesine izomorf olduğundan ispatı Teorem 2.1.4 ile aynı şekilde yapılır.



Örnek 3.1.6. Şekil 3.5’da C_5^{-+} genelleştirilmiş transformasyon çizgesi verilmiştir.



Şekil 3.5. C_5 yol çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi C_5^{-+}

Teorem 3.1.7. C_n^{-+} , $n \geq 3$ için C_n çevre çizgesinin genelleştirilmiş transformasyon çizgesi olsun. Süper baskınlık sayısı,

$$\gamma_{sp}(C_n^{-+}) = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$$

dir.

İspat: $V(C_n) = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2n-1}\}$, $E(C_n) = \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2n}\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Şekil 3.5’de gösterildiği gibi $V(C_n^{-+}) = V(C_n) \cup E(C_n)$ olur.

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \{v_2, v_6, v_{10}, v_{14}, \dots, v_{4k-2}\} (k \geq 1) \\ D &= \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2n-1}\} \\ &= V(C_n^{-+}) / \overline{D} \\ |D| &= |V(C_n^{-+})| - |\overline{D}| \end{aligned}$$

$$= 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\gamma_{sp}(C_n^{-+}) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$= \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil.$$

Açıkça D , Teorem 3.1.5’ün ispatına benzer şekilde (C_n^{-+}) çizgesinin süper baskın bir kümesidir. ■

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ PETERSEN ÇİZGELERİ

Tanım 4.0.1. [52, 53] Genelleştirilmiş Petersen çizgesi $GP(n, k)$, $n \geq 3$ ve $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ için tanımlanan, kübik (her tepe derecesi 3) ve bağlantılı bir çizge yapısıdır. Bu çizge, içte bir yıldız çokgeni (dairese bir düzenleme) ve dışta bir düzgün n -gen olmak üzere iki eşit büyüklükte tepe kümesinden oluşur. Her i için v_i dış çokgendeki, u_i ise iç çokgendeki tepeleri temsil eder. Ayrıtlar üç grupta tanımlanır:

- $v_i \sim v_{i+1} \pmod{n}$ (dış çember),
- $u_i \sim u_{i+k} \pmod{n}$ (iç yıldız çokgeni),
- $v_i \sim u_i$ (köprü bağlantılar).

Bu çizgeler 1950 yılında Coxeter [52] tarafından tanıtılmış ve 1969 yılında Watkins [53] tarafından adlandırılmıştır. Yedi Petersen ailesi çizgesiyle karıştırılmamalıdır.

Genelleştirilmiş Petersen çizgesi kübik olduğundan $m/n = 3/2$ sağlar, burada m ayrıt sayısı ve n tepe noktası sayısıdır. Daha spesifik olarak, $GP(n, k) = (|2n|, |3n|)$ olacak şekilde tepeleri ve ayrıtları vardır.

Pozitif tam sayılar k ve n için $1 < k < n - 1$ ve $2k \leq n$ koşulları sağlandığında, genelleştirilmiş Petersen çizgesi $GP(n, k)$ şu şekilde tanımlanır:

Tepeler kümesi: $V(GP(n, k)) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$

Ayrıtlar kümesi: $E(GP(n, k)) = \{[u_i, u_{i+1}], [u_i, v_i], [v_i, v_{i+k}] | 0 \leq i < n\}$

Bu tanıma göre:

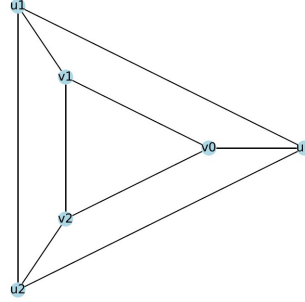
- $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ tepe kümesi dış çevreyi oluşturur ve çevrim şeklinde bağlanır.
- $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ tepe kümesi içte yer alır ve her v_i, v_{i+k} ile bağlanarak iç çevrimi oluşturur.
- Her u_i , karşılık gelen v_i ile bağlanır.

Burada i bir tamsayıdır ve tüm indisler mod n olarak değerlendirilir. Kullanılan n değerinin ne olduğu bağlamdan açıkça anlaşılacaktır ancak n her zaman $n \geq 3$ olacak şekilde bir tamsayıyı temsil eder.

Bu bölümde Genelleştirilmiş Petersen çizgelerinin süper baskınlık sayısını inceleyeceğiz.

4.1. Genelleştirilmiş Petersen Çizgelerinin Süper Baskınlık Sayısı

Örnek 4.1.1. Aşağıdaki örnekte $GP(3, 1)$ genelleştirilmiş petersen çizgesi verilmiştir.



Şekil 4.1. $GP(3, 1)$ 3-prizma çizgesi

$GP(3, 1)$ incelendiğinde $\overline{D}$ için $\{u_1, u_2, u_3\}$ tepelerini seçtiğimizde;
 $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ olur. Yani dış tepeleri $\overline{D}$ kümesine seçtiğimizde kalan iç tepeler bize D kümesini verir. $\overline{D}$ kümesine bir eleman daha eklersek tanım ile çelişki yaratacağı için D kümesi minimum elemana sahiptir.

$$\begin{aligned}\overline{D} &= \{u_0, u_1, u_2\} \\ D &= \{v_0, v_1, v_2\} \\ |D| &= |V(GP(3, 1))| - |\overline{D}| \\ |D| &= 2 \cdot 3 - 3 \\ \gamma_{sp}(GP(3, 1)) &= 3\end{aligned}$$

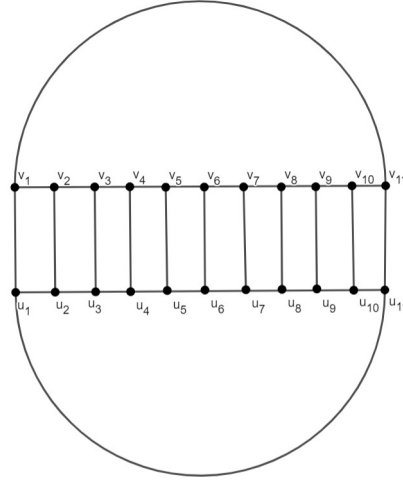
bulunur.

Teorem 4.1.2. $n \geq 3$ ve $k = 1$ için $GP(n, 1)$ genelleştirilmiş Petersen çizge ailesinin süper baskınlık sayısı;

$$\gamma_{sp}(GP(n, 1)) = n$$

bulunur.

İspat:



Şekil 4.2. $GP(11, 1)$ 11-prizma çizgesi

$GP(n, 1) \cong C_n \times P_2$ olduğundan bu çizgenin içerdiği iki çevre çizgenin tepeleri

$\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ ve $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ şeklinde etiketlenmiş olsun.

$$\overline{D} = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$$

$$D = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

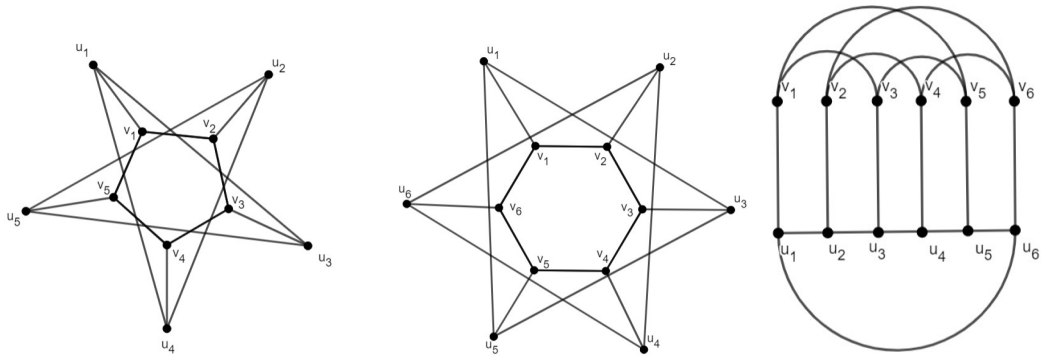
$$|D| = |V(GP(n, 1))| - |\overline{D}|$$

$$|D| = 2n - n$$

$$\gamma_{sp}(GP(n, 1)) = n$$

olarak bulunur. ■

Örnek 4.1.3. Aşağıdaki örnekte $GP(6, 2)$ genelleştirilmiş petersen çizgesi verilmiştir.



Şekil 4.3. $GP(5, 2)$ çizgesi ve $GP(6, 2)$ çizgesi

$GP(6, 2)$ incelendiğinde $\overline{D}$ için $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ tepelerini seçtiğimizde ka-

lan tepeler $D = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ kümesini oluşturur.

$$\begin{aligned}
\overline{D} &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \\
D &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\} \\
|D| &= |V(GP(6, 2))|/|\overline{D}| \\
|D| &= 2.6 - 6 \\
\gamma_{sp}(GP(6, 2)) &= 6
\end{aligned}$$

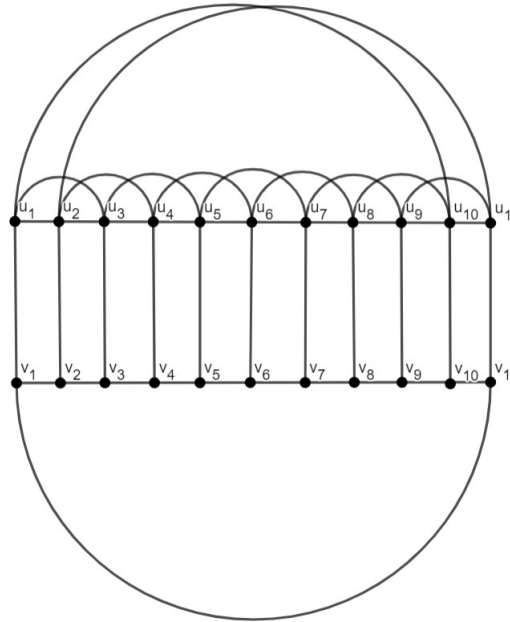
bulunur.

Teorem 4.1.4. $n \geq 5$ ve $k = 2$ için $GP(n, 2)$ genelleştirilmiş Petersen çizge ailesinin süper baskınlık sayısı ;

$$\gamma_{sp}(GP(n, 2)) = n$$

olarak bulunur.

İspat:



Şekil 4.4. $GP(11, 2)$ çizgesi

i. n çift ise:

$GP(n, 2)$ çizgesi üç tane çevre çizgeden oluşur. Dış çevre çizgelerin tepelerini $\{u_1, u_3, u_5, \dots, u_{n-1}\}$ ve $\{u_2, u_4, u_6, \dots, u_n\}$ olacak şekilde tekler ve çiftler olarak ayrı isimlendirilmiş; iç çevre çizgenin tepelerini de $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ şeklinde etiketlenmiş olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{D} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots, \dots, u_{n-1}, u_n\} \\
D &= \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\} \\
|\overline{D}| &= n \\
|D| &= |V(M(W_n))|/|\overline{D}| \\
&= 2n - n \\
\gamma_{sp}(GP(n, 2)) &= n
\end{aligned}$$

ii. n tek ise:

$GP(n, 2)$ çizgesi iki tane çevre çizgiden oluşur. Dış çevre çizgelerin tepelerini $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_{n-1}, u_n\}$ ve $\{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{n-1}\}$ olacak şekilde ; iç çevre çizgenin tepelerini de $\{v_1, v_2, v_3 \dots, v_{n-1}, v_n\}$ şeklinde etiketlenmiş olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{D} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots, \dots, u_{n-1}, u_n\} \\
D &= \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\} \\
|\overline{D}| &= n \\
|D| &= |V(M(W_n))|/|\overline{D}| \\
&= 2n - n \\
\gamma_{sp}(GP(n, 2)) &= n
\end{aligned}$$

i. ve **ii.**'den;

$$\gamma_{sp}(GP(n, 2)) = n$$

bulunur.

■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, süper baskınlık sayısı olarak adlandırılan yeni bir çizge parametresi ele alınmıştır. Bazı çizge sınıflarının dönüşüm çizgeleri incelenmiş ve bu çizgelerin süper baskınlık sayılarını veren genel formüller elde edilmiştir. Gelecek çalışmalarda, bu parametrenin farklı çizge türlerine, özellikle de çeşitli çizgelerin dönüşüm çizgelerine uygulanması planlanmaktadır. Bir çizgenin dönüşümü, orijinal yapının kaybolmasına ve yeni bir çizge yapısının oluşmasına neden olmaktadır. Eğer dönüştürülmüş çizge üzerinden orijinal çizgenin yeniden elde edilmesi mümkün olursa, bu süreç; orijinal çizgenin yapısal özelliklerinin, dönüşüm çizgesi aracılığıyla incelenmesine olanak sağlayabilir. Süper baskınlık sayısı üzerine yapılan çalışmaların sınırlı sayıda olması nedeniyle, bu yeni parametrenin dönüşüm çizgelerine uygulanmasının ve genel sonuçların elde edilmesinin, literatüre önemli bir katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Yapılan çalışmalar sonucunda aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

1. Orta çizgeler, süper baskınlık parametresi açısından özgün ve farklı davranışlar sergilemekte olup, klasik baskınlık kavramıyla kıyaslandığında daha sıkı sınırlar gerektiren özel durumlar oluşturmaktadır.
2. Yüksek bağlantılı çizgeler ve düzenli çizgelerin orta çizgelerinde süper baskınlık sayısı daha hızlı artarken, çevre ve yol çizgelerinde bu artış daha kontrollü olmaktadır.
3. Literatürde açık olan orta çizgeler üzerinde süper baskınlık sayısına yönelik birçok sınıra ulaşılmış ve bu sınırlar teorik olarak gerekçelendirilmiştir.
4. Özellikle Petersen çizgeleri ve genelleştirilmiş Petersen çizgeleri gibi özel yapılar üzerinde yapılan analizler, bu çizgelerin süper baskınlık parametresi açısından derinlemesine incelenmesi gerektiğini göstermiştir.

Bu tez kapsamında, genelleştirilmiş Petersen çizgelerinin $GP(n, k)$ biçimindeki özel alt sınıfları olan $GP(n, 1)$ ve $GP(n, 2)$ çizgeleri üzerine süper baskınlık sayısı γ_{sp} araştırılmıştır.

5.1. Gelecek Çalışmalar

Bu tezde elde edilen sonuçlar, genelleştirilmiş Petersen çizgelerin belirli parametreler ($k = 1$ ve $k = 2$) için süper baskınlık sayılarına odaklanmıştır. Ancak bu sınırlı analiz, ileride yapılacak daha kapsamlı çalışmalara temel oluşturabilecek birçok yeni araştırma yönü barındırmaktadır. Aşağıda, bu çalışma bağlamında önerilebilecek bazı potansiyel araştırma alanları sunulmuştur:

- **Farklı k Değerleri için İnceleme:** Bu çalışmada $k = 1$ ve $k = 2$ için süper baskınlık değerleri hesaplanmıştır. Ancak genel olarak $GP(n, k)$ ailesi $1 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ koşulunu sağladığı için, k parametresinin etkisini sistematik şekilde araştırmak, süper baskınlık sayısının k 'ya bağlı davranışı hakkında daha genel sonuçlar sağlayabilir.
- **Süper Baskınlık Kümelerinin Yapısal Özellikleri:** Belirli $GP(n, k)$ çizgelerinde süper baskınlık kümelerinin iç yapısı (örneğin tepe simetrisi, merkezden uzaklık dağılımları gibi) üzerine yapılacak çalışmalar, bu kümelerin sadece kardinalitesini değil, konumlarını da karakterize edebilir.
- **İlgili Parametreler ile Karşılaştırma:** Süper baskınlık sayısı ile klasik baskınlık, total baskınlık, bağımsız baskınlık gibi parametreler arasında ilişkilerin araştırılması, bu parametrelerin örtüşme ve ayrışma noktalarının belirlenmesine katkı sağlar.
- **Orta ve Çizgi Çizgelerde Uygulama:** $GP(n, k)$ graflarının orta çizgesi $M(GP(n, k))$ ya da çizgi çizgesi $L(GP(n, k))$ üzerinde süper baskınlık sayısının davranışı incelenerek, çizge dönüşümlerinin etkisi analiz edilebilir. Bu, özellikle ağ güvenliği ve iletim verimliliği gibi uygulamalı alanlarda değerli olabilir.
- **Algoritmik Yaklaşımlar:** Süper baskınlık sayısını bulan algoritmaların karmaşıklığı, özellikle büyük n değerleri için optimize edilerek incelenebilir. Ayrıca heuristik ya da yapay zekâ temelli yaklaşımlarla süper baskınlık kümeleri oluşturmak da önemli bir çalışma alanıdır.
- **Uygulamalı Modellerde Kullanımı:** Süper baskınlık kümesi kavramının kablosuz sensör ağları, sosyal ağ analizi ya da biyolojik ağlar gibi gerçek dünya sistemlerinde uygulanabilirliği, hem teorik hem de pratik katkılar sağlayacak şekilde değerlendirilebilir.

Bu öneriler doğrultusunda yapılacak gelecekteki çalışmalar, hem çizge teorisinin temel yapısına hem de uygulamalı matematik ve mühendislik alanlarına katkı sağlayabilir.

KAYNAKLAR

- [1] R. Diestel, *Graph Theory*, 5th ed., Springer, Berlin, 2017.
- [2] M. E. J. Newman, *Networks: An Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [3] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [4] M. E. J. Newman, *Networks*, 2nd ed., Oxford University Press, 2018.
- [5] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 184, Springer, New York, 2013.
- [6] E. Estrada, P. A. Knight, *A First Course in Network Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2015.
- [7] J. Leskovec, A. Rajaraman, J. D. Ullman, *Mining of Massive Datasets*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [8] T. G. Lewis, *Network Science: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2019.
- [9] D. J. Watts, *Six Degrees: The Science of a Connected Age*, W. W. Norton & Company, New York, 2004.
- [10] I. F. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramaniam, E. Cayirci, *Wireless sensor networks: a survey*, *Computer Networks*, **38**(4), (2002), 393–422.
- [11] B. Wang, *Coverage Problems in Sensor Networks: A Survey*, *ACM Computing Surveys*, **43**(4), (2011), Article 53, 53 pages.
- [12] D. Kempe, J. Kleinberg, and É. Tardos, *Maximizing the spread of influence through a social network*, In *Proceedings of the Ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD)*, (2003), 137–146.
- [13] D. Bertsimas and S. S. Patterson, *The Air Traffic Flow Management Problem with Enroute Capacities*, *Operations Research*, **46**(3), (1998), 406–422.
- [14] R. Guimerà, S. Mossa, A. Turtshi, and L. A. N. Amaral, *The worldwide air transportation network: Anomalous centrality, community structure, and cities' global roles*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **102**(22), (2005), 7794–7799.
- [15] H. Jeong, S. P. Mason, A.-L. Barabási, and Z. N. Oltvai, *Lethality and centrality in protein networks*, *Nature*, **411**(6833), (2001), 41–42.
- [16] A.-L. Barabási and Z. N. Oltvai, *Network biology: Understanding the cell's functional organization*, *Nature Reviews Genetics*, **5**(2), (2004), 101–113.
- [17] S. M. Amin and B. F. Wollenberg, *Toward a smart grid: Power delivery for the 21st century*, *IEEE Power and Energy Magazine*, **3**(5), (2005), 34–41.

- [18] X. Bai, Y. Liu, and Z. Wang, *Power system observability with minimal phasor measurement units: A domination approach*, IEEE Trans. on Smart Grid, **7**(4), (2016), pp. XYZ–ABC.
- [19] M. E. J. Newman, *The structure and function of complex networks*, SIAM Review, **45**(2), (2003), 167–256.
- [20] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi, *Domination in graphs*, Networks, **10**(3), (1977), 211–219.
- [21] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, *Domination in graphs: Advanced topics*, Marcel Dekker, New York, 1990.
- [22] O. Ore. *Theory of Graphs*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 38, 1962.
- [23] A. Klobučar, "Domination number of paths and cycles", *Mathematica Pannonica*, vol. 9, no. 1, pp. 83–88, 1998.
- [24] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, San Francisco, 1979.
- [25] P. Mahalingam, *Domination Parameters in Graph Theory*, Ph.D. Thesis, Bharathidasan University, India, 2005.
- [26] W. Goddard and M. A. Henning, "Domination in planar graphs with minimum degree two", *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, vol. 56, pp. 63–86, 2006.
- [27] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi, "Total domination in graphs", *Networks*, vol. 10, no. 3, pp. 211–219, 1975.
- [28] V.G. Vizing. Some unsolved problems in graph theory. *Russian Mathematical Surveys*, **23**(6), 125–141, 1968.
- [29] Y. Caro and Y. Roditty, *On the vertex-independence number and star decomposition of graphs*, Ars Combinatoria, **29B**, (1990), 23–28.
- [30] M. A. Henning and A. Yeo, *Total Domination in Graphs*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2013.
- [31] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*, Networks, **10**(3), (1980), 211–219.
- [32] M. A. Henning, *Recent results on total domination in graphs: A survey*, Discrete Mathematics, **309**(1), (2009), 32–63.
- [33] W. Goddard and M. A. Henning, *Independent domination in graphs: A survey and recent results*, Discrete Mathematics, **313**(7), (2002), 839–854.
- [34] R. B. Allan and R. Laskar, *On domination and independent domination numbers of a graph*, Discrete Mathematics, **23**(2), (1978), 73–76.
- [35] E. Sampathkumar and H. B. Walikar, *The connected domination number of a graph*, Journal of Mathematical and Physical Sciences, **13**(6), (1979), 607–613.

- [36] P. Duchet and H. Meyniel, *On connected dominating sets and König numbers*, Discrete Mathematics, **86**(1–3), (1982), 33–36.
- [37] J. F. Fink and M. S. Jacobson, *n-domination in graphs*, Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science (Kalamazoo, MI, 1984), Wiley, New York, (1985), 283–300.
- [38] M. Lemańska, V. Swaminathan, Y. B. Venkatakrishnan, and R. Zuazua, *Super dominating sets in graphs*, Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, **85**(3), (2015), 353–357.
- [39] N. Ghanbari, *Some results on the super domination number of a graph*, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, **16**(04) (2024).
- [40] B. Krishnakumari, Y.B. Venkatakrishnan, M. Krzywkowski. Super dominating sets in graphs. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, **86**(2), 247–251, 2016.
- [41] M. A. Henning and A. J. Marcon, *On super domination parameters under graph operations*, (çalışmanın dergi ya da konferans adı), 2018.
- [42] D. (Dorota) and arkadaşları, *Algorithmic approaches to super domination in trees and bipartite graphs*, (çalışmanın yayımlandığı dergi ya da konferans adı), 2017.
- [43] W. Zhuang, *Super Domination in Trees, Graphs and Combinatorics*, 38(1) (2022).
- [44] R. Kumar and R. Vijayaragavan, *Super domination number in regular and strong product graphs*, International Journal of Mathematics Trends and Technology, **67**(8), 116–122, 2021.
- [45] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, *Connected domination in graphs*, in: B. Bollobás (ed.), Graph Theory and Combinatorics, Academic Press, London, 1984.
- [46] B. A. Attea and E. A. Khalil, *Coverage in wireless sensor networks: Optimization using super domination sets*, (dergi ya da konferans adı), 2016.
- [47] A. Kumar and B. Vijayaragavan, *Super domination-based risk management in control systems*, (dergi veya konferans adı), 2021.
- [48] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [49] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*, 4th ed., revised by P. Zhang, CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
- [50] F. Kazemnejad, B. Pahlavsay, E. Palezzato, M. Torielli, *Total domination number of middle graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, **40**(3), (2020), 913–930.
- [51] B. Basavanagoud, I. Gutman, V.R. Desai, *Zagreb indices of generalized transformation graphs and their complements*, Kragujevac Journal of Science 37(37) (2015), 99-112.
- [52] H. S. M. Coxeter, *Self-dual configurations and regular graphs*, Bull. Am. Math. Soc. 56 (1950), 413– 455.
- [53] M. E. Watkins, *A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs*, J. Comb. Theory 6 (1969), 152–164.